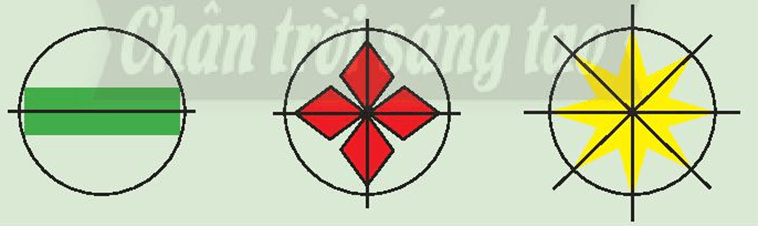
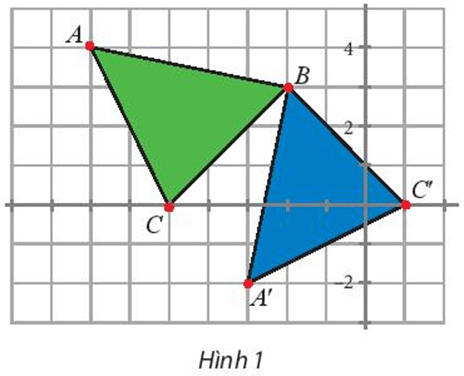
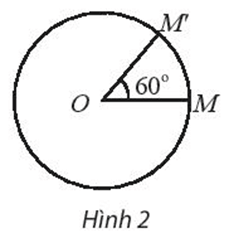
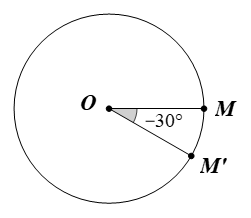
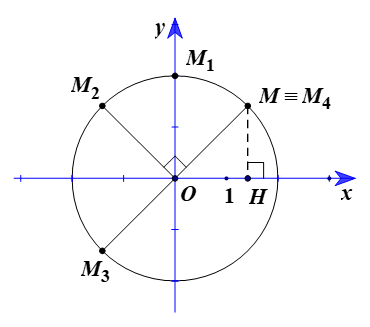
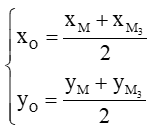
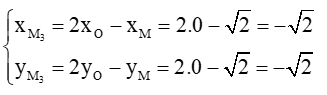
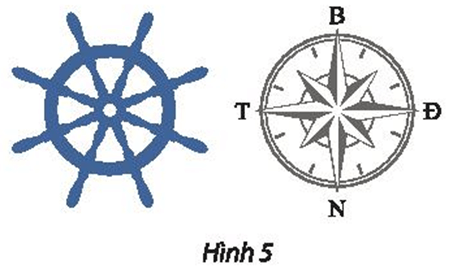
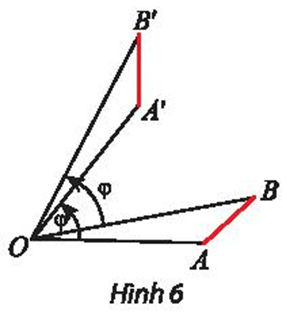
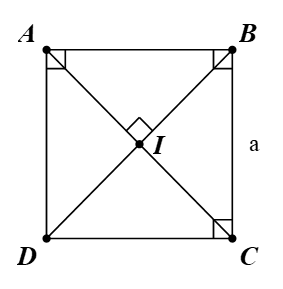
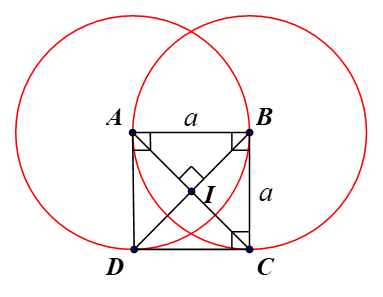
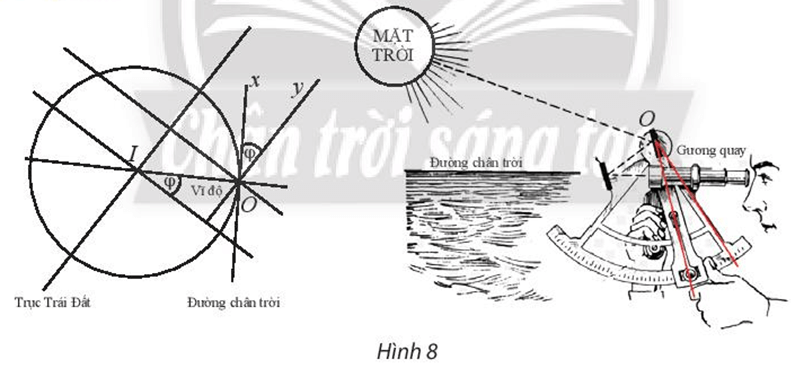
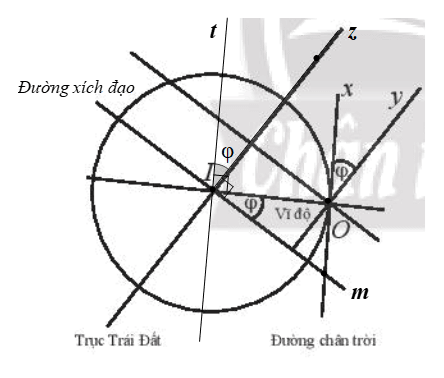
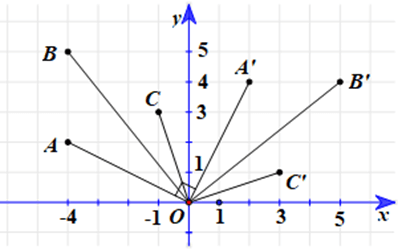
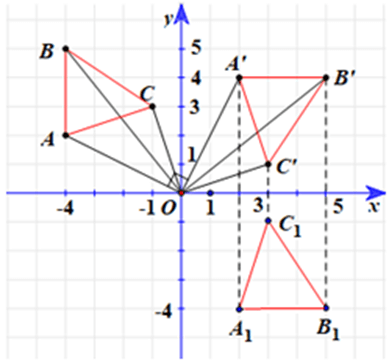
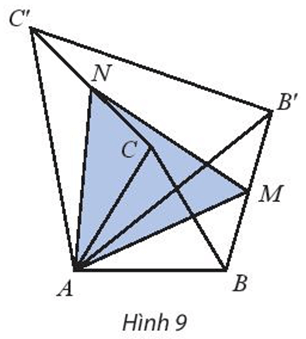
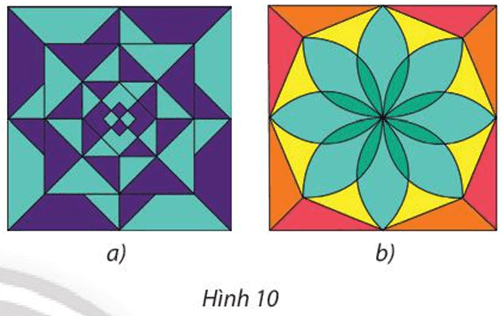
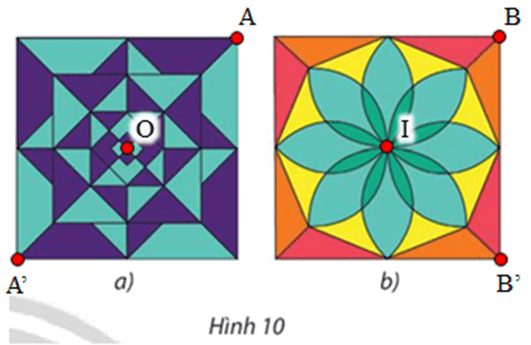
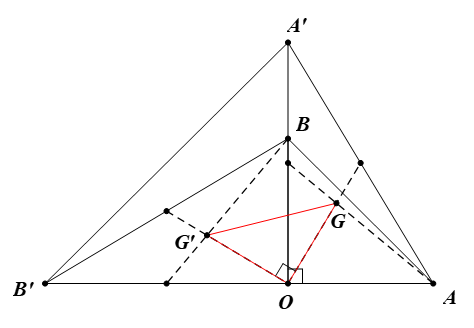
# Bài 5: Phép quay

**Giải Chuyên đề Toán 11 Bài 5: Phép quay**  
**Khởi động trang 25 Chuyên đề Toán 11**: Vẽ mỗi hình sau ra một tờ giấy, cắt rời mỗi hình theo hình tròn. Tìm một điểm O trên mỗi hình. Sau đó, ghim hình đã cắt được xuống mặt bàn tại điểm O, thử xoay hình một góc φ nào đó. Có nhận xét gì về kích thước của hình trước khi xoay và sau khi xoay?  
  
**Lời giải:**  
Giả sử chọn điểm O trên mỗi hình như hình vẽ dưới đây.  
  
Trong cả 3 hình đã cho, kích thước của hình trước khi xoay và sau khi xoay không thay đổi.  
**1. Định nghĩa**  
**Khám phá 1 trang 25 Chuyên đề Toán 11**:  
a) Tìm phép biến hình biến ∆BAC thành ∆BA’C’ (Hình 1).  
  
b) Trong mặt phẳng, cho điểm O cố định (Hình 2).  
Gọi f là quy tắc ứng với mỗi điểm M trùng O cho ta điểm O và ứng với điểm M khác O cho ta một điểm M’ xác định như sau:  
– Dùng compa vẽ đường tròn (C) tâm O bán kính OM.  
– Trên (C) chọn điểm M’ sao cho góc lượng giác (OM, OM’) bằng 60°.  
  
Quy tắc f có phải là một phép biến hình không?  
Hãy vẽ điểm M’ theo quy tắc trên nếu thay góc 60° bởi góc –30°.  
**Lời giải:**  
a) Để tìm phép biến hình biến ∆BAC thành ∆BA’C’, ta tìm phép biến hình biến điểm B thành chính nó, biến điểm A thành điểm A’, biến điểm C thành điểm C’.  
Với A(–7; 4), B(–2; 3), C(–5; 0), A’(–3; –2), C’(1; 0), ta có:  
−−→BA=(−5;1),−−→BA′=(−1;−5),−−→AA′=(4;−6)BA→=−5;1,BA^(')→=−1;−5,AA^(')→=4;−6.  
Suy ra BA=BA′=√26BA=BA^(')=√(26) và AA′=2√13AA^(')=2√(13).  
Khi đó cosˆABA′=BA2+BA′2−AA′22.BA.BA′=26+26−(2√13)22.√26.√26=0cosABA^(')^=(BA^(2)+BA^(')^(2)−AA^(')^(2))/(2.BA.BA^('))=(26+26−2√(13)^(2))/(2.√(26).√(26))=0.  
Vì vậy (BA,BA′)=ˆABA′=90°BA,BA^(')=ABA^(')^=90°.  
Suy ra phép biến hình biến đoạn thẳng BA thành đoạn thẳng BA’ là phép biến hình biến điểm B thành điểm B, biến điểm A thành điểm A’ sao cho BA’ = BA và góc lượng giác (BA, BA’) = 90° (1)  
Thực hiện tương tự, ta được BC=BC′=3√2BC=BC^(')=3√(2) và (BC,BC′)=90°BC,BC^(')=90°.  
Suy ra phép biến hình biến đoạn thẳng BC thành đoạn thẳng BC’ là phép biến hình biến điểm B thành điểm B, biến điểm C thành điểm C’ sao cho BC’ = BC và góc lượng giác (BC, BC’) = 90° (2)  
Từ (1), (2), ta thu được phép biến hình biến ∆BAC thành ∆BA’C’ là phép biến hình biến điểm B thành chính nó, biến điểm A thành điểm A’ sao cho BA’ = BA và góc lượng giác (BA, BA’) = 90° và biến điểm C thành điểm C’ sao cho BC’ = BC và góc lượng giác (BC, BC’) = 90°.  
b) Đặt f(M) = M’. Trong đó, M’ là điểm nằm trên (C) sao cho góc lượng giác (OM, OM’) bằng 60°.  
Ta thấy f là một quy tắc sao cho ứng với mỗi điểm M đều xác định duy nhất một điểm M’.  
Vậy f là một phép biến hình.  
Cách vẽ điểm M’ theo quy tắc trên với góc lượng giác (OM, OM’) bằng –30°:  
– Dùng compa vẽ đường tròn (C) tâm O bán kính OM.  
– Trên (C) chọn điểm M’ sao cho góc lượng giác (OM, OM’) bằng –30°.  
Ta có hình vẽ sau:  
  
**Thực hành 1 trang 26 Chuyên đề Toán 11**: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tọa độ của các điểm là ảnh của điểm M(√2;√2)M√(2);√(2) lần lượt qua các phép quay Q(O, 45°), Q(O, 90°), Q(O, 180°), Q(O, 360°).  
**Lời giải:**  
  
Ta có −−→OM=(√2;√2)OM→=√(2);√(2). Suy ra OM = 2.  
Vẽ đường tròn (C) tâm O bán kính OM.  
⦁ Ảnh của điểm M(√2;√2)M√(2);√(2) qua phép quay Q(O, 45°):  
Ta có Q(O, 45°) biến điểm M khác O thành điểm M1 sao cho OM1 = OM = 2 và (OM, OM1) = 45° nên ˆMOM1=45°MOM\_(1)^=45°.  
Kẻ MH ⊥ Ox tại H.  
Tam giác OMH vuông tại H: cosˆMOH=OHOM=√22cosMOH^=(OH)/(OM)=(√(2))/(2).  
Suy ra ˆMOH=45°MOH^=45°.  
Ta có ˆHOM1=ˆHOM+ˆMOM1=45°+45°=90°HOM\_(1)^=HOM^+MOM\_(1)^=45°+45°=90°.  
Suy ra M1 ∈ Oy nên xM1=0x\_(M\_(1))=0.  
Mà OM1 = 2 (chứng minh trên) nên .  
Vậy tọa độ M1(0; 2).  
⦁ Ảnh của điểm M(√2;√2)M√(2);√(2) qua phép quay Q(O, 90°):  
Ta có Q(O, 90°) biến điểm M khác O thành điểm M2 sao cho OM2 = OM = 2 và (OM, OM2) = 90° nên ˆMOM2=90°MOM\_(2)^=90°.  
Suy ra tam giác MOM2 vuông cân tại O.  
Ta có ˆM1OM2=ˆMOM2−ˆMOM1=90°−45°=45°M\_(1)OM\_(2)^=MOM\_(2)^−MOM\_(1)^=90°−45°=45°.  
Suy ra ˆMOM1=ˆM1OM2=45°MOM\_(1)^=M\_(1)OM\_(2)^=45°.  
Khi đó tam giác MOM2 có OM1 là đường phân giác.  
Vì vậy OM1 cũng là đường trung trực của tam giác MOM2 hay Oy là đường trung trực của tam giác MOM2.  
Suy ra M2 là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục Oy.  
Do đó hai điểm M(√2;√2)M√(2);√(2) và M2 có cùng tung độ và có hoành độ đối nhau.  
Vậy tọa độ M2(−√2;√2)M\_(2)−√(2);√(2).  
⦁ Ảnh của điểm M(√2;√2)M√(2);√(2) qua phép quay Q(O, 180°):  
Ta có Q(O, 180°) biến điểm M khác O thành điểm M3 sao cho OM3 = OM = 2 và (OM, OM3) = 180° nên ˆMOM3=180°MOM\_(3)^=180°.  
Suy ra O là trung điểm của MM3.  
Khi đó   
Vì vậy   
Vậy tọa độ M3(−√2;−√2)M\_(3)−√(2);−√(2).  
⦁ Ảnh của điểm M(√2;√2)M√(2);√(2) qua phép quay Q(O, 360°):  
Ta có Q(O, 360°) biến điểm M khác O thành điểm M4 sao cho OM4 = OM = 2 và (OM, OM4) = 360° nên ˆMOM4=360°MOM\_(4)^=360°.  
Tức là, M4 ≡ M.  
Vậy tọa độ M4(√2;√2)M\_(4)√(2);√(2).  
**Vận dụng 1 trang 27 Chuyên đề Toán 11**: Một con tàu đang di chuyển theo hướng bắc. Người lái tàu phải thực hiện phép quay nào trên bánh lái để con tàu:  
a) rẽ sang hướng tây?  
b) rẽ sang hướng đông?  
  
**Lời giải:**  
a) Để con tàu rẽ sang hướng tây, người lái tàu phải thực hiện phép quay với tâm là tâm của bánh lái và góc quay φ = 90°.  
b) Để con tàu rẽ sang hướng đông, người lái tàu phải thực hiện phép quay với tâm là tâm của bánh lái và góc quay φ = –90°.  
**2. Tính chất**  
**Khám phá 2 trang 27 Chuyên đề Toán 11**: Cho phép quay Q(O; φ) và hai điểm tùy ý A, B (O, A, B không thẳng hàng) như Hình 6. Vẽ A’, B’ là ảnh của A, B qua phép quay. Hai tam giác OAB và OA’B’ có bằng nhau không?  
  
**Lời giải:**  
Ta có Q(O, φ) biến điểm A khác O thành điểm A’ sao cho OA = OA’ và (OA, OA’) = φ nên ˆAOA′=φAOA^(')^=φ.  
Tương tự, ta có Q(O, φ) biến điểm B khác O thành điểm B’ sao cho OB = OB’ và (OB, OB’) = φ nên ˆBOB′=φBOB^(')^=φ.  
Ta có ˆAOA′=ˆBOB′(=φ)AOA^(')^=BOB^(')^=φ.  
Suy ra ˆAOB+ˆBOA′=ˆBOA′+ˆA′OB′AOB^+BOA^(')^=BOA^(')^+A^(')OB^(')^.  
Do đó ˆAOB=ˆA′OB′AOB^=A^(')OB^(')^.  
Xét ∆OAB và ∆OA’B’, có:  
OA = OA’ (chứng minh trên);  
OB = OB’ (chứng minh trên);  
ˆAOB=ˆA′OB′AOB^=A^(')OB^(')^ (chứng minh trên).  
Vậy ∆OAB = ∆OA’B’ (c.g.c).  
**Thực hành 2 trang 28 Chuyên đề Toán 11**: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a và có tâm I, tìm ảnh qua phép quay Q(I, 90°) của các hình sau:  
a) Tam giác IAB;  
b) Đường thẳng BC;  
c) Đường tròn (B, a).  
**Lời giải:**  
  
a) Hình vuông ABCD có tâm I.  
Suy ra AC ⊥ BD tại I và IA = IB = IC = ID.  
Ta có phép quay Q(I, 90°) biến:  
⦁ Điểm I thành điểm I.  
⦁ Điểm A thành điểm D;  
⦁ Điểm B thành điểm A;  
Vậy ảnh của tam giác IAB qua phép quay Q(I, 90°) là tam giác IDA.  
b) Ta có phép quay Q(I, 90°) biến:  
⦁ Điểm B thành điểm A;  
⦁ Điểm C thành điểm B.  
Vậy ảnh của đường thẳng BC qua phép quay Q(I, 90°) là đường thẳng AB.  
c) Ta có phép quay Q(I, 90°) biến điểm B thành điểm A.  
  
Vậy ảnh của đường tròn (B, a) qua phép quay Q(I, 90°) là đường tròn (A, a).  
**Vận dụng 2 trang 28 Chuyên đề Toán 11**: Kính lục phân là một dụng cụ quang học sử dụng gương quay để thực hiện phép quay Q(O, φ) biến tia Ox (song song với đường chân trời) thành tia Oy (song song với trục Trái Đất), nhờ đó đo được góc φ giữa trục của Trái Đất và đường chân trời tại vị trí của người đo. Hãy giải thích tại sao góc φ của phép quay này lại cho ta vĩ độ tại điểm sử dụng kính.  
  
**Lời giải:**  
  
Gọi Iz là tia trùng với trục Trái Đất và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ IO chứa tia Ox, Oy.  
Kẻ tia It song song với tia Ox.  
Mà tia Oy song song với trục Trái Đất (giả thiết).  
Do đó ˆtIz=ˆxOy=φtIz^=xOy^=φ.  
Ta có tia Ox tiếp xúc với Trái Đất tại O.  
Suy ra Ox là tiếp tuyến của đường tròn (I, IO).  
Do đó Ox ⊥ IO.  
Mà Ox // Ot nên Ot ⊥ IO.  
Khi đó ˆtIz+ˆzIO=90°tIz^+zIO^=90° (1)  
Gọi Im là tia trùng với đường xích đạo và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ Iz chứa đoạn thẳng IO.  
Vì trục Trái Đất vuông góc với đường xích đạo nên ta có Iz ⊥ Im.  
Suy ra ˆmIO+ˆzIO=90°mIO^+zIO^=90° (2)  
Từ (1), (2), ta có ˆmIO=ˆtIz=φmIO^=tIz^=φ.  
Vậy góc φ của phép quay này lại cho ta vĩ độ tại điểm sử dụng kính.  
**Bài tập**  
**Bài 1 trang 28 Chuyên đề Toán 11**: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A(–4; 2), B(–4; 5) và C(–1; 3).  
a) Chứng minh các điểm A’(2; 4), B’(5; 4) và C’(3; 1) theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép quay tâm O với góc quay –90°.  
b) Gọi ∆A1B1C1 là ảnh của ∆ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện phép quay tâm O với góc quay –90° và phép đối xứng qua Ox. Tìm tọa độ các đỉnh của ∆A1B1C1.  
**Lời giải:**  
a)  
  
Với A(–4; 2) và A’(2; 4), ta có −−→OA=(−4;2),−−→OA′=(2;4),−−→AA′=(6;2)OA→=−4;2,OA^(')→=2;4,AA^(')→=6;2.  
Do đó OA=OA′=2√5OA=OA^(')=2√(5) và AA′=2√10AA^(')=2√(10).  
Suy ra cosˆAOA′=OA2+OA′2−AA′22.OA.OA′=(2√5)2+(2√5)2−(2√10)22.2√5.2√5=0cosAOA^(')^=(OA^(2)+OA^(')^(2)−AA^(')^(2))/(2.OA.OA^('))=(2√(5)^(2)+2√(5)^(2)−2√(10)^(2))/(2.2√(5).2√(5))=0.  
Do đó ˆAOA′=90°AOA^(')^=90°.  
Mà khi quay đoạn OA (với tâm O) theo hướng cùng chiều kim đồng hồ một góc 90° thì ta được đoạn OA’. Tức là, phép quay có góc quay lượng giác theo chiều âm một góc 90°.  
Vì vậy góc lượng giác (OA, OA’) = –90°.  
Vậy A’ là ảnh của A qua phép quay tâm O với góc quay –90°.  
Chứng minh tương tự, ta thu được B’, C’ theo thứ tự là ảnh của B, C qua phép quay tâm O với góc quay –90°.  
b) Từ câu a, ta có phép quay tâm O, góc quay –90° biến ∆ABC thành ∆A’B’C’.  
Ta có: ∆A1B1C1 là ảnh của ∆A’B’C’ qua phép đối xứng trục Ox nên:  
• A1 = ĐOx(A’), do đó hai điểm A1­ và A’(2; 4) có cùng hoành độ và có tung độ đối nhau, suy ra A1(2; –4).  
• B1 = ĐOx(B’), do đó hai điểm B1­ và B’(5; 4) có cùng hoành độ và có tung độ đối nhau, suy ra B1(5; –4).  
• C1 = ĐOx(C’), do đó hai điểm C1­ và C’(3; 1) có cùng hoành độ và có tung độ đối nhau, suy ra C1(3; –1).  
Vậy tọa độ các đỉnh của ∆A1B1C1 thỏa mãn yêu cầu bài toán là A1(2; –4), B1(5; –4), C1(3; –1).  
  
**Bài 2 trang 29 Chuyên đề Toán 11**: Cho hai tam giác đều ABC và AB’C’ như Hình 9. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB’ và CC’. Chứng minh ∆AMN đều.  
  
**Lời giải:**  
Do DABC là tam giác đều nên AB = AC và ˆBAC=60°BAC^=60°  
Do DAB’C’ là tam giác đều nên AB’ = AC’ và ˆB′AC′=60°B^(')AC^(')^=60°  
Ta có phép quay tâm A, góc quay 60° biến:  
⦁ Điểm B thành điểm C;  
⦁ Điểm B’ thành điểm C’.  
Do đó ảnh của đoạn thẳng BB’ qua phép quay tâm A, góc quay 60° là đoạn thẳng CC’.  
Mà M, N lần lượt là trung điểm của BB’, CC’ (giả thiết).  
Do đó phép quay tâm A, góc quay 60° biến điểm M thành điểm N.  
Suy ra AM = AN và ˆMAN=(AM,AN)=60°MAN^=AM,AN=60°  
DAMN có AM = AN và ˆMAN=60°MAN^=60° nên là tam giác đều.  
Vậy ∆AMN đều.  
**Bài 3 trang 29 Chuyên đề Toán 11**: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, H, K, L, I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, KF, HC, HL. Chứng minh hình thang AEJK và hình thang FLIC bằng nhau.  
**Lời giải:**  
Nội dung đang được cập nhật  
**Bài 4 trang 29 Chuyên đề Toán 11**: Chỉ ra phép quay có thể biến mỗi hình trong Hình 10 thành chính nó.  
  
**Lời giải:**  
  
⦁ Hình 10a:  
Hình vẽ có dạng hình vuông, gọi O là tâm hình vuông đó và A là 1 đỉnh của hình vuông.  
Phép quay tâm O, góc quay 180° biến điểm A thành điểm A’.  
Tương tự, ta chọn các điểm khác bất kì trên Hình 10a.  
Khi đó qua phép quay tâm O, góc quay 180° ta cũng xác định được ảnh của các điểm đó trên Hình 10a ban đầu.  
Vậy phép quay biến Hình 10a thành chính nó là phép quay tâm O, góc quay 180°.  
*Ngoài ra, phép quay tâm O, góc quay –180° cũng biến Hình 10a thành chính nó.*  
⦁ Hình 10b:  
Hình vẽ có dạng hình vuông, gọi I là tâm hình vuông đó và B là 1 đỉnh của hình vuông.  
Phép quay tâm I, góc quay 90° biến điểm B thành điểm B’.  
Tương tự, ta chọn các điểm khác bất kì trên hình 10b.  
Khi đó qua phép quay tâm I, góc quay 90° ta cũng xác định được ảnh của các điểm đó trên Hình 10b ban đầu.  
Vậy phép quay biến Hình 10b thành chính nó là phép quay tâm I, góc quay 90°.  
*Chú ý: Có nhiều phép quay biến Hình 10a thành chính nó, chẳng hạn ngoài phép quay ở trên, ta có thể kể đến phép quay tâm I, góc quay 180° hoặc phép quay tâm I, góc quay –90°, …*  
**Bài 5 trang 29 Chuyên đề Toán 11**: Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA’B’ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn AB’ và nằm ngoài đoạn A’B. Gọi G và G’ lần lượt là trọng tâm của ∆OAA’ và ∆OBB’. Chứng minh rằng ∆OGG’ là tam giác vuông cân.  
**Lời giải:**  
  
Do DOAB là tam giác vuông cân nên OA = OB và ˆAOB=90°AOB^=90°.  
Do DOA’B’ là tam giác vuông cân nên OA’ = OB’ và ˆA′OB′=90°A^(')OB^(')^=90°.  
Phép quay tâm O, góc quay 90° biến:  
⦁ Điểm O thành điểm O;  
⦁ Điểm A thành điểm B;  
⦁ Điểm A’ thành điểm B’.  
Do đó ảnh của ∆OAA’ qua phép quay tâm O, góc quay 90° là ∆OBB’.  
Mà G, G’ lần lượt là trọng tâm của ∆OAA’ và ∆OBB’.  
Vì vậy ảnh của G qua phép quay tâm O, góc quay 90° là G’.  
Suy ra OG = OG’ và ˆGOG′=(OG,OG′)=90°GOG^(')^=OG,OG^(')=90°.  
DOGG’ có OG = OG’ và ˆGOG′=90°GOG^(')^=90° nên là tam giác vuông cân tại O.  
Vậy ∆OGG’ vuông cân tại O.  
**Xem thêm lời giải bài tập Chuyên đề Toán lớp 11 Chân trời sáng tạo hay, chi tiết khác:**  
Bài 3: Phép đối xứng trục  
Bài 4: Phép đối xứng tâm  
Bài 6: Phép vị tự  
Bài 7: Phép đồng dạng  
Bài tập cuối chuyên đề 1