# Bài 1: Nguyên hàm

**Giải Toán 12 Bài 1: Nguyên hàm**  
**Câu hỏi khởi động trang 3 Toán 12 Tập 2**: Một hòn đá rơi từ mỏm đá có độ cao 150 m so với mặt đất theo phương thẳng đứng. Biết tốc độ rơi của hòn đá (tính theo đơn vị m/s) tại thời điểm t (tính theo giây) được cho bởi công thức v(t) = 9,8t.  
Quãng đường rơi được S của hòn đá tại thời điểm t được cho bởi công thức nào? Sau bao nhiêu giây thì hòn đá chạm đến mặt đất?  
**Lời giải:**  
*Sau bài học này, ta giải quyết được bài toán trên như sau:*  
Gọi S = S(t) là quãng đường rơi được của hòn đá tại thời điểm t (S(t) tính theo m, t tính theo giây).  
Suy ra S*'*(t) = v(t), do đó S(t) là một nguyên hàm của v(t).  
Ta có ∫v(t)dt=∫9,8tdt=4,9t2+C∫vtdt=∫9,8tdt=4,9t^(2)+C. Suy ra S(t) = 4,9t2 + C.  
Mà hòn đá rơi từ mỏm đá có độ cao 150 m so với mặt đất theo phương thẳng đứng tức là tại thời điểm t = 0 thì S = 0 hay S(0) = 0, suy ra C = 0.  
Vậy công thức tính quãng đường rơi được S(t) của hòn đá tại thời điểm t là:  
S(t) = 4,9t2.  
Khi hòn đá chạm đất thì S(t) = 150. Ta có 4,9t2 = 150. Suy ra t=±10√157t=±(10√(15))/(7) .  
Mà t > 0 nên t=10√157t=(10√(15))/(7) .  
Vậy sau t=10√157≈5,53t=(10√(15))/(7)≈5,53 giây thì hòn đá chạm đến mặt đất.  
  
**Hoạt động 1 trang 3 Toán 12 Tập 2**: Cho hàm số F(x) = x3, x ∈ (– ∞; + ∞). Tính F*'*(x).  
**Lời giải:**  
Ta có F*'*(x) = (x3)*'* = 3x2.  
**Luyện tập 1 trang 4 Toán 12 Tập 2**: Hàm số F(x) = cot x là nguyên hàm của hàm số nào? Vì sao?  
**Lời giải:**  
Hàm số F(x) = cot x là nguyên hàm của hàm số f(x) = −1sin2x−(1)/(sin^(2)x) vì (cot x)*'* = −1sin2x−(1)/(sin^(2)x) với mọi x ∈ ℝ \ {kπ| k ∈ ℤ}.  
  
**Hoạt động 2 trang 4 Toán 12 Tập 2**: Cho hàm số F(x) = x3 – 1, x ∈ ℝ và G(x) = x3 + 5, x ∈ ℝ.  
a) Cả hai hàm số F(x) và G(x) có phải là nguyên hàm của hàm số f(x) = 3x2 trên ℝ hay không?  
b) Hiệu F(x) – G(x) có phải là một hằng số C (không phụ thuộc vào x) hay không?  
**Lời giải:**  
a) Ta có F*'*(x) = (x3 – 1)*'* = 3x2; G*'*(x) = (x3 + 5)*'* = 3x2.  
Do đó, cả hai hàm số F(x) và G(x) có phải là nguyên hàm của hàm số f(x) = 3x2 trên ℝ.  
b) Ta có F(x) – G(x) = (x3 – 1) – (x3 + 5) = – 6 là một hằng số C.   
  
**Luyện tập 2 trang 4 Toán 12 Tập 2**: Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) = cos x trên ℝ.  
**Lời giải:**  
Do (sin x)*'* = cos x nên sin x là một nguyên hàm của hàm số f(x) = cos x trên ℝ.  
Vậy mọi nguyên hàm của hàm số f(x) = cos x đều có dạng sin x + C, với C là một hằng số.  
**Luyện tập 3 trang 5 Toán 12 Tập 2**: Chứng tỏ rằng ∫kx2dx=k3x3+C(k≠0)∫kx^(2)dx=(k)/(3)x^(3)+C  k≠0  
**Lời giải:**  
Do (k3x3)′=3⋅k3x2=kx2(k)/(3)x^(3)^(')=3⋅(k)/(3)x^(2)=kx^(2) nên k3x3(k)/(3)x^(3) là một nguyên hàm của hàm số f(x) = kx2 trên ℝ.  
Vậy ∫kx2dx=k3x3+C(k≠0)∫kx^(2)dx=(k)/(3)x^(3)+C  k≠0  
  
**Hoạt động 3 trang 5 Toán 12 Tập 2**: Cho f(x) là hàm số liên tục trên K, k là hằng số thực khác 0.  
a) Giả sử F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K. Hỏi kF(x) có phải là nguyên hàm của hàm số kf(x) trên K hay không?  
b) Giả sử G(x) là một nguyên hàm của hàm số kf(x) trên K. Đặt G(x) = kH(x) trên K. Hỏi H(x) có phải là nguyên hàm của hàm số f(x) trên K hay không?  
c) Nêu nhận xét về ∫kf(x)dx∫kfxdx và k∫f(x)dxk∫fxdx .   
**Lời giải:**  
a) Vì F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nên F*'*(x) = f(x).  
Suy ra kF*'*(x) = kf(x). Vì k là hằng số thực khác 0 nên kF*'*(x) = (kF(x))*'*.  
Do đó, (kF(x))*'* = kf(x). Vậy kF(x) là một nguyên hàm của hàm số kf(x) trên K.  
b) Vì G(x) là một nguyên hàm của hàm số kf(x) trên K nên G*'*(x) = kf(x).  
Lại có G(x) = kH(x), lấy đạo hàm hai vế ta được G*'*(x) = kH*'*(x).  
Từ đó suy ra kH*'*(x) = kf(x), tức là H*'*(x) = f(x). Vậy H(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K.  
c) Từ câu a, ta có ∫kf(x)dx=kF(x)+C∫kfxdx= kFx+C . (1)  
Lại có ∫f(x)dx=F(x)+C1∫fxdx=Fx+C\_(1) , suy ra k∫f(x)dx=k(F(x)+C1)=kF(x)+kC1k∫fxdx=kFx+C\_(1)=kFx+kC\_(1) .  
Vì C1 tùy ý thuộc ℝ và k ≠ 0 nên C = kC1 tùy ý thuộc ℝ.  
Do đó, k∫f(x)dx=kF(x)+Ck∫fx dx=kFx+C . (2)  
Từ (1) và (2) suy ra ∫kf(x)dx=k∫f(x)dx∫kfxdx=k∫fxdx  
**Luyện tập 4 trang 6 Toán 12 Tập 2**: Chứng tỏ rằng ∫(n+1)xndx=xn+1+C∫n+1x^(n)dx=x^(n+1)+C với n là số nguyên dương.  
**Lời giải:**  
Do (xn + 1)*'* = (n + 1)xn nên xn + 1 là một nguyên hàm của hàm số f(x) = (n + 1)xn trên ℝ.  
Vậy ∫(n+1)xndx=xn+1+C∫n+1x^(n)dx=x^(n+1)+C  
  
**Hoạt động 4 trang 6 Toán 12 Tập 2**: Cho f(x), g(x) là hai hàm số liên tục trên K.  
a) Giả sử F(x), G(x) lần lượt là nguyên hàm của các hàm số f(x), g(x) trên K. Hỏi F(x) + G(x) có phải là nguyên hàm của hàm số f(x) + g(x) trên K hay không?  
b) Giả sử H(x), F(x) lần lượt là nguyên hàm của các hàm số f(x) + g(x), f(x) trên K. Đặt G(x) = H(x) – F(x) trên K. Hỏi G(x) có phải là nguyên hàm của hàm số g(x) trên K hay không?  
c) Nêu nhận xét về ∫[f(x)+g(x)]dx∫fx+gxdx và ∫f(x)dx+∫g(x)dx∫fxdx+∫gxdx  
**Lời giải:**  
a) Vì F(x), G(x) lần lượt là nguyên hàm của các hàm số f(x), g(x) trên K nên ta suy ra F*'*(x) = f(x), G*'*(x) = g(x).  
Do đó, F*'*(x) + G*'*(x) = f(x) + g(x).  
Mà F*'*(x) + G*'*(x) = [F(x) + G(x)]*'* nên [F(x) + G(x)]*'* = f(x) + g(x).  
Từ đó suy ra F(x) + G(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) + g(x) trên K.  
b) Vì H(x), F(x) lần lượt là nguyên hàm của các hàm số f(x) + g(x), f(x) trên K nên ta suy ra H*'*(x) = f(x) + g(x), F*'*(x) = f(x).  
Ta có G(x) = H(x) – F(x).  
Suy ra G*'*(x) = [H(x) – F(x)]*'* = H*'*(x) – F*'*(x) = f(x) + g(x) – f(x) = g(x).  
Vậy G(x) là một nguyên hàm của hàm số g(x) trên K.  
c) Từ câu a, ta suy ra ∫[f(x)+g(x)]dx=F(x)+G(x)+C∫fx+gxdx=Fx+Gx+C . (1)  
Lại có ∫f(x)dx+∫g(x)dx=[F(x)+C1]+[G(x)+C2]=F(x)+G(x)+(C1+C2)∫fxdx+∫gxdx=Fx+C\_(1)+Gx+C\_(2)=Fx+Gx+C\_(1)+C\_(2) .  
Vì C, C1, C2 là các hằng số tùy ý trên K nên ta có C1 + C2 = C tùy ý trên K.  
Do đó, ∫f(x)dx+∫g(x)dx=F(x)+G(x)+C∫fxdx+∫gxdx=Fx+Gx+C . (2)  
Từ (1) và (2) suy ra ∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx∫fx+gx dx=∫fxdx+∫gxdx  
**Luyện tập 5 trang 7 Toán 12 Tập 2**: Tìm ∫(2x2−3x+5)dx∫2x^(2)−3x+5dx  
**Lời giải:**  
Ta có ∫(2x2−3x+5)dx=∫2x2dx−∫3xdx+∫5dx∫2x^(2)−3x+5dx=∫2x^(2)dx−∫3xdx+∫5dx=23x3−32x2+5x+C=(2)/(3)x^(3)−(3)/(2)x^(2)+5x+C  
**Bài tập**  
  
**Bài 1 trang 7 Toán 12 Tập 2**: Hàm số F(x) = x3 + 5 là nguyên hàm của hàm số:  
A. f(x) = 3x2.  
B. f(x) = x44(x^(4))/(4) + 5x + C.  
C. f(x) = x44(x^(4))/(4) + 5x.  
D. f(x) = 3x2 + 5x.  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: A**  
Ta có F*'*(x) = (x3 + 5)*'* = 3x2 nên F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) = 3x2.  
  
**Bài 2 trang 7 Toán 12 Tập 2**: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:  
a) f(x) = 3x2 + x;  
b) f(x) = 9x2 – 2x + 7;  
c) f(x) = (4x – 3)(x2 + 3).  
**Lời giải:**  
a) ∫f(x)dx=∫(3x2+x)dx=∫3x2dx+∫xdx=x3+x22+C∫fxdx=∫3x^(2)+xdx=∫3x^(2)dx+∫xdx=x^(3)+(x^(2))/(2)+C .  
b) ∫f(x)dx=∫(9x2−2x+7)dx∫fxdx=∫9x^(2)−2x+7dx =∫9x2dx−∫2xdx+∫7dx=3x3−x2+7x+C=∫9x^(2)dx−∫2xdx+∫7dx=3x^(3)−x^(2)+7x+C  
c) Ta có f(x) = (4x – 3)(x2 + 3) = 4x3 – 3x2 + 12x – 9.  
∫f(x)dx=∫(4x3−3x2+12x−9)dx∫fxdx=∫4x^(3)−3x^(2)+12x−9dx  
=∫4x3dx−∫3x2dx+∫12xdx−∫9dx=∫4x^(3)dx−∫3x^(2)dx+∫12xdx−∫9dx  
= x4 – x3 + 6x2 – 9x + C.  
  
**Bài 3 trang 7 Toán 12 Tập 2**: Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) = 6x5 + 2x – 3, biết F(– 1) = – 5.  
**Lời giải:**  
Ta có ∫f(x)dx=∫(6x5+2x−3)dx=∫6x5dx+∫2xdx−∫3dx∫fxdx=∫6x^(5)+2x−3dx=∫6x^(5)dx+∫2xdx−∫3dx = x6 + x2 – 3x + C.  
Vì F(– 1) = – 5 nên (– 1)6 + (– 1)2 – 3 ∙ (– 1) + C = – 5, suy ra C = – 10.  
Vậy F(x) = x6 + x2 – 3x – 10.  
**Bài 4 trang 8 Toán 12 Tập 2**: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức h*'*(t) = 1,5t + 5, trong đó h(t) (cm) là chiều cao của cây sau t (năm) (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage 2014*). Biết rằng, cây con khi được trồng cao 12 cm.  
a) Viết công thức tính chiều cao của cây sau t năm.  
b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?  
**Lời giải:**  
a) Công thức chiều cao h(t) của cây sau t năm là một nguyên hàm của hàm số h*'*(t).  
Ta có ∫h′(t)dt=∫(1,5t+5)dt=∫1,5tdt+∫5dt=0,75t2+5t+C∫h^(')tdt=∫1,5t+5dt=∫1,5tdt+∫5dt=0,75t^(2)+5t+C.  
Suy ra h(t) = 0,75t2 + 5t + C.  
Vì cây con khi được trồng cao 12 cm nên h(0) = 12.  
Do đó 0,75 ∙ 02 + 5 ∙ 0 + C = 12, suy ra C = 12.  
Vậy công thức tính chiều cao của cây sau t năm là h(t) = 0,75t2 + 5t + 12.  
b) Khi cây được bán, tức là t = 6, ta có h(6) = 0,75 ∙ 62 + 5 ∙ 6 + 12 = 69.  
Vậy khi được bán, cây cao 69 cm.  
  
**Bài 5 trang 8 Toán 12 Tập 2**: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số  
B*'*(t) = 20t3 – 300t2 + 1 000t,  
trong đó t tính bằng giờ (0 ≤ t ≤ 15), B*'*(t) tính bằng khách/giờ.  
(*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*)  
Biết rằng sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.  
a) Viết công thức của hàm số B(t) biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với 0 ≤ t ≤ 15.  
b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?  
c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?  
d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?  
**Lời giải:**  
a) Hàm số B(t) là một nguyên hàm của hàm số B*'*(t).  
Ta có ∫B′(t)dt=∫(20t3−300t2+1000t)dt∫B^(')tdt=∫20t^(3)−300t^(2)+1000tdt  
=∫20t3dt−∫300t2dt+∫1000tdt=∫20t^(3)dt−∫300t^(2)dt+∫1000tdt.  
Suy ra B(t) = 5t4 – 100t3 + 500t2 + C.  
Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên B(1) = 500.  
Do đó, 5 ∙ 14 – 100 ∙ 13 + 500 ∙ 12 + C = 500, suy ra C = 95.  
Vậy công thức của hàm số B(t) biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội là  
B(t) = 5t4 – 100t3 + 500t2 + 95 (0 ≤ t ≤ 15).  
b) Ta có B(3) = 5 ∙ 34 – 100 ∙ 33 + 500 ∙ 32 + 95 = 2 300.  
Vậy sau 3 giờ có 2 300 khách tham dự lễ hội.  
c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất chính là giá trị lớn nhất của hàm số B(t) trên đoạn [0; 15].  
Ta có B*'*(t) = 20t3 – 300t2 + 1 000t.  
Trên khoảng (0; 15), B*'*(t) = 0 khi t = 5 hoặc t = 10.  
B(0) = 95; B(5) = 3 220; B(10) = 95; B(15) = 28 220.  
Do đó, max[0;15]B(t)=28220max0;15Bt=28 220 tại t = 15.  
Vậy số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28 220 khách sau 15 giờ.  
d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất chính là giá trị lớn nhất của hàm số B*'*(t) trên đoạn [0; 15].  
Ta có B*''*(t) = (20t3 – 300t2 + 1 000t)*'* = 60t2 – 600t + 1 000.  
Trên khoảng (0; 15), B*''*(t) = 0 khi t=15−5√33t=(15−5√(3))/(3) hoặc t=15+5√33t=(15+5√(3))/(3) .  
B*'*(0) = 0;B(15−5√33)≈962,25;B(15+5√33)≈−962,25B(15−5√(3))/(3)≈962,25;  B(15+5√(3))/(3)≈−962,25 ; B*'*(15) = 15 000.  
Do đó, max[0;15]B′(t)=15000max0; 15B^(')t=15 000 tại t = 15.  
  
**Bài 6 trang 8 Toán 12 Tập 2**: Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi m(t) là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi M(t) là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng M'(t) = m(t).  
Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số  
m(t) = 800 – 2t,  
trong đó t tính theo ngày (0 ≤ t ≤ 400), m(t) tính theo người.  
(*Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*)  
Đơn giá cho một ngày công lao động là 400 000 đồng.  
Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).  
**Lời giải:**  
Hàm số M(t) là một nguyên hàm của hàm số m(t).  
Ta có ∫m(t)dt=∫(800−2t)dt=∫800dt−∫2tdt=800t−t2+C∫mtdt=∫800−2tdt=∫800dt−∫2tdt=800t−t^(2)+C.  
Suy ra M(t) = 800t – t2 + C.  
Tại t = 0 thì M(t) = M(0) = 0.  
Do đó 800 ∙ 0 – 02 + C = 0, suy ra C = 0.  
Khi đó, M(t) = 800t – t2 (0 ≤ t ≤ 400).  
Số ngày công tính đến khi hoàn thành dự án là  
M(400) = 800 ∙ 400 – 4002 = 160 000 (ngày công).  
Chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành dự án) là  
160 000 ∙ 400 000 = 6,4 ∙ 1010 (đồng) = 64 (tỷ đồng).