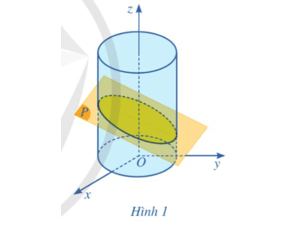
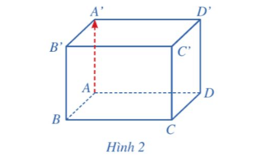
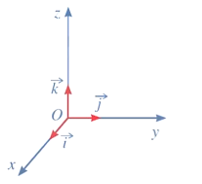
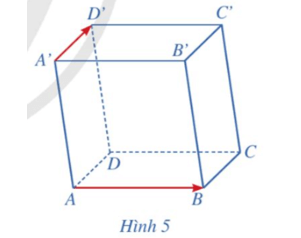
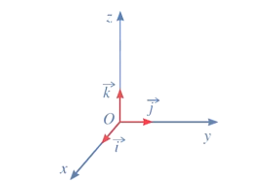
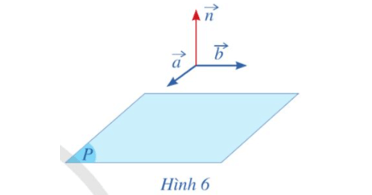
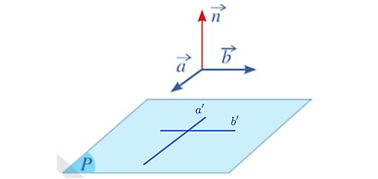
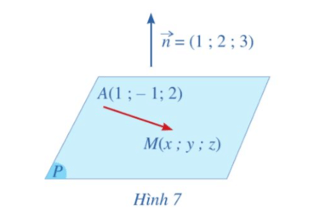
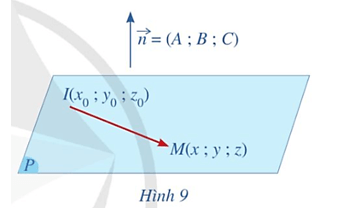
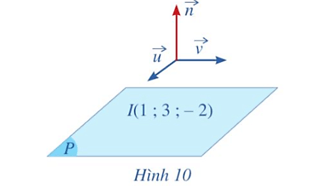
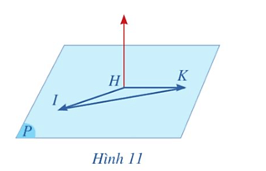
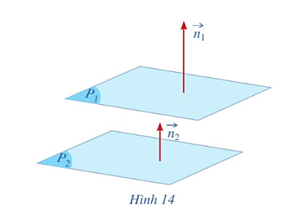
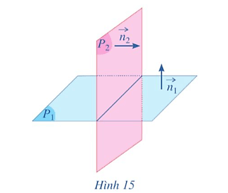
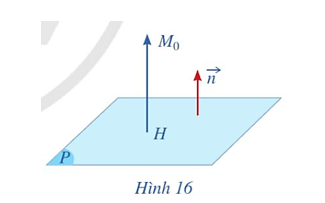
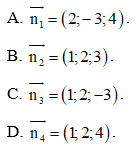
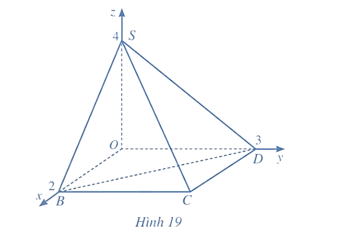
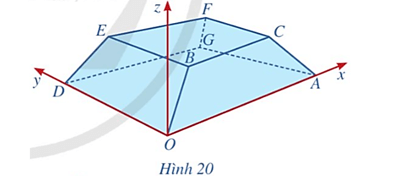
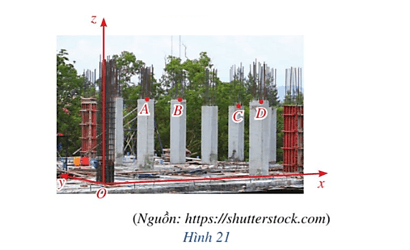
# Bài 1: Phương trình mặt phẳng

**Giải Toán 12 Bài 1: Phương trình mặt phẳng**  
**Câu hỏi khởi động trang 50 Toán 12 Tập 2**: Người ta muốn sản xuất một chi tiết máy được cắt ra từ một ống trụ thép bằng gia công cơ khí chính xác (Hình 1).  
  
Để làm chi tiết máy đó, người ta cần xác định phương trình của mặt cắt trong một hệ tọa độ thích hợp và đưa những dữ liệu đó vào hệ thống máy tính điều khiển các máy gia công cơ khí kĩ thuật số.  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình của mặt phẳng là gì?  
Làm thế nào để lập được phương trình của mặt phẳng?  
**Lời giải:**  
*Sau bài học này, ta trả lời được câu hỏi trên như sau:*  
+ Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mỗi mặt phẳng (P) có phương trình dạng  
Ax + By + Cz + D = 0,  
trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0.  
+ Để lập được phương trình của mặt phẳng ta cần biết một điểm nằm trên mặt phẳng và biết vectơ pháp tuyến (hoặc cặp vectơ chỉ phương) của mặt phẳng.  
  
**Hoạt động 1 trang 50 Toán 12 Tập 2**: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A*'*B*'*C*'*D*'* (*Hình 2*). Giá của vectơ −−→AA′AA^(')→ có vuông góc với mặt phẳng (ABCD) hay không?  
  
**Lời giải:**  
Giá của vectơ −−→AA′AA^(')→ chính là đường thẳng AA*'*.  
Vì ABCD.A*'*B*'*C*'*D*'* là hình hộp chữ nhật nên AA*'* ⊥ (ABCD).  
Vậy giá của vectơ −−→AA′AA^(')→ vuông góc với mặt phẳng (ABCD).  
**Luyện tập 1 trang 51 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của:  
a) Mặt phẳng (Oyz);  
b) Mặt phẳng (Ozx).  
**Lời giải:**  
  
a) Vectơ →i=(1;0;0)i→=1; 0; 0 có giá là trục Ox và Ox ⊥ (Oyz) nên →i=(1;0;0)i→=1; 0; 0 là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz).  
b) Vectơ →j=(0;1;0)j→=0; 1; 0 có giá là trục Oy và Oy ⊥ (Ozx) nên →j=(0;1;0)j→=0; 1; 0 là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Ozx).  
  
**Hoạt động 2 trang 51 Toán 12 Tập 2**: Cho hình hộp ABCD.A*'*B*'*C*'*D*'*. Cho biết hai vectơ −−→AB,−−−→A′D′AB→,  A^(')D^(')→ có cùng phương hay không. Nhận xét về vị trí tương đối giữa giá của mỗi vectơ −−→AB,−−−→A′D′AB→,  A^(')D^(')→ và mặt phẳng (ABCD) (*Hình 5*).  
  
**Lời giải:**  
Vectơ −−→ABAB→ có giá là đường thẳng AB, vectơ −−−→A′D′A^(')D^(')→ có giá là đường thẳng A*'*D*'*.  
+ Vì ABCD.A*'*B*'*C*'*D*'* là hình hộp nên hai đường thẳng AB và A*'*D*'* chéo nhau. Do đó, hai vectơ −−→AB,−−−→A′D′AB→,  A^(')D^(')→ không chéo nhau.  
+ Vì AB ⊂ (ABCD) nên giá của vectơ −−→ABAB→ nằm trong mặt phẳng (ABCD).  
Vì A*'*D*'* // (ABCD) nên giá của vectơ −−−→A′D′A^(')D^(')→ song song mặt phẳng (ABCD).  
  
**Luyện tập 2 trang 51 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, hãy chỉ ra một cặp vectơ chỉ phương của mỗi mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).  
**Lời giải:**  
  
+ Do hai vectơ →i,→ji→,  j→ không cùng phương và có giá cùng nằm trong mặt phẳng (Oxy) nên →i,→ji→,  j→ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (Oxy).  
+ Do hai vectơ →j,→k j→,  k→ không cùng phương và có giá cùng nằm trong mặt phẳng (Oyz) nên →j,→k j→,  k→ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (Oyz).  
+ Do hai vectơ →k,→ik→,  i→ không cùng phương và có giá cùng nằm trong mặt phẳng (Ozx) nên →k,→ik→,  i→ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (Ozx).  
**Hoạt động 3 trang 52 Toán 12 Tập 2**: Cho cặp vectơ chỉ phương →a=(1;0;1)a→=1; 0; 1, →b=(2;1;0)b→=2; 1; 0 của mặt phẳng (P).  
a) Hãy chỉ ra tọa độ của một vectơ →n(→n≠→0)n→  n→≠0→ vuông góc với cả hai vectơ →aa→ và →bb→ (*Hình 6*).  
  
b) Vectơ →nn→ có là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) hay không?  
**Lời giải:**  
a) Ta có vectơ →n=(−1;2;1)n→=−1; 2; 1 vuông góc với cả hai vectơ →aa→ và →bb→ vì:  
→n⋅→a=−1⋅1+2⋅0+1⋅1=0n→⋅a→=−1⋅1+2⋅0+1⋅1=0;  
→n⋅→b=−1⋅2+2⋅1+1⋅0=0n→⋅b→=−1⋅2+2⋅1+1⋅0=0  
b) Ta có vectơ →nn→ vuông góc với cả hai vectơ →aa→ và →bb→, có nghĩa là giá của nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (P).  
  
Suy ra giá của vectơ →nn→ vuông góc với mặt phẳng (P).  
Mà →n≠→0n→≠0→, do đó vectơ →nn→ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
  
**Luyện tập 3 trang 52 Toán 12 Tập 2**: Trong *Ví dụ 3*, vectơ →n′=(1;−2;1)n^(')→=1; −2; 1 có là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) hay không? Vì sao?  
**Lời giải:**  
Ta có →n′=(1;−2;1)=18(8;−16;8)=18→nn^(')→=1; −2; 1=(1)/(8)8; −16; 8=(1)/(8)n→, do đó vectơ →n′n^(')→ vuông góc với cả hai vectơ →aa→ và →bb→. Vậy vectơ →n′=(1;−2;1)n^(')→=1; −2; 1 cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
  
**Hoạt động 4 trang 52 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm A(1; – 1; 2) và có vectơ pháp tuyến là →n=(1;2;3)n→=1; 2; 3.  
Giả sử M(x; y; z) là một điểm tùy ý thuộc mặt phẳng (P) (*Hình 7*).  
  
a) Tính tích vô hướng →n,−−→AMn→, AM→ theo x, y, z.  
b) Tọa độ (x; y; z) của điểm M có thỏa mãn phương trình: x + 2y + 3z – 5 = 0 hay không?  
**Lời giải:**  
a) Ta có −−→AM=(x−1;y+1;z−2)AM→=x−1;y+1;z−2.  
Khi đó, →n⋅−−→AM=1(x−1)+2(y+1)+3(z−2)=x+2y+3z−5n→⋅ AM→=1x−1+2y+1+3z−2=x+2y+3z−5.  
b) Tọa độ (x; y; z) của điểm M có thỏa mãn phương trình: x + 2y + 3z – 5 = 0.  
**Luyện tập 4 trang 54 Toán 12 Tập 2**: Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng sau:  
a) (P): x – y = 0;  
b) (Q): z – 2 = 0.  
**Lời giải:**  
a) Ta có x – y = 0 ⇔ 1 ∙ x + (– 1) ∙ y + 0 ∙ z = 0.  
Mặt phẳng (P) nhận −→nP=(1;−1;0)n\_(P)→=1; −1; 0 làm vectơ pháp tuyến.  
b) Ta có z – 2 = 0 ⇔ 0 ∙ x + 0 ∙ y + 1 ∙ z – 2 = 0.  
Mặt phẳng (Q) nhận −→nQ=(0;0;1)n\_(Q)→=0; 0; 1 làm vectơ pháp tuyến.  
  
**Hoạt động 5 trang 54 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm I(x0; y0; z0) có →n=(A;B;C)n→=A; B; C là vectơ pháp tuyến. Giả sử M(x; y; z) là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P) (*Hình 9*).  
  
a) Tính tích vô hướng →n⋅−−→IMn→⋅IM→.  
b) Hãy biểu diễn →n⋅−−→IMn→⋅IM→ theo x0, y0, z0; x, y, z và A, B, C.  
**Lời giải:**  
a) Ta có −−→IM=(x−x0;y−y0;z−z0)IM→=x−x\_(0); y−y\_(0); z−z\_(0).  
Khi đó: →n⋅−−→IMn→⋅IM→ = A(x – x0) + B(y – y0) + C(z – z0).  
b) Ta có →n⋅−−→IMn→⋅IM→ = A(x – x0) + B(y – y0) + C(z – z0) = Ax + By + Cz – Ax0 – By0 – Cz0.  
  
**Luyện tập 5 trang 54 Toán 12 Tập 2**: Cho hai điểm M(2; 1; 0) và N(0; 3; 0). Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN.  
**Lời giải:**  
Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN là mặt phẳng đi qua trung điểm của MN và vuông góc với MN.  
Gọi I là trung điểm của MN.  
Tọa độ của điểm I là ⎧⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪⎩xI=2+02=1yI=1+32=2zI=0+02=0x\_(I)=(2+0)/(2)=1y\_(I)=(1+3)/(2)=2z\_(I)=(0+0)/(2)=0. Suy ra I(1; 2; 0).  
Ta có −−−→MN=(−2;2;0)MN→=−2; 2; 0. Chọn →n=−12−−−→MN=−12(−2;2;0)=(1;−1;0)n→=(−1)/(2)MN→=(−1)/(2)−2; 2; 0=1; −1; 0.  
Gọi mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN. Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm I(1; 2; 0) và nhận →n=(1;−1;0)n→=1; −1;0 làm vectơ pháp tuyến.  
Phương trình mặt phẳng (P) là:  
1(x – 1) – 1(y – 2) + 0(z – 0) = 0 ⇔ x – y + 1 = 0.  
**Hoạt động 6 trang 55 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm I(1; 3; – 2) có cặp vectơ chỉ phương là →u=(1;1;3)u→=1; 1; 3,→v=(2;−1;2)v→=2; −1; 2 (*Hình 10*).  
  
a) Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến →nn→ của mặt phẳng (P).  
b) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm I(1; 3; – 2), biết vectơ pháp tuyến →nn→  
**Lời giải:**  
a) Một vectơ pháp tuyến →nn→ của mặt phẳng (P) là:  
→n=[→u,→v]=(∣∣∣13−12∣∣∣;∣∣∣3122∣∣∣;∣∣∣112−1∣∣∣)=(5;4;−3)n→=u→,  v→=13−12; 3122; 112−1=5; 4; −3  
b) Phương trình mặt phẳng (P) là:  
5(x – 1) + 4(y – 3) – 3(z + 2) = 0 ⇔ 5x + 4y – 3z – 23 = 0.  
  
**Luyện tập 6 trang 55 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm I(x0; y0; z0). Lập phương trình mặt phẳng (P), biết mặt phẳng đó có cặp vectơ chỉ phương là →i,→ji→,  j→  
**Lời giải:**  
Ta có →i=(1;0;0),→j=(0;1;0)i→=1; 0; 0, j→=0;1;0.  
Xét vectơ →n=[→i,→j]=(∣∣∣0010∣∣∣;∣∣∣0100∣∣∣;∣∣∣1001∣∣∣)n→=i→, j→=0010; 0100; 1001, tức là →n=(0;0;1)n→=0; 0; 1. Khi đó →nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
Vậy mặt phẳng (P) có phương trình là:  
0(x – x0) + 0(y – y0) + 1(z – z0) = 0 ⇔ z – z0 = 0.  
  
**Hoạt động 7 trang 55 Toán 12 Tập 2**: Cho ba điểm H(– 1; 1; 2), I(1; 3; 2), K(– 1; 4; 5) cùng thuộc mặt phẳng (P) (Hình 11).  
  
a) Tìm tọa độ của các vectơ −→HI,−−→HKHI→, HK→. Từ đó hãy chứng tỏ rằng ba điểm H, I, K không thẳng hàng.  
b) Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm H(– 1; 1; 2), biết cặp vectơ chỉ phương là −→HI,−−→HKHI→, HK→.  
**Lời giải:**  
a) Ta có −→HI=(2;2;0),−−→HK=(0;3;3)HI→=2; 2; 0,  HK→=0; 3; 3.  
Nhận thấy −→HI≠k−−→HKHI→≠kHK→ với mọi số thực k ≠ 0 nên hai vectơ −→HI,−−→HKHI→, HK→ không cùng phương.  
Vậy H, I, K không thẳng hàng.  
b) Xét vectơ →n=[−→HI,−−→HK]=(∣∣∣2033∣∣∣;∣∣∣0230∣∣∣;∣∣∣2203∣∣∣)n→=HI→, HK→=2033; 0230; 2203, tức là →n=(6;−6;6)n→=6; −6; 6. Khi đó,→nn→ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
Vậy mặt phẳng (P) có phương trình là:  
6(x + 1) – 6(y – 1) + 6(z – 2) = 0 ⇔ x – y + z = 0.  
**Luyện tập 7 trang 56 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M(1; 2; 1), N(0; 3; 2) và P(– 1; 0; 0).  
**Lời giải:**  
Ta có −−−→MN=(−1;1;1),−−→MP=(−2;−2;−1)MN→=−1; 1; 1,  MP→=−2; −2; −1.  
Xét vectơ →n=[−−−→MN,−−→MP]=(∣∣∣11−2−1∣∣∣;∣∣∣1−1−1−2∣∣∣;∣∣∣−11−2−2∣∣∣)n→=MN→, MP→=11−2−1; 1−1−1−2; −11−2−2, tức là →n=(1;−3;4)n→=1; −3; 4.  
Khi đó,→nn→ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P.  
Vậy mặt phẳng (MNP) có phương trình là:  
1(x – 1) – 3(y – 2) + 4(z – 1) = 0 ⇔ x – 3y + 4z + 1 = 0.  
**Luyện tập 8 trang 57 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4).  
**Lời giải:**  
Phương trình mặt phẳng (ABC) là:  
x2+y3+z4=1(x)/(2)+(y)/(3)+(z)/(4)=1  
  
**Hoạt động 8 trang 57 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P1):  
2x + 2y + 2z + 1 = 0 (1)  
và mặt phẳng (P2):  
x + y + z – 1 = 0 (2)  
a) Gọi →n1=(2;2;2)n\_(1)→=2; 2; 2,→n2=(1;1;1)n\_(2)→=1; 1; 1 lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P1), (P2) (*Hình 14*). Tìm liên hệ giữa →n1n\_(1)→ và 2→n22n\_(2)→.  
  
b) Tìm các hệ số tự do D­1, D2 lần lượt trong hai phương trình (1), (2). So sánh D1 và 2D2.  
c) Nêu vị trí tương đối của hai mặt phẳng (P1), (P2).  
**Lời giải:**  
a) Ta có 2→n2=2(1;1;1)=(2;2;2)=→n12n\_(2)→=21; 1; 1=2; 2; 2=n\_(1)→. Vậy →n1=2→n2n\_(1)→=2n\_(2)→.  
b) Ta có D1 = 1, D2 = – 1, 2D2 = – 2. Nhận thấy D1 ≠ 2D2.  
c) Hai mặt phẳng (P1), (P2) song song với nhau.  
**Luyện tập 9 trang 58 Toán 12 Tập 2**: Cho m ≠ 0. Chứng minh rằng các mặt phẳng (P): x – m = 0, (Q): y – m = 0, (R): z – m = 0 lần lượt song song với các mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy).  
**Lời giải:**  
+ Ta có (Oyz): x = 0. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oyz) là →i=(1;0;0)i→=1; 0; 0.  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là −→nP=(1;0;0)n\_(P)→=1; 0; 0.  
Do →i=−→nPi→=n\_(P)→ và m ≠ 0 nên (P) // (Oyz).  
+ Ta có (Ozx): y = 0. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Ozx) là →j=(0;1;0)j→=0; 1; 0.  
Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là −→nQ=(0;1;0)n\_(Q)→=0; 1; 0.  
Do →j=−→nQj→=n\_(Q)→ và m ≠ 0 nên (Q) // (Ozx).  
+ Ta có (Oxy): z = 0. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là →k=(0;0;1)k→=0; 0; 1.  
Mặt phẳng (R) có vectơ pháp tuyến là −→nR=(0;0;1)n\_(R)→=0; 0; 1.  
Do →k=−→nRk→=n\_(R)→ và m ≠ 0 nên (R) // (Oxy).  
  
**Hoạt động 9 trang 58 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P1) có phương trình tổng quát là:  
x + 2y + z + 1 = 0  
và mặt phẳng (P2) có phương trình tổng quát là:  
3x – 2y + z + 5 = 0.  
Gọi →n1=(1;2;1),→n2=(3;−2;1)n\_(1)→=1; 2; 1, n\_(2)→=3; −2; 1 lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P1), (P2). Hai vectơ →n1,→n2n\_(1)→,  n\_(2)→ có vuông góc với nhau hay không?  
  
**Lời giải:**  
Ta có →n1⋅→n2=1⋅3+2⋅(−2)+1⋅1=3−4+1=0n\_(1)→⋅n\_(2)→=1⋅3+2⋅−2+1⋅1=3−4+1=0.  
Vậy hai vectơ →n1,→n2n\_(1)→,  n\_(2)→ vuông góc với nhau.  
**Luyện tập 10 trang 59 Toán 12 Tập 2**: Chứng minh rằng hai mặt phẳng (Ozx) và (P): x + 2z – 3 = 0 vuông góc với nhau.  
**Lời giải:**  
Ta có (Ozx): y = 0.  
Hai mặt phẳng (Ozx) và (P) có vectơ pháp tuyến lần lượt là →n1=(0;1;0)n\_(1)→=0;1;0 và →n2=(1;0;2)n\_(2)→=1;0;2.  
Vì →n1⋅→n2n\_(1)→⋅n\_(2)→ = 0 ∙ 1 + 1 ∙ 0 + 0 ∙ 2 = 0 nên →n1⊥→n2n\_(1)→⊥  n\_(2)→. Vậy (Ozx) ⊥ (P).  
  
**Hoạt động 10 trang 59 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là Ax + By + Cz + D = 0 với →n=(A;B;C)n→=A; B; C là vectơ pháp tuyến. Cho điểm M0(2; 3; 4). Gọi H(xH; yH; zH) là hình chiếu vuông góc của điểm M0 trên mặt phẳng (P) (*Hình 16*).  
  
a) Tính tọa độ của −−−→HM0HM\_(0)→ theo xH, yH, zH.  
b) Nêu nhận xét về phương của hai vectơ →n=(A;B;C),−−−→HM0n→=A; B; C,  HM\_(0)→. Từ đó, hãy suy ra rằng  
∣∣∣→n⋅−−−→HM0∣∣∣=∣∣→n∣∣⋅∣∣∣−−−→HM0∣∣∣=|A⋅2+B⋅3+C⋅4+D|n→⋅HM\_(0)→=n→⋅HM\_(0)→=A⋅2+B⋅3+C⋅4+D.  
c) Tính các độ dài ∣∣→n∣∣,∣∣∣−−−→HM0∣∣∣n→,  HM\_(0)→ theo A, B, C, D. Từ đó, hãy nêu công thức tính khoảng cách từ điểm M0(2; 3; 4) đến mặt phẳng (P).  
**Lời giải:**  
a) −−−→HM0=(2−xH;3−yH;4−zH)HM\_(0)→=2−x\_(H);3−y\_(H);4−z\_(H).  
b) Vì H là hình chiếu vuông góc của M0 trên mặt phẳng (P) nên HM0 ⊥ (P).  
Vectơ →nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nên giá của vectơ →nn→ vuông góc với mặt phẳng (P).  
Từ đó suy ra đường thẳng HM0 và giá của vectơ →nn→ song song hoặc trùng nhau.  
Do vậy, hai vectơ →n,−−−→HM0n→,  HM\_(0)→ cùng phương.  
Suy ra ∣∣→n∣∣⋅∣∣∣−−−→HM0∣∣∣=∣∣∣→n⋅−−−→HM0∣∣∣n→⋅HM\_(0)→=n→⋅HM\_(0)→  
 = |A(2 – xH) + B(3 – yH) + C(4 – zH)|  
 = |A ∙ 2 + B ∙ 3 + C ∙ 4 + (– AxH – ByH – CzH)|. (1)  
Mặt khác vì H ∈ (P) nên ta có  
AxH + ByH + CzH + D = 0, suy ra D = – AxH – ByH – CzH. (2)  
Thay (2) và (1) ta được ∣∣→n∣∣⋅∣∣∣−−−→HM0∣∣∣=∣∣∣→n⋅−−−→HM0∣∣∣n→⋅HM\_(0)→=n→⋅HM\_(0)→ = |A ∙ 2 + B ∙ 3 + C ∙ 4 + D|.  
c) Ta có ∣∣→n∣∣=√A2+B2+C2n→=√(A^(2)+B^(2)+C^(2)).  
Từ câu b) suy ra ∣∣∣−−−→HM0∣∣∣=|A⋅2+B⋅3+C⋅4+D|∣∣→n∣∣=|A⋅2+B⋅3+C⋅4+D|√A2+B2+C2HM\_(0)→=(A⋅2+B⋅3+C⋅4+D)/(n→)=(A⋅2+B⋅3+C⋅4+D)/(√(A^(2)+B^(2)+C^(2))).  
Vậy d(M0, (P)) = ∣∣∣−−−→HM0∣∣∣=|A⋅2+B⋅3+C⋅4+D|√A2+B2+C2HM\_(0)→=(A⋅2+B⋅3+C⋅4+D)/(√(A^(2)+B^(2)+C^(2)))  
**Luyện tập 11 trang 61 Toán 12 Tập 2**: Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm M(a; b; c) đến các mặt phẳng (Oyz), (Ozx), (Oxy) lần lượt bằng |a|, |b|, |c|.  
**Lời giải:**  
+ Ta có (Oyz): x = 0 nên khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oyz) là:  
d(M, (Oyz)) = |1⋅a+0⋅b+0⋅c|√12+02+02(1⋅a+0⋅b+0⋅c)/(√(1^(2)+0^(2)+0^(2)))= |a|.  
+ Ta có (Ozx): y = 0 nên khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Ozx) là:  
d(M, (Ozx)) = |0⋅a+1⋅b+0⋅c|√02+12+02(0⋅a+1⋅b+0⋅c)/(√(0^(2)+1^(2)+0^(2))) = |b|.  
+ Ta có (Oxy): z = 0 nên khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) là:  
d(M, (Oxy)) = |0⋅a+0⋅b+1⋅c|√02+02+12(0⋅a+0⋅b+1⋅c)/(√(0^(2)+0^(2)+1^(2)))= |c|.  
  
**Luyện tập 12 trang 61 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt phẳng (P1): 6x – 8y – 3 = 0 và mặt phẳng (P2): 3x – 4y + 2 = 0.  
a) Chứng minh rằng (P1) // (P2).  
b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P1) và (P2).  
**Lời giải:**  
a) Ta có →n1=(6;−8;0)n\_(1)→=6; −8;0, →n2=(3;−4;0)n\_(2)→=3;−4;0 lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P1), (P2). Do →n1=2→n2n\_(1)→=2n\_(2)→, D1 ≠ 2D2 (vì D1 = – 3, D2 = 2) nên (P1) // (P2).  
b) Chọn điểm M (12;0;0)(1)/(2); 0; 0 ∈ (P1). Suy ra khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P2) là: d(M,(P2))=∣∣3⋅12+2∣∣√32+(−4)2=710dM,P\_(2)=(3⋅(1)/(2)+2)/(√(3^(2)+−4^(2)))=(7)/(10).  
Do khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P1), (P2) bằng d(M, (P2)) nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P1), (P2) bằng 710(7)/(10)  
**Bài tập**  
**Bài 1 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của mặt phẳng?  
A. – x2 + 2y + 3z + 4 = 0.  
B. 2x – y2 + z + 5 = 0.  
C. x + y – z2 + 6 = 0.  
D. 3x – 4y – 5z + 1 = 0.  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: D**  
Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng Ax + By + Cz + D = 0, trong đó A, B, C, D không đồng thời bằng 0. Do đó trong các đáp án đã cho, ta thấy chỉ có phương trình ở đáp án D: 3x – 4y – 5z + 1 = 0 là phương trình tổng quát của mặt phẳng.  
  
**Bài 2 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Mặt phẳng x + 2y – 3z + 4 = 0 có một vectơ pháp tuyến là:  
  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: C**  
Mặt phẳng x + 2y – 3z + 4 = 0 có một vectơ pháp tuyến là: →n=(1;2;−3)n→=1; 2;−3  
  
**Bài 3 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm I(3; – 4; 5) và nhận →n=(2;7;−1)n→=2; 7; −1 làm vectơ pháp tuyến.  
**Lời giải:**  
Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm I(3; – 4; 5) và nhận →n=(2;7;−1)n→=2; 7; −1 làm vectơ pháp tuyến là:  
2(x – 3) + 7(y + 4) – 1(z – 5) = 0 ⇔ 2x + 7y – z + 27 = 0.  
  
**Bài 4 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm K(– 1; 2; 3) và nhận hai vectơ →u=(1;2;3),→v=(4;5;6)u→=1; 2; 3,v→=4; 5; 6 làm cặp vectơ chỉ phương.  
**Lời giải:**  
Xét vectơ →n=[→u,→v]=(∣∣∣2356∣∣∣;∣∣∣3164∣∣∣;∣∣∣1245∣∣∣)n→=u→, v→=2356; 3164; 1245, tức là →n=(−3;6;−3)n→=−3; 6; −3.  
Khi đó, →nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
Vậy mặt phẳng (P) có phương trình là:  
– 3(x + 1) + 6(y – 2) – 3(z – 3) = 0 ⇔ x – 2y + z + 2 = 0.  
  
**Bài 5 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng (P) trong mỗi trường hợp sau:  
a) (P) đi qua điểm I(3; – 4; 1) và vuông góc với trục Ox;  
b) (P) đi qua điểm K(– 2; 4; – 1) và song song với mặt phẳng (Ozx);  
c) (P) đi qua điểm K(– 2; 4; – 1) và song song với mặt phẳng (Q): 3x + 7y + 10z + 1 = 0.  
**Lời giải:**  
a) Vì mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox nên (P) nhận vectơ →i=(1;0;0)i→=1;0;0 làm vectơ pháp tuyến.  
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:  
1(x – 3) + 0(y + 4) + 0(z – 1) = 0 ⇔ x – 3 = 0.  
b) Ta có (Ozx): y = 0. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Ozx) là →j=(0;1;0)j→=0;1;0.  
Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Ozx) nên (P) nhận →j=(0;1;0)j→=0;1;0 làm vectơ pháp tuyến.  
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:  
0(x + 2) + 1(y – 4) + 0(z + 1) = 0 ⇔ y – 4 = 0.  
c) (Q): 3x + 7y + 10z + 1 = 0. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là →n=(3;7;10)n→=3;7;10.  
Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên (P) nhận →n=(3;7;10)n→=3;7;10 làm vectơ pháp tuyến.  
Vậy phương trình mặt phẳng (P) là:  
3(x + 2) + 7(y – 4) + 10(z + 1) = 0 ⇔ 3x + 7y + 10z – 12 = 0.   
  
**Bài 6 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(1; 1; 1), B(0; 4; 0), C(2; 2; 0).  
**Lời giải:**  
Ta có: −−→AB=(−1;3;−1),−−→AC=(1;1;−1)AB→=−1;3;−1,  AC→=1; 1; −1.  
Xét vectơ →n=[−−→AB,−−→AC]=(∣∣∣3−11−1∣∣∣;∣∣∣−1−1−11∣∣∣;∣∣∣−1311∣∣∣)n→=AB→, AC→=3−11−1; −1−1−11; −1311, tức là →n=(−2;−2;−4)n→=−2;−2;−4.  
Khi đó,→nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
Vậy mặt phẳng (P) có phương trình là:  
– 2(x – 1) – 2(y – 1) – 4(z – 1) = 0 ⇔ x + y + 2z – 4 = 0.  
  
**Bài 7 trang 63 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của mặt phẳng (P), biết (P) đi qua ba điểm A(5; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 6).  
**Lời giải:**  
Phương trình mặt phẳng (P) là: x5+y3+z6=1(x)/(5)+(y)/(3)+(z)/(6)=1  
**Bài 8 trang 64 Toán 12 Tập 2**: Cho hai mặt phẳng (P1): 4x – y – z + 1 = 0,  
(P2): 8x – 2y – 2z + 1 = 0.  
a) Chứng minh rằng (P1) // (P2).  
b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P1­), (P2).  
**Lời giải:**  
a) Ta có →n1=(4;−1;−1)n\_(1)→=4; −1;−1, →n2=(8;−2;−2)n\_(2)→=8;−2;−2 lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P1), (P2). Do →n1=12→n2n\_(1)→=(1)/(2)n\_(2)→, D1 ≠ 12(1)/(2) D2 (vì D1 = 1, D2 = 1) nên (P1) // (P2).  
b) Chọn điểm M(0; 0; 1) ∈ (P1). Suy ra khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P2) là:  
d(M,(P2))=|−2⋅1+1|√82+(−2)2+(−2)2=√212dM,P\_(2)=(−2⋅1+1)/(√(8^(2)+−2^(2)+−2^(2)))=(√(2))/(12).  
Do khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P1), (P2) bằng d(M, (P2)) nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P1), (P2) bằng √212(√(2))/(12)  
  
**Bài 9 trang 64 Toán 12 Tập 2**:  
a) Cho hai mặt phẳng (P1): x + 2y + 3z + 4 = 0, (P2): x + y – z + 5 = 0. Chứng minh rằng (P1) ⊥ (P2).  
b) Cho mặt phẳng (P): x – 2y – 2z + 1 = 0 và điểm M(1; 1; – 6). Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).   
**Lời giải:**  
a) Hai mặt phẳng (P1) và (P2) có vectơ pháp tuyến lần lượt là →n1=(1;2;3)n\_(1)→=1;2;3 và →n2=(1;1;−1)n\_(2)→=1;1;−1.  
Vì →n1⋅→n2n\_(1)→⋅n\_(2)→= 1 ∙ 1 + 2 ∙ 1 + 3 ∙ (– 1) = 0 nên →n1⊥→n2n\_(1)→⊥  n\_(2)→ . Vậy (P1) ⊥ (P2).  
b) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là:  
d(M, (P)) = |1⋅1−2⋅1−2⋅(−6)+1|√12+(−2)2+(−2)2=4(1⋅1−2⋅1−2⋅−6+1)/(√(1^(2)+−2^(2)+−2^(2)))=4  
  
**Bài 10 trang 64 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình chóp S.OBCD có đáy là hình chữ nhật và các điểm O(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 3; 0), S(0; 0; 4) (Hình 19).  
  
a) Tìm toạ độ điểm C.  
b) Lập phương trình mặt phẳng (SBD).  
c) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).  
**Lời giải:**  
a) Gọi tọa độ điểm C là C(x; y; z). Ta có −−→OD=(0;3;0)OD→=0;3;0, −−→BC=(x−2;y;z)BC→=x−2;y;z.  
Vì OBCD là hình chữ nhật nên −−→BC=−−→ODBC→=OD→, tức là ⎧⎪⎨⎪⎩x−2=0y=3z=0⇔⎧⎪⎨⎪⎩x=2y=3z=0x−2=0y=3z=0⇔x=2y=3z=0.  
Vậy C(2; 3; 0).  
b) Ta có:−−→SB=(2;0;−4),−−→SD=(0;3;−4)SB→=2;0;−4,  SD→=0;3; −4.  
Xét vectơ →n=[−−→SB,−−→SD]=(∣∣∣0−43−4∣∣∣;∣∣∣−42−40∣∣∣;∣∣∣2003∣∣∣)n→=SB→, SD→=0−43−4; −42−40; 2003, tức là →n=(12;8;6)n→=12;8;6.  
Khi đó,→nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD).  
Vậy mặt phẳng (SBD) có phương trình là:  
12(x – 0) + 8(y – 0) + 6(z – 4) = 0 ⇔ 6x + 4y + 3z – 12 = 0.  
c) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) là:  
d(C, (SBD)) = |6⋅2+4⋅3+3⋅0−12|√62+42+32=12√61(6⋅2+4⋅3+3⋅0−12)/(√(6^(2)+4^(2)+3^(2)))=(12)/(√(61))  
  
**Bài 11 trang 64 Toán 12 Tập 2**: *Hình 20* minh họa hình ảnh một tòa nhà trong không gian với hệ tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết A(50; 0; 0), D(0; 20; 0), B(4k; 3k; 2k) với k > 0 và mặt phẳng (CBEF) có phương trình là z = 3.  
  
a) Tìm tọa độ của điểm B.  
b) Lập phương trình mặt phẳng (AOBC).  
c) Lập phương trình mặt phẳng (DOBE).  
d) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mỗi mặt phẳng (AOBC) và (DOBE).  
**Lời giải:**  
a) Vì B ∈ (CBEF) nên ta có 2k = 3, suy ra k = 32(3)/(2) (tm). Do đó, 4k = 6; 3k = 92(9)/(2).  
Vậy B(6;92;3)B6;(9)/(2);3.  
b) Ta có −−→OA=(50;0;0),−−→OB=(6;92;3)OA→=50; 0; 0,  OB→=6;(9)/(2);3.  
Xét vectơ →n=[−−→OA,−−→OB]=(∣∣  
∣∣00923∣∣  
∣∣;∣∣∣05036∣∣∣;∣∣  
∣∣500692∣∣  
∣∣)n→=OA→, OB→=00(9)/(2)3; 05036; 5006(9)/(2), tức là →n=(0;−150;225)n→=0;−150;225.  
Khi đó, →nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AOBC).  
Vậy mặt phẳng (AOBC) có phương trình là:  
0(x – 0) – 150(y – 0) + 225(z – 0) = 0 ⇔ 2y – 3z = 0.   
c) Ta có −−→OD=(0;20;0),−−→OB=(6;92;3)OD→=0;20; 0,  OB→=6;(9)/(2);3.  
Xét vectơ →n′=[−−→OD,−−→OB]=(∣∣  
∣∣200923∣∣  
∣∣;∣∣∣0036∣∣∣;∣∣  
∣∣020692∣∣  
∣∣)n^(')→=OD→, OB→=200(9)/(2)3; 0036; 0206(9)/(2) , tức là →n′=(60;0;−120)n^(')→=60;0;−120.  
Khi đó, →n′n^(')→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (DOBE).  
Vậy mặt phẳng (DOBE) có phương trình là:  
60(x – 0) + 0(y – 0) – 120(z – 0) = 0 ⇔ x – 2z = 0.   
d) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AOBC) là →n1=(0;2;−3)n\_(1)→=0;2; −3.  
Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (DOBE) là →n2=(1;0;−2)n\_(2)→=1;0; −2  
  
**Bài 12 trang 64 Toán 12 Tập 2**: Hình 21 minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ Oxyz (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm A(2; 1; 3), B(4; 3; 3), C(6; 3; 2,5), D(4; 0; 2,8).  
  
a) Lập phương trình mặt phẳng (ABC).  
b) Bốn điểm A, B, C, D có đồng phẳng hay không?  
**Lời giải:**  
a) Ta có −−→AB=(2;2;0),−−→AC=(4;2;−0,5)AB→=2; 2; 0,  AC→=4;2;−0,5.  
Xét vectơ →n=[−−→AB,−−→AC]=(∣∣∣202−0,5∣∣∣;∣∣∣02−0,54∣∣∣;∣∣∣2242∣∣∣)n→=AB→, AC→=202−0,5; 02−0,54; 2242, tức là →n=(−1;1;−4)n→=−1;  1;−4.  
Khi đó, →nn→ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).  
Vậy mặt phẳng (ABC) có phương trình là:  
– 1(x – 2) + 1(y – 1) – 4(z – 3) = 0 ⇔ x – y + 4z – 13 = 0.   
b) Thay tọa độ điểm D(4; 0; 2,8) vào phương trình mặt phẳng (ABC) ta được:  
4 – 0 + 4 ∙ 2,8 – 13 = 2,2 ≠ 0.  
Vậy D không thuộc mặt phẳng (ABC), tức là bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.