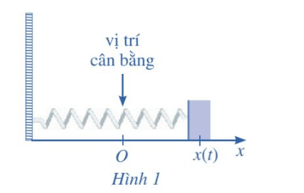
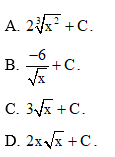
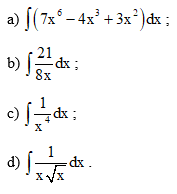
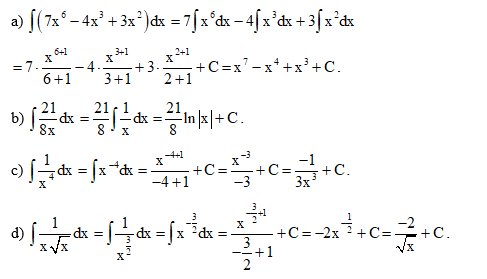
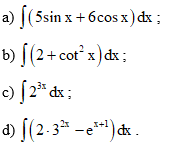
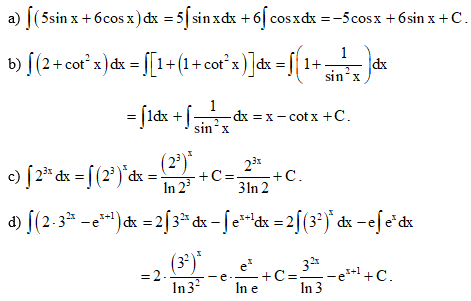
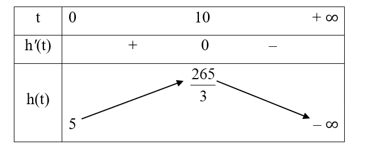
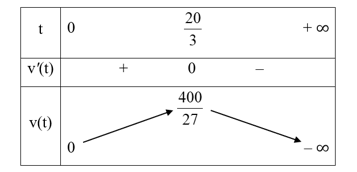
# Bài 2: Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

**Giải Toán 12 Bài 2: Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp**  
**Câu hỏi khởi động trang 9 Toán 12 Tập 2**: Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 1, có vận tốc tức thời cho bởi v(t) = 4 cos t, trong đó t tính bằng giây và v(t) tính bằng centimét/giây. Tại thời điểm t = 0, con lắc đó ở vị trí cân bằng.  
  
Phương trình chuyển động của con lắc đó được xác định bằng cách nào?  
**Lời giải:**  
*Sau bài học này, ta giải quyết được bài toán trên như sau:*  
Giả sử con lắc chuyển động theo phương trình: s = s(t). Suy ra s*'*(t) = v(t), do đó s(t) là một nguyên hàm của v(t). Ta có:  
∫v(t)dt=∫4costdt=4∫costdt=4sint+C∫vtdt=∫4costdt=4∫costdt=4sint+C.  
Suy ra s(t) = 4sin t + C.  
Tại thời điểm t = 0, ta có s(0) = 0, tức là 4sin 0 + C = 0, hay C = 0.   
Vậy phương trình chuyển động của con lắc là: s(t) = 4sin t.  
  
**Hoạt động 1 trang 9 Toán 12 Tập 2**: Hàm số F(x) = 12x2(1)/(2)x^(2) có là nguyên hàm của hàm số f(x) = x hay không?  
**Lời giải:**  
Ta có F*'*(x) = (12x2)′=12⋅2x=x(1)/(2)x^(2)^(')=(1)/(2)⋅2x=x = f(x).  
Vậy hàm số F(x) = 12x2(1)/(2)x^(2) là một nguyên hàm của hàm số f(x) = x.  
**Luyện tập 1 trang 10 Toán 12 Tập 2**: Tìm: ∫(x4−5x2+1)dx∫x^(4)−5x^(2)+1dx  
**Lời giải:**  
Ta có ∫(x4−5x2+1)dx=∫x4dx−∫5x2dx+∫1dx∫x^(4)−5x^(2)+1dx=∫x^(4)dx−∫5x^(2)dx+∫1dx  
=x4+14+1−5⋅x2+12+1+x+C=x55−5x33+x+C=(x^(4+1))/(4+1)−5⋅(x^(2+1))/(2+1)+x+C=(x^(5))/(5)−(5x^(3))/(3)+x+C  
  
**Luyện tập 2 trang 10 Toán 12 Tập 2**: Tìm:  
a) ∫x35dx∫x^((3)/(5))dx;  
b) ∫14√x3dx∫(1)/(x^(3)4)dx  
**Lời giải:**  
a) ∫x35dx=x35+135+1+C=58x85+C∫x^((3)/(5))dx=(x^((3)/(5)+1))/((3)/(5)+1)+C=(5)/(8)x^((8)/(5))+C  
b) ∫14√x3dx=∫1x34dx=∫x−34dx=x−34+1−34+1+C=4x14+C=44√x+C∫(1)/(x^(3)4)dx=∫(1)/(x^((3)/(4)))dx=∫x^(−(3)/(4))dx=(x^(−(3)/(4)+1))/(−(3)/(4)+1)+C=4x^((1)/(4))+C=4x4+C  
  
**Hoạt động 2 trang 10 Toán 12 Tập 2**:  
a) Tính đạo hàm của hàm số y = ln|x| trên khoảng (0; + ∞).  
b) Tính đạo hàm của hàm số y = ln|x| trên khoảng (– ∞; 0).  
**Lời giải:**  
a) Với x ∈ (0; + ∞) thì |x| = x. Do đó, y = ln|x| = ln x.  
Ta có y*'* = (ln x)*'* = 1x(1)/(x) .  
b) Với x ∈ (– ∞; 0) thì |x| = – x. Do đó, y = ln|x| = ln (– x).  
Ta có y*'* = [ln (– x)]*'* = (−x)′−x=−1−x=1x(−x^('))/(−x)=(−1)/(−x)=(1)/(x)  
  
**Luyện tập 3 trang 10 Toán 12 Tập 2**: Tìm ∫49xdx∫(4)/(9x)dx  
**Lời giải:**  
Ta có ∫49xdx=49∫1xdx=49ln|x|+C∫(4)/(9x)dx=(4)/(9)∫(1)/(x)dx=(4)/(9)lnx+C  
**Hoạt động 3 trang 11 Toán 12 Tập 2**:  
a) Hàm số y = – cos x có là nguyên hàm của hàm số y = sin x hay không?  
b) Hàm số y = sin x có là nguyên hàm của hàm số y = cos x hay không?  
c) Với x ≠ kπ (k ∈ ℤ), hàm số y = – cot x có là nguyên hàm của hàm số y=1sin2xy=(1)/(sin^(2)x) hay không?  
d) Với x ≠ π2(π)/(2) + kπ (k ∈ ℤ), hàm số y = tan x có là nguyên hàm của hàm số y=1cos2xy=(1)/(cos^(2)x) hay không?  
**Lời giải:**  
a) Ta có (– cos x)*'* = – (cos x)*'* = – (– sin x) = sin x.  
Vậy hàm số y = – cos x là một nguyên hàm của hàm số y = sin x.  
b) Ta có (sin x)*'* = cos x.  
Vậy hàm số y = sin x là một nguyên hàm của hàm số y = cos x.  
c) Với x ≠ kπ (k ∈ ℤ), ta có (– cot x)*'* = – (cot x)*'* = – (−1sin2x)=1sin2x−(1)/(sin^(2)x)=(1)/(sin^(2)x) .  
Vậy hàm số y = – cot x là một nguyên hàm của hàm số y=1sin2xy=(1)/(sin^(2)x) .  
d) Với x ≠ π2(π)/(2) + kπ (k ∈ ℤ), ta có (tan x)*'* = 1cos2x(1)/(cos^(2)x) .  
Vậy hàm số y = tan x là một nguyên hàm của hàm số y=1cos2xy=(1)/(cos^(2)x)  
  
**Luyện tập 4 trang 11 Toán 12 Tập 2**: Tìm:  
a) ∫8sinxdx∫8sinxdx  
b) ∫(2sinx−5cosx)dx∫2sin x−5cosxdx  
**Lời giải:**  
a) ∫8sinxdx=8∫sinxdx=8⋅(−cosx)+C=−8cosx+C∫8sinxdx=8∫sinxdx=8⋅−cosx+C=−8cosx+C  
b) ∫(2sinx−5cosx)dx=∫2sinxdx−∫5cosxdx∫2sin x−5cosxdx=∫2sinxdx−∫5cosxdx  
=2∫sinxdx−5∫cosxdx=−2cosx−5sinx+C=2∫sinxdx−5∫cosxdx=−2cosx−5sinx+C  
  
**Luyện tập 5 trang 11 Toán 12 Tập 2**: Tìm:  
a) ∫(1+cot2x)dx∫1+cot^(2)xdx  
b) ∫11+cos2xdx∫(1)/(1+cos2x)dx  
**Lời giải:**  
a) ∫(1+cot2x)dx=∫(1sin2x)dx=−cotx+C∫1+cot^(2)xdx=∫(1)/(sin^(2)x)dx=−cotx+C  
b) ∫11+cos2xdx=∫11+(2cos2x−1)dx=∫12cos2xdx∫(1)/(1+cos2x)dx=∫(1)/(1+2cos^(2)x−1)dx=∫(1)/(2cos^(2)x)dx  
=12∫1cos2xdx=12tanx+C=(1)/(2)∫(1)/(cos^(2)x)dx=(1)/(2)tanx+C  
**Hoạt động 4 trang 12 Toán 12 Tập 2**: Tính đạo hàm của hàm số F(x)=axlnaFx=(a^(x))/(lna) (a > 0, a ≠ 1). Từ đó, nêu một nguyên hàm của hàm số f(x) = ax.  
**Lời giải:**  
Với a > 0, a ≠ 1, ta có F′(x)=(axlna)′=1lna(ax)′=1lna⋅(ax⋅lna)=axF^(')x=(a^(x))/(lna)^(')=(1)/(lna)a^(x)^(')=(1)/(lna)⋅a^(x)⋅lna=a^(x) .  
Vậy một nguyên hàm của hàm số f(x) = ax là F(x)=axlnaFx=(a^(x))/(lna)  
  
**Luyện tập 6 trang 12 Toán 12 Tập 2**: Tìm:  
a) ∫4x+2dx∫4^(x+2)dx  
b) ∫(5x+2−ex+1)dx∫5^(x+2)−e^(x+1)dx  
**Lời giải:**  
a) ∫4x+2dx=∫(4x⋅42)dx=42∫4xdx=42⋅4xln4+C=4x+2ln4+C∫4^(x+2)dx=∫4^(x)⋅4^(2)dx=4^(2)∫4^(x)dx=4^(2)⋅(4^(x))/(ln4)+C=(4^(x+2))/(ln4)+C  
b) ∫(5x+2−ex+1)dx=∫5x+2dx−∫ex+1dx∫5^(x+2)−e^(x+1)dx=∫5^(x+2)dx−∫e^(x+1)dx=52∫5xdx−e∫exdx=5^(2)∫5^(x)dx−e∫e^(x)dx  
=52⋅5xln5−e⋅exlne+C=5x+2ln5−ex+1+C=5^(2)⋅(5^(x))/(ln5)−e⋅(e^(x))/(lne)+C=(5^(x+2))/(ln5)−e^(x+1)+C  
**Bài tập**  
**Bài 1 trang 15 Toán 12 Tập 2**: ∫(2sinx−3cosx)dx∫2sinx−3cosxdx bằng:  
A. 2cos x – 3sin x + C.  
B. 2cos x + 3sin x + C.  
C. – 2cos x + 3sin x + C.  
D. – 2cos x – 3sin x + C.  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: D**  
Ta có ∫(2sinx−3cosx)dx=2∫sinxdx−3∫cosxdx=−2cosx−3sinx+C∫2sinx−3cosxdx=2∫sinxdx−3∫cosxdx=−2cosx−3sinx+C  
  
**Bài 2 trang 15 Toán 12 Tập 2**: ∫7xdx∫7^(x)dx bằng:  
A. 7x ∙ ln7 + C.  
B. 7x+1x+1+C(7^(x+1))/(x+1)+C.  
C. 7xln7+C(7^(x))/(ln7)+C.  
D. 7x + C.  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: C**  
Ta có ∫7xdx=7xln7+C∫7^(x)dx=(7^(x))/(ln7)+C  
  
**Bài 3 trang 15 Toán 12 Tập 2**: Nguyên hàm của hàm số f(x)=3x√xfx=(3x)/(√(x)) bằng:  
  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: D**  
Ta có ∫f(x)dx=∫3x√xdx=∫3√xdx=3∫x12dx∫fx dx=∫(3x)/(√(x)) dx=∫3√(x)dx=3∫x^((1)/(2))dx  
=3⋅x12+112+1+C=2x32+C=2x√x+C=3⋅(x^((1)/(2)+1))/((1)/(2)+1)+C=2x^((3)/(2))+C=2x√(x)+C  
**Bài 4 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Nguyên hàm của hàm số f(x) = 1 – tan2 x bằng:  
A. 2 – tan x + C.  
B. 2x – tan x + C.  
C. x−tan3x3+Cx−(tan^(3)x)/(3)+C.  
D. – 2 tan x + C.  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: B**  
Ta có ∫(1−tan2x)dx=∫[2−(1+tan2x)]dx∫1−tan^(2)xdx=∫2−1+tan^(2)xdx=∫(2−1cos2x)dx=∫2−(1)/(cos^(2)x)dx  
=∫2dx−∫1cos2xdx=∫2dx−∫(1)/(cos^(2)x)dx= 2x – tan x + C.  
  
**Bài 5 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Tìm:  
  
**Lời giải:**  
  
  
**Bài 6 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Tìm:  
  
**Lời giải:**  
  
  
**Bài 7 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số  
v(t) = – 0,1t3 + t2,  
trong đó t tính theo tuần, v(t) tính bằng centimét/tuần. Gọi h(t) (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t (*Nguồn: A. Bigalke et aL, Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016*).  
a) Viết công thức xác định hàm số h(t) (t ≥ 0).  
b) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài bao lâu?  
c) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là bao nhiêu centimét?  
d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét?  
**Lời giải:**  
a) Hàm số h(t) là một nguyên hàm của hàm số v(t).  
Ta có ∫v(t)dt=∫(−0,1t3+t2)dt=−0,1∫t3dt+∫t2dt=−0,025t4+t33+C∫vtdt=∫−0,1t^(3)+t^(2)dt=−0,1∫t^(3)dt+∫t^(2)dt=−0,025t^(4)+(t^(3))/(3)+C .  
Suy ra h(t)=−0,025t4+t33+Cht=−0,025t^(4)+(t^(3))/(3)+C .  
Vì cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên h(0) = 5, suy ra C = 5.  
Vậy công thức xác định hàm số h(t) là: h(t)=−0,025t4+t33+5(t≥0)ht=−0,025t^(4)+(t^(3))/(3)+5  t≥0 .  
b) Xét hàm số h(t)=−0,025t4+t33+5(t≥0)ht=−0,025t^(4)+(t^(3))/(3)+5  t≥0 .  
Ta có h*'*(t) = v(t) = – 0,1t3 + t2; h*'*(t) = 0 khi t = 0 hoặc t = 10.  
Bảng biến thiên của hàm số h(t) trên [0; + ∞) như sau:  
  
Từ bảng biến thiên ta thấy giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài 10 tuần.  
c) Từ bảng biến thiên ở câu b, ta thấy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là 2653(265)/(3) cm.  
d) Xét hàm tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua: v(t) = – 0,1t3 + t2 (t ≥ 0).  
Ta có v*'*(t) = – 0,3t2 + 2t; v*'*(t) = 0 khi t = 0 hoặc t = 203(20)/(3) .  
Bảng biến thiên của hàm số v(t) trên [0; + ∞) như sau:  
  
Từ bảng biến thiên ta suy ra vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao 40027(400)/(27) cm.  
  
**Bài 8 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi P(t) là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t, trong đó t tính theo ngày (0 ≤ t ≤ 10). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số P*'*(t) = k√tk√(t), trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn (*Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014*). Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).  
**Lời giải:**  
Hàm số P(t) là một nguyên hàm của hàm số P*'*(t).  
Ta có ∫P′(t)dt=∫k√tdt=k∫t12dt=2k3⋅t32+C=2k3t√t+C∫P^(')tdt=∫k√(t)dt=k∫t^((1)/(2))dt=(2k)/(3)⋅t^((3)/(2))+C=(2k)/(3)t√(t)+C .  
Suy ra P(t)=2k3t√t+CPt=(2k)/(3)t√(t)+C .  
Quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn nên với t = 0 thì P = 500 hay P(0) = 500, suy ra 2k3⋅0⋅√0+C=500(2k)/(3)⋅0⋅√(0)+C=500 , do đó C = 500.  
Suy ra P(t)=2k3t√t+500Pt=(2k)/(3)t√(t)+500 .  
Vì sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn, tức là khi t = 1 thì P = 600, hay P(1) = 600, suy ra 2k3⋅1⋅√1+500=600(2k)/(3)⋅1⋅√(1)+500=600 , do đó k = 150.  
Khi đó, công thức tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t là:  
P(t)=2⋅1503t√t+500=100t√t+500(0≤t≤10)Pt=(2⋅150)/(3)t√(t)+500=100t√(t)+500    0≤t≤10.  
Vậy số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là:  
P(7)=100⋅7√7+500≈2352P7=100⋅7√(7)+500≈2 352 (vi khuẩn).