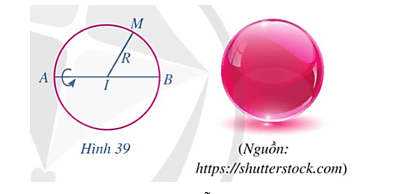
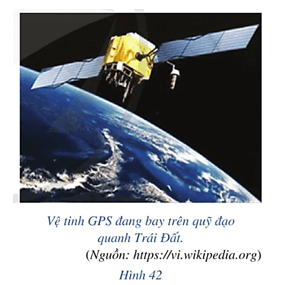
# Bài 3: Phương trình mặt cầu

**Giải Toán 12 Bài 3: Phương trình mặt cầu**  
**Câu hỏi khởi động trang 81 Toán 12 Tập 2**: Hình 38 mô tả một mặt cầu trong không gian.  
  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình của mặt cầu được lập như thế nào?  
**Lời giải:**  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình của mặt cầu tâm I(a; b; c) bán kính R là:  
(x – a)2 + (y – b)2 + (z – c)2 = R2.  
  
**Hoạt động 1 trang 81 Toán 12 Tập 2**: Nếu quay đường tròn tâm I bán kính R quanh đường kính AB một vòng (Hình 39) thì hình tạo thành được gọi là mặt cầu. Những điểm thuộc mặt cầu đó cách I một khoảng bằng bao nhiêu?  
  
**Lời giải:**  
Những điểm thuộc mặt cầu đó cách I một khoảng bằng R.  
**Luyện tập 1 trang 82 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm I(1; 2; 3) và mặt cầu tâm I đi qua điểm A(0; 4; 5). Tính đường kính của mặt cầu đó.  
**Lời giải:**  
Mặt cầu tâm I đi qua điểm A nên bán kính của mặt cầu tâm I là:  
R = IA = √(0−1)2+(4−2)2+(5−3)2=3√(0−1^(2)+4−2^(2)+5−3^(2))=3  
Đường kính của mặt cầu đó bằng 2R = 6.  
  
**Hoạt động 2 trang 82 Toán 12 Tập 2**: Cho hai điểm M(x; y; z) và I(a; b; c).  
a) Viết công thức tính khoảng cách giữa hai điểm M và I.  
b) Nêu mối liên hệ giữa x, y, và z để điểm M nằm trên mặt cầu tâm I bán kính R.  
**Lời giải:**  
a) IM = √(x−a)2+(y−b)2+(z−c)2√(x−a^(2)+y−b^(2)+z−c^(2)).  
b) Điểm M nằm trên mặt cầu tâm I bán kính R khi IM = R, tức là √(x−a)2+(y−b)2+(z−c)2√(x−a^(2)+y−b^(2)+z−c^(2)) = R  
  
**Luyện tập 2 trang 82 Toán 12 Tập 2**: Tìm tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình: x2 + (y + 5)2 + (z + 1)2 = 2  
**Lời giải:**  
Ta có x2 + (y + 5)2 + (z + 1)2 = 2 ⇔ (x – 0)2 + [y – (– 5)]2 + [z – (– 1)]2 = (√2)2√(2)^(2).  
Vậy mặt cầu đã cho có tâm I(0; – 5; – 1) và bán kính R = √2√(2)  
  
**Luyện tập 3 trang 82 Toán 12 Tập 2**: Viết phương trình của mặt cầu, biết:  
a) Tâm O bán kính R với O là gốc tọa độ;  
b) Đường kính AB với A(1; 2; 1), B(3; 4; 7).  
**Lời giải:**  
a) Phương trình mặt cầu tâm O bán kính R là:  
x2 + y2 + z2 = R2.  
b) Mặt cầu đường kính AB có tâm I là trung điểm của AB.  
Tọa độ điểm I là xI=1+32=2;yI=2+42=3;zI=1+72=4x\_(I)=(1+3)/(2)=2;  y\_(I)=(2+4)/(2)=3; z\_(I)=(1+7)/(2)=4. Suy ra I(2; 3; 4).  
Bán kính của mặt cầu là R = IA = √(1−2)2+(2−3)2+(1−4)2=√11√(1−2^(2)+2−3^(2)+1−4^(2))=√(11).  
Phương trình mặt cầu đường kính AB là:  
(x – 2)2 + (y – 3)2 + (z – 4)2 = 11.  
**Luyện tập 4 trang 83 Toán 12 Tập 2**: Chứng minh rằng phương trình  
x2 + y2 + z2 – 6x – 2y – 4z – 11 = 0 là phương trình của một mặt cầu. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.  
**Lời giải:**  
*Cách 1:*  
Ta có x2 + y2 + z2 – 6x – 2y – 4z – 11 = 0  
⇔ x2 – 2 ∙ 3 ∙ x + 9 + y2 – 2 ∙ 1 ∙ y + 1 + z2 – 2 ∙ 2 ∙ z + 4 = 9 + 1 + 4 + 11  
⇔ (x – 3)2 + (y – 1)2 + (z – 2)2 = 25.  
Vậy phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu có tâm I(3; 1; 2) và bán kính R = √25√(25) = 5.  
*Cách 2:*  
Ta có x2 + y2 + z2 – 6x – 2y – 4z – 11 = 0  
⇔ x2 + y2 + z2 – 2 ∙ 3 ∙ x – 2 ∙ 1 ∙ y – 2 ∙ 2 ∙ z – 11 = 0  
Khi đó a2 + b2 + c2 – d = 32 + 12 + 22 – (– 11) = 25 > 0.  
Vậy phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu có tâm I(3; 1; 2) và bán kính R = √25√(25) = 5.  
**Luyện tập 5 trang 85 Toán 12 Tập 2**: Trong Ví dụ 6, giả sử người đi biển di chuyển theo đường thẳng từ vị trí I(21; 35; 50) đến vị trí D(5 121; 658; 0). Tìm vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển còn có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.  
**Lời giải:**  
Đường thẳng ID đi qua điểm I và nhận −→ID=(5100;623;−50)ID→=5 100;623; −50 làm vectơ chỉ phương.  
Phương trình tham số của đường thẳng ID là ⎧⎪⎨⎪⎩x=21+5100ty=35+623tz=50−50tx=21+5100ty=35+623tz=50−50t (t là tham số).  
Giả sử H là vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Khi đó IH = R.  
Ta có H ∈ ID nên gọi tọa độ điểm H(21 + 5 100t; 35 + 623t; 50 – 50t).  
−→IH=(5100t;623t;−50t)IH→=5100t; 623t;−50t  
IH = R ⇔√(5100t)2+(623t)2+(−50t)2=4000⇔√(5100t^(2)+623t^(2)+−50t^(2))=4000  
⇔√26400629t2=4000⇔√(26 400 629t^(2))=4000  
⇔ t ≈ ± 0,78.  
+ Với t ≈ 0,78, ta có H(3 999; 520,94; 11), −→IHIH→ = (3 978; 485,94; – 39).  
Khi đó −→ID=5039−→IHID→=(50)/(39)IH→ nên hai vectơ −→ID,−→IHID→, IH→ cùng hướng, vậy thỏa mãn H thuộc đoạn thẳng ID.  
+ Với t ≈ – 0,78, ta có H(– 3 957; – 450,94; 89), −→IHIH→ = (– 3 978; – 485,94; 39).  
Khi đó −→ID=−5039−→IHID→=−(50)/(39)IH→ nên hai vectơ −→ID,−→IHID→, IH→ ngược hướng, vậy H không thuộc đoạn thẳng ID.  
Vậy vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng ID sao cho người đi biển còn có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng là điểm H(3 999; 520,94; 11).  
**Bài tập**  
  
**Bài 1 trang 85 Toán 12 Tập 2**: Tâm của mặt cầu (S): (x – 2)2 + (y – 3)2 + (z + 4)2 = 16 có tọa độ là:  
A. (– 2; – 3; 4).  
B. (2; 3; – 4).  
C. (2; – 3; – 4).  
D. (2; – 3; 4).  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: B**  
Tâm của mặt cầu (S): (x – 2)2 + (y – 3)2 + (z + 4)2 = 16 có tọa độ là (2; 3; – 4).  
  
**Bài 2 trang 85 Toán 12 Tập 2**: Bán kính của mặt cầu (S): (x – 1)2 + (y – 2)2 + (z – 3)2 = 9 bằng:  
A. 3.  
B. 9.  
C. 81.  
D. √3√(3).  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: A**  
Bán kính của mặt cầu (S): (x – 1)2 + (y – 2)2 + (z – 3)2 = 9 bằng √9=3√(9)=3.  
**Bài 3 trang 86 Toán 12 Tập 2**: Mặt cầu (S) tâm I(– 5; – 2; 3) bán kính 4 có phương trình là:  
A. (x – 5)2 + (y – 2)2 + (z + 3)2 = 4.  
B. (x – 5)2 + (y – 2)2 + (z + 3)2 = 16.  
C. (x + 5)2 + (y + 2)2 + (z – 3)2 = 4.  
D. (x + 5)2 + (y + 2)2 + (z – 3)2 = 16.  
**Lời giải:**  
**Đáp án đúng là: D**  
Mặt cầu (S) tâm I(– 5; – 2; 3) bán kính 4 có phương trình là:  
(x + 5)2 + (y + 2)2 + (z – 3)2 = 16.  
  
**Bài 4 trang 86 Toán 12 Tập 2**: Cho mặt cầu có phương trình (x – 1)2 + (y + 2)2 + (z – 7)2 = 100.  
a) Xác định tâm và bán kính của mặt cầu.  
b) Mỗi điểm A(1; 1; 1), B(9; 4; 7), C(9; 9; 10) nằm trong, nằm ngoài hay nằm trên mặt cầu đó?  
**Lời giải:**  
a) Ta có (x – 1)2 + (y + 2)2 + (z – 7)2 = 100 ⇔ (x – 1)2 + [y – (– 2)]2 + (z – 7)2 = 102.  
Mặt cầu đã cho có tâm I(1; – 2; 7) và bán kính R = 10.  
b) Do IA = √(1−1)2+(1−(−2))2+(1−7)2=3√5√(1−1^(2)+1−−2^(2)+1−7^(2))=3√(5) < 10 nên điểm A(1; 1; 1) nằm trong mặt cầu đó.  
Do IB = √(9−1)2+(4−(−2))2+(7−7)2=√100√(9−1^(2)+4−−2^(2)+7−7^(2))=√(100) = 10 nên điểm B(9; 4; 7) nằm trên mặt cầu đó.  
Do IC = √(9−1)2+(9−(−2))2+(10−7)2=√194√(9−1^(2)+9−−2^(2)+10−7^(2))=√(194) > 10 nên điểm C(9; 9; 10) nằm ngoài mặt cầu đó.  
  
**Bài 5 trang 86 Toán 12 Tập 2**: Cho phương trình x2 + y2 + z2 – 4x – 2y – 10z + 2 = 0  
Chứng minh rằng phương trình trên là phương trình của một mặt cầu. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu đó.  
**Lời giải:**  
Ta có x2 + y2 + z2 – 4x – 2y – 10z + 2 = 0  
⇔ x2 – 2 ∙ 2 ∙ x + 4 + y2 – 2y + 1 + z2 – 2 ∙ 5 ∙ z + 25 = 4 + 1 + 25 – 2  
⇔ (x – 2)2 + (y – 1)2 + (z – 5)2 = 28.  
Vậy phương trình đã cho là phương trình mặt cầu tâm I(2; 1; 5) và bán kính R=√28=2√7R=√(28)=2√(7)  
  
**Bài 6 trang 86 Toán 12 Tập 2**: Lập phương trình mặt cầu (S) trong mỗi trường hợp sau:  
a) (S) có tâm I(3; – 7; 1) và bán kính R = 2;  
b) (S) có tâm I(– 1; 4; – 5) và đi qua điểm M(3; 1; 2);  
c) (S) có đường kính là đoạn thẳng CD với C(1; – 3; – 1) và D(– 3; 1; 2).  
**Lời giải:**  
a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I(3; – 7; 1) và bán kính R = 2 là:  
(x – 3)2 + (y + 7)2 + (z – 1)2 = 4.  
b) Ta có R = IM = √(3−(−1))2+(1−4)2+(2−(−5))2=√74√(3−−1^(2)+1−4^(2)+2−−5^(2))=√(74).  
Phương trình mặt cầu (S) có tâm I(– 1; 4; – 5) và đi qua điểm M(3; 1; 2) là:  
(x + 1)2 + (y – 4)2 + (z + 5)2 = 74.  
c) Tâm của mặt cầu (S) đường kính CD là trung điểm I của đoạn thẳng CD.  
Ta có xI=1+(−3)2=−1;yI=(−3)+12=−1;zI=(−1)+22=12x\_(I)=(1+−3)/(2)=−1; y\_(I)=(−3+1)/(2)=−1; z\_(I)=(−1+2)/(2)=(1)/(2). Suy ra I(−1;−1;12)I−1;−1;(1)/(2).  
Bán kính R = IC = √(1−(−1))2+(−3−(−1))2+(−1−12)2=√412√(1−−1^(2)+−3−−1^(2)+−1−(1)/(2)^(2))=(√(41))/(2).  
Phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn thẳng CD là:  
(x + 1)2 + (y + 1)2 +(z−12)2z−(1)/(2)^(2) = 414(41)/(4).  
  
**Bài 7 trang 86 Toán 12 Tập 2**: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình 42). Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, toạ độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy, điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.  
  
Ta xét một ví dụ cụ thể như sau:  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn vệ tinh A(3; – 1; 6), B(1; 4; 8), C(7; 9; 6), D(7; – 15; 18). Tìm tọa độ của điểm M trong không gian biết khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là MA = 6, MB = 7, MC = 12, MD = 24.  
**Lời giải:**  
Gọi tọa độ điểm M là M(x; y; z).  
Ta có MA = √(3−x)2+(−1−y)2+(6−z)2=6√(3−x^(2)+−1−y^(2)+6−z^(2))=6;  
MB =√(1−x)2+(4−y)2+(8−z)2=7√(1−x^(2)+4−y^(2)+8−z^(2))=7;  
MC = √(7−x)2+(9−y)2+(6−z)2√(7−x^(2)+9−y^(2)+6−z^(2)) = 12;  
MD = √(7−x)2+(−15−y)2+(18−z)2=24√(7−x^(2)+−15−y^(2)+18−z^(2))=24.  
Từ đó ta có hệ phương trình ⎧⎪  
⎪  
⎪  
⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪  
⎪  
⎪  
⎪⎩(3−x)2+(−1−y)2+(6−z)2=36(1)(1−x)2+(4−y)2+(8−z)2=49(2)(7−x)2+(9−y)2+(6−z)2=144(3)(7−x)2+(−15−y)2+(18−z)2=576(4)3−x^(2)+−1−y^(2)+6−z^(2)=36            11−x^(2)+4−y^(2)+8−z^(2)=49               27−x^(2)+9−y^(2)+6−z^(2)=144            37−x^(2)+−15−y^(2)+18−z^(2)=576   4.  
Lấy (3) – (1) ta được: (7 – x)2 – (3 – x)2 + (9 – y)2 – (– 1 – y)2 = 144 – 36  
⇔ – 8x – 20y = – 12 ⇔ 2x + 5y = 3 ⇔ x = 3−5y2(3−5y)/(2) (5).  
Lấy (4) – (3) ta được: (– 15 – y)2 – (9 – y)2 + (18 – z)2 – (6 – z)2 = 576 – 144  
⇔ 48y – 24z = 0 ⇔ 2y – z = 0 ⇔ z = 2y (6).  
Thay (5) và (6) vào (2) ta được: (1−3−5y2)21−(3−5y)/(2)^(2)+ (4 – y)2 + (8 – 2y)2 = 49  
⇔ 45y2 – 170y + 125 = 0 ⇔ y = 1 hoặc y = 259(25)/(9).  
+ Với y = 1 thì x = – 1, z = 2. Khi đó M(– 1; 1; 2).  
Thử lại bằng cách thay x = – 1, y = 1, z = 2 vào các phương trình (1), (2), (3), (4) ta thấy thỏa mãn.  
+ Với y = 259(25)/(9) thì x = −499−(49)/(9), z = 509(50)/(9). Khi đó M (−499;259;509)−(49)/(9); (25)/(9);(50)/(9).  
Thử lại bằng cách thay x = −499−(49)/(9), y =259(25)/(9), z = 509(50)/(9) vào các phương trình (1), (2), (3), (4) ta thấy thỏa mãn.  
Vậy M(– 1; 1; 2) là điểm cần tìm.