# Lý thuyết Bài 1: Nguyên hàm

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 1: Nguyên hàm- Cánh diều**  
**A. Lý thuyết Nguyên hàm**  
**1. Khái niệm nguyên hàm**  
● **Định nghĩa**: Với K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực ℝ, ta có:  
Cho hàm số f(x) xác định trên K. Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu F*'*(x) = f(x) với mọi x thuộc K.  
**Ví dụ 1.** Hàm số F(x) = x44(x^(4))/(4) là nguyên hàm của hàm số nào? Vì sao?  
**Hướng dẫn giải**  
Hàm số F(x) = x44(x^(4))/(4) là nguyên hàm của hàm số f(x) = x3 trên ℝ vì (x44)′=x3(x^(4))/(4)^(')=x^(3) với mọi x ∈ ℝ.  
● **Định lí**:  
Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực ℝ.  
Giả sử hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K. Khi đó:  
a) Với mỗi hằng số C, hàm số G(x) = F(x) + C cũng là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K.  
b) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm H(x) của hàm số f(x) trên K thì tồn tại hằng số C sao cho H(x) = F(x) + C với mọi x thuộc K.  
**Ví dụ 2.** Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) = cos x trên ℝ.  
**Hướng dẫn giải**  
Do (sin x)*'* = cos x nên sin x là một nguyên hàm của hàm số f(x) = cos x trên ℝ.  
Vậy mọi nguyên hàm của hàm số f(x) = cos x đều có dạng sin x + C, với C là một hằng số.  
● Họ (hay tập hợp) tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) trên K được kí hiệu là  
∫f(x)dx∫fxdx.  
**Nhận xét***:*  
+ Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K thì mọi nguyên hàm của hàm số f(x) trên K đều có dạng F(x) + C với C là một hằng số. Vì vậy,  
∫f(x)dx=F(x)+C∫fxdx=Fx+C.  
+ Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.  
Ta có: ∫F′(x)dx=F(x)+C∫F^(')xdx=Fx+C .  
**Chú ý***:* Biểu thức f(x)dx gọi là vi phân của nguyên hàm F(x), kí hiệu là dF(x). Vậy dF(x) = F*'*(x)dx = f(x)dx.  
**Nhận xét:** ∫0dx=C∫0dx=C và nếu ta quy ước ∫1dx=∫dx∫1dx=∫dx thì ∫dx=x+C∫dx=x+C .  
**Ví dụ 3.** Chứng tỏ rằng ∫kx3dx=k4x4+C(k≠0)∫kx^(3)dx=(k)/(4)x^(4)+C  k≠0 .  
**Hướng dẫn giải**  
Do (k4x4)′=kx3(k)/(4)x^(4)^(')=kx^(3) nên k4x4(k)/(4)x^(4) là một nguyên hàm của hàm số f(x) = kx3 trên ℝ.  
Vậy ∫kx3dx=k4x4+C(k≠0)∫kx^(3)dx=(k)/(4)x^(4)+C  k≠0 .  
**2. Tính chất của nguyên hàm**  
Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của tập số thực ℝ.  
Cho các hàm số f(x), g(x) liên tục trên K.  
● **Tính chất 1:** ∫kf(x)dx=k∫f(x)dx∫kfxdx=k∫fxdx với k là hằng số khác 0.  
**● Tính chất 2:**  
∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx∫fx+gxdx=∫fxdx+∫gxdx  
∫[f(x)−g(x)]dx=∫f(x)dx−∫g(x)dx∫fx−gxdx=∫fxdx−∫gxdx  
**Ví dụ 4.** Tìm ∫(3x3−4x+7)dx∫3x^(3)−4x+7dx .  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có: ∫(3x3−4x+7)dx∫3x^(3)−4x+7dx=34∫(4x3)dx−2∫(2x)dx+7∫dx=(3)/(4)∫4x^(3)dx−2∫2xdx+7∫dx  
=34∫(x4)′dx−2∫(x2)′dx+7∫dx=(3)/(4)∫x^(4)^(')dx−2∫x^(2)^(')dx+7∫dx=34x4−2x2+7x+C=(3)/(4)x^(4)−2x^(2)+7x+C  
  
**B. Bài tập Nguyên hàm**  
**Bài 1. ∫sinxdx∫sinxdx** bằng:  
A. – cos x + C.  
B. cos x + C.  
C. sin x + C.  
D. – sin x + C.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: A**  
Ta có: ∫sinxdx∫sinxdx = ∫(−cosx)′dx=−cosx+C∫−cosx^(')dx=−cosx+C .  
**Bài 2.** Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:  
a) x6;  
b) 6x5 + 5x4;  
c) sin x – cos x.  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫x6dx=∫17(7x6)dx=17∫(x7)′dx=x77+C∫x^(6)dx=∫(1)/(7)7x^(6)dx=(1)/(7)∫x^(7)^(')dx=(x^(7))/(7)+C .  
b) ∫(6x5+5x4)dx=∫6x5dx+∫5x4dx=∫(x6)′dx+∫(x5)′dx∫6x^(5)+5x^(4)dx=∫6x^(5)dx+∫5x^(4)dx=∫x^(6)^(')dx+∫x^(5)^(')dx = x6 + x5 + C.  
c) ∫(sinx−cosx)dx=∫sinxdx−∫cosxdx∫sin x−cosxdx=∫sinxdx−∫cosxdx  
 =−∫(cosx)′dx−∫(sinx)′dx=−∫cosx^(')dx−∫sinx^(')dx= – cos x – sin x + C.  
**Bài 3.** Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) = 3x2 + 4x3, biết F(0) = 1.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có: ∫(3x2+4x3)dx=∫3x2dx+∫4x3dx∫3x^(2)+4x^(3)dx=∫3x^(2)dx+∫4x^(3)dx=∫(x3)′dx+∫(x4)′dx=∫x^(3)^(')dx+∫x^(4)^(')dx = x3 + x4 + C.  
Vì F(0) = 1 nên 03 + 04 + C = 1, suy ra C = 1.  
Vậy F(x) = x3 + x4 + 1.  
**Bài 4.** Một quả bóng được ném lên từ độ cao 20 m với vận tốc được tính bởi công thức v(t) = – 9,8t + 16 (m/s).  
a) Viết công thức tính độ cao của quả bóng theo thời gian t.  
b) Sau bao nhiêu lâu kể từ khi ném lên thì quả bóng chạm đất?  
**Hướng dẫn giải**  
a) Gọi h(t) là độ cao của quả bóng tại thời điểm t (h(t) tính theo mét, t tính theo giây).  
Suy ra: h*'*(t) = v(t), do đó h(t) là một nguyên hàm của v(t).  
Ta có: ∫(−9,8t+16)dt=−4,9t2+16t+C∫−9,8t+16dt=−4,9t^(2)+16t+C .  
Suy ra h(t) = – 4,9t2 + 16t + C.  
Mà quả bóng được ném lên từ độ cao 20 m, nghĩa là tại thời điểm t = 0 thì h = 20 hay h(0) = 20. Suy ra C = 20.  
Vậy công thức tính độ cao h(t) của quả bóng tại thời điểm t là:  
h(t) = – 4,9t2 + 16t + 20.  
b) Khi quả bóng chạm đất thì h(t) = 0.  
Ta có: – 4,9t2 + 16t + 20 = 0. Giải phương trình ta được t ≈ – 0,96; t ≈ 4,23.  
Mà t > 0 nên t ≈ 4,23.  
Vậy sau khoảng 4,23 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.  
**Bài 5.** Hàm số F(x) = x2 – x + 1 là một nguyên hàm của hàm số:  
A. f(x) = 2x + 1.  
B. f(x) = 2x – 1.  
C. f(x) = x3 – x2 + x.  
D. f(x) = x33−x22+x(x^(3))/(3)−(x^(2))/(2)+x.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Ta có: F*'*(x) = (x2 – x + 1)*'* = 2x – 1. Suy ra f(x) = F*'*(x) = 2x – 1 với mọi x thuộc ℝ.  
Vậy hàm số F(x) = x2 – x + 1 là một nguyên hàm của hàm số f(x) = 2x – 1 trên ℝ.