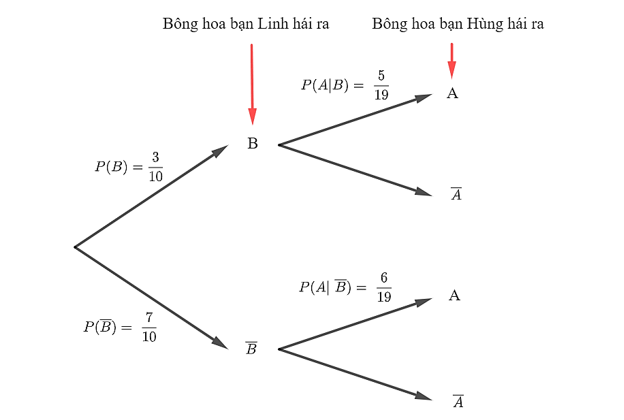
# Lý thuyết Bài 2: Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 2: Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes- Cánh diều**  
**A. Lý thuyết Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes**  
**1. Công thức xác suất toàn phần**  
*Công thức xác suất toàn phần*:  
Cho hai biến cố A, B với 0 < P(B) < 1, ta có:  
P(A) = P(A ∩∩ B) + P(A ∩∩ ¯¯¯BB¯) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ ).  
**Ví dụ 1.** Một công ty thời trang có hai chi nhánh cùng sản xuất một loại áo thời trang, trong đó có 45% áo thời trang ở chi nhánh I và 55% áo thời trang ở chi nhánh II. Tại chi nhánh I có 70% áo chất lượng cao và tại chi nhánh II có 80% áo chất lượng cao (kích thước và hình dạng bề ngoài của các áo là như nhau). Chọn ngẫu nhiên 1 áo thời trang. Xác suất chọn được áo chất lượng cao là bao nhiêu?  
**Hướng dẫn giải**  
Xét các biến cố:  
A: “Chọn được áo chất lượng cao”;  
B: “Chọn được áo ở chi nhánh I”;  
¯¯¯BB¯: “Chọn được áo ở chi nhánh II”.  
Từ giả thiết, ta có:  
P(B) = 0,45; P(A | B) = 0,7; P(¯¯¯BB¯ ) = 0,55; P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 0,8.  
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 0,45 ∙ 0,7 + 0,55 ∙ 0,8 = 0,755.  
Vậy xác suất chọn được áo chất lượng cao là 0,755.  
**Ví dụ 2.** Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 12H, thầy giáo treo 20 bông hoa trên cành cây, trong đó có 6 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Linh hái bông hoa đầu tiên, sau đó bạn Hùng hái bông hoa thứ hai.  
a) Vẽ sơ đồ hình cây biểu thị tình huống trên.  
b) Từ đó, tính xác suất bạn Hùng hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.  
**Hướng dẫn giải**  
Xét hai biến cố:  
A: “Bông hoa bạn Hùng hái được chứa phiếu có thưởng”;  
B: “Bông hoa bạn Linh hái được chứa phiếu có thưởng”,  
Khi đó, ta có:  
P(B) =620=310(6)/(20)=(3)/(10) ; P(¯¯¯BB¯ ) = 1 – P(B) = 1−310=7101−(3)/(10)=(7)/(10) ;  
P(A | B) = 519(5)/(19) , P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 619(6)/(19) .  
a) Sơ đồ hình cây biểu thị tình huống đã cho là:  
  
b) Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A |¯¯¯BB¯ ) = 310⋅519+710⋅619=310(3)/(10)⋅(5)/(19)+(7)/(10)⋅(6)/(19)=(3)/(10) .  
Vậy xác suất bạn Hùng hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng là =310(3)/(10) 0,3.  
**2. Công thức Bayes**  
*Công thức Bayes*:  
Với hai biến cố A, B mà P(A) > 0, P(B) > 0, ta có:  
P(B|A)=P(B)⋅P(A|B)P(A)PB|A=(PB⋅PA|B)/(PA).  
**Nhận xét:** Cho hai biến cố A, B với P(A) > 0, 0 < P(B) < 1. Do  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ )  
nên công thức Bayes còn có dạng: P(B|A)=P(B)⋅P(A|B)P(B)⋅P(A|B)+P(¯¯¯B)⋅P(A∣∣¯¯¯B)PB|A=(PB⋅PA|B)/(PB⋅PA|B+PB¯⋅PA|B¯) .  
**Ví dụ 3.** Cho hai biến cố A, B sao cho P(A) = 0,4; P(B) = 0,8; P(A | B) = 0,2.  
Tính P(B | A).  
**Hướng dẫn giải**  
Áp dụng công thức Bayes, ta có:  
P(B|A)=P(B)⋅P(A|B)P(A)=0,8⋅0,20,4=0,4PB|A=(PB⋅PA|B)/(PA)=(0,8⋅0,2)/(0,4)=0,4.  
**Ví dụ 4.** Từ một hộp có 70 quả bóng trắng và 80 quả bóng đen. Người ta rút ngẫu nhiên không hoàn lại từng quả một và rút hai lần. Tính xác suất để lần đầu rút được quả bóng trắng biết lần thứ hai cũng rút được quả bóng trắng.  
**Hướng dẫn giải**  
Xét các biến cố:  
A: “Lần đầu rút được quả bóng trắng”.  
B: “Lần thứ hai rút được quả bóng trắng”.  
Ta cần tính P(A | B).  
Theo đề bài, ta có: P(A)=70150PA=(70)/(150) ; P(B|A)=69149PB|A=(69)/(149) .  
Suy ra P(¯¯¯A)=80150PA¯=(80)/(150) ; P(B∣∣¯¯¯A)=70149PB|A¯=(70)/(149) .  
Do đó P(B) = P(A) ∙ P(B | A) + P(¯¯¯AA¯ ) ∙ P(B | ¯¯¯AA¯ ) =70150⋅69149+80150⋅70149=715=(70)/(150)⋅(69)/(149)+(80)/(150)⋅(70)/(149)=(7)/(15) .  
Suy ra P(A|B)=P(A)⋅P(B|A)P(B)=70150⋅69149:715=69149PA|B=(PA⋅PB|A)/(PB)=(70)/(150)⋅(69)/(149):(7)/(15)=(69)/(149)  
  
**B. Bài tập Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes**  
**Bài 1.** Nếu hai biến cố A và B thỏa mãn P(A) = 0,8; P(B) = 0,3; P(A | B) = 0,7 thì P(B | A) bằng  
**A.** 0,26.  
**B.** 0,2.  
**C.** 0,2625.  
**D.** 0,5.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Áp dụng công thức Bayes, ta có:  
P(B|A)=P(B)⋅P(A|B)P(A)=0,3⋅0,70,8PB|A=(PB⋅PA|B)/(PA)=(0,3⋅0,7)/(0,8)= 0,2625.  
**Bài 2.** Tại một địa phương có 1 000 người cao tuổi, bao gồm 460 nam và 540 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?  
**Hướng dẫn giải**  
Xét các biến cố:  
A: “Chọn được người không bị bệnh tiểu đường”;  
B: “Chọn được người cao tuổi là nam”;  
¯¯¯BB¯: “Chọn được người cao tuổi là nữ”.  
Từ giả thiết, ta có: P(B) = 4601000=0,46(460)/(1 000)=0,46 ; P(A | B) = 1 – 0,4 = 0,6;  
 P(¯¯¯B)=5401000=0,54PB¯=(540)/(1 000)=0,54 ; P(A |¯¯¯BB¯ ) = 1 – 0,55 = 0,45.  
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 0,46 ∙ 0,6 + 0,54 ∙ 0,45 = 0,519.  
Vậy xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là 0,519.  
**Bài 3.** Có hai chiếc hộp, hộp I có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đen, hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp II.  
a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng.  
b) Giả sử viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Xét các biến cố:  
A: “Lấy được viên bi màu trắng từ hộp II”.  
B: “Lấy được viên vi màu trắng từ hộp I bỏ sang hộp II”.  
¯¯¯BB¯: “Lấy được viên bi màu đen từ hộp I bỏ sang hộp II”.  
Theo giả thiết, ta có: P(B)=310PB=(3)/(10)⇒P(¯¯¯B)=710⇒PB¯=(7)/(10) ;  
 P(A|B)=711PA|B=(7)/(11); P(A∣∣¯¯¯B)=611PA|B¯=(6)/(11) .  
Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P( ¯¯¯BB¯) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 310.711+710.611=63110(3)/(10).(7)/(11)+(7)/(10).(6)/(11)=(63)/(110) .  
Vậy xác suất để viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi màu trắng là 63100(63)/(100) .  
b) Gọi N là biến cố “Viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi thuộc hộp I”. Khi đó ta cần tính P(N | A).  
Ta có: P(N) = 111(1)/(11) ; P(A)=63110PA=(63)/(110) . Ta có P(A | N) là xác suất để lấy được viên bi màu trắng từ hộp II, biết rằng viên bi đó thuộc hộp I, ta xét các trường hợp sau:  
● Viên bi được lấy từ hộp I bỏ sang hộp II có màu đen. Khi đó xác suất lấy được viên bi trắng thuộc hộp I bằng 0.  
● Viên bi được lấy từ hộp I bỏ sang hộp II có màu trắng. Khi đó xác suất lấy được viên bi màu trắng thuộc hộp I bằng P(B)=310PB=(3)/(10) .  
Do đó, P(A | N) = 0 + 310(3)/(10)= 310(3)/(10) . Theo công thức Bayes, ta có:  
P(N|A)=P(N)⋅P(A|N)P(A)=111⋅310:63110=121PN|A=(PN⋅PA|N)/(PA)=(1)/(11)⋅(3)/(10):(63)/(110)=(1)/(21).  
Vậy xác suất viên bi được lấy ra từ hộp II là viên bi thuộc hộp I, biết rằng viên bi đó màu trắng, là 121(1)/(21) .  
**Bài 4.** Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 2%; 5%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 90 sản phẩm của nhà máy số I và 110 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó.  
a) Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.  
b) Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao hơn?  
**Hướng dẫn giải**  
a) Xét hai biến cố:  
A: “Linh kiện được lấy ra từ lô hàng là linh kiện tốt”;  
 B: “Linh kiện được lấy ra từ lô hàng do nhà máy I sản xuất”.  
 ¯¯¯BB¯ : “Linh kiện được lấy ra từ lô hàng do nhà máy II sản xuất”.  
Vì lô linh kiện để lẫn lộn 90 sản phẩm của nhà máy số I và 110 sản phẩm của nhà máy số II nên P(B) = 9090+110=0,45(90)/(90+110)=0,45 , suy ra P(¯¯¯B)=1−0,45=0,55PB¯=1−0,45=0,55 .  
Vì tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là: 2%; 5% nên tỉ lệ thành phẩm (linh kiện tốt) của các nhà máy I, II lần lượt là 98%; 95%.  
Do đó P(A | B) = 0,98 và P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 0,95.  
Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt là:  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 0,45 ∙ 0,98 + 0,55 ∙ 0,95 = 0,9635.  
b) Xét biến cố C: “Linh kiện được lấy ra từ lô hàng là linh kiện phế phẩm”.  
Khi đó, ta có C =¯¯¯AA¯ . Suy ra P(C) = P(¯¯¯AA¯ ) = 1 – P(A) = 1 – 0,9635 = 0,0365.  
Theo bài ra ta có: P(C | B) = 2% = 0,02.  
Do đó, nếu linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm thì xác suất sản phẩm đó do nhà máy I sản xuất là: P(B | C) = P(B)⋅P(C|B)P(C)=0,45⋅0,020,0365=1873(PB⋅PC|B)/(PC)=(0,45⋅0,02)/(0,0365)=(18)/(73) .  
Nếu linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm thì xác suất sản phẩm đó do nhà máy II sản xuất là: P( ¯¯¯BB¯| C) = 1 – P(B | C) = 1−1873=55731−(18)/(73)=(55)/(73) .  
Vì 5573>1873(55)/(73)>(18)/(73) nên nếu linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm thì xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là cao hơn.  
**Bài 5.** Nếu hai biến cố A, B thỏa mãn P(B) = 0,3; P(A | B) = 0,4; P(A∣∣¯¯¯B)=0,25PA|B¯=0,25 thì P(A) bằng  
**A.** 0,259.  
**B.** 0,295.  
**C.** 0,7.  
**D.** 0,95.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Vì P(B) = 0,3 suy ra P(¯¯¯BB¯ ) = 1 – P(B) = 1 – 0,3 = 0,7.  
Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:  
P(A) = P(B) ∙ P(A | B) + P(¯¯¯BB¯ ) ∙ P(A | ¯¯¯BB¯ ) = 0,3 ∙ 0,4 + 0,7 ∙ 0,25 = 0,295.