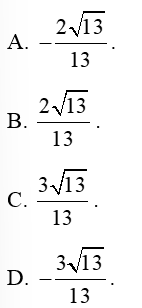
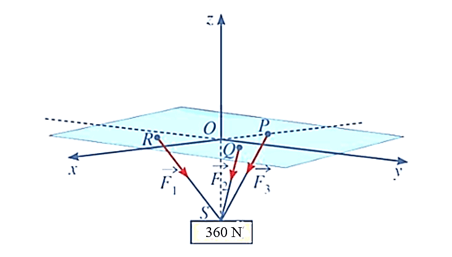
# Lý thuyết Bài 3: Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 3: Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ - Cánh diều**  
**A. Lý thuyết Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ**  
**1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ**  
Nếu →uu→ = (x1; y1; z1) và →vv→ = (x2; y2; z2) thì  
→uu→ + →vv→ = (x1 + x2; y1 + y2; z1 + z2);  
→uu→ − →vv→ = (x1 − x2; y1 − y2; z1 − z2);  
m →uu→ = (mx1; my1; mz1) với m ∈ ℝ.  
**Nhận xét:** Hai vectơ →uu→ = (x1; y1; z1), →vv→ = (x2; y2; z2) (→vv→ ≠ 0) cùng phương khi và chỉ khi có một số thực m sao cho ⎧⎪⎨⎪⎩x1=mx2y1=my2z1=mz2.x\_(1)=mx\_(2)y\_(1)=my\_(2)z\_(1)=mz\_(2).  
**Ví dụ 1:**  
a) Cho →uu→ = (2; 1; 0), →vv→ = (0; 5; −2), →ww→ = (4; 0; 3).  
Tìm tọa độ của vectơ 2→uu→ − 3→vv→ + 4 →ww→.  
b) Cho ba điểm A(−1; −3; −2), B(2; 3; 4), C(3; 5; 6). Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.  
**Lời giải**  
a) Ta có: 2→uu→ = (4; 2; 0); 3→vv→ = (0; 15; −6); 4→ww→ = (16; 0; 12) nên  
2→uu→ − 3→vv→ = (4; −13; 6)  
Do đó 2→uu→ − 3→vv→ + 4→ww→ = (20; −13; 18).  
b) Ta có: −−→ABAB→ = (3; 6; 6) = 3(1; 2; 2);−−→ACAC→ = (4; 8; 8) = 4(1; 2; 2).  
Nhận thấy: −−→ABAB→ = 34−−→AC(3)/(4)AC→ ⇒ Ba điểm A, B, C thẳng hàng.  
**2. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác**  
• Cho hai điểm A(xA; yA; zA) và B(xB; yB; zB). Nếu M(xM; yM; zM) là trung điểm đoạn thẳng AB thì  
 xM = xA+xB2(x\_(A)+x\_(B))/(2) ; yM = yA+yB2(y\_(A)+y\_(B))/(2) ; zM = zA+zB2(z\_(A)+z\_(B))/(2) .  
• Cho tam giác ABC có A(xA; yA; zA), B(xB; yB; zB), C(xC; yC; zC). Nếu G(xG; yG; zG) là trọng tâm tam giác ABC thì  
 xG = xA+xB+xC3(x\_(A)+x\_(B)+x\_(C))/(3); yG = yA+yB+yC3(y\_(A)+y\_(B)+y\_(C))/(3); zG = zA+zB+zC3(z\_(A)+z\_(B)+z\_(C))/(3).  
**Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC có A(2; 4; 3), B(−1; 4; 2), C(5; 1; 4). Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng BC và trọng tâm G của tam giác ABC.  
**Lời giải**  
Do I(xI; yI; zI) là trung điểm của đoạn thẳng BC nên  
xI = −1+52(−1+5)/(2) = 2; yI= 4+12(4+1)/(2) = 52(5)/(2) ; zI ­ = 2+42(2+4)/(2) = 3.  
Vậy I(2;52(5)/(2); 3).  
Do G(xG; yG; zG) là trọng tâm tam giác ABC nên  
xG =2+(−1)+53(2+(−1)+5)/(3) = 2; yG =4+4+13(4+4+1)/(3)= 3; zG = 3+2+43(3+2+4)/(3) = 3.  
Vậy G(2; 3; 3).  
**3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**  
Nếu →uu→ = (x1; y1; z1), →vv→= (x2; y2; z2) thì →uu→ . →vv→ = x1.x2 + y1.y2 + z1.z2.  
**Nhận xét:**  
a) Nếu →aa→ (x; y; z) thì |→aa→ | =√→a.→a√(a→.a→) = √x2+y2+z2√(x^(2)+y^(2)+z^(2)) .  
b) Nếu A(x1; y1; z1) và B(x2; y2; z2) thì  
AB = |−−→ABAB→ | = √(x2− x1)2+ (y2− y1)2+ (z2−z1)2√(x\_(2)− x\_(1)^(2)+ y\_(2)− y\_(1)^(2)+ z\_(2)−z\_(1)^(2)) .  
c) Với hai vectơ →uu→ = (x1; y1; z1) và →vv→ = (x2; y2; z2) khác vectơ →00→ , ta có:  
• →uu→ và →vv→ vuông góc với nhau khi và chỉ khi x1.x2 + y1.y2 + z1.z2 = 0.  
• cos( →uu→, →vv→ ) = →u.→v∣∣→u∣∣.∣∣→v∣∣(u→.v→)/(|u→|.|v→|) = x1.x2+ y1.y2+ z1.z2√x12+y12+z12.√x22+y22+z22(x\_(1).x\_(2)+ y\_(1).y\_(2)+ z\_(1).z\_(2))/(√(x\_(1)^(2)+y\_(1)^(2)+z\_(1)^(2)).√(x\_(2)^(2)+y\_(2)^(2)+z\_(2)^(2))) .  
**Ví dụ 3:**  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(2; 3; 0), B(4; 2; 1), C(2; −1; 1).  
a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.  
b) Tính chu vi của tam giác ABC.  
c) Tính cos ˆBACBAC^.  
**Lời giải**  
a) Ta có: −−→ABAB→ = (2; −1; 1), −−→ACAC→ = (0; −4; 1).  
Suy ra −−→ABAB→ = (2; −1; 1) ≠ k −−→ACAC→= (0; −4k; k) với mọi k ∈ ℝ.  
Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.  
b) Ta có: AB = √22+(−1)2+12√(2^(2)+(−1)^(2)+1^(2)) = √6√(6) .  
 AC = √02+(−4)2+12√(0^(2)+(−4)^(2)+1^(2)) = √17√(17) .  
 BC = √(−2)2+(−3)2+02√((−2)^(2)+(−3)^(2)+0^(2)) =√13√(13) .  
Vậy chu vi của tam giác ABC bằng √6√(6) + √17√(17) + √13√(13) .  
c) Ta có:  
cos ˆBACBAC^ = cos( −−→ABAB→, −−→ACAC→ ) = −−→AB.−−→AC∣∣∣−−→AB∣∣∣.∣∣∣−−→AC∣∣∣(AB→.AC→)/(|AB→|.|AC→|) = 2.0+(−1).(−4)+1.1√6.√17(2.0+(−1).(−4)+1.1)/(√(6).√(17)) = 5√102(5)/(√(102)) = 5√102102(5√(102))/(102) .  
**4. Cách tìm tọa độ của một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước**  
• Ta có định lí sau:  
Cho hai vectơ →uu→ = (x1; y1; z1) và →vv→= (x2; y2; z2) không cùng phương.  
Khi đó, vectơ →ww→ = (y1z2 – y2z1; z1x2 – z2x1; x1y2 – y2x1) vuông góc với cả hai vectơ →uu→ và →vv→ .  
**Nhận xét:**  
• Vectơ →ww→ trong định lí trên còn được gọi là tích có hướng của hai vectơ →uu→ và →vv→ , kí hiệu là →ww→ = [ →uu→, →vv→ ].  
• Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước: ∣∣∣abcd∣∣∣abcd = ad – bc, với a, b, c, d là các số thực.  
Khi đó, hai vectơ →uu→ = (x1; y1; z1) và →vv→ = (x2; y2; z2) ta có:  
[ →uu→,→vv→ ] = (∣∣∣y1z1y2z2∣∣∣;∣∣∣z1x1z2x2∣∣∣;∣∣∣x1y1x2y2∣∣∣)y\_(1)z\_(1)y\_(2)z\_(2);z\_(1)x\_(1)z\_(2)x\_(2);x\_(1)y\_(1)x\_(2)y\_(2) = (y1z2 – y2z1; z1x2 – z2x1; x1y2 – y2x1).  
• Hai vectơ →uu→ , →vv→ không cùng phương khi và chỉ khi vectơ →ww→ = [→uu→ ,→vv→ ] ≠ →00→.  
**Ví dụ 4:**  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ →uu→= (2; 3; 1) và →vv→= (1; 0; 3).  
Hãy chỉ ra tọa độ của một vectơ →ww→ khác →00→ vuông góc với cả hai vectơ →uu→ và →vv→ .  
**Lời giải**  
Ta có:  
[→uu→ , →vv→ ] = (∣∣∣3103∣∣∣;∣∣∣1231∣∣∣;∣∣∣2310∣∣∣)3103;1231;2310 = (9; −5; −3).  
Chọn →ww→ = (9; −5; −3).  
Theo định lí trên, vectơ →ww→ vuông góc với cả hai vectơ →uu→ và→vv→  
  
**B. Bài tập Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ**  
**Bài 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho →aa→= (2; 0; −2); →bb→ = (3; 4; −1). cos(→aa→ ,→bb→ ) là:  
  
**Lời giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Ta có: cos(→aa→ ,→bb→ ) =→a.→b∣∣∣→a∣∣∣.∣∣∣→b∣∣∣(a→.b→)/(|a→|.|b→|) = 2.3+0.4+(−2).(−1)√22+02+(−2)2.√32+42+(−1)2(2.3+0.4+(−2).(−1))/(√(2^(2)+0^(2)+(−2)^(2)).√(3^(2)+4^(2)+(−1)^(2))) = 2√1313(2√(13))/(13) .  
**Bài 2:** Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho tam giác ABC có A(2; −1; 1), B(1; −1; 2) và C(3; 0; 2).  
a) Tìm tọa độ của vectơ →uu→= −−→ABAB→ − 2 −−→ACAC→.  
b) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.  
**Lời giải**  
a) Ta có −−→ABAB→ = (−1; 0; 1),  
 −−→ACAC→ = (1; 1; 1) ⇒ 2−−→ACAC→ = (2; 2; 2).  
→uu→ = −−→ABAB→ − 2−−→ACAC→ = ( −1 − 2; 0 – 2; 1 – 2) = (−3; −2; −1).  
Vậy →uu→ = (−3; −2; −1).  
b) Ta có: −−→ABAB→ . −−→ACAC→ = −1.1 + 0.1 + 1.1 = 0.  
⇒ −−→ABAB→ vuông góc với −−→ACAC→ .  
Vậy tam giác ABC vuông tại A.  
**Bài 3:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ →uu→ = (−2; 3; 1) và →vv→ = (1; 2; 3).  
Hãy chỉ ra tọa độ của một vectơ →ww→ khác →00→ vuông góc với cả hai vectơ →uu→ và →vv→ .  
**Lời giải**  
Ta có: [→uu→ , →vv→ ] = (∣∣∣3123∣∣∣;∣∣∣1−231∣∣∣;∣∣∣−2312∣∣∣)3123;1−231;−2312 = (7; 7; −7).  
Chọn →ww→ = (7; 7; −7).  
Khi đó, vectơ →ww→ vuông góc với cả hai vectơ →uu→ và →vv→ .  
**Bài 4:** Một vật có trọng lượng 360 N được treo bằng ba sợi dây cáp không dãn có chiều dài bằng nhau, mỗi dây cáp có một đầu được gắn tại một trong các điểm P(−2; 0; 0), Q(1; √3√(3) ; 0), R(1; −√3√(3) ; 0) còn đầu kia gắn với vật tại điểm S(0; 0;−2) như hình dưới. Gọi F­1, F2; F3 lần lượt là lực căng trên các sợi dây cáp RS, QS và PS. Tìm tọa độ của các lực −→F1,−→F2,−→F3F\_(1)→,F\_(2)→,F\_(3)→.  
  
**Lời giải**  
Theo giả thiết, ta có các điểm:  
 S(0; 0; −2), P(−2; 0; 0), Q(1;√3√(3) ; 0), R(1;- √3√(3) ; 0).  
Khi đó: −→SPSP→ = )-2; 0; 2), −−→SQ=(1; √3; 2)SQ→=1; √(3); 2 , −−→SR=(1;−√3;2)SR→=1;−√(3);2 .  
Suy ra: ∣∣∣−→SP∣∣∣=∣∣∣−−→SQ∣∣∣=∣∣∣−−→SR∣∣∣=2√2.|SP→|=|SQ→|=|SR→|=2√(2).  
Lại có: −−→PQ=(3;√3;0)PQ→=3;√(3);0 , −−→QR=(0;−2√3;0)QR→=0;−2√(3);0 ; −−→PR=(3;−√3;0)PR→=3;−√(3);0 .  
Vì ∣∣∣−−→RP∣∣∣=∣∣∣−−→PQ∣∣∣=∣∣∣−−→QR∣∣∣=2√3|RP→|=|PQ→|=|QR→|=2√(3) nên tam giác PQR đều. Do đó, ∣∣∣−→F1∣∣∣=∣∣∣−→F2∣∣∣=∣∣∣−→F3∣∣∣|F\_(1)→|=|F\_(2)→|=|F\_(3)→| .  
Vậy tồn tại hằng số c ≠ 0 sao cho:  
Ta có: −→F1F\_(1)→= c −−→SRSR→ = (c; −c√3√(3) ; 2c).  
 −→F2F\_(2)→ = c −−→SQSQ→ = (c; c√3√(3) ; 2c).  
 −→F3F\_(3)→ = c −→SPSP→ = (−2c; 0; 2c).  
Suy ra −→F1+−→F2+−→F3F\_(1)→+F\_(2)→+F\_(3)→ = (0; 0; 6c).  
Mặt khác, ta có: −→F1+−→F2+−→F3=→FF\_(1)→+F\_(2)→+F\_(3)→=F→ , trong đó →FF→ = (0; 0; −360) là trọng lực của vật.  
Suy ra 6c = −360 thì c = −60.  
Vậy tọa độ của các lực là:  
−→F1F\_(1)→ (−60;60√3;−120)−60;60√(3);−120 ;−→F2F\_(2)→(−60;−60√3;−120)−60;−60√(3);−120 ; −→F3(120;0;−120)F\_(3)→120;0;−120 .  
**Bài 5:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho →aa→ = (2; 3; −2); →bb→ = (3; 1; −1). Tọa độ của vectơ →aa→ − 2→bb→ là:  
A. (−4; 1; 0).  
B. (4; 1; 0).  
C. (6; 5; −4).  
D. (6; −5; 4).  
**Lời giải**  
**Đáp án đúng là: A**  
Ta có: →aa→= (2; 3; −2); 2 →bb→ = (6; 2; −2).  
Vậy →aa→− 2 →bb→ = (2 – 6; 3 – 2; −2 – (−2)) = (−4; 1; 0).