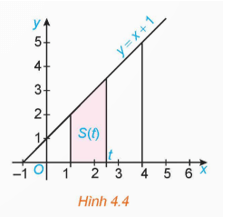
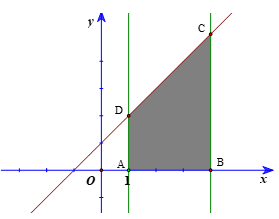
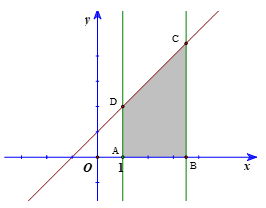
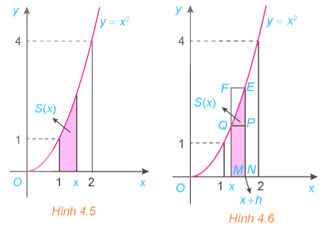
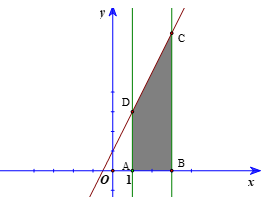
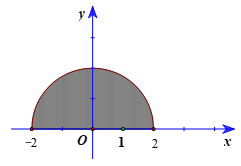
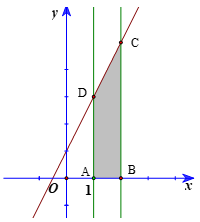
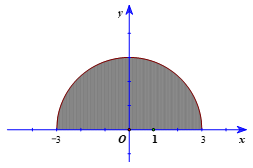
# Bài 12: Tích phân

**Giải Toán 12 Bài 12: Tích phân**  
**Mở đầu trang 12 Toán 12 Tập 2**: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc v(t) = −40t + 20 (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?  
**Lời giải:**  
Sau khi học xong bài này, ta giải quyết bài toán này như sau:  
Ô tô dừng lại khi v(t) = 0. Tức là −40t + 20 = 0 ⇔ t = 0,5 giây.  
Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:  
S=0,5∫0(−40t+20)dt=−20t2+20t∣∣0,50=5S=∫00,5−40t+20dt=−20t^(2)+20t00,5=5 (m).  
Vậy quãng đường ô tô di chuyển được là 5 mét.  
**HĐ1 trang 13 Toán 12 Tập 2**: Kí hiệu T là hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng y = x + 1, trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = t (1 ≤ t ≤ 4) (H.4.4)  
a) Tính diện tích S của T khi t = 4.  
b) Tính diện tích S(t) của T khi t ∈ [1; 4].  
c) Chứng minh rằng S(t) là một nguyên hàm của hàm số f(t) = t + 1, t ∈ [1; 4] và diện tích S = S(4) – S(1).  
  
**Lời giải:**  
a)  
  
Kí hiệu A(1; 0), B(4; 0) và C, D lần lượt là giao điểm của đường thẳng x = 4; x = 1 với đường thẳng y = x + 1.  
Khi đó C(4; 5), D(1; 2).  
Ta có: AD = 2; BC = 5; AB = 3.  
Khi đó diện tích hình thang T là S=(AD+BC).AB2=(2+5).32=212S=(AD+BC.AB)/(2)=(2+5.3)/(2)=(21)/(2).  
b)  
  
Gọi A(1; 0), B(t; 0), t ∈ [1; 4] và C, D lần lượt là giao điểm của đường thẳng x = t; x = 1 với đường thẳng y = x + 1.  
Khi đó C(t; t + 1); D(1; 2).  
Do đó AB = t – 1; AD = 2; BC = t + 1.  
Khi đó diện tích hình thang ABCD là  
S(t)=(AD+BC).AB2=(t+3).(t−1)2=t2+2t−32.St=(AD+BC.AB)/(2)=(t+3.t−1)/(2)=(t^(2)+2t−3)/(2).  
c) Có S(t)=t2+2t−32St=(t^(2)+2t−3)/(2)⇒S′(t)=(t2+2t−32)′=2(t+1)2=t+1=f(t)⇒S^(')t=(t^(2)+2t−3)/(2)^(')=(2t+1)/(2)=t+1=ft  
Do đó S(t) là một nguyên hàm của hàm số f(t) = t + 1, t ∈ [1; 4].  
Có S(4)=42+2.4−32=212;S(1)=12+2.1−32=0S4=(4^(2)+2.4−3)/(2)=(21)/(2);S1=(1^(2)+2.1−3)/(2)=0  
Do đó S(4) – S(1) = S.  
  
**HĐ2 trang 13 Toán 12 Tập 2**: Xét hình thang cong giới hạn bởi đồ thị y = x2, trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = 2. Ta muốn tính diện tích S của hình thang cong này.  
a) Với mỗi x ∈ [1; 2], gọi S(x) là diện tích phần hình thang cong đã cho nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 và x (H.4.5).  
Cho h > 0 sao cho x + h < 2. So sánh hiệu S(x + h) – S(x) với diện tích hai hình chữ nhật MNPQ và MNEF (H.4.6). Từ đó suy ra 0≤S(x+h)−S(x)h−x2≤2xh+h20≤(Sx+h−Sx)/(h)−x^(2)≤2xh+h^(2)  
b) Cho h < 0 sao cho x + h > 1. Tương tự phần a, đánh giá hiệu S(x) – S(x + h) và từ đó suy ra 2xh+h2≤S(x+h)−S(x)h−x2≤02xh+h^(2)≤(Sx+h−Sx)/(h)−x^(2)≤0  
c) Từ kết quả phần a và phần b, suy ra với mọi h ≠ 0, ta có ∣∣S(x+h)−S(x)h−x2∣∣≤2x|h|+h2(Sx+h−Sx)/(h)−x^(2)≤2xh+h^(2).  
Từ đó chứng minh S'(x) = x2, x ∈ (1; 2).  
Người ta chứng minh được S'(1) = 1, S'(2) = 4, tức là S(x) là một nguyên hàm của x2 trên [1; 2].  
d) Từ kết quả của phần c, ta có S(x)=x33+CSx=(x^(3))/(3)+C. Sử dụng điều này với lưu ý S(1) = 0 và diện tích cần tính S = S(2), hãy tính S.  
Gọi F(x) là một nguyên hàm tùy ý của f(x) = x2 trên [1; 2]. Hãy so sánh S và F(2) – F(1).  
  
**Lời giải:**  
a) Với h > 0, x + h < 2, kí hiệu SMNPQ và SMNEF lần lượt là diện tích các hình chữ nhật MNPQ và MNEF, ta có: SMNPQ ≤ S(x + h) – S(x) ≤ SMNEF  
hay hx2 ≤ S(x + h) – S(x) ≤ h(x + h)2.  
Suy ra 0≤S(x+h)−S(x)h−x2≤2xh+h20≤(Sx+h−Sx)/(h)−x^(2)≤2xh+h^(2)  
b) Với h < 0 và x + h > 1, kí hiệu SMNPQ và SMNEF lần lượt là diện tích các hình chữ nhật MNPQ và MNEF, ta có SMNPQ ≤ S(x + h) – S(x) ≤ SMNEF  
hay h(x+h)2 ≤ S(x + h) – S(x) ≤ hx2.  
Suy ra 2xh+h2≤S(x+h)−S(x)h−x2≤02xh+h^(2)≤(Sx+h−Sx)/(h)−x^(2)≤0  
c) Dựa vào kết quả của câu a, b ta suy ra với mọi h ≠ 0, ta có:  
∣∣S(x+h)−S(x)h−x2∣∣≤2x|h|+h2(Sx+h−Sx)/(h)−x^(2)≤2xh+h^(2)  
Suy ra S′(x)=limh→0S(x+h)−S(x)h=x2,∀x∈(1;2)S^(')x=limh→0(Sx+h−Sx)/(h)=x^(2),∀x∈1;2  
d) Vì S(1) = 0 nên S(1)=133+C=0⇒C=−13S1=(1^(3))/(3)+C=0⇒C=−(1)/(3)  
Vậy S(x)=x33−13Sx=(x^(3))/(3)−(1)/(3)  
Ta có S=S(2)=233−13=73S=S2=(2^(3))/(3)−(1)/(3)=(7)/(3)  
Giả sử F(x)=x33Fx=(x^(3))/(3) là một nguyên hàm của f(x) = x2 trên [1; 2].  
Khi đó F(1)=13;F(2)=83F1=(1)/(3);F2=(8)/(3). Ta thấy F(2)−F(1)=73=SF2−F1=(7)/(3)=S.  
**HĐ3 trang 14 Toán 12 Tập 2**: Giả sử f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a; b], F(x) và G(x) là hai nguyên hàm tùy ý của f(x) trên đoạn [a; b]. Chứng minh rằng F(b) – F(a) = G(b) – G(a).  
**Lời giải:**  
Vì F(x) và G(x) là hai nguyên hàm của f(x) trên đoạn [a; b] nên tồn tại một hằng số C sao cho F(x) = G(x) + C.  
Do đó F(b) – F(a) = G(b) + C – G(a) – C = G(b) – G(a).  
**Luyện tập 1 trang 15 Toán 12 Tập 2**: Tính:  
a) 1∫0exdx∫01e^(x)dx;   
b) e∫11xdx∫1e(1)/(x)dx;   
c) π2∫0sinxdx∫0(π)/(2)sinxdx;   
d)π3∫π6dxsin2x∫(π)/(6)(π)/(3)(dx)/(sin^(2)x)  
**Lời giải:**  
a) 1∫0exdx=ex|10=e−1∫01e^(x)dx=e^(x)01=e−1  
b) e∫11xdx=ln|x||e1=lne−ln1=1∫1e(1)/(x)dx=lnx1e=lne−ln1=1  
c) π2∫0sinxdx=−cosx|π20=−cosπ2+cos0=1.∫0(π)/(2)sinxdx=−cosx0(π)/(2)=−cos(π)/(2)+cos0=1.  
d) π3∫π6dxsin2x=−cotx|π3π6=−cotπ3+cotπ6=−√33+√3=2√33∫(π)/(6)(π)/(3)(dx)/(sin^(2)x)=−cotx(π)/(6)(π)/(3)=−cot(π)/(3)+cot(π)/(6)=−(√(3))/(3)+√(3)=(2√(3))/(3)  
**Luyện tập 2 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:  
a) 3∫1(2x+1)dx∫132x+1dx  
b) 2∫−2√4−x2dx∫−22√(4−x^(2))dx  
**Lời giải:**  
a)  
  
Gọi A(1; 0), B(3; 0) và C, D lần lượt là giao điểm của đường thẳng x = 3; x = 1 với đường thẳng y = 2x + 1.  
Do đó C(3; 7), D(1; 3).  
Tích phân cần tính là diện tích hình thang vuông ABCD với đáy nhỏ AD = 3; đáy lớn BC = 7 và chiều cao AB = 2.  
Do đó 3∫1(2x+1)dx=SABCD=(AD+BC).AB2=(3+7).22=10∫132x+1dx=S\_(ABCD)=(AD+BC.AB)/(2)=(3+7.2)/(2)=10  
b)  
  
Ta có y=√4−x2y=√(4−x^(2)) là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc tọa độ O và bán kính 2. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.  
Vậy 2∫−2√4−x2dx=12.π.22=2π∫−22√(4−x^(2))dx=(1)/(2).π.2^(2)=2π  
  
**Vận dụng 1 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Giải quyết bài toán ở tình huống mở đầu.  
**Lời giải:**  
Ô tô dừng lại khi v(t) = 0. Tức là −40t + 20 = 0 ⇔ t = 0,5 giây.  
Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là:  
S=0,5∫0(−40t+20)dt=−20t2+20t∣∣0,50=5S=∫00,5−40t+20dt=−20t^(2)+20t00,5=5 (m).  
Vậy quãng đường ô tô di chuyển được là 5 mét.  
  
**HĐ4 trang 16 Toán 12 Tập 2**: Tính và so sánh:  
a) 1∫02xdx∫012xdx và 21∫0xdx2∫01xdx;  
b) 1∫0(x2+x)dx∫01x^(2)+xdx và 1∫0x2dx+1∫0xdx∫01x^(2)dx+∫01xdx ;  
c) 3∫0xdx∫03xdx và 1∫0xdx+3∫1xdx∫01xdx+∫13xdx  
**Lời giải:**  
a) 1∫02xdx=x2∣∣10=1;∫012xdx=x^(2)01=1; 21∫0xdx=2.x22∣∣10=x2∣∣10=12∫01xdx=2.(x^(2))/(2)01=x^(2)01=1.  
Do đó 1∫02xdx=21∫0xdx∫012xdx=2∫01xdx  
b) 1∫0(x2+x)dx=(x33+x22)∣∣10=56∫01x^(2)+xdx=(x^(3))/(3)+(x^(2))/(2)01=(5)/(6)  
1∫0x2dx+1∫0xdx=x33∣∣10+x22∣∣10=13+12=56∫01x^(2)dx+∫01xdx=(x^(3))/(3)01+(x^(2))/(2)01=(1)/(3)+(1)/(2)=(5)/(6)  
Do đó 1∫0(x2+x)dx=1∫0x2dx+1∫0xdx∫01x^(2)+xdx=∫01x^(2)dx+∫01xdx  
c) 3∫0xdx=x22∣∣30=92∫03xdx=(x^(2))/(2)03=(9)/(2); 1∫0xdx+3∫1xdx∫01xdx+∫13xdx=x22∣∣10+x22∣∣31=12+92−12=92=(x^(2))/(2)01+(x^(2))/(2)13=(1)/(2)+(9)/(2)−(1)/(2)=(9)/(2).  
Do đó 3∫0xdx=1∫0xdx+3∫1xdx∫03xdx=∫01xdx+∫13xdx.  
**Luyện tập 3 trang 17 Toán 12 Tập 2**: Tính các tích phân sau:  
a) 2π∫0(2x+cosx)dx∫02π2x+cosxdx  
b) 2∫1(3x−3x)dx∫123^(x)−(3)/(x)dx  
c) π3∫π6(1cos2x−1sin2x)dx∫(π)/(6)(π)/(3)(1)/(cos^(2)x)−(1)/(sin^(2)x)dx  
**Lời giải:**  
a) 2π∫0(2x+cosx)dx∫02π2x+cosxdx=2π∫02xdx+2π∫0cosxdx=∫02π2xdx+∫02πcosxdx=x2∣∣2π0+sinx|2π0=x^(2)02π+sinx02π=4π2=4π^(2)  
b) 2∫1(3x−3x)dx∫123^(x)−(3)/(x)dx=2∫13xdx−2∫13xdx=∫123^(x)dx−∫12(3)/(x)dx  
=3xln3∣∣21−3ln|x||21=32ln3−3ln3−3ln2+3ln1=6ln3−3ln2=(3^(x))/(ln3)12−3lnx12=(3^(2))/(ln3)−(3)/(ln3)−3ln2+3ln1=(6)/(ln3)−3ln2  
c) π3∫π6(1cos2x−1sin2x)dx∫(π)/(6)(π)/(3)(1)/(cos^(2)x)−(1)/(sin^(2)x)dx=π3∫π61cos2xdx−π3∫π61sin2xdx=∫(π)/(6)(π)/(3)(1)/(cos^(2)x)dx−∫(π)/(6)(π)/(3)(1)/(sin^(2)x)dx  
=tanx|π3π6+cotx|π3π6=tanx(π)/(6)(π)/(3)+cotx(π)/(6)(π)/(3)=tanπ3−tanπ6+cotπ3−cotπ6=tan(π)/(3)−tan(π)/(6)+cot(π)/(3)−cot(π)/(6)=√3−√33+√33−√3=0=√(3)−(√(3))/(3)+(√(3))/(3)−√(3)=0  
  
**Luyện tập 4 trang 17 Toán 12 Tập 2**: Tính 3∫0|2x−3|dx∫032x−3dx.  
**Lời giải:**  
3∫0|2x−3|dx∫032x−3dx=32∫0|2x−3|dx+3∫32|2x−3|dx=∫0(3)/(2)2x−3dx+∫(3)/(2)32x−3dx=32∫0(3−2x)dx+3∫32(2x−3)dx=∫0(3)/(2)3−2xdx+∫(3)/(2)32x−3dx  
=(3x−x2)∣∣320+(x2−3x)∣∣332=3x−x^(2)0(3)/(2)+x^(2)−3x(3)/(2)3=94+94=92=(9)/(4)+(9)/(4)=(9)/(2)  
  
**Vận dụng 2 trang 17 Toán 12 Tập 2**: Giá trị trung bình của hàm số liên tục f(x) trên đoạn [a; b] được định nghĩa là 1b−ab∫af(x)dx(1)/(b−a)∫abfxdx. Giả sử nhiệt độ (tính bằng °C) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hóa bởi hàm số T(t) = 20 + 1,5(t – 6), 6 ≤ t ≤ 12. Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.  
**Lời giải:**  
Nhiệt độ trung bình vào ngày đó là:  
112−612∫6[20+1,5(t−6)]dt(1)/(12−6)∫61220+1,5t−6dt=1612∫6(1,5t+11)dt=(1)/(6)∫6121,5t+11dt  
=16(34t2+11t)∣∣126=40−312=492=24,5°C=(1)/(6)(3)/(4)t^(2)+11t612=40−(31)/(2)=(49)/(2)=24,5°C  
Vậy nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa là 24,5°C.  
**Bài tập**  
**Bài 4.8 trang 18 Toán 12 Tập 2**: Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính:  
a) 2∫1(2x+1)dx∫122x+1dx  
b) 3∫−3√9−x2dx∫−33√(9−x^(2))dx  
**Lời giải:**  
a)  
  
Gọi A(1; 0), B(2; 0) và C, D lần lượt là giao điểm của đường thẳng x = 2; x = 1 với đường thẳng y = 2x + 1. Khi đó C(2; 5), D(1; 3).  
Tích phân cần tính chính là diện tích của hình thang vuông ABCD với đáy nhỏ AD = 3, đáy lớn BC = 5, đường cao AB = 1.  
Khi đó 2∫1(2x+1)dx=SABCD=(AD+BC)AB2=(3+5).12=4∫122x+1dx=S\_(ABCD)=(AD+BCAB)/(2)=(3+5.1)/(2)=4  
b)  
  
Ta có y=√9−x2y=√(9−x^(2)) là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc tọa độ O và bán kính 3. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.  
Vậy 3∫−3√9−x2dx=12.π.32=92π∫−33√(9−x^(2))dx=(1)/(2).π.3^(2)=(9)/(2)π  
  
**Bài 4.9 trang 18 Toán 12 Tập 2**: Cho 3∫0f(x)dx=5∫03fxdx=5 và 3∫0g(x)dx=2∫03gxdx=2. Tính:  
a) 3∫0[f(x)+g(x)]dx∫03fx+gxdx;  
b) 3∫0[f(x)−g(x)]dx∫03fx−gxdx;  
c) 3∫03f(x)dx∫033fxdx;  
d) 3∫0[2f(x)−3g(x)]dx∫032fx−3gxdx  
**Lời giải:**  
a) 3∫0[f(x)+g(x)]dx∫03fx+gxdx=3∫0f(x)dx+3∫0g(x)dx=5+2=7=∫03fxdx+∫03gxdx=5+2=7  
b) 3∫0[f(x)−g(x)]dx∫03fx−gxdx=3∫0f(x)dx−3∫0g(x)dx=5−2=3=∫03fxdx−∫03gxdx=5−2=3  
c) 3∫03f(x)dx∫033fxdx=33∫0f(x)dx=3.5=15=3∫03fxdx=3.5=15  
d) 3∫0[2f(x)−3g(x)]dx∫032fx−3gxdx=23∫0f(x)dx−33∫0g(x)dx=2∫03fxdx−3∫03gxdx=2.5−3.2=4=2.5−3.2=4  
  
**Bài 4.10 trang 18 Toán 12 Tập 2**: Tính:  
a) 3∫0(3x−1)2dx∫033x−1^(2)dx;  
b) π2∫0(1+sinx)dx∫0(π)/(2)1+sinxdx;  
c) 1∫0(e2x+3x2)dx∫01e^(2x)+3x^(2)dx;  
d) 2∫−1|2x+1|dx∫−122x+1dx  
**Lời giải:**  
a) 3∫0(3x−1)2dx∫033x−1^(2)dx=3∫0(9x2−6x+1)dx=∫039x^(2)−6x+1dx=93∫0x2dx−63∫0xdx+3∫0dx=9∫03x^(2)dx−6∫03xdx+∫03dx  
=3x3∣∣30−3x2∣∣30+x|30=3x^(3)03−3x^(2)03+x03=81−27+3=57=81−27+3=57  
b) π2∫0(1+sinx)dx∫0(π)/(2)1+sinxdx=π2∫0dx+π2∫0sinxdx=∫0(π)/(2)dx+∫0(π)/(2)sinxdx=x|π20−cosx|π20=x0(π)/(2)−cosx0(π)/(2)=π2+1=(π)/(2)+1  
c) 1∫0(e2x+3x2)dx∫01e^(2x)+3x^(2)dx=1∫0e2xdx+31∫0x2dx=∫01e^(2x)dx+3∫01x^(2)dx=e2x2∣∣10+x3∣∣10=(e^(2x))/(2)01+x^(3)01=e22−12+1=e22+12=(e^(2))/(2)−(1)/(2)+1=(e^(2))/(2)+(1)/(2)  
d) 2∫−1|2x+1|dx∫−122x+1dx=−12∫−1|2x+1|dx+2∫−12|2x+1|dx=∫−1(−1)/(2)2x+1dx+∫(−1)/(2)22x+1dx=−12∫−1(−2x−1)dx+2∫−12(2x+1)dx=∫−1(−1)/(2)−2x−1dx+∫(−1)/(2)22x+1dx  
=(−x2−x)∣∣−12−1+(x2+x)∣∣2−12=−x^(2)−x−1(−1)/(2)+x^(2)+x(−1)/(2)2=14+6+14=132=(1)/(4)+6+(1)/(4)=(13)/(2)  
  
**Bài 4.11 trang 18 Toán 12 Tập 2**: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là v(t) = t2 – t – 6 (m/s).  
a) Tìm độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian 1 ≤ t ≤ 4, tức là tính 4∫1v(t)dt∫14vtdt.  
b) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này, tức là tính 4∫1|v(t)|dt.∫14vtdt.  
**Lời giải:**  
a) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian 1 ≤ t ≤ 4 là  
4∫1v(t)dt=4∫1(t2−t−6)dt∫14vtdt=∫14t^(2)−t−6dt=4∫1t2dt−4∫1tdt−64∫1dt=∫14t^(2)dt−∫14tdt−6∫14dt=(t33−t22−6t)∣∣41=(t^(3))/(3)−(t^(2))/(2)−6t14=−323+376=−92=−(32)/(3)+(37)/(6)=−(9)/(2)  
b) Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này là  
4∫1|v(t)|dt∫14vtdt=4∫1∣∣t2−t−6∣∣dt=∫14t^(2)−t−6dt=3∫1∣∣t2−t−6∣∣dt+4∫3∣∣t2−t−6∣∣dt=∫13t^(2)−t−6dt+∫34t^(2)−t−6dt  
=−3∫1(t2−t−6)dt+4∫3(t2−t−6)dt=−∫13t^(2)−t−6dt+∫34t^(2)−t−6dt=−(t33−t22−6t)∣∣31+(t33−t22−6t)∣∣43=−(t^(3))/(3)−(t^(2))/(2)−6t13+(t^(3))/(3)−(t^(2))/(2)−6t34  
=272−376−323+272=616=(27)/(2)−(37)/(6)−(32)/(3)+(27)/(2)=(61)/(6)  
  
**Bài 4.12 trang 18 Toán 12 Tập 2**: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức P'(x) = −0,0005x + 12,2. Ở đây P(x) là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.  
a) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 sản phẩm.  
b) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 sản phẩm.  
**Lời giải:**  
a) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 sản phẩm là:  
101∫100P′(x)dx=101∫100(−0,0005x+12,2)dx∫100101P^(')xdx=∫100101−0,0005x+12,2dx=(−14000x2+12,2x)∣∣101100=−(1)/(4000)x^(2)+12,2x100101  
= 1229,64975 – 1217,5 = 12,14975 triệu đồng.  
b) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 sản phẩm là  
110∫100P′(x)dx=110∫100(−0,0005x+12,2)dx∫100110P^(')xdx=∫100110−0,0005x+12,2dx=(−14000x2+12,2x)∣∣110100=−(1)/(4000)x^(2)+12,2x100110  
= 1338,975 – 1217,5 = 121,475 triệu đồng.  
  
**Bài 4.13 trang 18 Toán 12 Tập 2**: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức v = k(R2 – r2), trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng 0 ≤ r ≤ R. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.  
**Lời giải:**  
Vận tốc trung bình của động mạch là:  
vtb=1R−0R∫0v(r)drv\_(tb)=(1)/(R−0)∫0Rvrdr=1RR∫0k(R2−r2)dr=(1)/(R)∫0RkR^(2)−r^(2)dr=1Rk(R2r−r33)∣∣R0=(1)/(R)kR^(2)r−(r^(3))/(3)0R=23kR2=(2)/(3)kR^(2)  
Do đó, vận tốc trung bình của động mạch là 23kR2(2)/(3)kR^(2)  
Vì 0 ≤ r ≤ R nên vận tốc lớn nhất của động mạch là kR2 khi r = 0.  
Do đó vtb=23vmaxv\_(tb)=(2)/(3)v\_(max)