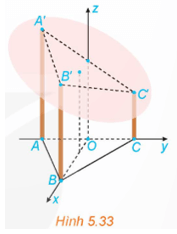
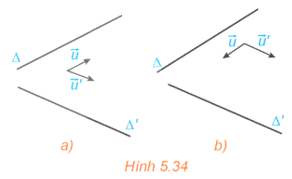
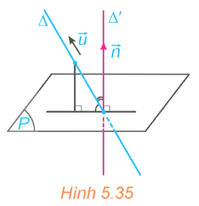
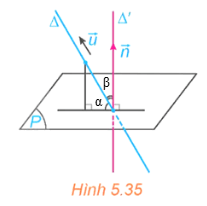
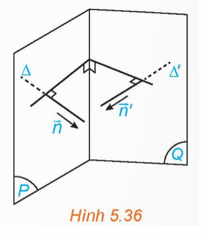
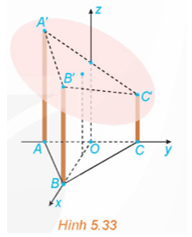
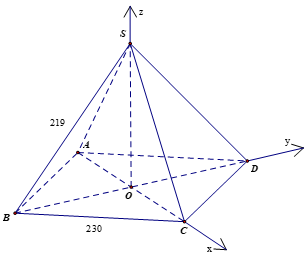
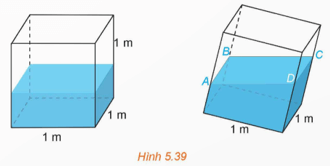
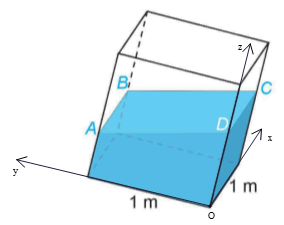
# Bài 16: Công thức tính góc trong không gian

**Giải Toán 12 Bài 16: Công thức tính góc trong không gian**  
**Mở đầu trang 50 Toán 12 Tập 2**: Một mái nhà hình tròn được đặt trên ba cây cột trụ (H.5.33). Các cây cột vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 7 m, 6 m, 5 m. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 4 m. Hỏi mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc bao nhiêu độ?  
  
**Lời giải:**  
Sau khi học xong bài này, ta giải quyết bài toán này như sau:  
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với O là trung điểm của AC.  
Ta có: A(0; −2; 0), B(2√32√(3); 0; 0), C(0; 2; 0), A'(0; −2; 7), B'(2√32√(3); 0; 6), C'(0; 2; 5).  
Ta có −−→AB=(2√3;2;0),−−→AC=(0;4;0),−−−→A′B′=(2√3;2;−1),−−−→A′C′=(0;4;−2)AB→=2√(3);2;0,AC→=0;4;0,A^(')B^(')→=2√(3);2;−1,A^(')C^(')→=0;4;−2  
Có [−−→AB,−−→AC]=(∣∣∣2040∣∣∣,∣∣∣02√300∣∣∣,∣∣∣2√3204∣∣∣)AB→,AC→=2040,02√(3)00,2√(3)204=(0;0;8√3)=0;0;8√(3)  
[−−−→A′B′,−−−→A′C′]=(∣∣∣2−14−2∣∣∣,∣∣∣−12√3−20∣∣∣,∣∣∣2√3204∣∣∣)A^(')B^(')→,A^(')C^(')→=2−14−2,−12√(3)−20,2√(3)204=(0;4√3;8√3)=0;4√(3);8√(3)  
Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là 18√3[−−→AB,−−→AC]=(0;0;1)(1)/(8√(3))AB→,AC→=0;0;1  
Mặt phẳng (A'B'C') có một vectơ pháp tuyến là 14√3[−−−→A′B′,−−−→A′C′]=(0;1;2)(1)/(4√(3))A^(')B^(')→,A^(')C^(')→=0;1;2  
Do đó cos((ABC),(A′B′C′))=|2|√1.√1+4=2√5cosABC,A^(')B^(')C^(')=(2)/(√(1).√(1+4))=(2)/(√(5)) ⇒ ((ABC), (A'B'C')) ≈ 26,6°.  
Suy ra mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc khoảng 26,6°.  
  
**HĐ1 trang 50 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng ∆ và ∆' tương ứng có các vectơ chỉ phương →u=(a;b;c),→u′=(a′;b′;c′)u→=a;b;c,u^(')→=a^(');b^(');c^(') (H.5.34).  
a) Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc (∆, ∆') và (→u,→u′)u→,u^(')→.  
b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa cos(∆, ∆') và ∣∣∣cos(→u,→u′)∣∣∣cosu→,u^(')→?  
  
**Lời giải:**  
a) Vì →u,→u′u→,u^(')→ lần lượt là vectơ chỉ phương của ∆ và ∆' nên giá của →uu→ song song hoặc trùng với ∆, giá của →uu→ song song hoặc trùng với ∆'. Do đó:  
+) (∆, ∆')=(→u,→u′)=u→,u^(')→ nếu (→u,→u′)≤90°u→,u^(')→≤90°.  
+) (Δ,Δ′)=180°−(→u,→u′)Δ,Δ^(')=180°−u→,u^(')→ nếu (→u,→u′)>90°u→,u^(')→>90°.  
b) cos(Δ,Δ′)=∣∣∣cos(→u,→u′)∣∣∣cosΔ,Δ^(')=cosu→,u^(')→  
**Luyện tập 1 trang 51 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa trục Oz và đường thẳng Δ:x−31=y+12=z−1−2Δ:(x−3)/(1)=(y+1)/(2)=(z−1)/(−2)  
**Lời giải:**  
Trục Oz có vectơ chỉ phương là →k=(0;0;1)k→=0;0;1  
Đường thẳng ∆ có vectơ chỉ phương là →u=(1;2;−2)u→=1;2;−2  
Khi đó cos(Oz,Δ)=∣∣∣cos(→k,→u)∣∣∣=|−2|√12.√12+22+(−2)2=23cosOz,Δ=cosk→,u→=(−2)/(√(1^(2)).√(1^(2)+2^(2)+−2^(2)))=(2)/(3)  
Vậy (Oz, ∆) ≈ 48,2°.  
  
**HĐ2 trang 51 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng ∆ và mặt phẳng (P). Xét →u=(a;b;c)u→=a;b;c là một vectơ chỉ phương của ∆ và →n=(A;B;C)n→=A;B;C (với giá ∆') là một vectơ pháp tuyến của (P). (H.5.35)  
a) Hãy tìm mối quan hệ giữa các góc (∆, (P)) và (∆, ∆').  
b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa sin(∆, ∆') và ∣∣cos(→u,→n)∣∣cosu→,n→?  
  
**Lời giải:**  
  
a) Gọi α = (∆, (P)), β = (∆, ∆').  
Có α + β = 90°. Suy ra (∆, ∆') = 90° − (∆, (P)).  
b) Có sin(∆, ∆') =∣∣cos(→u,→n)∣∣=cosu→,n→.  
  
**Luyện tập 2 trang 51 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng ∆ và mặt phẳng (P), với: Δ:x+2−1=y−42=z+11Δ:(x+2)/(−1)=(y−4)/(2)=(z+1)/(1), (P): x – y + z – 1 = 0.  
**Lời giải:**  
Đường thẳng ∆ có vectơ chỉ phương là →u=(−1;2;1)u→=−1;2;1  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là →n=(1;−1;1)n→=1;−1;1  
Ta có sin(Δ,(P))=|−1−2+1|√(−1)2+22+12.√12+(−1)2+12=23√2sinΔ,P=(−1−2+1)/(√(−1^(2)+2^(2)+1^(2)).√(1^(2)+−1^(2)+1^(2)))=(2)/(3√(2))  
Do đó (∆, (P)) ≈ 28,1°.  
**HĐ3 trang 52 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là →n=(A;B;C)n→=A;B;C, →n′=(A′;B′;C′)n^(')→=A^(');B^(');C^('). Lấy các đường thẳng ∆, ∆' tương ứng có vectơ chỉ phương →n,→n′n→,n^(')→. (H.5.36)  
a) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) và góc giữa hai đường thẳng ∆ và ∆' có mối liên hệ gì?  
b) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).  
  
**Lời giải:**  
a) Đường thẳng ∆, ∆' tương ứng có vectơ chỉ phương →n,→n′n→,n^(')→ nên ∆ ⊥ (P) và ∆' ⊥ (Q).  
Do đó ((P), (Q)) = (∆, ∆').  
b) Có cos((P),(Q))=cos(Δ,Δ′)=∣∣∣cos(→n,→n′)∣∣∣cosP,Q=cosΔ,Δ^(')=cosn→,n^(')→  
  
**Luyện tập 3 trang 52 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng (P): x−√2y+z−2=0x−√(2)y+z−2=0 và (Oxz): y = 0.  
**Lời giải:**  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến →n=(1;−√2;1)n→=1;−√(2);1  
Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến →n′=(0;1;0)n^(')→=0;1;0  
Có cos((P),(Oxz))=∣∣1.0−√2.1+1.0∣∣√1+2+1.√1=√22cosP,Oxz=(1.0−√(2).1+1.0)/(√(1+2+1).√(1))=(√(2))/(2)  
Suy ra ((P), (Oxz)) = 45°.  
**Vận dụng trang 53 Toán 12 Tập 2**: Hãy trả lời câu hỏi đã được nêu ra trong tình huống mở đầu.  
  
**Lời giải:**  
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, O là trung điểm của AC.  
Ta có: A(0; −2; 0), B(2√32√(3); 0; 0), C(0; 2; 0), A'(0; −2; 7), B'(2√32√(3); 0; 6), C'(0; 2; 5).  
Ta có −−→AB=(2√3;2;0),−−→AC=(0;4;0),−−−→A′B′=(2√3;2;−1),−−−→A′C′=(0;4;−2)AB→=2√(3);2;0,AC→=0;4;0,A^(')B^(')→=2√(3);2;−1,A^(')C^(')→=0;4;−2  
Có [−−→AB,−−→AC]=(∣∣∣2040∣∣∣,∣∣∣02√300∣∣∣,∣∣∣2√3204∣∣∣)AB→,AC→=2040,02√(3)00,2√(3)204=(0;0;8√3)=0;0;8√(3)  
[−−−→A′B′,−−−→A′C′]=(∣∣∣2−14−2∣∣∣,∣∣∣−12√3−20∣∣∣,∣∣∣2√3204∣∣∣)A^(')B^(')→,A^(')C^(')→=2−14−2,−12√(3)−20,2√(3)204=(0;4√3;8√3)=0;4√(3);8√(3)  
Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là 18√3[−−→AB,−−→AC]=(0;0;1)(1)/(8√(3))AB→,AC→=0;0;1  
Mặt phẳng (A'B'C') có một vectơ pháp tuyến là 14√3[−−−→A′B′,−−−→A′C′]=(0;1;2)(1)/(4√(3))A^(')B^(')→,A^(')C^(')→=0;1;2  
Do đó cos((ABC),(A′B′C′))=|2|√1.√1+4=2√5cosABC,A^(')B^(')C^(')=(2)/(√(1).√(1+4))=(2)/(√(5)) => ((ABC), (A'B'C')) ≈ 26,6°.  
Suy ra mái nhà nghiêng với mặt sàn nhà một góc khoảng 26,6°.  
**Bài tập**  
  
**Bài 5.20 trang 53 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng Δ1:⎧⎪⎨⎪⎩x=1+2ty=1−tz=2+3tΔ\_(1):x=1+2ty=1−tz=2+3t và Δ2:x−2−1=x+11=z−22Δ\_(2):(x−2)/(−1)=(x+1)/(1)=(z−2)/(2)  
**Lời giải:**  
Đường thẳng ∆1 có vectơ chỉ phương là →u1=(2;−1;3)u\_(1)→=2;−1;3  
Đường thẳng ∆2 có vectơ chỉ phương là →u2=(−1;1;2)u\_(2)→=−1;1;2  
cos(Δ1,Δ2)=|2.(−1)+(−1).1+3.2|√22+(−1)2+32.√(−1)2+12+22=3√14.√6=√2114cosΔ\_(1),Δ\_(2)=(2.−1+−1.1+3.2)/(√(2^(2)+−1^(2)+3^(2)).√(−1^(2)+1^(2)+2^(2)))=(3)/(√(14).√(6))=(√(21))/(14)  
Suy ra (∆1, ∆2) ≈ 70,9°.  
  
**Bài 5.21 trang 53 Toán 12 Tập 2**: Trong không gian Oxyz, tính góc giữa trục Oz và mặt phẳng (P): x + 2y – z – 1 = 0.  
**Lời giải:**  
Trục Oz có vectơ chỉ phương là →k=(0;0;1)k→=0;0;1  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là →n=(1;2;−1)n→=1;2;−1  
Có sin(Oz,(P))=|0.1+0.2+1.(−1)|√1.√1+22+(−1)2=1√6sinOz,(P)=(0.1+0.2+1.−1)/(√(1).√(1+2^(2)+−1^(2)))=(1)/(√(6))  
Suy ra (Oz, (P)) ≈ 24,1°.  
  
**Bài 5.22 trang 53 Toán 12 Tập 2**: Tính góc giữa đường thẳng Δ:x+1−1=y−32=z+23Δ:(x+1)/(−1)=(y−3)/(2)=(z+2)/(3) và mặt phẳng (P): x + y + z + 3 = 0.  
**Lời giải:**  
Đường thẳng ∆ có vectơ chỉ phương là →u=(−1;2;3)u→=−1;2;3  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là →n=(1;1;1)n→=1;1;1  
Có sin(Δ,(P))=|−1.1+2.1+3.1|√(−1)2+22+32√12+12+12=4√42sinΔ,P=(−1.1+2.1+3.1)/(√(−1^(2)+2^(2)+3^(2))√(1^(2)+1^(2)+1^(2)))=(4)/(√(42))  
Suy ra (∆, (P)) ≈ 38,1°.  
  
**Bài 5.23 trang 53 Toán 12 Tập 2**: Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo britannica.com) (H.5.38). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).  
  
**Lời giải:**  
  
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Suy ra O là trung điểm của AC, BD.  
Vì các tam giác SAC, SBD đều cân tại S, SO là trung tuyến nên SO đồng thời là đường cao.  
Suy ra SO ⊥ AC, SO ⊥ BD nên SO ⊥ (ABCD).  
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ.  
Vì ABCD là hình vuông cạnh 230 m nên OA = OB = OC = OD = 115√2115√(2).  
Xét tam giác SOB vuông tại O, có SO=√SB2−OB2=√2192−(115√2)2=7√439SO=√(SB^(2)−OB^(2))=√(219^(2)−115√(2)^(2))=7√(439)  
Ta có A(−115√2;0;0),B(0;−115√2;0),C(115√2;0;0),S(0;0;7√439)A−115√(2);0;0,B0;−115√(2);0,C115√(2);0;0,S0;0;7√(439)  
Ta có −→SA=(−115√2;0;−7√439),−−→SB=(0;−115√2;−7√439),SA→=−115√(2);0;−7√(439),SB→=0;−115√(2);−7√(439),  
−−→SC=(115√2;0;−7√439)SC→=115√(2);0;−7√(439)  
Ta có [−→SA,−−→SB]=SA→,SB→=(∣∣∣0−7√439−115√2−7√439∣∣∣,∣∣∣−7√439−115√2−7√4390∣∣∣,∣∣∣−115√200−115√2∣∣∣)0−7√(439)−115√(2)−7√(439),−7√(439)−115√(2)−7√(439)0,−115√(2)00−115√(2)  
=(−805√878;−805√878;26450)=−805√(878);−805√(878);26450  
[−−→SB,−−→SC]=(∣∣∣−115√2−7√4390−7√439∣∣∣,∣∣∣−7√4390−7√439115√2∣∣∣,∣∣∣0−115√2115√20∣∣∣)SB→,SC→=−115√(2)−7√(439)0−7√(439),−7√(439)0−7√(439)115√(2),0−115√(2)115√(2)0  
=(805√878;−805√878;26450)=805√(878);−805√(878);26450  
Mặt phẳng (SAB) nhận →n=15[−→SA,−−→SB]=(−161√878;−161√878;5290)n→=(1)/(5)SA→,SB→=−161√(878);−161√(878);5290 làm vectơ pháp tuyến.  
Mặt phẳng (SBC) nhận →n′=15[−−→SB,−−→SC]=(161√878;−161√878;5290)n^(')→=(1)/(5)SB→,SC→=161√(878);−161√(878);5290 làm vectơ pháp tuyến.  
Do đó  
cos((SAB),(SBC))=∣∣∣−(161√878)2+(161√878)2+52902∣∣∣√(−161√878)2+(−161√878)2+52902.√(161√878)2+(−161√878)2+52902cosSAB,SBC=(−161√(878)^(2)+161√(878)^(2)+5290^(2))/(√(−161√(878)^(2)+−161√(878)^(2)+5290^(2)).√(161√(878)^(2)+−161√(878)^(2)+5290^(2)))  
=52902(161√878)2+(−161√878)2+52902=(5290^(2))/(161√(878)^(2)+−161√(878)^(2)+5290^(2))≈0,3807≈0,3807  
Suy ra ((SAB), (SBC)) ≈ 67,6°.  
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) khoảng 67,6°.  
  
**Bài 5.24 trang 53 Toán 12 Tập 2**: (H.5.39) Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành ABCD và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 40 cm, 44 cm, 48 cm.  
a) Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể bằng bao nhiêu centimét? (Tính gần đúng, lấy giá trị nguyên).  
b) Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ?  
  
**Lời giải:**  
  
a) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.  
40 cm = 0,4 m, 44 cm = 0,44 m, 48 cm = 0,48 m.  
Khi đó ta có A(0; 1; 0,4), B(1; 1; 0,44), C(1; 0; 0,48).  
Có −−→AB=(1;0;0,04)AB→=1;0;0,04  
Vì ABCD là hình bình hành nên −−→AB=−−→DCAB→=DC→⇔⎧⎪⎨⎪⎩1−xD=1−yD=00,48−zD=0,04⇔1−x\_(D)=1−y\_(D)=00,48−z\_(D)=0,04⇔⎧⎪⎨⎪⎩xD=0yD=0zD=0,44⇔x\_(D)=0y\_(D)=0z\_(D)=0,44  
Suy ra D(0; 0; 0,44).  
Vậy khoảng cách từ điểm D đến đáy bể là 44 cm.  
b) Ta có đáy bể nằm trong mặt phẳng Oxy: z = 0 có vectơ pháp tuyến →k=(0;0;1)k→=0;0;1  
Ta có −−→AB=(1;0;0,04)AB→=1;0;0,04, −−→AC=(1;−1;0,08)AC→=1;−1;0,08, [−−→AB,−−→AC]=(0,04;−0,04;−1)AB→,AC→=0,04;−0,04;−1  
Mặt phẳng (ABCD) đi qua A(0; 1; 0,4) và có vectơ pháp tuyến →n=[−−→AB,−−→AC]=(0,04;−0,04;−1)n→=AB→,AC→=0,04;−0,04;−1 có phương trình là:  
0,04x – 0,04(y – 1) – (z – 0,4) = 0 ⇔ 0,04x – 0,04y – z + 0,44 = 0.  
Do đó góc giữa đáy bể và mặt phẳng nằm ngang chính là góc giữa mặt phẳng (ABCD) và mặt đáy.  
Có cos((ABCD),(Oxy))=|−1|√1.√0,042+(−0,04)2+(−1)2cosABCD,Oxy=(−1)/(√(1).√(0,04^(2)+−0,04^(2)+−1^(2)))=25√627=(25)/(√(627))  
Suy ra ((ABCD), (Oxy)) ≈ 3,2°.