# Lý thuyết Bài 11: Nguyên hàm

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 11: Nguyên hàm- Kết nối tri thức**  
**A. Lý thuyết Nguyên hàm**  
**1. Nguyên hàm của một hàm số**  
**• Khái niệm nguyên hàm**  
Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số F(x) được gọi là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu F'(x) = f(x) với mọi x thuộc K.  
**Chú ý.** Trường hợp K = [a; b] thì các đẳng thức F'(a) = f(a) và F'(b) = f(b) được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm x = a và đạo hàm bên trái tại điểm x = b của hàm số F(x), tức là limx→a+F(x)−F(a)x−a=f(a)limx→a^(+)(Fx−Fa)/(x−a)=fa và limx→b−F(x)−F(b)x−b=f(b)limx→b^(−)(Fx−Fb)/(x−b)=fb.  
**Ví dụ 1.** Cho hàm số f(x) = x3 – 3x2. Trong các hàm số cho dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên ℝ?  
F(x)=x44−x3Fx=(x^(4))/(4)−x^(3); G(x)=x44+x3Gx=(x^(4))/(4)+x^(3).  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có: F'(x) = x3 – 3x2, G'(x) = x3 + 3x2.  
Vì F'(x) = f(x) với mọi x ∈∈ ℝ nên hàm số F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên ℝ.  
Hàm số G(x) không là nguyên hàm của f(x) trên ℝ vì với x = 1, ta có G'(1) = 4 ≠ −2 = f(1).  
**• Họ nguyên hàm của một hàm số**  
Giả sử hàm số F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K. Khi đó:  
a) Với mỗi hằng số C, hàm số F(x) + C cũng là một nguyên hàm của f(x) trên K;  
b) Nếu hàm số G(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho G(x) = F(x) + C với mọi x ∈∈ K.  
Như vậy, nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên K thì mọi nguyên hàm của f(x) trên K đều có dạng F(x) + C (C là hằng số). Ta gọi F(x) + C (C ∈∈ ℝ) là họ các nguyên hàm của f(x) trên K, kí hiệu bởi ∫f(x)dx∫fxdx.  
**Chú ý**  
a) Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số f(x) trên K, ta chỉ cần tìm một nguyên hàm F(x) của f(x) trên K và khi đó C là hằng số.  
b) Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số f(x) liên tục trên khoảng K thì f(x) có nguyên hàm trên khoảng đó.  
c) Biểu thức f(x)dx gọi là vi phân của nguyên hàm F(x), kí hiệu dF(x). Vậy dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.  
d) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K, ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.  
**Ví dụ 2.** Tìm một nguyên hàm của hàm số f(x) = 5x4 trên ℝ. Từ đó hãy tìm ∫5x4dx∫5x^(4)dx .  
**Hướng dẫn giải**  
Vì (x5)' = 5x4 nên F(x) = x5 là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên ℝ.  
Do đó ∫5x4dx=x5+C∫5x^(4)dx=x^(5)+C.  
**2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm**  
**• Nguyên hàm của tích một hàm số với một hằng số khác 0**  
∫kf(x)dx=k∫f(x)dx(k≠0)∫kfxdx=k∫fxdxk≠0.  
**Ví dụ 3.** Hãy tìm ∫12x3dx∫(1)/(2)x^(3)dx .  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có ∫12x3dx=12∫x3dx=12.x44+C=x48+C∫(1)/(2)x^(3)dx=(1)/(2)∫x^(3)dx=(1)/(2).(x^(4))/(4)+C=(x^(4))/(8)+C .  
**• Nguyên hàm của một tổng**  
∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx∫fx+gxdx=∫fxdx+∫gxdx.  
∫[f(x)−g(x)]dx=∫f(x)dx−∫g(x)dx∫fx−gxdx=∫fxdx−∫gxdx.  
**Ví dụ 4.** Hãy tìm:  
a) ∫(x−x2)dx∫x−x^(2)dx; b) ∫(5x4+3x2)dx∫5x^(4)+3x^(2)dx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫(x−x2)dx∫x−x^(2)dx =∫xdx−∫x2dx=∫xdx−∫x^(2)dx =x22−x33+C=(x^(2))/(2)−(x^(3))/(3)+C.  
b) ∫(5x4+3x2)dx∫5x^(4)+3x^(2)dx=5∫x4dx+3∫x2dx=5∫x^(4)dx+3∫x^(2)dx=5.x55+3.x33+C=5.(x^(5))/(5)+3.(x^(3))/(3)+C=x5+x3+C=x^(5)+x^(3)+C .  
**3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp**  
**• Nguyên hàm của hàm số lũy thừa**  
+) Hàm số lũy thừa  
Hàm số y = xα, với α ∈ ℝ, được gọi là hàm số lũy thừa.  
Tập xác định của hàm số lũy thừa y = xα tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:  
- Với α nguyên dương, tập xác định là ℝ.  
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là ℝ\{0}.  
- Với α không nguyên, tập xác định là (0; +∞).  
+) Hàm số lũy thừa y = xα (α ∈∈ ℝ) có đạo hàm với mọi x > 0 và (xα)′=αxα−1x^(α)^(')=αx^(α−1).  
+) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa  
∫xαdx=xα+1α+1+C(α≠−1)∫x^(α)dx=(x^(α+1))/(α+1)+Cα≠−1.  
∫1xdx=ln|x|+C∫(1)/(x)dx=lnx+C.  
**Ví dụ 5.** Hãy tìm:  
a) ∫(√x−x2)dx∫√(x)−x^(2)dx; b) ∫(1x−1x2)dx∫(1)/(x)−(1)/(x^(2))dx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫(√x−x2)dx∫√(x)−x^(2)dx=∫√xdx−∫x2dx=∫√(x)dx−∫x^(2)dx=∫x12dx−∫x2dx=∫x^((1)/(2))dx−∫x^(2)dx  
=23x32−x33+C=(2)/(3)x^((3)/(2))−(x^(3))/(3)+C .  
b) ∫(1x−1x2)dx∫(1)/(x)−(1)/(x^(2))dx=∫1xdx−∫1x2dx=∫(1)/(x)dx−∫(1)/(x^(2))dx=∫1xdx−∫x−2dx=∫(1)/(x)dx−∫x^(−2)dx  
=ln|x|+1x+C=lnx+(1)/(x)+C.  
**• Nguyên hàm của hàm số lượng giác**  
∫cosxdx=sinx+C∫cosxdx=sinx+C;  
∫sinxdx=−cosx+C∫sinxdx=−cosx+C;  
∫1cos2xdx=tanx+C∫(1)/(cos^(2)x)dx=tanx+C;  
∫1sin2xdx=−cotx+C∫(1)/(sin^(2)x)dx=−cotx+C.  
**Ví dụ 6.** Hãy tìm:  
a) ∫(2cosx+1sin2x)dx∫2cosx+(1)/(sin^(2)x)dx;   
  
b) ∫(√2sinx+2cos2x)dx∫√(2)sinx+(2)/(cos^(2)x)dx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫(2cosx+1sin2x)dx∫2cosx+(1)/(sin^(2)x)dx=∫2cosxdx+∫1sin2xdx=∫2cosxdx+∫(1)/(sin^(2)x)dx  
=2sinx−cotx+C=2sinx−cotx+C.  
b) ∫(√2sinx+2cos2x)dx∫√(2)sinx+(2)/(cos^(2)x)dx=√2∫sinxdx+2∫1cos2xdx=√(2)∫sinxdx+2∫(1)/(cos^(2)x)dx  
=−√2cosx+2tanx+C=−√(2)cosx+2tanx+C.  
**• Nguyên hàm của hàm số mũ**  
∫exdx=ex+C∫e^(x)dx=e^(x)+C.  
∫axdx=axlna+C(0<a≠1)∫a^(x)dx=(a^(x))/(lna)+C0<a≠1.  
**Ví dụ 7.** Hãy tìm:  
a) ∫(ex−2x)dx∫e^(x)−2^(x)dx; b) ∫(x+12x)dx∫x+(1)/(2^(x))dx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫(ex−2x)dx∫e^(x)−2^(x)dx=∫exdx−∫2xdx=∫e^(x)dx−∫2^(x)dx=ex−2xln2+C=e^(x)−(2^(x))/(ln2)+C .  
b) ∫(x+12x)dx∫x+(1)/(2^(x))dx=∫xdx+∫(12)xdx=∫xdx+∫(1)/(2)^(x)dx=x22+(12)ln12x+C=(x^(2))/(2)+((1)/(2))/(ln(1)/(2))^(x)+C  
=x22−12xln2+C=(x^(2))/(2)−(1)/(2^(x)ln2)+C .  
  
**B. Bài tập Nguyên hàm**  
**Bài 1.** Một nguyên hàm của hàm số f(x) = 9x + 3x2 là:  
**A.** F(x) = 9x + x3.  
**B.** F(x) = 9xln9 + x3.  
**C. F(x)=9xln9+6xFx=9xln9+6x**.  
**D. F(x)=9xln9+x3Fx=9xln9+x3**.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: D**  
Vì F′(x)=(9xln9+x3)′=9x+3x2F^(')x=(9^(x))/(ln9)+x^(3)^(')=9^(x)+3x^(2)nên F(x)=9xln9+x3Fx=(9^(x))/(ln9)+x^(3)là một nguyên hàm của hàm số f(x) = 9x + 3x2.  
**Bài 2.** Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?  
**A.** ∫kf(x)dx=k∫f(x)dx,k≠0∫kfxdx=k∫fxdx,k≠0.  
**B.** ∫f(x).g(x)dx=∫f(x)dx.∫g(x)dx∫fx.gxdx=∫fxdx.∫gxdx.  
**C. ∫[f(x)+g(x)]dx=∫f(x)dx+∫g(x)dx∫fx+gxdx=∫fxdx+∫gxdx**.  
**D. ∫1xdx=ln|x|+C∫1xdx=lnx+C**.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Từ các tính chất của nguyên hàm, ta thấy đáp án B là sai.  
**Bài 3.** Tìm  
a) ∫(2x+ex)dx∫2x+e^(x)dx; b) ∫(sinx−cosx)dx∫sinx−cosxdx.  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫(2x+ex)dx∫2x+e^(x)dx=2∫xdx+∫exdx=2∫xdx+∫e^(x)dx=2.x22+ex+C=2.(x^(2))/(2)+e^(x)+C  
=x2+ex+C=x^(2)+e^(x)+C.  
b) ∫(sinx−cosx)dx∫sinx−cosxdx=∫sinxdx−∫cosxdx=∫sinxdx−∫cosxdx  
=−cosx−sinx+C=−cosx−sinx+C.  
**Bài 4.** Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc a(t)=−124t3+516t2at=−(1)/(24)t^(3)+(5)/(16)t^(2)(m/s2), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm 5 (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có v(t)=∫a(t)dt=∫(−124t3+516t2)dtvt=∫atdt=∫−(1)/(24)t^(3)+(5)/(16)t^(2)dt=−196t4+548t3+C=−(1)/(96)t^(4)+(5)/(48)t^(3)+C .  
Vì v(0) = 0 nên C = 0.  
Do đó v(t)=−196t4+548t3vt=−(1)/(96)t^(4)+(5)/(48)t^(3) .  
Vào thời điểm 5 (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là:  
v(5)=−196.54+548.53=62596≈6,51v5=−(1)/(96).5^(4)+(5)/(48).5^(3)=(625)/(96)≈6,51 (m/s).  
**Bài 5.** Tìm  
a) ∫x2+2√x+3x3dx∫(x^(2)+2√(x)+3)/(x^(3))dx; b) ∫102xdx∫10^(2x)dx; c) ∫2x−1exdx∫(2^(x)−1)/(e^(x))dx.  
**Hướng dẫn giải**  
a) ∫x2+2√x+3x3dx∫(x^(2)+2√(x)+3)/(x^(3))dx=∫1xdx+2∫x−52dx+3∫x−3dx=∫(1)/(x)dx+2∫x^((−5)/(2))dx+3∫x^(−3)dx  
=ln|x|−43x−32−32x−2+C=lnx−(4)/(3)x^((−3)/(2))−(3)/(2)x^(−2)+C .  
b) ∫102xdx∫10^(2x)dx=∫100xdx=100xln100+C=∫100^(x)dx=(100^(x))/(ln100)+C .  
c) ∫2x−1exdx∫(2^(x)−1)/(e^(x))dx=∫2xexdx−∫1exdx=∫(2^(x))/(e^(x))dx−∫(1)/(e^(x))dx=∫(2e)xdx−∫(1e)xdx=∫(2)/(e)^(x)dx−∫(1)/(e)^(x)dx  
=(2e)xln2e−(1e)xln1e+C=((2)/(e)^(x))/(ln(2)/(e))−((1)/(e)^(x))/(ln(1)/(e))+C=2xex(ln2−1)+1ex+C=(2^(x))/(e^(x)ln2−1)+(1)/(e^(x))+C