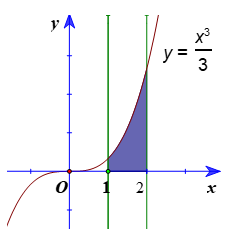
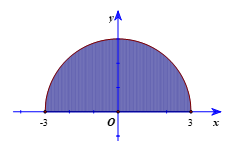
# Lý thuyết Bài 12: Tích phân

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 12: Tích phân- Kết nối tri thức**  
**A. Lý thuyết Tích phân**  
**1. Khái niệm tích phân**  
**• Diện tích hình thang cong**  
+) Hình thang cong: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị y = f(x), trục hoành và hai đường thẳng x = a, x = b, (a < b), trong đó f(x) là hàm liên tục không âm trên đọan [a; b], gọi là một hình thang cong.  
+) Diện tích hình thang cong  
Nếu hàm số f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a; b], thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị y = f(x), trục hoành và hai đường thẳng x = a, x = b là S = F(b) – F(a), trong đó F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [a; b].  
**Ví dụ 1.** Tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x) = x33(x^(3))/(3) , trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = 2.  
  
**Hướng dẫn giải**  
Một nguyên hàm của hàm số f(x)=x33fx=(x^(3))/(3) là F(x)=x412Fx=(x^(4))/(12) .  
Do đó, diện tích của hình thang cong cần tính là:  
S = F(2) – F(1) = 2412−1412=1512=54(2^(4))/(12)−(1^(4))/(12)=(15)/(12)=(5)/(4) .  
**• Định nghĩa tích phân**  
Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a; b]. Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [a; b] thì hiệu số F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số f(x), kí hiệu là b∫af(x)dx∫abfxdx .  
**Chú ý**  
a) Hiệu F(b) – F(a) thường được kí hiệu là F(x)∣∣∣baFx|ba . Như vậy b∫af(x)dx=F(x)∣∣∣ba∫abfxdx=Fx|ba .  
b) Ta gọi b∫a∫ab là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân và f(x) là hàm số dưới dấu tích phân.  
c) Trong trường hợp a = b hoặc a > b, ta quy ước:  
a∫af(x)dx=0;b∫af(x)dx=−a∫bf(x)dx∫aafxdx=0;∫abfxdx=−∫bafxdx .  
**Ví dụ 2.** Tính  
a) 1∫04x3dx∫014x^(3)dx ; b) 2∫13xdx∫123^(x)dx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) 1∫04x3dx∫014x^(3)dx=x4∣∣10=1−0=1=x^(4)|01=1−0=1 .  
b) 2∫13xdx∫123^(x)dx=3xln3∣∣21=32ln3−3ln3=6ln3=(3^(x))/(ln3)|12=(3^(2))/(ln3)−(3)/(ln3)=(6)/(ln3) .  
**• Ý nghĩa hình học của tích phân**  
Nếu hàm số f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a; b], thì tích phân b∫af(x)dx∫abfxdx là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị y = f(x), trục hoành và hai đường thẳng x = a, x = b. Vậy S = b∫af(x)dx∫abfxdx .  
**Ví dụ 3.** Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân, tính 3∫−3√9−x2dx∫−33√(9−x^(2))dx .  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có y=√9−x2y=√(9−x^(2)) là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm tại gốc tọa độ O và bán kính 3. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.  
  
Vậy 3∫−3√9−x2dx=12π.32=9π2∫−33√(9−x^(2))dx=(1)/(2)π.3^(2)=(9π)/(2) .  
**2. Tính chất của tích phân**  
1) b∫akf(x)dx=kb∫af(x)dx∫abkfxdx=k∫abfxdx (k là hằng số);  
2) b∫a[f(x)+g(x)]dx=b∫af(x)dx+b∫ag(x)dx∫abfx+gxdx=∫abfxdx+∫abgxdx ;  
3) b∫a[f(x)−g(x)]dx=b∫af(x)dx−b∫ag(x)dx∫abfx−gxdx=∫abfxdx−∫abgxdx ;  
4) b∫af(x)dx=c∫af(x)dx+b∫cf(x)dx∫abfxdx=∫acfxdx+∫cbfxdx (a < c < b).  
**Ví dụ 4.** Tính  
a) I=1∫0(4x3−ex)dxI=∫014x^(3)−e^(x)dx ; b) I=π2∫0(1+sinx)dxI=∫0(π)/(2)1+sinxdx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) I=1∫0(4x3−ex)dxI=∫014x^(3)−e^(x)dx=1∫04x3dx−1∫0exdx=∫014x^(3)dx−∫01e^(x)dx  
=x4∣∣10−ex∣∣10=1−e+1=2−e=x^(4)|01−e^(x)|01=1−e+1=2−e .  
b) I=π2∫0(1+sinx)dxI=∫0(π)/(2)1+sinxdx=π2∫01dx+π2∫0sinxdx=∫0(π)/(2)1dx+∫0(π)/(2)sinxdx  
=x∣∣π20−cosx∣∣π20=x|0(π)/(2)−cosx|0(π)/(2)=π2+1=(π)/(2)+1 .  
  
**B. Bài tập Tích phân**  
**Bài 1.** Biết 5∫1f(x)dx=4∫15fxdx=4 . Giá trị của 5∫13f(x)dx∫153fxdx bằng  
**A.** 7.  
**B. 4343** .  
**C.** 64.  
**D.** 12.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: D**  
Ta có 5∫13f(x)dx=35∫1f(x)dx∫153fxdx=3∫15fxdx= 3.4 = 12.  
**Bài 2.** Biết F(x) = x3 là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên ℝ. Giá trị của 2∫1(2+f(x))dx∫122+fxdx bằng  
**A.** 234(23)/(4) .  
**B.** 7.  
**C.** 9.  
**D.** 154(15)/(4) .  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Ta có 2∫1(2+f(x))dx∫122+fxdx=2∫12dx+2∫1f(x)dx=∫122dx+∫12fxdx  
=2x∣∣21+F(x)∣∣21=2x|12+Fx|12=2+x3∣∣21=2+x^(3)|12 = 9.  
**Bài 3.** Tính I=2∫−2∣∣x2−1∣∣dxI=∫−22x^(2)−1dx .  
**Hướng dẫn giải**  
I=2∫−2∣∣x2−1∣∣dxI=∫−22x^(2)−1dx=−1∫−2∣∣x2−1∣∣dx+1∫−1∣∣x2−1∣∣dx+2∫1∣∣x2−1∣∣dx=∫−2−1x^(2)−1dx+∫−11x^(2)−1dx+∫12x^(2)−1dx  
=−1∫−2(x2−1)dx+1∫−1(1−x2)dx+2∫1(x2−1)dx=∫−2−1x^(2)−1dx+∫−111−x^(2)dx+∫12x^(2)−1dx  
=(x33−x)∣∣−1−2+(x−x33)∣∣1−1+(x33−x)∣∣21=(x^(3))/(3)−x|−2−1+x−(x^(3))/(3)|−11+(x^(3))/(3)−x|12  
=23+23+23+23+23+23=4=(2)/(3)+(2)/(3)+(2)/(3)+(2)/(3)+(2)/(3)+(2)/(3)=4  
**Bài 4.** Cho hai quả bóng A, B di chuyển ngược chiều nhau va chạm với nhau. Sau va chạm mỗi quả bóng nảy ngược lại một đoạn thì dừng hẳn. Biết sau khi va chạm, quả bóng A nảy ngược lại với vận tốc vA(t) = 8 – 2t (m/s) và quả bóng B nảy ngược lại với vận tốc vB(t) = 12 – 4t (m/s). Tính khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn (giả sử hai quả bóng đều chuyển động thẳng).  
**Hướng dẫn giải**  
Thời gian quả bóng A chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn là  
vA(t) = 0 ⇔⇔ 8 – 2t = 0 ⇔⇔ t = 4 (s).  
Quãng đường quả bóng A di chuyển là  
SA=4∫0(8−2t)dt=(8t−t2)∣∣∣40=16S\_(A)=∫048−2tdt=8t−t^(2)|04=16 (m).  
Thời gian quả bóng B chuyển động từ lúc va chạm đến khi dừng hẳn là  
vB(t) = 0 ⇔⇔ 12 – 4t = 0 ⇔⇔ t = 3 (s).  
Quãng đường quả bóng B đi được là  
SB=3∫0(12−4t)dt=(12t−2t2)∣∣∣30=18S\_(B)=∫0312−4tdt=12t−2t^(2)|03=18 (m).  
Khoảng cách giữa hai quả bóng sau khi đã dừng hẳn là:  
S = SA + SB = 16 + 18 = 34 (m).  
**Bài 5.** Tính  
a) 1∫0(3x+1)(x+3)dx∫013x+1x+3dx ; b) π2∫0cos2x2dx∫0(π)/(2)cos^(2)(x)/(2)dx .  
**Hướng dẫn giải**  
a) 1∫0(3x+1)(x+3)dx∫013x+1x+3dx=1∫0(3x2+10x+3)dx=∫013x^(2)+10x+3dx  
=(x3+5x2+3x)∣∣10=x^(3)+5x^(2)+3x|01= 9.  
b) π2∫0cos2x2dx∫0(π)/(2)cos^(2)(x)/(2)dx=π2∫01+cosx2dx=∫0(π)/(2)(1+cosx)/(2)dx=π2∫012dx+π2∫0cosx2dx=∫0(π)/(2)(1)/(2)dx+∫0(π)/(2)(cosx)/(2)dx  
=12(x+sinx)∣∣π20=(1)/(2)x+sinx|0(π)/(2)=12(π2+1)=(1)/(2)(π)/(2)+1 .