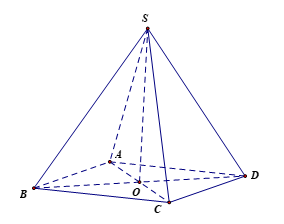
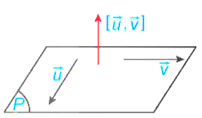
# Lý thuyết Bài 14: Phương trình mặt phẳng

**Lý thuyết Toán 12 Bài 14: Phương trình mặt phẳng- Kết nối tri thức**  
**A. Lý thuyết Phương trình mặt phẳng**  
**1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng**  
**• Khái niệm vectơ pháp tuyến**  
Vectơ →n≠→0n→≠0→ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của →nn→ vuông góc với (α).  
**Chú ý**  
+) Mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.  
+) Nếu →nn→ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì k→nkn→ (với k là một số khác 0) cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).  
**Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều S.ABCD. Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABCD).  
**Hướng dẫn giải**  
  
Gọi O là giao điểm của AC và BD.  
Vì S.ABCD là hình chóp đều nên SO ^ (ABCD).  
Do đó −−→SOSO→ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABCD).  
**• Cách tìm một vectơ vuông góc với hai vectơ cho trước**  
Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ →u=(a;b;c)u→=a;b;c và →v=(a′;b′;c′)v→=a^(');b^(');c^(') . Khi đó vectơ →n=(bc′−b′c;ca′−c′a;ab′−a′b)n→=bc^(')−b^(')c;ca^(')−c^(')a;ab^(')−a^(')b vuông góc với cả hai vectơ →uu→ và →vv→ , được gọi là tích có hướng của →uu→ và →vv→, kí hiệu là [→u,→v]u→,v→ .  
**Chú ý**  
+) [→u,→v]=→0u→,v→=0→ khi và chỉ khi →uu→, →vv→ cùng phương.  
+) Với bốn số x, y, x', y', ta kí hiệu ∣∣∣xyx′y′∣∣∣=xy′−x′yxyx^(')y^(')=xy^(')−x^(')y . Khi đó tích có hướng của →u=(a;b;c)u→=a;b;c và →v=(a′;b′;c′)v→=a^(');b^(');c^(') là [→u,→v]=(∣∣∣bcb′c′∣∣∣;∣∣∣cac′a′∣∣∣;∣∣∣aba′b′∣∣∣)u→,v→=bcb^(')c^(');cac^(')a^(');aba^(')b^(') .  
**Ví dụ 2.** Trong không gian Oxyz, cho →u=(1;2;3)u→=1;2;3 và →v=(0;−1;2)v→=0;−1;2 . Tìm [→u,→v]u→,v→ .  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có [→u,→v]=(∣∣∣23−12∣∣∣;∣∣∣3120∣∣∣;∣∣∣120−1∣∣∣)=(7;−2;−1)u→,v→=23−12;3120;120−1=7;−2;−1 .  
**• Khái niệm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng**  
+) Trong không gian Oxyz, hai vectơ →u,→vu→,v→ được gọi là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P).  
+) Nếu →u,→vu→,v→ là cặp vectơ chỉ phương của (P) thì [→u,→v]u→,v→ là một vectơ pháp tuyến của (P).  
  
**Ví dụ 3.** Trong không gian Oxyz, cho các vectơ →u=(0;−1;3)u→=0;−1;3 và →v=(5;0;1)v→=5;0;1 . Gọi (P) là một mặt phẳng song song với các giá của . Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của (P).  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có →n=[→u,→v]=(∣∣∣−1301∣∣∣;∣∣∣3015∣∣∣;∣∣∣0−150∣∣∣)=(−1;15;5)n→=u→,v→=−1301;3015;0−150=−1;15;5 là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
**2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng**  
**• Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng**  
Trong không gian Oxyz, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng Ax + By + Cz + D = 0, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng đó.  
**Chú ý.** Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình Ax + By + Cz + D = 0 (các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0) xác định một mặt phẳng nhận →n=(A;B;C)n→=A;B;Clàm một vectơ pháp tuyến.  
**Ví dụ 4.** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình 2x + y – z + 5 = 0. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).  
**Hướng dẫn giải**  
Mặt phẳng (P) nhận →n=(2;1;−1)n→=2;1;−1làm một vectơ pháp tuyến.  
**3. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng**  
**• Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến**  
Trong không gian Oxyz, nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm M0(x0; y0; z0) và có vectơ pháp tuyến →n=(A;B;C)n→=A;B;Cthì có phương trình là:  
A(x – x0) + B(y – y0) + C(z – z0) = 0 ⇔ Ax + By + Cz + D = 0, với D = −(Ax0 + By0 + Cz0).  
**Ví dụ 5.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A(0; 2; 3) và có vectơ pháp tuyến →n=(2;1;−1)n→=2;1;−1 .  
**Hướng dẫn giải**  
Mặt phẳng (P) có phương trình là:  
2(x – 0) + 1(y – 2) – 1(z – 3) = 0 Û 2x + y – z + 1 = 0.  
**• Lập phương trình mặt phẳng đi qua một điểm và biết cặp vectơ chỉ phương**  
Trong không gian Oxyz, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và biết cặp vectơ chỉ phương →u,→vu→,v→ có thể thực hiện theo các bước sau:  
+) Tìm vectơ pháp tuyến →n=[→u,→v]n→=u→,v→ .  
+) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua M và biết vectơ pháp tuyến →nn→ .  
**Ví dụ 6.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A(1; 2; −2), B(2; −1; 4) và song song với giá của vectơ →n=(1;−2;−1)n→=1;−2;−1 .  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có −−→AB=(1;−3;6)AB→=1;−3;6 ; →n=(1;−2;−1)n→=1;−2;−1 .  
Có [−−→AB,→n]=(∣∣∣−36−2−1∣∣∣;∣∣∣61−11∣∣∣;∣∣∣1−31−2∣∣∣)=(15;7;1)AB→,n→=−36−2−1;61−11;1−31−2=15;7;1 .  
Mặt phẳng (P) đi qua A(1; 2; −2) và nhận →n=[−−→AB,→n]=(15;7;1)n→=AB→,n→=15;7;1 làm một vectơ pháp tuyến có phương trình là:  
15(x – 1) + 7(y – 2) + (z + 2) = 0 hay 15x + 7y + z – 27 = 0.  
**• Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng**  
Trong không gian Oxyz, bài toán viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C có thể thực hiện theo các bước sau:  
+) Tìm cặp vectơ chỉ phương −−→AB,−−→ACAB→,AC→ .  
+) Tìm vectơ pháp tuyến →n=[−−→AB,−−→AC]n→=AB→,AC→ .  
+) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua A và có vectơ pháp tuyến →nn→ .  
**Ví dụ 7.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A(1; 0; −2), B(1; 1; 1), C(0; −1; 2).  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có −−→AB=(0;1;3)AB→=0;1;3 , −−→AC=(−1;−1;4)AC→=−1;−1;4 .  
Có [−−→AB,−−→AC]=(∣∣∣13−14∣∣∣;∣∣∣304−1∣∣∣;∣∣∣01−1−1∣∣∣)=(7;−3;1)AB→,AC→=13−14;304−1;01−1−1=7;−3;1 .  
Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương −−→AB,−−→ACAB→,AC→ nên có vectơ pháp tuyến →n=[−−→AB,−−→AC]=(7;−3;1)n→=AB→,AC→=7;−3;1 .  
Mặt phẳng (ABC) đi qua A(1; 0; −2), có vectơ pháp tuyến →n=(7;−3;1)n→=7;−3;1 có phương trình là: 7(x – 1) – 3y + (z + 2) = 0 hay 7x – 3y + z – 5 = 0.  
**4. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau**  
Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng: (α): Ax + By + Cz + D = 0, (β): A'x + B'y + C'z + D' = 0 với hai vectơ pháp tuyến →n=(A;B;C),→n′=(A′;B′;C′)n→=A;B;C,n^(')→=A^(');B^(');C^(')tương ứng. Khi đó: (α) ⊥⊥ (β) ⇔⇔→n⊥→n′⇔AA′+BB′+CC′=0n→⊥n^(')→⇔AA^(')+BB^(')+CC^(')=0 .  
**Ví dụ 8.** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): x + 2y + z + 1 = 0 và mặt phẳng (Q): 3x – 2y + z + 5 = 0. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có −→nP=(1;2;1),−→nQ=(3;−2;1)n\_(P)→=1;2;1,n\_(Q)→=3;−2;1.  
Vì −→nP.−→nQ=1.3+2.(−2)+1.1=0n\_(P)→.n\_(Q)→=1.3+2.−2+1.1=0. Do đó (P) ⊥⊥ (Q).  
**5. Điều kiện để hai mặt phẳng song song với nhau**  
Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0, (β): A'x + B'y + C'z + D' = 0, với các vectơ pháp tuyến →n=(A;B;C)n→=A;B;C, →n′=(A′;B′;C′)n^(')→=A^(');B^(');C^(')tương ứng. Khi đó: (α)//(β)⇔{→n′=k→nD′≠kDα//β⇔n^(')→=kn→D^(')≠kDvới k nào đó.  
**Chú ý**  
+) Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì vectơ pháp tuyến của mặt phẳng này cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng kia.  
+) Hai mặt phẳng (α) và (β) trùng nhau khi và chỉ khi tồn tại số k khác 0 sao cho A' = kA, B' = kB, C' = kC, D' = kD.  
**Ví dụ 9.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(0; 1; 3) và song song với mặt phẳng (Q): 2x – 3z + 1 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
Có −→nQ=(2;0;−3)n\_(Q)→=2;0;−3là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).  
Vì (P) // (Q) nên mặt phẳng (P) nhận →n=−→nQ=(2;0;−3)n→=n\_(Q)→=2;0;−3làm một vectơ pháp tuyến.  
Mặt phẳng (P) đi qua điểm M(0; 1; 3), có →n=(2;0;−3)n→=2;0;−3 là vectơ pháp tuyến có phương trình là: 2x – 3(z – 3) = 0 hay 2x – 3z + 9 = 0.  
**6. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**  
Trong không gian Oxyz, khoảng cách từ điểm M(x0; y0; z0) đến mặt phẳng (P): Ax + By + Cz + D = 0 là d(M,(P))=|Ax0+By0+Cz0+D|√A2+B2+C2dM,P=(Ax\_(0)+By\_(0)+Cz\_(0)+D)/(√(A^(2)+B^(2)+C^(2))).  
**Ví dụ 10.** Trong không gian Oxyz, tính khoảng cách từ điểm I(−1; 2; 1) đến mặt phẳng (α): x + 2y – 2z + 8 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có d(I,(α))=|−1+2.2−2.1+8|√12+22+(−2)2=93=3dI,α=(−1+2.2−2.1+8)/(√(1^(2)+2^(2)+−2^(2)))=(9)/(3)=3.  
  
**B. Bài tập Phương trình mặt phẳng**  
**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (α): 3x + 2y – z + 1 = 0. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:  
**A. →n=(3;2;1)n→=3;2;1**.  
**B. →n=(−2;3;1)n→=−2;3;1**.  
**C. →n=(3;2;−1)n→=3;2;−1**.  
**D.** →n=(3;−2;−1)n→=3;−2;−1.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Mặt phẳng (α): 3x + 2y – z + 1 = 0 có một vectơ pháp tuyến là →n=(3;2;−1)n→=3;2;−1.  
**Bài 2.** Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M(−1; −2; 5) và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): x + 2y – 3z + 1 = 0 và (R): 2x – 3y + z + 1 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
Mặt phẳng (Q) và (R) có vectơ pháp tuyến lần lượt là  
−→nQ=(1;2;−3),−→nR=(2;−3;1)n\_(Q)→=1;2;−3,n\_(R)→=2;−3;1  
Ta có  
[−→nQ,−→nR]=(∣∣∣2−3−31∣∣∣;∣∣∣−3112∣∣∣;∣∣∣122−3∣∣∣)=(−7;−7;−7)n\_(Q)→,n\_(R)→=2−3−31;−3112;122−3=−7;−7;−7 .  
Mặt phẳng (P) đi qua điểm M(−1; −2; 5) nhận →n=1−7[−→nQ,−→nR]=(1;1;1)n→=(1)/(−7)n\_(Q)→,n\_(R)→=1;1;1 làm một vectơ pháp tuyến có phương trình là: (x + 1) + (y + 2) + (z – 5) = 0 hay x + y + z – 2 = 0.  
**Bài 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz,  
a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oy và đi qua điểm M(1; 1; −1).  
b) Tính khoảng cách từ A(1; 2; 3) đến mặt phẳng (P).  
**Hướng dẫn giải**  
a) Trục Oy có vectơ chỉ phương là →j=(0;1;0)j→=0;1;0 , −−→OM=(1;1;−1)OM→=1;1;−1 .  
Mặt phẳng (P) chứa trục Oy và đi qua điểm M(1; 1; −1) nhận →n=[→j,−−→OM]=(−1;0;−1)n→=j→,OM→=−1;0;−1có phương trình là: −1(x – 1) −1(z + 1) = 0 hay x + z = 0.  
b) d(A,(P))=|1+3|√12+12=4√2=2√2dA,P=(1+3)/(√(1^(2)+1^(2)))=(4)/(√(2))=2√(2).  
**Bài 4.** Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục Oxyz (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường (P), (Q), (R) (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình (P): x + 2y – 2z + 1 = 0, (Q): 2x + y + 2z – 3 = 0, (R): 2x + 4y – 4z – 19 = 0.  
  
a) Hãy kiểm tra tính song song hoặc vuông góc giữa các bức tường (P), (Q), (R) của tòa nhà.  
b) Tính khoảng cách giữa hai bức tường (P) và (R) của tòa nhà.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt là  
−→nP=(1;2;−2),−→nQ=(2;1;2),−→nR=(2;4;−4)n\_(P)→=1;2;−2,n\_(Q)→=2;1;2,n\_(R)→=2;4;−4 .  
Có −→nQ.−→nR=2.2+1.4+2.(−4)=0n\_(Q)→.n\_(R)→=2.2+1.4+2.−4=0 . Do đó (Q) ⊥⊥ (R).  
Có {−→nR=2−→nP−19≠2.1n\_(R)→=2n\_(P)→−19≠2.1 nên (P) // (R).  
b) Lấy A(−1; 0; 0) ∈∈ (P).  
Vì (P) // (R) nên  
d((P),(R)) = d(A, (R)) = (2.(−1)+4.0−4.0−19)√22+42+42=216=72(2.−1+4.0−4.0−19)/(√(2^(2)+4^(2)+4^(2)))=(21)/(6)=(7)/(2)  
**Bài 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), abc ≠ 0. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:  
**A.** xa+yb+zc=1(x)/(a)+(y)/(b)+(z)/(c)=1.  
**B.** xb+ya+zc=1(x)/(b)+(y)/(a)+(z)/(c)=1.  
**C.** xa+yc+zb=1(x)/(a)+(y)/(c)+(z)/(b)=1.  
**D. xc+yb+za=1xc+yb+za=1**.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: A**  
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), abc ≠ 0. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là: xa+yb+zc=1(x)/(a)+(y)/(b)+(z)/(c)=1.  
 .