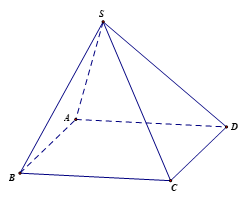
# Lý thuyết Bài 15: Phương trình đường thẳng trong không gian

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 15: Phương trình đường thẳng trong không gian- Kết nối tri thức**  
**A. Lý thuyết Phương trình đường thẳng trong không gian**  
**1. Phương trình đường thẳng**  
**• Vectơ chỉ phương của đường thẳng**  
Vectơ →u≠→0u→≠0→được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng D nếu giá của →uu→song song hoặc trùng với Δ∆.  
**Chú ý**  
+) Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm mà nó đi qua và một vectơ chỉ phương.  
+) Nếu →uu→là một vectơ chỉ phương của Δ∆ thì k→uku→(với k là một số khác 0) cũng là một vectơ chỉ phương của Δ∆.  
**Ví dụ 1.** Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành. Hãy chỉ ra các vectơ chỉ phương của đường thẳng BC mà điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó đều là các đỉnh của hình chóp S.ABCD.  
**Hướng dẫn giải**  
  
Đường thẳng BC nhận −−→BC,−−→CB,−−→AD,−−→DABC→,CB→,AD→,DA→ là các vectơ chỉ phương của đường thẳng BC.  
**• Phương trình tham số của đường thẳng**  
Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(x0; y0; z0) và có vectơ chỉ phương →u=(a;b;c)u→=a;b;c . Hệ phương trình ⎧⎪⎨⎪⎩x=x0+aty=y0+btz=z0+ctx=x\_(0)+aty=y\_(0)+btz=z\_(0)+ct được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ∆ (t là tham số, t ∈∈ ℝ).  
**Chú ý**  
+) Với các số a, b, c không đồng thời bằng 0, hệ phương trình ⎧⎪⎨⎪⎩x=x0+aty=y0+btz=z0+ct(t∈R)x=x\_(0)+aty=y\_(0)+btz=z\_(0)+ctt∈ℝ xác định một đường thẳng đi qua điểm M(x0; y0; z0) và có vectơ chỉ phương →u=(a;b;c)u→=a;b;c .  
+) Từ phương trình tham số của đường thẳng, mỗi giá trị của tham số tương ứng với một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.  
**Ví dụ 2.** Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(0; 1; 2) và có vectơ chỉ phương →u=(1;2;3)u→=1;2;3 .  
**Hướng dẫn giải**  
Đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(0; 1; 2) và có vectơ chỉ phương →u=(1;2;3)u→=1;2;3 có phương trình là: ⎧⎪⎨⎪⎩x=ty=1+2tz=2+3tx=ty=1+2tz=2+3t .  
**• Phương trình chính tắc của đường thẳng**  
Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(x0; y0; z0) và có vectơ chỉ phương →u=(a;b;c)u→=a;b;c với a, b, c là các số khác 0.  
Hệ phương trình: x−x0a=y−y0b=z−z0c(x−x\_(0))/(a)=(y−y\_(0))/(b)=(z−z\_(0))/(c) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ∆.  
**Ví dụ 3.** Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(−1; 1; 2) và có vectơ chỉ phương →u=(1;−2;3)u→=1;−2;3 .  
**Hướng dẫn giải**  
Đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(−1; 1; 2) và có vectơ chỉ phương →u=(1;−2;3)u→=1;−2;3 có phương trình chính tắc là: x+11=y−1−2=z−23(x+1)/(1)=(y−1)/(−2)=(z−2)/(3) .  
**• Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm**  
Trong không gian Oxyz, cho hai điểm phân biệt A1(x1; y1; z1) và A2(x2; y2; z2). Đường thẳng A1A2 có vectơ chỉ phương −−−→A1A2=(x2−x1;y2−y1;z2−z1)A\_(1)A\_(2)→=x\_(2)−x\_(1);y\_(2)−y\_(1);z\_(2)−z\_(1) .  
+) Đường thẳng A1A2 có phương trình tham số là: ⎧⎪⎨⎪⎩x=x1+(x2−x1)ty=y1+(y2−y1)tz=z1+(z2−z1)t(t∈R)x=x\_(1)+x\_(2)−x\_(1)ty=y\_(1)+y\_(2)−y\_(1)tz=z\_(1)+z\_(2)−z\_(1)tt∈ℝ .  
+) Trong trường hợp x1 ≠ x2, y1 ≠ y2, z1 ≠ z2 thì đường thẳng A1A2 có phương trình chính tắc là: x−x1x2−x1=y−y1y2−y1=z−z1z2−z1(x−x\_(1))/(x\_(2)−x\_(1))=(y−y\_(1))/(y\_(2)−y\_(1))=(z−z\_(1))/(z\_(2)−z\_(1)) .  
**Ví dụ 4.** Lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm M(1; 1; 1) và N(1; −3; 2).  
**Hướng dẫn giải**  
Đường thẳng MN đi qua điểm M(1; 1; 1) nhận −−−→MN=(0;−4;1)MN→=0;−4;1 làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là: ⎧⎪⎨⎪⎩x=1y=1−4tz=1+tx=1y=1−4tz=1+t .  
**2. Hai đường thẳng vuông góc**  
Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ∆1, Δ∆2 tương ứng có vectơ chỉ phương →u1=(a1;b1;c1)u\_(1)→=a\_(1);b\_(1);c\_(1), →u2=(a2;b2;c2)u\_(2)→=a\_(2);b\_(2);c\_(2). Khi đó Δ1⊥Δ2⇔→u1.→u2=0⇔a1a2+b1b2+c1c2=0Δ\_(1)⊥Δ\_(2)⇔u\_(1)→.u\_(2)→=0⇔a\_(1)a\_(2)+b\_(1)b\_(2)+c\_(1)c\_(2)=0.  
**Ví dụ 5.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng:  
d1: ⎧⎪⎨⎪⎩x=2+ty=5−4tz=3+tx=2+ty=5−4tz=3+t và d2: ⎧⎪⎨⎪⎩x=1+2my=mz=2+2mx=1+2my=mz=2+2m .  
Chứng minh rằng hai đường thẳng trên vuông góc với nhau.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có −→ud1=(1;−4;1)u\_(d\_(1))→=1;−4;1; −→ud2=(2;1;2)u\_(d\_(2))→=2;1;2.  
Vì −→ud1.−→ud2=1.2+(−4).1+1.2=0u\_(d\_(1))→.u\_(d\_(2))→=1.2+−4.1+1.2=0. Do đó d1 ⊥⊥ d2.  
**3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**  
Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ1∆\_(1), Δ2∆\_(2) lần lượt đi qua các điểm A1(x1; y1; z1), A2(x2; y2; z2) và tương ứng có vectơ chỉ phương →u1=(a1;b1;c1),→u2=(a2;b2;c2)u\_(1)→=a\_(1);b\_(1);c\_(1),u\_(2)→=a\_(2);b\_(2);c\_(2). Khi đó:  
+) Δ1∆\_(1) // Δ2∆\_(2)⇔⇔ →u1u\_(1)→cùng phương với →u2u\_(2)→và A1  Δ2∆\_(2).  
+) Δ1∆\_(1) ≡ Δ2∆\_(2)⇔⇔ →u1u\_(1)→cùng phương với →u2u\_(2)→và A1 ∈∈ Δ2∆\_(2).  
+) Δ1∆\_(1) và Δ2∆\_(2) cắt nhau  
⇔⇔⎧⎪  
⎪⎨⎪  
⎪⎩[→u1,→u2]≠→0−−−→A1A2⊥[→u1,→u2]⇔⎧⎪  
⎪⎨⎪  
⎪⎩[→u1,→u2]≠→0−−−→A1A2.[→u1,→u2]=0u\_(1)→,u\_(2)→≠0→A\_(1)A\_(2)→⊥u\_(1)→,u\_(2)→⇔u\_(1)→,u\_(2)→≠0→A\_(1)A\_(2)→.u\_(1)→,u\_(2)→=0.  
+) Δ1∆\_(1) và Δ2∆\_(2) chéo nhau ⇔⇔ −−−→A1A2.[→u1,→u2]≠0A\_(1)A\_(2)→.u\_(1)→,u\_(2)→≠0.  
**Ví dụ 6.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d1: ⎧⎪⎨⎪⎩x=t+1y=2t+3z=−2tx=t+1y=2t+3z=−2t và d2: ⎧⎪⎨⎪⎩x=m−2y=m+2z=−m+3x=m−2y=m+2z=−m+3 . Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng trên.  
**Hướng dẫn giải**  
Đường thẳng d1 đi qua điểm A(1; 3; 0) và có vectơ chỉ phương →u1=(1;2;−2)u\_(1)→=1;2;−2.  
Đường thẳng d2 đi qua điểm B(−2; 2; 3) và có vectơ chỉ phương →u2=(1;1;−1)u\_(2)→=1;1;−1.  
Có −−→AB=(−3;−1;3)AB→=−3;−1;3và [→u1,→u2]=(0;−1;−1)u\_(1)→,u\_(2)→=0;−1;−1.  
Vì −−→AB.[→u1,→u2]=−3.0+(−1).(−1)+3.(−1)=−2≠0AB→.u\_(1)→,u\_(2)→=−3.0+−1.−1+3.−1=−2≠0.  
Do đó d1 và d2 chéo nhau.  
**Chú ý.** Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, ta cũng có thể dựa vào các vectơ chỉ phương và phương trình của hai đường thẳng đó theo tiêu chuẩn sau đây.  
Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ∆1, Δ∆2 tương ứng có vectơ chỉ phương →u1=(a1;b1;c1),→u2=(a2;b2;c2)u\_(1)→=a\_(1);b\_(1);c\_(1),u\_(2)→=a\_(2);b\_(2);c\_(2)và có phương trình tham số:  
Δ1:⎧⎪⎨⎪⎩x=x1+a1ty=y1+b1tz=z1+c1tΔ\_(1):x=x\_(1)+a\_(1)ty=y\_(1)+b\_(1)tz=z\_(1)+c\_(1)t; Δ2:⎧⎪⎨⎪⎩x=x2+a2sy=y2+b2sz=z2+c2sΔ\_(2):x=x\_(2)+a\_(2)sy=y\_(2)+b\_(2)sz=z\_(2)+c\_(2)s  
Xét hệ phương trình hai ẩn t, s: ⎧⎪⎨⎪⎩x1+a1t=x2+a2sy1+b1t=y2+b2sz1+c1t=z2+c2sx\_(1)+a\_(1)t=x\_(2)+a\_(2)sy\_(1)+b\_(1)t=y\_(2)+b\_(2)sz\_(1)+c\_(1)t=z\_(2)+c\_(2)s(\*).  
Khi đó:  
+) Δ∆1 // Δ∆2⇔⇔ →u1u\_(1)→cùng phương với →u2u\_(2)→và hệ (\*) vô nghiệm.  
+) Δ∆1 ≡ Δ∆2⇔⇔ Hệ (\*) có vô số nghiệm.  
+) Δ∆1 cắt Δ∆2⇔⇔ Hệ (\*) có nghiệm duy nhất.  
+) Δ∆1 và Δ∆2 chéo nhau ⇔⇔ →u1u\_(1)→và →u2u\_(2)→không cùng phương và hệ (\*) vô nghiệm.  
**Ví dụ 7.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d1: ⎧⎪⎨⎪⎩x=10−3ty=10−4tz=3−2tx=10−3ty=10−4tz=3−2t và d2: ⎧⎪⎨⎪⎩x=m+3y=2m+2z=3m+3x=m+3y=2m+2z=3m+3 . Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng trên.  
**Hướng dẫn giải**  
Xét hệ phương trình ⎧⎪⎨⎪⎩10−3t=m+310−4t=2m+23−2t=3m+310−3t=m+310−4t=2m+23−2t=3m+3⇔⎧⎪⎨⎪⎩m+3t=72m+4t=83m+2t=0⇔m+3t=72m+4t=83m+2t=0⇔{m=−2t=3⇔m=−2t=3 .  
Do đó hệ có nghiệm duy nhất nên d1 và d2 cắt nhau.  
  
**B. Bài tập Phương trình đường thẳng trong không gian**  
**Bài 1.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d: x−32=y−4−5=z+13(x−3)/(2)=(y−4)/(−5)=(z+1)/(3). Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?  
**A. →u2=(2;4;−1)u2→=2;4;−1**.  
**B. →u1=(2;−5;3)u1→=2;−5;3**.  
**C.** →u3=(2;5;3)u\_(3)→=2;5;3.  
**D.** →u4=(3;4;1)u\_(4)→=3;4;1.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Đường thẳng d: x−32=y−4−5=z+13(x−3)/(2)=(y−4)/(−5)=(z+1)/(3) có một vectơ chỉ phương là **→u1=(2;−5;3)u1→=2;−5;3**.  
**Bài 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 1; 0) và B(0; 1; 2). Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.  
**A. →u2=(−1;1;2)u2→=−1;1;2**.  
**B. →u1=(−1;0;−2)u1→=−1;0;−2**.  
**C.** →u3=(−1;0;2)u\_(3)→=−1;0;2.  
**D.** →u4=(1;2;2)u\_(4)→=1;2;2.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Có −−→AB=(−1;0;2)AB→=−1;0;2 . Do đó đường thẳng AB nhận →u3=(−1;0;2)u\_(3)→=−1;0;2 làm một vectơ chỉ phương.  
**Bài 3.** Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ∆ trong các trường hợp sau:  
a) Δ∆ đi qua điểm A(−1; −3; 4) và có vectơ chỉ phương →u=(3;5;7)u→=3;5;7.  
b) Δ∆ đi qua điểm A(−2; 2; 1) và vuông góc với mặt phẳng (α): x + 2y – 3z + 4 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(−1; −3; 4) và có vectơ chỉ phương →u=(3;5;7)u→=3;5;7 có phương trình tham số là ⎧⎪⎨⎪⎩x=−1+3ty=−3+5tz=4+7tx=−1+3ty=−3+5tz=4+7tvà phương trình chính tắc là x+13=y+35=z−47(x+1)/(3)=(y+3)/(5)=(z−4)/(7).  
b) Có −→nα=(1;2;−3)n\_(α)→=1;2;−3.  
Vì Δ∆⊥⊥ (α) nên đường thẳng Δ∆ nhận →u=−→nα=(1;2;−3)u→=n\_(α)→=1;2;−3làm một vectơ chỉ phương.  
Đường thẳng Δ∆ đi qua điểm A(−2; 2; 1), có →u=(1;2;−3)u→=1;2;−3làm một vectơ pháp tuyến có phương trình tham số là ⎧⎪⎨⎪⎩x=−2+ty=2+2tz=1−3tx=−2+ty=2+2tz=1−3tvà phương trình chính tắc là x+21=y−22=z−1−3(x+2)/(1)=(y−2)/(2)=(z−1)/(−3).  
**Bài 4.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm A(10; 3; 0) và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là →u=(2;−2;1)u→=2;−2;1. Viết phương trình chính tắc của đường cáp.  
**Hướng dẫn giải**  
Phương trình chính tắc của đường cáp là x−102=y−3−2=z1(x−10)/(2)=(y−3)/(−2)=(z)/(1) .  
**Bài 5.** Cho hai đường thẳng d1: ⎧⎪⎨⎪⎩x=−2+3ty=−1z=4−tx=−2+3ty=−1z=4−tvà d2: x−10−1=y+1−1=z−2(x−10)/(−1)=(y+1)/(−1)=(z)/(−2).  
Chứng minh rằng d1 và d2 cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm của d1 và d2.  
**Hướng dẫn giải**  
Đường thẳng d2 có phương trình tham số là ⎧⎪⎨⎪⎩x=10−ty=−1−tz=−2tx=10−ty=−1−tz=−2t .  
Xét hệ phương trình ⎧⎪⎨⎪⎩−2+3t=10−t−1=−1−t′4−t=−2t′−2+3t=10−t−1=−1−t^(')4−t=−2t^(')⇔{t=4t′=0⇔t=4t^(')=0 .  
Hệ có nghiệm duy nhất. Do đó d1 và d2 cắt nhau.  
Với t = 4 thay vào phương trình đường thẳng d1 ta có ⎧⎪⎨⎪⎩x=10y=−1z=0x=10y=−1z=0.  
Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là (10; −1; 0).