# Lý thuyết Bài 16: Công thức tính góc trong không gian

**Lý thuyết Toán** **12 Bài 16: Công thức tính góc trong không gian - Kết nối tri thức**  
**A. Lý thuyết Công thức tính góc trong không gian**  
**1. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng**  
Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng Δ∆ và Δ∆' tương ứng có vectơ chỉ phương →u=(a;b;c),→u′=(a′;b′;c′)u→=a;b;c,u^(')→=a^(');b^(');c^(') . Khi đó:  
cos(Δ,Δ′)=∣∣∣cos(→u,→u′)∣∣∣=|aa′+bb′+cc′|√a2+b2+c2.√a′2+b′2+c′2cosΔ,Δ^(')=cosu→,u^(')→=(aa^(')+bb^(')+cc^('))/(√(a^(2)+b^(2)+c^(2)).√(a^(')^(2)+b^(')^(2)+c^(')^(2)))  
**Ví dụ 1.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d1: ⎧⎪⎨⎪⎩x=2+ty=−1+tz=3x=2+ty=−1+tz=3 và d2: ⎧⎪⎨⎪⎩x=1−ty=2z=−2+tx=1−ty=2z=−2+t . Tính góc giữa hai đường thẳng trên.  
**Hướng dẫn giải**  
Đường thẳng d1 có vectơ chỉ phương là →u=(1;1;0)u→=1;1;0 .  
Đường thẳng d2 có vectơ chỉ phương là →u′=(−1;0;1)u^(')→=−1;0;1 .  
cos(Δ,Δ′)=∣∣∣cos(→u,→u′)∣∣∣=|1.(−1)+1.0+0.1|√12+12+02.√(−1)2+02+12=12cosΔ,Δ^(')=cosu→,u^(')→=(1.−1+1.0+0.1)/(√(1^(2)+1^(2)+0^(2)).√(−1^(2)+0^(2)+1^(2)))=(1)/(2)  
Suy ra (Δ∆, Δ∆') = 60°.  
**2. Công thức tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**  
Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ∆ có vectơ chỉ phương →u=(a;b;c)u→=a;b;c và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến →n=(A;B;C)n→=A;B;C . Khi đó:  
sin(Δ,(P))=∣∣cos(→u,→n)∣∣=|aA+bB+cC|√a2+b2+c2.√A2+B2+C2sinΔ,P=cosu→,n→=(aA+bB+cC)/(√(a^(2)+b^(2)+c^(2)).√(A^(2)+B^(2)+C^(2))).  
**Ví dụ 2.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa đường thẳng Δ∆: x1=y−2=z1(x)/(1)=(y)/(−2)=(z)/(1) và mặt phẳng (P): 5x + 11y + 2z – 4 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có đường thẳng Δ∆ có một vectơ chỉ phương là →u=(1;−2;1)u→=1;−2;1 và mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là →n=(5;11;2)n→=5;11;2 .  
Có sin(Δ,(P))=∣∣cos(→u,→n)∣∣=|1.5+(−2).11+1.2|√12+(−2)2+12.√52+112+22=1530=12sinΔ,P=cosu→,n→=(1.5+−2.11+1.2)/(√(1^(2)+−2^(2)+1^(2)).√(5^(2)+11^(2)+2^(2)))=(15)/(30)=(1)/(2)  
Suy ra (Δ∆, (P)) = 30°.  
**3. Công thức tính góc giữa hai mặt phẳng**  
Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P), (Q) tương ứng có các vectơ pháp tuyến là →n=(A;B;C)n→=A;B;C , →n′=(A′;B′;C′)n^(')→=A^(');B^(');C^(') . Khi đó, góc giữa (P) và (Q), kí hiệu là ((P), (Q)), được tính theo công thức:  
cos((P),(Q))=∣∣∣cos(→n,→n′)∣∣∣=|AA′+BB′+CC′|√A2+B2+C2.√A′2+B′2+C′2cosP,Q=cosn→,n^(')→=(AA^(')+BB^(')+CC^('))/(√(A^(2)+B^(2)+C^(2)).√(A^(')^(2)+B^(')^(2)+C^(')^(2))).  
**Ví dụ 3.** Trong không gian Oxyz, tính góc giữa hai mặt phẳng (P): 2x – y + 2z – 1 = 0 và (Q): x + 2y – 2z – 3 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến →n=(2;−1;2)n→=2;−1;2 và mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến →n′=(1;2;−2)n^(')→=1;2;−2 .  
Ta có   
cos((P),(Q))=∣∣∣cos(→n,→n′)∣∣∣=|2.1+(−1).2+2.(−2)|√22+(−1)2+22.√12+22+(−2)2=49cosP,Q=cosn→,n^(')→=(2.1+−1.2+2.−2)/(√(2^(2)+−1^(2)+2^(2)).√(1^(2)+2^(2)+−2^(2)))=(4)/(9)  
Suy ra ((P), (Q)) ≈ 63,6°.  
  
**B. Bài tập Công thức tính góc trong không gian**  
**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, tính góc giữa hai đường thẳng d1: x1=y+1−1=z−12(x)/(1)=(y+1)/(−1)=(z−1)/(2) và d2: x+1−1=y1=z−31(x+1)/(−1)=(y)/(1)=(z−3)/(1) .  
**A.** 45°.  
**B.** 30°.  
**C.** 60°.  
**D.** 90°.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: D**  
Đường thẳng d1; d2 lần lượt có vectơ chỉ phương là →u=(1;−1;2),→u′=(−1;1;1)u→=1;−1;2,u^(')→=−1;1;1 .  
Ta có   
cos(Δ,Δ′)=∣∣∣cos(→u,→u′)∣∣∣=|1.(−1)+(−1).1+2.1|√12+(−1)2+22.√(−1)2+12+12=0cosΔ,Δ^(')=cosu→,u^(')→=(1.−1+−1.1+2.1)/(√(1^(2)+−1^(2)+2^(2)).√(−1^(2)+1^(2)+1^(2)))=0  
Suy ra (Δ∆, Δ∆') = 90°.  
**Bài 2.** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): −√3x+y+1=0−√(3)x+y+1=0 . Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?  
**A.** 60°.  
**B.** 30°.  
**C.** 120°.  
**D.** 150°.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: A**  
Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến →n=(−√3;1;0)n→=−√(3);1;0 .  
Trục Ox có vectơ chỉ phương là →i=(1;0;0)i→=1;0;0 .  
sin(Ox,(P))=∣∣cos(→u,→n)∣∣=∣∣1.(−√3)∣∣√(−√3)2+12+02.√12+02+02=√32sinOx,P=cosu→,n→=(1.−√(3))/(√(−√(3)^(2)+1^(2)+0^(2)).√(1^(2)+0^(2)+0^(2)))=(√(3))/(2).  
Suy ra (Ox, (P)) = 60°.  
**Bài 3.** Trong không gian Oxyz, tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (P): 2x + 11y – 5z + 3 = 0 và (Q): −x + 2y + z – 5 = 0.  
**Hướng dẫn giải**  
Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là →n=(2;11;−5),→n′=(−1;2;1)n→=2;11;−5,n^(')→=−1;2;1 .  
Ta có  
cos((P),(Q))=∣∣∣cos(→n,→n′)∣∣∣=|2.(−1)+11.2+(−5).1|√22+112+(−5)2.√(−1)2+22+12=1530=12cosP,Q=cosn→,n^(')→=(2.−1+11.2+−5.1)/(√(2^(2)+11^(2)+−5^(2)).√(−1^(2)+2^(2)+1^(2)))=(15)/(30)=(1)/(2)  
Suy ra ((P), (Q)) = 60°.  
**Bài 4.** Một công ty xây dựng đang thiết kế một tòa nhà mới. Để tối ưu hóa ánh sáng tự nhiên trong tòa nhà, họ cần xác định góc giữa ánh sáng mặt trời (được biểu diễn bằng một đường thẳng) và mặt phẳng của một bức tường kính. Giả sử rằng:  
+) Bức tường kính được đặt trong mặt phẳng (α) có phương trình 2x – 3y + z = 5.  
+) Tia sáng mặt trời được biểu diễn bởi đường thẳng d có phương trình tham số x−12=y+2−1=z−31(x−1)/(2)=(y+2)/(−1)=(z−3)/(1) .  
Hãy tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).  
**Hướng dẫn giải**  
Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là →n=(2;−3;1)n→=2;−3;1 .  
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là →u=(2;−1;1)u→=2;−1;1 .  
Ta có   
sin(d,(α))=|2.2+(−3).(−1)+1.1|√22+(−3)2+12.√22+(−1)2+12=8√84=4√21sind,α=(2.2+−3.−1+1.1)/(√(2^(2)+−3^(2)+1^(2)).√(2^(2)+−1^(2)+1^(2)))=(8)/(√(84))=(4)/(√(21))  
Suy ra (d, (α)) ≈ 60,8°.  
**Bài 5.** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (Q): x – y – 5 = 0, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là H(2; −1; −2). Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (P), (Q).  
**Hướng dẫn giải**  
Vì OH ⊥⊥ (P) nên mặt phẳng (P) nhận −−→OH=(2;−1;−2)OH→=2;−1;−2 làm vectơ pháp tuyến.  
Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến →n=(1;−1;0)n→=1;−1;0 .  
Ta có   
cos((P),(Q))=|2.1+(−1).(−1)+(−2).0|√22+(−1)2+(−2)2.√12+(−1)2+02=33√2=1√2cosP,Q=(2.1+−1.−1+−2.0)/(√(2^(2)+−1^(2)+−2^(2)).√(1^(2)+−1^(2)+0^(2)))=(3)/(3√(2))=(1)/(√(2))  
Suy ra ((P), (Q)) = 45°.