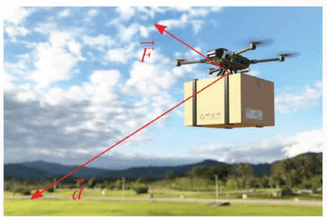
# Lý thuyết Bài 8: Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

**Lý thuyết Toán 12 Bài 8: Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ - Kết nối tri thức**  
**A. Lý thuyết Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ**  
**1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ**  
**• Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ trong không gian**  
Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')) . Ta có:  
+) →a+→b=(x+x′;y+y′;z+z′)a→+b→=(x+x^(');y+y^(');z+z^('));  
+) →a−→b=(x−x′;y−y′;z−z′)a→-b→=(x-x^(');y-y^(');z-z^('));  
+) →a=(kx;ky;kz)a→=(k⁢x;k⁢y;k⁢z) với k là một số thực.  
**Nhận xét:** Vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) cùng phương với vectơ →b=(x′;y′;z′)≠→0b→=(x^(');y^(');z^('))≠0→ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho⎧⎪⎨⎪⎩x=kx′y=ky′z=kzx=k⁢x^(')y=k⁢y^(')z=k⁢z.  
**Ví dụ 1.** Cho các vectơ →a=(−2;−3;5)a→=(-2;-3;5), →b=(3;5;−7)b→=(3;5;-7). Tính →a+→b;→a−→b;3→aa→+b→;a→-b→;3⁢a→.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có →a+→b=(−2+3;−3+5;5−7)=(1;2;−2)a→+b→=(-2+3;-3+5;5-7)=(1;2;-2).  
→a−→b=(−2−3;−3−5;5+7)=(−5;−8;12)a→-b→=(-2-3;-3-5;5+7)=(-5;-8;12).  
−→3a=(−6;−9;15)3a→=(-6;-9;15).  
**• Tọa độ trung điểm đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm tam giác**  
Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng A(xA; yA; zA), B(xB; yB; zB) và C(xC; yC; zC). Khi đó:  
- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là (xA+xB2;yA+yB2;zA+zB2)((x\_(A)+x\_(B))/(2);(y\_(A)+y\_(B))/(2);(z\_(A)+z\_(B))/(2)).  
- Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là (xA+xB+xC3;yA+yB+yC3;zA+zB+zC3)((x\_(A)+x\_(B)+x\_(C))/(3);(y\_(A)+y\_(B)+y\_(C))/(3);(z\_(A)+z\_(B)+z\_(C))/(3)).  
**Ví dụ 2.** Trong không gian Oxyz, cho DABC có ba đỉnh A(2; 1; −3), B(4; 2; 1), C(3; 0; 5). Tìm tọa độ trọng tâm G của DABC.  
**Hướng dẫn giải**  
Vì G là trọng tâm của DABC nên ⎧⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪⎩xG=2+4+33=3yG=1+2+03=1zG=−3+1+53=1x\_(G)=(2+4+3)/(3)=3y\_(G)=(1+2+0)/(3)=1z\_(G)=(-3+1+5)/(3)=1.  
Vậy G(3; 1; 1).  
**2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**  
**• Biểu thức tọa độ của tích vô hướng trong không gian**  
Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z)và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')) được xác định bởi công thức: →a.→b=x.x′+y.y′+z.z′a→.b→=x.x^(')+y.y^(')+z.z^(').  
**Nhận xét:**  
- Hai vectơ →aa→ và →bb→ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu xx' + yy' + zz' = 0.  
- Nếu →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) thì ∣∣→a∣∣=√→a.→a=√x2+y2+z2|a→|=√(a→.a→)=√(x^(2)+y^(2)+z^(2)).  
- Nếu →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')) là hai vectơ khác →00→ thì cos(→a,→b)=→a.→b∣∣→a∣∣.∣∣∣→b∣∣∣=x.x'+y.y'+z.z'√x2+y2+z2.√x'2+y'2+z'2cos⁡(a→,b→)=(a→.b→)/(|a→|.|b→|)=(x.x'+y.y'+z.z')/(√(x^(2)+y^(2)+z^(2)).√(x'^(2)+y'^(2)+z'^(2))).  
**Ví dụ 3.** Cho →a=(2;3;5)a→=(2;3;5) và →b=(7;1;8)b→=(7;1;8). Tính góc giữa hai vetơ →aa→và →bb→.  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có →a.→b=2.7+3.1+5.8=57a→.b→=2.7+3.1+5.8=57; ∣∣→a∣∣=√22+32+52=√38|a→|=√(2^(2)+3^(2)+5^(2))=√(38); ∣∣∣→b∣∣∣=√72+12+82=√114|b→|=√(7^(2)+1^(2)+8^(2))=√(114).  
Có cos(→a,→b)=→a.→b∣∣→a∣∣.∣∣∣→b∣∣∣=57√38.√114=√32⇒(→a,→b)=30∘cos⁡(a→,b→)=(a→.b→)/(|a→|.|b→|)=(57)/(√(38).√(114))=(√(3))/(2)⇒(a→,b→)=30^(∘).  
**Chú ý:** Nếu A(xA; yA; zA) và B(xB; yB; zB) thì  
=∣∣∣−−→AB∣∣∣=√(xB−xA)2+(yB−yA)2+(zB−zA)2=|A⁢B→|=√((x\_(B)-x\_(A))^(2)+(y\_(B)-y\_(A))^(2)+(z\_(B)-z\_(A))^(2)).  
Đặc biệt, khi B trùng O thì ta nhận được công thức OA=√xA+yA+zAOA=√(x\_(A)+y\_(A)+z\_(A)).  
**Ví dụ 4.** Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có A(−5; −2; 5), B(−3; 4; 9), C(1; 2; 3). Tính diện tích của tam giác ABC.  
**Hướng dẫn giải**  
Có −−→AB=(−3+5;4+2;9−5)=(2;6;4)⇒∣∣∣−−→AB∣∣∣=√22+62+42=√56A⁢B→=(-3+5;4+2;9-5)=(2;6;4)⇒|A⁢B→|=√(2^(2)+6^(2)+4^(2))=√(56).  
−−→AC=(1+5;2+2;3−5)=(6;4;−2)⇒∣∣∣−−→AC∣∣∣=√62+42+(−2)2=√56A⁢C→=(1+5;2+2;3-5)=(6;4;-2)⇒|A⁢C→|=√(6^(2)+4^(2)+(-2)^(2))=√(56).  
−−→BC=(1+3;2−4;3−9)=(4;−2;−6)⇒∣∣∣−−→BC∣∣∣=√42+(−2)2+(−6)2=√56B⁢C→=(1+3;2-4;3-9)=(4;-2;-6)⇒|B⁢C→|=√(4^(2)+(-2)^(2)+(-6)^(2))=√(56)  
Nhận thấy AB = AC = BC. Do đó DABC đều.  
Suy ra diện tích DABC là AB2√34=(√56)2.√34=14√3A⁢B^(2)⁢(√(3))/(4)=(√(56))^(2).(√(3))/(4)=14⁢√(3).  
**3. Vận dụng tọa độ của vectơ trong một số bài toán có liên quan đến thực tiễn**  
**Ví dụ 5.** Tính công sinh bởi lực →F(20;30;−10)F→⁢(20;30;-10) (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng khi thực hiện một độ dịch chuyển →d=(150;200;100)d→=(150;200;100) (đơn vị: m).  
  
**Hướng dẫn giải**  
Công sinh bởi lực →FF→ là A=→F.→d=20.150+30.200+(−10).100=8000A=F→.d→=20.150+30.200+(-10)⁢.100=8000 J.  
  
**B. Bài tập Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ**  
**Bài 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ →a=(5;7;2)a→=(5;7;2), →b=(3;0;4),→c=(−6;1;−1)b→=(3;0;4),c→=(-6;1;-1). Tìm tọa độ của vectơ →m=3→a−2→b+→cm→=3⁢a→-2⁢b→+c→.  
**A.** →m=(3;−22;3)m→=(3;-22;3).   
**B.** →m=(3;22;−3)m→=(3;22;-3).   
**C.** →m=(3;22;3)m→=(3;22;3).   
**D.** →m=(−3;22;−3)m→=(-3;22;-3).  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Có →a=(15;21;6)a→=(15;21;6); →b=(6;0;8)b→=(6;0;8).  
Khi đó →m=3→a−2→b+→c=(15−6−6;21−0+1;6−8−1)=(3;22;−3)m→=3⁢a→-2⁢b→+c→=(15-6-6;21-0+1;6-8-1)=(3;22;-3).  
**Bài 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với A(1; 0; 2), B(1; 1; 4) và trọng tâm G(1; −1; 2).  
a) Tìm tọa độ điểm C.  
b) Tính chu vi tam giác ABC.  
c) Tính ˆBACB⁢A⁢C^.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên  
⎧⎪⎨⎪⎩xC=3xG−xA−xByC=3yG−yA−yBzC=3zG−zA−zB⇔⎧⎪⎨⎪⎩xC=3.1−1−1=1yC=3.(−1)−0−1=−4zC=3.2−2−4=0x\_(C)=3⁢x\_(G)-x\_(A)-x\_(B)y\_(C)=3⁢y\_(G)-y\_(A)-y\_(B)z\_(C)=3⁢z\_(G)-z\_(A)-z\_(B)⇔x\_(C)=3.1-1-1=1y\_(C)=3.(-1)-0-1=-4z\_(C)=3.2-2-4=0.  
Vậy C(1; −4; 0).  
b) Có −−→AB=(1−1;1−0;4−2)=(0;1;2)⇒∣∣∣−−→AB∣∣∣=√02+12+22=√5A⁢B→=(1-1;1-0;4-2)=(0;1;2)⇒|A⁢B→|=√(0^(2)+1^(2)+2^(2))=√(5).  
−−→AC=(1−1;−4−0;0−2)=(0;−4;−2)⇒∣∣∣−−→AC∣∣∣=√(−4)2+(−2)2=2√5A⁢C→=(1-1;-4-0;0-2)=(0;-4;-2)⇒|A⁢C→|=√((-4)^(2)+(-2)^(2))=2⁢√(5)  
−−→BC=(1−1;−4−1;0−4)=(0;−5;−4)⇒∣∣∣−−→BC∣∣∣=√(−5)2+(−4)2=√41B⁢C→=(1-1;-4-1;0-4)=(0;-5;-4)⇒|B⁢C→|=√((-5)^(2)+(-4)^(2))=√(41)  
Chu vi tam giác ABC là: AB + AC + BC = √5+√41√(5)+√(41).  
c) cosˆBAC=−−→AB.−−→AC∣∣∣−−→AB∣∣∣.∣∣∣−−→AC∣∣∣=0.0+1.(−4)+2.(−2)√5.2√5=−45cos⁡B⁢A⁢C^=(A⁢B→.A⁢C→)/(|A⁢B→|.|A⁢C→|)=(0.0+1.(-4)+2.(-2))/(√(5)⁢.2⁢√(5))=-(4)/(5).  
Suy ra ˆBAC≈143∘B⁢A⁢C^≈143^(∘).  
**Bài 3.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(3; 4; 1) và B(1; 2; 1).  
a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB.  
b) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai điểm A và B.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Vì I là trung điểm của AB nên ⎧⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪⎩xI=xA+xB2yI=yA+yB2zI=zA+zB2⇔⎧⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪⎩xI=3+12=2yI=4+22=3zI=1+12=1x\_(I)=(x\_(A)+x\_(B))/(2)y\_(I)=(y\_(A)+y\_(B))/(2)z\_(I)=(z\_(A)+z\_(B))/(2)⇔x\_(I)=(3+1)/(2)=2y\_(I)=(4+2)/(2)=3z\_(I)=(1+1)/(2)=1.  
Vậy I(2; 3; 1).  
b) Vì M thuộc Oy nên M(0; y; 0).  
Do M cách đều hai điểm A và B nên MA = MB  
⇔√10+(4−y)2=√2+(2−y)2⇔√(10+(4-y)^(2))=√(2+(2-y)^(2)).  
⇔26−8y+y2=6−4y+y2⇔26-8⁢y+y^(2)=6-4⁢y+y^(2)  
⇔4y=20⇔y=5⇔4y=20⇔y=5.  
Vậy M(0; 5; 0).  
**Bài 4.** Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc →a=(300;200;400)a→=(300;200;400) (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp hai lần tốc độ của máy bay A.  
a) Tìm tọa độ vectơ vận tốc →bb→ của máy bay B.  
b) Tính tốc độ của máy bay B.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Có →b=2→a=(600;400;800)b→=2⁢a→=(600;400;800).  
b) Tốc độ của máy bay B là:  
∣∣∣→b∣∣∣=√6002+4002+8002≈1077,03|b→|=√(600^(2)+400^(2)+800^(2))≈1077,03km/h.  
**Bài 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(3; 2; 1), B(−1; 3; 2), C(2; 4; −3). Tích vô hướng −−→AB.−−→ACA⁢B→.A⁢C→ là  
**A.** 10.   
**B.** −6.   
**C.** 2.   
**D.** −2.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Có −−→AB=(−4;1;1)A⁢B→=(-4;1;1) và −−→AC=(−1;2;−4)A⁢C→=(-1;2;-4).  
Khi đó −−→AB.−−→AC=(−4).(−1)+1.2+1.(−4)=2A⁢B→.A⁢C→=(-4).(-1)+1.2+1.(-4)=2.