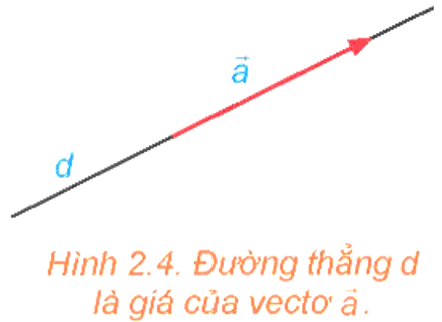
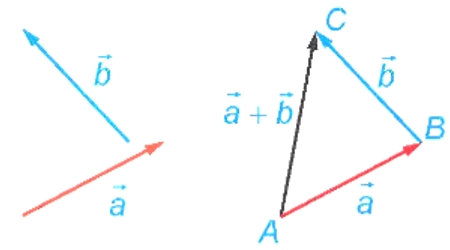
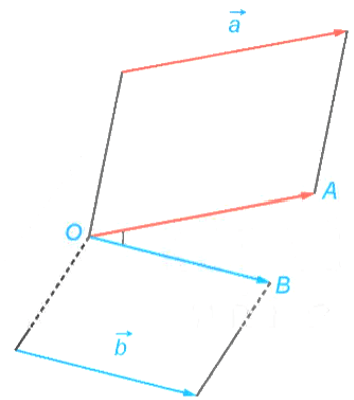
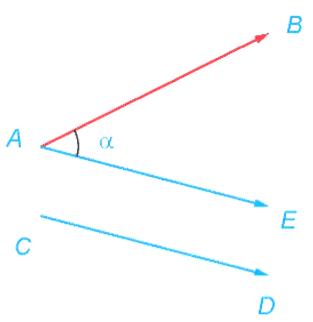
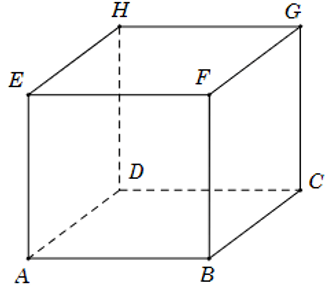
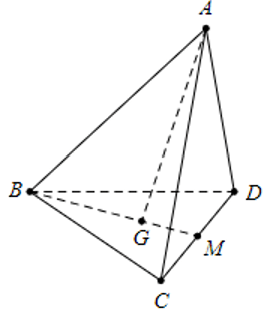
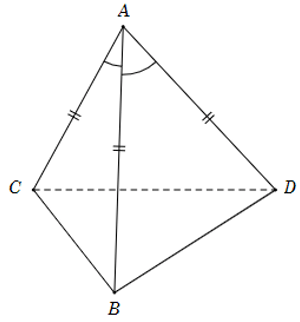
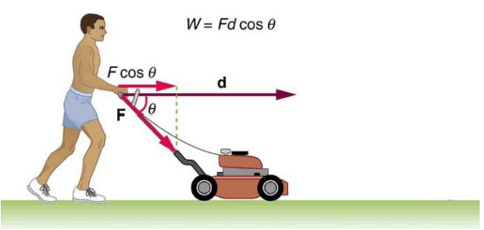
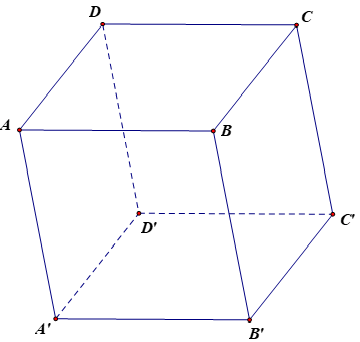
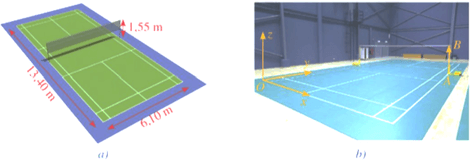
# Tổng hợp lý thuyết Toán 12 – Chương 2

**Tổng hợp lý thuyết Chương 2 - Kết nối tri thức**  
**A. Tổng hợp lý thuyết Toán 12 Chương 2**  
**1. Vectơ trong không gian**  
**1.1. Vectơ trong không gian**  
**•** **Vectơ trong không gian**  
- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.  
- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.  
**Chú ý:** Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:  
- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là −−→ABA⁢B→.  
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là →a,→b,→x,→ya→,b→,x→,y→,…  
- Độ dài của vectơ −−→ABA⁢B→ được kí hiệu là ∣∣∣−−→AB∣∣∣|A⁢B→|, độ dài của vectơ được kí hiệu là ∣∣→a∣∣|a→|.  
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).  
  
**• Hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, hai vectơ bằng nhau.**  
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.  
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.  
- Hai vectơ →aa→ và →bb→ được gọi là bằng nhau, kí hiệu →a=→ba→=b→, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.  
**Chú ý:** Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:  
- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ →aa→ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho −−→OM=→aO⁢M→=a→.  
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như −−→AA,−−→BB,…A⁢A→,B⁢B→,… gọi là các vectơ- không.  
- Ta quy ước vectơ - không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ – không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là →00→.  
**1.2. Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian**  
**• Tổng của hai vectơ trong không gian**  
Trong không gian, cho hai vectơ →aa→ và →bb→. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho −−→AB=→a;−−→BC=→bA⁢B→=a→;B⁢C→=b→. Khi đó, vectơ −−→ACA⁢C→ được gọi là tổng của hai vectơ →aa→ và →bb→, kí hiệu là →a+→ba→+b→.  
Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.  
  
**Nhận xét:** Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:  
- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì −−→AB+−−→BC=−−→ACA⁢B→+B⁢C→=A⁢C→.  
- Nếu ABCD là hình bình hành thì −−→AB+−−→AD=−−→ACA⁢B→+A⁢D→=A⁢C→.  
**Chú ý:** Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:  
- Tính chất giao hoán: Nếu →aa→ và →bb→ là hai vectơ bất kì thì →a+→b=→b+→aa→+b→=b→+a→.  
- Tính chất kết hợp: Nếu →a,→ba→,b→ và →cc→ thì ba vectơ bất kì thì (→a+→b)+→c=→a+(→b+→c)(a→+b→)+c→=a→+(b→+c→).  
- Tính chất cộng với vectơ →00→: Nếu là một vectơ bất kì thì →a+→0=→0+→a=→aa→+0→=0→+a→=a→.  
Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ →a,→ba→,b→ và →cc→ là →a+→b+→ca→+b→+c→ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.  
• **Quy tắc hình hộp**  
Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Khi đó, ta có −−→AB+−−→AD+−−→AA′=−−→AC′A⁢B→+A⁢D→+A⁢A^(')→=A⁢C^(')→   
• **Vectơ đối**  
Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ →aa→ được gọi là vectơ đối của vectơ →aa→, kí hiệu là →aa→.  
**Chú ý:**  
- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng →00→.  
- Vectơ −−→BAB⁢A→ là một vectơ đối của vectơ −−→ABAB→.  
- Vectơ →00→ được coi là vectơ đối của chính nó.  
• **Hiệu của hai vectơ trong không gian**  
Vectơ →a+(−→b)a→+(-b→) được gọi là hiệu của hai vectơ →aa→ và →bb→ và kí hiệu là →a−→ba→-b→.  
Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.  
**Nhận xét:** Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có −−→OB−−−→OA=−−→ABO⁢B→-O⁢A→=A⁢B→.  
**1.3. Tích của một số với một vectơ trong không gian**  
**• Tích của một số với một vectơ trong không gian**  
Trong không gian, tích của một số thực k ≠ 0 với một vectơ →a≠→0a→≠0→ là một vectơ, kí hiệu là k→ ak a→ , được xác định như sau:  
- Cùng hướng với vectơ →aa→ nếu k > 0; ngược hướng với vectơ →aa→ nếu k < 0.  
- Có độ dài bằng |k|.∣∣→a∣∣|k|.|a→|.  
Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.  
**Chú ý:**  
- Quy ước k→a=→0ka→=0→ nếu k = 0 hoặc →a=→0a→=0→.  
- Nếu k→a=→0ka→=0→ thì k = 0 hoặc →a=→0a→=0→.  
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ →aa→ và →bb→ (b ≠ 0) cùng phương là có một số thực k sao cho →a=k→ba→=k⁢b→.  
**Chú ý:** Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:  
- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và →aa→ là một vectơ bất kì thì h(k→a)=(hk)→ah⁢(k⁢a→)=(h⁢k)⁢a→  
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và →a,→ba→,b→ là hai vectơ bất kì thì (h+k)→a=h→a+k→b(h+k)⁢a→=h⁢a→+k⁢b→ và (→a+→b)=k→a+k→b(a→+b→)=k⁢a→+k⁢b→.  
- Tính chất nhân với 1 và −1: Nếu →aa→ là một vectơ bất kì thì k→a=→aka→=a→ và (−1)→a=−→a(-1)⁢a→=-a→.  
**Chú ý:** Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tùy ý, ta có −−→OA+−−→OB+−−→OC=3−−→OGO⁢A→+O⁢B→+O⁢C→=3⁢O⁢G→.  
**1.4. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.**  
**• Góc giữa hai vectơ trong không gian**  
Trong không gian, cho hai vectơ →a,→ba→,b→ khác →00→. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho −−→OA=→a,−−→OB=→bO⁢A→=a→,O⁢B→=b→. Khi đó, góc ˆAOBA⁢O⁢B^ ( 0∘≤ˆAOB≤180∘0^(∘)≤A⁢O⁢B^≤180^(∘)) được gọi là góc giữa hai vectơ →aa→ và →bb→, kí hiệu là (→a,→b)(a→,b→).  
  
**Chú ý:**  
- Để xác định góc giữa hai vectơ −−→ABA⁢B→ và −−→CDC⁢D→ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho −−→AE=−−→CDA⁢E→=C⁢D→, khi đó (−−→AB,−−→CD)=ˆBAE(A⁢B→,C⁢D→)=B⁢A⁢E^.  
  
- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và →00→ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180°.  
• **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian**  
Trong không gian, cho hai vectơ →a,→ba→,b→ đều khác →00→. Tích vô hướng của hai vectơ →aa→ và →bb→ là một số, kí hiệu là →a.→ba→.b→, được xác định bởi công thức: →a.→b=∣∣→a∣∣.∣∣∣→b∣∣∣.cos(→a,→b)a→.b→=|a→|.|b→|.cos⁡(a→,b→).  
**Chú ý:**  
- Quy ước nếu →a=→0a→=0→ hoặc →b=→0b→=0→ thì →a.→b=0a→.b→=0.  
- Cho hai vectơ →a,→ba→,b→ đều khác →00→. Khi đó: →a⊥→b⇔→a.→b=0a→⊥b→⇔a→.b→=0.  
- Với mọi vectơ →aa→, ta có →a2=∣∣→a∣∣2a→^(2)=a→^(2).  
- Nếu →a,→ba→,b→ là hai vectơ khác →00→ thì cos(→a,→b)=→a.→b∣∣→a∣∣.∣∣∣→b∣∣∣cos⁡(a→,b→)=(a→.b→)/(|a→|.|b→|).  
**Nhận xét:** Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu →a,→b,→ca→,b→,c→ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:  
• →a.→b=→b.→aa→.b→=b→.a→;  
• (→a.→b)=(k→a).→b=a.(k→b)(a→.b→)=(ka→).b→=a.(kb→);  
• →a.(→b+→c)=→a.→b+→a.→ca→.(b→+c→)=a→.b→+a→.c→.  
**2. Hệ trục tọa độ trong không gian**  
**2.1. Hệ trục tọa độ trong không gian**  
Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi →i,→j,→ki→,j→,k→ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.  
• Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, hay đơn giản là hệ tọa độ Oxyz.  
• Điểm O được gọi là gốc tọa độ.  
• Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.  
Không gian với hệ tọa độ Oxyz còn được gọi là không gian Oxyz.  
**2.2. Tọa độ của điểm, tọa độ của vectơ trong không gian**  
**• Tọa độ của điểm trong không gian**  
Trong không gian Oxyz, cho một điểm M tùy ý. Bộ ba số (x; y; z) duy nhất sao cho −−→OM=x→i+y→j+z→kO⁢M→=x⁢i→+y⁢j→+z⁢k→ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ Oxyz. Khi đó, ta viết M = (x; y; z) hoặc M(x; y; z), trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M.  
**Nhận xét:** Nếu điểm M có tọa độ (x; y; z) đối với hệ tọa độ Oxyz thì:  
- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy và Oz có tọa độ lần lượt là (x; 0; 0), (0; y; 0) và (0; 0; z).  
- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Ozx) có tọa độ lần lượt là (x; y; 0), (0; y; z), (x; 0; z).  
• **Tọa độ của vectơ trong không gian**  
Trong không gian Oxyz, cho vectơ →aa→ tùy ý. Bộ ba số (x; y; z) duy nhất sao cho →a=x→i+y→j+z→ka→=x⁢i→+y⁢j→+z⁢k→ được gọi là tọa độ của vectơ →aa→ đối với hệ tọa độ Oxyz. Khi đó, ta viết →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) hoặc →a(x;y;z)a→⁢(x;y;z).  
**Nhận xét:**  
- Tọa độ của vectơ cũng là tọa độ của điểm M sao cho −−→OM=→aO⁢M→=a→  
- Trong không gian, cho hai vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')). Khi đó, →a=→ba→=b→ nếu và chỉ nếu ⎧⎪⎨⎪⎩x=x'y=y'z=z'x=x'y=y'z=z'.  
**• Tọa độ của vectơ theo tọa độ hai đầu mút**  
Trong không gian Oxyz, cho hai điểm M(xM; yM; zM) và N(xN; yN; zN). Khi đó: −−−→MN=(xN−xM;yN−yM;zN−zM)M⁢N→=(x\_(N)-x\_(M);y\_(N)-y\_(M);z\_(N)-z\_(M)).  
**3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ**  
**3.1. Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ**  
**• Biểu thức tọa độ của phép cộng hai vectơ, phép trừ hai vectơ, phép nhân một số với một vectơ trong không gian**  
Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')). Ta có:  
+) →a+→b=(x+x′;y+y′;z+z′)a→+b→=(x+x^(');y+y^(');z+z^('));  
+) →a−→b=(x−x′;y−y′;z−z′)a→-b→=(x-x^(');y-y^(');z-z^('));  
+) k→a=(kx;ky;kz)ka→=(k⁢x;k⁢y;k⁢z) với k là một số thực.  
**Nhận xét:** Vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) cùng phương với vectơ →b=(x′;y′;z′)≠→0b→=(x^(');y^(');z^('))≠0→ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho ⎧⎪⎨⎪⎩x=kx′y=ky′z=kzx=k⁢x^(')y=k⁢y^(')z=k⁢z  
**• Tọa độ trung điểm đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm tam giác**  
Trong không gian Oxyz, cho ba điểm không thẳng hàng A(xA; yA; zA), B(xB; yB; zB) và C(xC; yC; zC). Khi đó:  
- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là (xA+xB2;yA+yB2;zA+zB2)((x\_(A)+x\_(B))/(2);(y\_(A)+y\_(B))/(2);(z\_(A)+z\_(B))/(2)).  
- Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là (xA+xB+xC3;yA+yB+yC3;zA+zB+zC3)((x\_(A)+x\_(B)+x\_(C))/(3);(y\_(A)+y\_(B)+y\_(C))/(3);(z\_(A)+z\_(B)+z\_(C))/(3)).  
**3.2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng**  
**• Biểu thức tọa độ của tích vô hướng trong không gian**  
Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')) được xác định bởi công thức: →a.→b=x.x′+y.y′+z.z′a→.b→=x.x^(')+y.y^(')+z.z^(').  
**Nhận xét:**  
- Hai vectơ và vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu xx' + yy' + zz' = 0.  
- Nếu →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) thì ∣∣→a∣∣=√→a.→a=√x2+y2+z2|a→|=√(a→.a→)=√(x^(2)+y^(2)+z^(2)).  
- Nếu →a=(x;y;z)a→=(x;y;z) và →b=(x′;y′;z′)b→=(x^(');y^(');z^(')) là hai vectơ khác →00→ thì cos(→a,→b)=→a.→b∣∣→a∣∣.∣∣∣→b∣∣∣=x.x′+y.y′+z.z′√x2+y2+z2.√x'2+y'2+z'2cos⁡(a→,b→)=(a→.b→)/(|a→|.|b→|)=(x.x^(')+y.y^(')+z.z^('))/(√(x^(2)+y^(2)+z^(2)).√(x'^(2)+y'^(2)+z'^(2))).  
**Chú ý:** Nếu A(xA; yA; zA) và B(xB; yB; zB) thì  
AB=∣∣∣−−→AB∣∣∣=√(xB−xA)2+(yB−yA)2+(zB−zA)2AB=|A⁢B→|=√((x\_(B)-x\_(A))^(2)+(y\_(B)-y\_(A))^(2)+(z\_(B)-z\_(A))^(2)).  
Đặc biệt, khi B trùng O thì ta nhận được công thức OA=√xA+yA+zAOA=√(x\_(A)+y\_(A)+z\_(A)).  
  
**B. Bài tập Bài tập cuối chương 2**  
**1. Bài tập trắc nghiệm**  
**Bài 1.** Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ −−→ABA⁢B→ và −−→DHD⁢H→.  
**A.** 45°.   
**B.** 90°.   
**C.** 120°.   
**D.** 60°.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
  
Do ADHE là hình vuông nên −−→AE=−−→DHA⁢E→=D⁢H→.  
Do đó (−−→AB,−−→DH)=(−−→AB,−−→AE)=ˆBAE=90∘(A⁢B→,D⁢H→)=(A⁢B→,A⁢E→)=B⁢A⁢E^=90^(∘) (do ABFE là hình vuông).  
**Bài 2.** Trong không gian Oxyz, cho điểm M thỏa mãn hệ thức −−→OM=2→i+→jO⁢M→=2⁢i→+j→. Tọa độ của điểm M là  
**A.** M(0; 2; 1).   
**B.** M(2; 0; 1).   
**C.** M(2; 1; 0).   
**D.** M(0; 1; 2).  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Ta có −−→OM=2→i+→j⇒M(2;1;0)O⁢M→=2⁢i→+j→⇒M⁢(2;1;0).  
**Bài 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (Oxy)  
**A.** N(1; 0; 2).   
**B.** P(0; 1; 2).   
**C.** Q(0; 0; 2).   
**D.** M(1; 2; 0).  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: D**  
Điểm M(1; 2; 0) thuộc mặt phẳng (Oxy).  
**Bài 4.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(3; 2; 1), B(−1; 3; 2), C(2; 4; −3). Tích vô hướng −−→AB.−−→ACA⁢B→.A⁢C→ là  
**A.** 10.   
**B.** −6.   
**C.** 2.   
**D.** −2.  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: C**  
Có −−→AB=(−4;1;1)A⁢B→=(-4;1;1) và −−→AC=(−1;2;−4)A⁢C→=(-1;2;-4).  
Khi đó −−→AB.−−→AC=(−4).(−1)+1.2+1.(−4)=2A⁢B→.A⁢C→=(-4).(-1)+1.2+1.(-4)=2.  
**Bài 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ →a=(5;7;2)a→=(5;7;2), →b=(3;0;4),→c=(−6;1;−1)b→=(3;0;4),c→=(-6;1;-1). Tìm tọa độ của vectơ →m=3→a−2→b+→cm→=3⁢a→-2⁢b→+c→.  
**A.** →m=(3;−22;3)m→=(3;-22;3).   
**B.** →m=(3;22;−3)m→=(3;22;-3).   
**C.** →m=(3;22;3)m→=(3;22;3).   
**D.** →m=(−3;22;−3)m→=(-3;22;-3).  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
Có →a=(15;21;6); →b=(6;0;8)a→=(15;21;6); b→=(6;0;8).  
Khi đó →m=3→a−2→b+→c=(15−6−6;21−0+1;6−8−1)=(3;22;−3)m→=3⁢a→-2⁢b→+c→=(15-6-6;21-0+1;6-8-1)=(3;22;-3)  
**Bài 6.** Cho tứ diện ABCD. Đặt −−→AB=→a,−−→AC=→b,−−→AD=→cA⁢B→=a→,A⁢C→=b→,A⁢D→=c→. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.** −−→AG=→a+→b+→cA⁢G→=a→+b→+c→.   
**B. −−→AG=13(→a+→b+→c)A⁢G→=13⁢(a→+b→+c→)**.  
**C. −−→AG=12(→a+→b+→c)A⁢G→=12⁢(a→+b→+c→)**.   
**D.** −−→AG=14(→a+→b+→c)A⁢G→=(1)/(4)⁢(a→+b→+c→).  
**Hướng dẫn giải**  
**Đáp án đúng là: B**  
  
Gọi M là trung điểm của CD suy ra −−→BG=23−−→BMB⁢G→=(2)/(3)⁢B⁢M→.  
Có  
−−→AG=−−→AB+−−→BG=−−→AB+23−−→BM=−−→AB+23.12.(−−→BC+−−→BD)=−−→AB+13.(−−→BC+−−→BD)A⁢G→=A⁢B→+B⁢G→=A⁢B→+(2)/(3)⁢B⁢M→=A⁢B→+(2)/(3).(1)/(2).(B⁢C→+B⁢D→)=A⁢B→+(1)/(3).(B⁢C→+B⁢D→)=−−→AB+13.(−−→AC−−−→AB+−−→AD−−−→AB)=A⁢B→+(1)/(3).(A⁢C→-A⁢B→+A⁢D→-A⁢B→)=13.(−−→AC+−−→AB+−−→AD)=(1)/(3).(A⁢C→+A⁢B→+A⁢D→)=13(→a+→b+→c)=(1)/(3)⁢(a→+b→+c→)  
**2. Bài tập tự luận**  
**Bài 1.** Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và ˆBAC=ˆBAD=60∘B⁢A⁢C^=B⁢A⁢D^=60^(∘). Hãy xác định góc giữa cặp vectơ −−→ABA⁢B→ và −−→CDC⁢D→.  
**Hướng dẫn giải**  
  
Ta có −−→AB.−−→CD=−−→AB.(−−→AD−−−→AC)=−−→AB.−−→AD−−−→AB.−−→ACA⁢B→.C⁢D→=A⁢B→.(A⁢D→-A⁢C→)=A⁢B→.A⁢D→-A⁢B→.A⁢C→ (1).  
Mà −−→AB.−−→AD=∣∣∣−−→AB∣∣∣.∣∣∣−−→AD∣∣∣.cosˆBADA⁢B→.A⁢D→=|A⁢B→|.|A⁢D→|.cos⁡B⁢A⁢D^ (2).  
−−→AB.−−→AC=∣∣∣−−→AB∣∣∣.∣∣∣−−→AC∣∣∣.cosˆBACA⁢B→.A⁢C→=|A⁢B→|.|A⁢C→|.cos⁡B⁢A⁢C^(3).  
AB = AC = AD và ˆBAC=ˆBAD=60∘B⁢A⁢C^=B⁢A⁢D^=60^(∘) (4).  
Từ (1), (2), (3) và (4), ta có −−→AB.−−→CD=0⇒(−−→AB,−−→CD)=90∘A⁢B→.C⁢D→=0⇒(A⁢B→,C⁢D→)=90^(∘).  
**Bài 2.** Công của lực →FF→ làm một chất điểm chuyển động một đoạn đường →dd→ được tính bởi công thức W=→F.→dW=F→.d→. Hình vẽ sau mô tả một người đẩy chiếc xe di chuyển một đoạn 20 m với lực đẩy 50 N, góc đẩy là 60°. Tính công của lực đã nêu.  
  
**Hướng dẫn giải**  
Ta có W=→F.→d=∣∣∣→F∣∣∣.∣∣∣→d∣∣∣.cos(→F,→d)=50.20.cos60∘=500W=F→.d→=|F→|.|d→|.cos⁡(F→,d→)=50.20.cos⁡60^(∘)=500 (J).  
**Bài 3.** Trong không gian Oxyz, cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', biết rằng A(−3; 0; 0), B(0; 2; 0), D(0; 0; 1), A'(1; 2; 3). Tìm tọa độ điểm C'.  
**Hướng dẫn giải**  
  
Ta có −−→AD=(3;0;1)A⁢D→=(3;0;1). Gọi C(x; y; z)  
Vì ABCD là hình bình hành nên −−→AD=−−→BC ⇔⎧⎪⎨⎪⎩x=3y−2=0z=1⇔⎧⎪⎨⎪⎩x=3y=2z=1A⁢D→=B⁢C→ ⇔x=3y-2=0z=1⇔x=3y=2z=1.  
Suy ra C(3; 2; 1).  
Có −−→AA′=(4;2;3)A⁢A^(')→=(4;2;3). Gọi C'(a; b; c).  
Vì AA'C'C là hình bình hành nên −−→AA′=−−→CC′A⁢A^(')→=C⁢C^(')→⇔⎧⎪⎨⎪⎩a−3=4b−2=2c−1=3⇔⎧⎪⎨⎪⎩a=7b=4c=4⇔a-3=4b-2=2c-1=3⇔a=7b=4c=4.  
Vậy C'(7; 4; 4).  
**Bài 4.** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm M(0; 1; 2), N(7; 3; 2), P(−5; −3; 2).  
a) Tìm tọa độ vectơ −−−→MNM⁢N→.  
b) Tìm tọa độ điểm Q thỏa mãn −−−→MN=−−→QPM⁢N→=Q⁢P→.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Có −−−→MN=(7−0;3−1;2−2)=(7;2;0)M⁢N→=(7-0;3-1;2-2)=(7;2;0).  
b) Gọi Q(x; y; z).  
Vì −−−→MN=−−→QPM⁢N→=Q⁢P→ nên ⎧⎪⎨⎪⎩−5−x=7−3−y=22−z=0⇔⎧⎪⎨⎪⎩x=−12y=−5z=2-5-x=7-3-y=22-z=0⇔x=-12y=-5z=2. Vậy Q(−12; −5; 2).  
**Bài 5.** Hình a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục Oxyz cho sân đó như hình b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ −−→ABA⁢B→.  
  
**Hướng dẫn giải**  
Gọi tọa độ điểm A là (xA; yA; zA). Vì chiều rộng của sân là 6,1 m nên xA = 6,1.  
Do nửa chiều dài của sân là 6,7 m nên yA = 6,7.  
Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên zA = 0.  
Vậy A(6,1; 6,7; 0).  
Độ dài đoạn thẳng AB là 1,55 m nên điểm B có tọa độ là (6,1; 6,7; 1,55).  
Vậy ta có −−→AB=(6,1−6,1;6,7−6,7;1,55−0)=(0;0;1,55)A⁢B→=(6,1-6,1;6,7-6,7;1,55-0)=(0;0;1,55).  
**Bài 6.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với A(1; 0; 2), B(1; 1; 4) và trọng tâm G(1; −1; 2).  
a) Tìm tọa độ điểm C.  
b) Tính chu vi tam giác ABC.  
c) Tính ˆBACB⁢A⁢C^.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên  
⎧⎪⎨⎪⎩xC=3xG−xA−xByC=3yG−yA−yBzC=3zG−zA−zB⇔⎧⎪⎨⎪⎩xC=3.1−1−1=1yC=3.(−1)−0−1=−4zC=3.2−2−4=0x\_(C)=3⁢x\_(G)-x\_(A)-x\_(B)y\_(C)=3⁢y\_(G)-y\_(A)-y\_(B)z\_(C)=3⁢z\_(G)-z\_(A)-z\_(B)⇔x\_(C)=3.1-1-1=1y\_(C)=3.(-1)-0-1=-4z\_(C)=3.2-2-4=0.  
Vậy C(1; −4; 0).  
b) Có −−→AB=(1−1;1−0;4−2)=(0;1;2)⇒∣∣∣−−→AB∣∣∣=√02+12+22=√5A⁢B→=(1-1;1-0;4-2)=(0;1;2)⇒|A⁢B→|=√(0^(2)+1^(2)+2^(2))=√(5).  
−−→AC=(1−1;−4−0;0−2)=(0;−4;−2)⇒∣∣∣−−→AC∣∣∣=√(−4)2+(−2)2=2√5A⁢C→=(1-1;-4-0;0-2)=(0;-4;-2)⇒|A⁢C→|=√((-4)^(2)+(-2)^(2))=2⁢√(5)  
−−→BC=(1−1;−4−1;0−4)=(0;−5;−4)⇒∣∣∣−−→BC∣∣∣=√(−5)2+(−4)2=√41B⁢C→=(1-1;-4-1;0-4)=(0;-5;-4)⇒|B⁢C→|=√((-5)^(2)+(-4)^(2))=√(41)  
Chu vi tam giác ABC là: AB + AC + BC = 3√5+√413√(5)+√(41).  
c) cosˆBAC=−−→AB.−−→AC∣∣∣−−→AB∣∣∣.∣∣∣−−→AC∣∣∣=0.0+1.(−4)+2.(−2)√5.2√5=−45cos⁡B⁢A⁢C^=(A⁢B→.A⁢C→)/(|A⁢B→|.|A⁢C→|)=(0.0+1.(-4)+2.(-2))/(√(5)⁢.2⁢√(5))=-(4)/(5).  
Suy ra ˆBAC≈143∘B⁢A⁢C^≈143^(∘).  
**Bài 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(3; 4; 1) và B(1; 2; 1).  
a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB.  
b) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai điểm A và B.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Vì I là trung điểm của AB nên ⎧⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪⎩xI=xA+xB2yI=yA+yB2zI=zA+zB2⇔⎧⎪  
⎪  
⎪⎨⎪  
⎪  
⎪⎩xI=3+12=2yI=4+22=3zI=1+12=1x\_(I)=(x\_(A)+x\_(B))/(2)y\_(I)=(y\_(A)+y\_(B))/(2)z\_(I)=(z\_(A)+z\_(B))/(2)⇔x\_(I)=(3+1)/(2)=2y\_(I)=(4+2)/(2)=3z\_(I)=(1+1)/(2)=1.  
Vậy I(2; 3; 1).  
b) Vì M thuộc Oy nên M(0; y; 0).  
Do M cách đều hai điểm A và B nên MA = MB⇔√10+(4−y)2=√2+(2−y)2⇔√(10+(4-y)^(2))=√(2+(2-y)^(2))  
⇔26−8y+y2=6−4y+y2⇔4y=20⇔y=5⇔26-8⁢y+y^(2)=6-4⁢y+y^(2)⇔4y=20⇔y=5.  
Vậy M(0; 5; 0).  
**Bài 8.** Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc →a=(300;200;400)a→=(300;200;400) (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp hai lần tốc độ của máy bay A.  
a) Tìm tọa độ vectơ vận tốc →bb→ của máy bay B.  
b) Tính tốc độ của máy bay B.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Có →b=2→a=(600;400;800)b→=2⁢a→=(600;400;800).  
b) Tốc độ của máy bay B là:  
∣∣∣→b∣∣∣=√6002+4002+8002≈1077,03|b→|=√(600^(2)+400^(2)+800^(2))≈1077,03 km/h.  
**Bài 9.** Cho các điểm .Chứng minh rằng  
a) −−→AB+−−→DC=−−→AC+−−→DBA⁢B→+D⁢C→=A⁢C→+D⁢B→.  
b) −−→AB+−−→CD+−−→EF=−−→AF+−−→ED+−−→CBA⁢B→+C⁢D→+E⁢F→=A⁢F→+E⁢D→+C⁢B→.  
**Hướng dẫn giải**  
a) Ta có: VT=−−→AC+−−→CB+−−→DB+−−→BC=(−−→AC+−−→DB)+(−−→BC+−−→CB)=−−→AC+−−→DB=VPV⁢T=A⁢C→+C⁢B→+D⁢B→+B⁢C→=(A⁢C→+D⁢B→)+(B⁢C→+C⁢B→)=A⁢C→+D⁢B→=V⁢P.  
b) Biến đổi VT=−−→AF+−−→FB+−−→CB+−−→BD+−−→ED+−−→DFV⁢T=A⁢F→+F⁢B→+C⁢B→+B⁢D→+E⁢D→+D⁢F→  
=(−−→AF+−−→ED+−−→CB)+(−−→FB+−−→BD+−−→DF)=−−→AF+−−→ED+−−→CB=VP=(A⁢F→+E⁢D→+C⁢B→)+(F⁢B→+B⁢D→+D⁢F→)=A⁢F→+E⁢D→+C⁢B→=V⁢P.