Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131
Lớp: 20CTT1

Bài tập môn Xác suất thống kê
Ngày 30/9/2021

Bài 1. Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = 2\ln(X)$ với X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{nếu } x > 0 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có $Y = 2\ln(X)$ nên miền giá trị của biến ngẫu nhiên Y là $-\infty < Y < +\infty$. Hàm phân phối xác suất của Y là

$$G(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(2\ln(X) \leqslant y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leqslant e^y\right)$$

$$\mathbb{P} \Rightarrow G(y) = \mathbb{P}\left(-e^{\frac{y}{2}} \leqslant X \leqslant e^{\frac{y}{2}}\right) = \int\limits_{-e^{\frac{y}{2}}}^{e^{\frac{y}{2}}} e^{-x}\mathrm{d}x = \int\limits_{-e^{\frac{y}{2}}}^{0} e^{-x}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{e^{\frac{y}{2}}} e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow G(y) = 1 - e^{-\frac{y}{2}}.$$

$\Rightarrow g(y) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y.

Bài 2. Trung vị của biến ngẫu nhiên liên tục cho trường hợp không duy nhất. Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & \text{khi } 2.5 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(x)$.

Đặt $Med(x) = m$. Trường hợp 1: $0 \leqslant m \leqslant 1$.

$$\mathbb{P}(X \leqslant m) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{m} \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{m}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow m = 1.$$

Trường hợp 2: $2.5 \leqslant m \leqslant 3$.

$$\Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t = \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{2.5} f(t)\,\mathrm{d}t + \Leftrightarrow \int\limits_{2.5}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + m - 2.5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2.5$$

Trường hợp 3: $\forall m \in (1, 2.5)$, $\int\limits_{-\infty}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \Rightarrow m \in (1, 2.5)$.

Trường hợp 4: $\forall m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t \neq \frac{1}{2}$.

Vậy $Med(X) \in [1, 2.5]$.