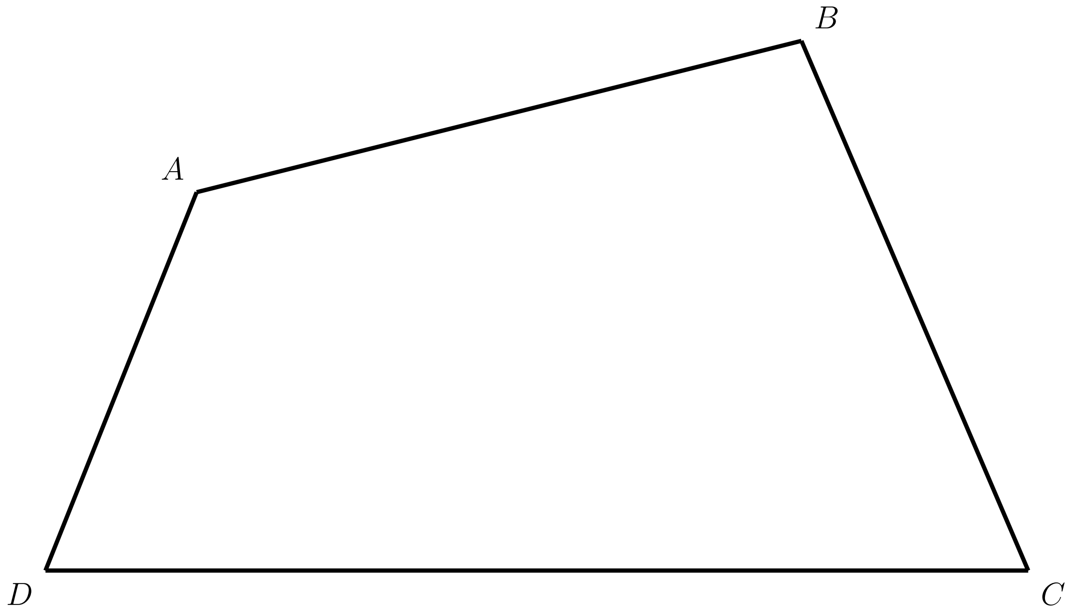
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÀ RỊA - VŨNG TÀU
LỚP 10 TOÁN 1 (2017-2018)

Chuyên đề

TỨ GIÁC ĐIỀU HÒA VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC



Vũng Tàu, tháng 11 - 12 năm 2017

Giáo viên hướng dẫn: Thầy Trần Quang Vinh, Giáo viên trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn.
Học sinh thực hiện: Lê Khánh Duy
Nguyễn Mai Gia Hân
Nguyễn Văn Lộc

Mục lục

1 Lời mở đầu

Tứ giác điều hòa là một tứ giác nội tiếp đặc biệt, thú vị trong hình học, do đó nó là một chủ đề không thể thiếu trong hình học Euclide cổ điển (nếu coi đường thẳng là đường tròn suy rộng thì tứ giác điều hòa là một khái niệm xuất phát từ hàng điểm điều hòa, tỉ số kép. Tứ giác điều hòa có ứng dụng khá lớn trong các bài toán định tính như chứng minh thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc, trung điểm, chứng minh đi qua điểm cố định và các bài toán về chứng minh hệ thức trong hình học... Đây là một công cụ xuất sắc mà bất kì người yêu Toán nào cũng nên biết và nắm vững, được sử dụng để mang đến nhiều lời giải "đẹp". Rất nhiều các bài toán hình học trong các cuộc thi Olympic Toán gần đây chứa đựng trong nó các ý tưởng về tứ giác điều hòa. Chính vì vậy nhóm chúng em đã nghiên cứu và viết thành chuyên đề này với hi vọng đem lại cho bạn đọc đầy đủ những ứng dụng của tứ giác điều hòa.

Nhóm tác giả

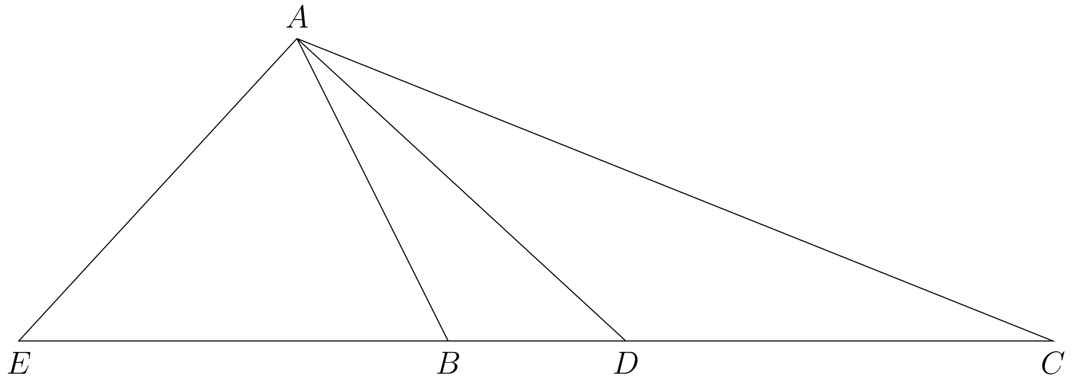
2 Kiến thức chuẩn bị.

2.1 Các kiến thức cơ bản về véc-tơ, độ dài đại số, các định lí cơ bản.

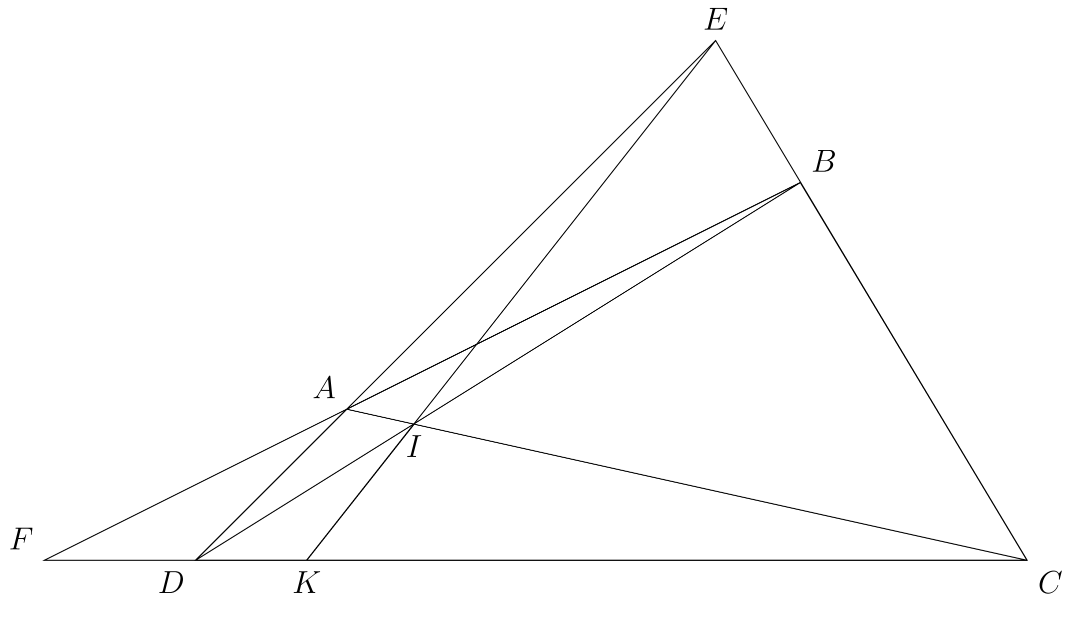
2.2 Hàng điểm điều hòa và chùm điều hòa.

2.2.1 Hàng điểm điều hòa.

Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt trên trục. Ta định nghĩa tỉ số kép $(ABCD)$ là $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$.
Nếu $(ABCD) = -1$ thì ta nói A, B, C, D lập thành hàng điểm điều hòa.
***Hai dạng hàng điểm điều hòa cơ bản.**
i. Cho tam giác ABC không cân có phân giác AD, AE $(D, E \in BC)$ thì ta có: $(EDBC) = -1$.



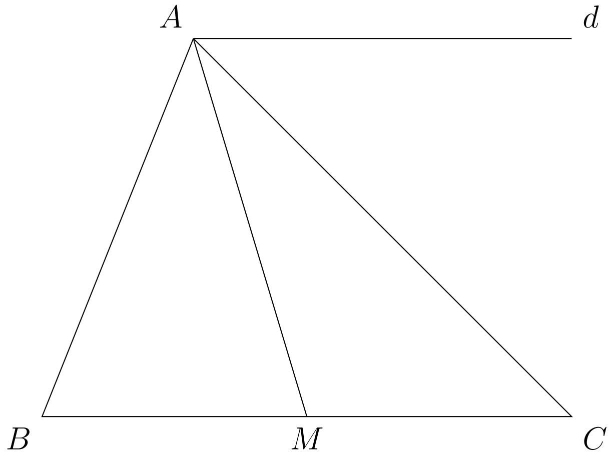
ii. Tứ giác $ABCD$ có AB cắt CD tại F, AD cắt BC tại E, AC cắt BD tại I, EI cắt CD tại K. Khi đó: $(FKDC) = -1$.



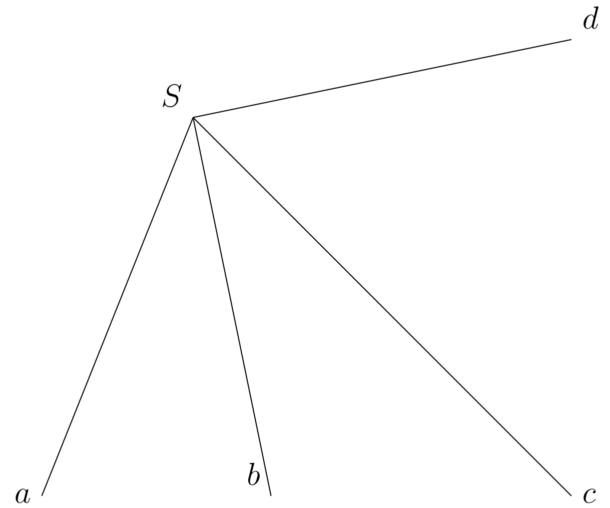
***Một vài dấu hiệu nhận biết hàng điểm điều hòa.**
Cho $A(a); B(b); C(c); D(d)$ trên trục. Khi đó $(ABCD) = -1$ khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: i. $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$ (Lagrange).
ii. $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}}$ (Descartes).
iii. $\overline{MC}.\overline{MD} = MA^2$ với M là trung điểm AB (Newton).
iv. $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AI}$ với I là trung điểm CD (Maclaurin).
***Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn hàng điểm điều hòa.**
Cho $(ABCD) = -1$ và điểm $S \notin (ABCD)$. Đường thẳng d bất kì không qua S cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Khi đó $(A_1B_1C_1D_1) = -1$.

2.2.2 Chùm điều hòa.

Cho $(ABCD) = -1$ và điểm $S \notin (ABCD)$. Bốn đường SA, SB, SC, SD lập thành chùm điều hòa đỉnh S.
Kí hiệu: $(SA, SB, SC, SD) = -1$ hoặc $S\,(ABCD) = -1$. ***Hai dạng chùm điều hòa cơ bản.***
i. Chùm trung tuyến. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, Ad song song với BC. Khi đó: $(AB, AC, AM, Ad) = -1$.



ii. Chùm phân giác. Cho Sb, Sd là hai tia phân giác của góc $\widehat{aSc}$. Khi đó: $S\,(abcd) = -1$.



2.3 Tỉ số kép với góc định hướng.

Định lí 1 (Định lí Ceva dạng lượng giác). Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB (nhưng không trùng với đỉnh của tam giác). Khi đó, AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song nếu và chỉ nếu $\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right)}.\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BA}\right)}.\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP};\overrightarrow{CB}\right)} = 1$.
Hệ quả: Khi M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB và không trùng với hai đầu mút của các đoạn thẳng này thì AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi $\frac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}.\frac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}.\frac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}} = 1$.
Định lí 2. Với mọi chùm $O\,(ABCD)$, ta có $O\,(ABCD) = \frac{\sin\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)} : \frac{\sin\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}\right)}$.
Tỉ số kép với góc định hướng. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D cố định trên đường tròn

(O) và điểm M thay đổi trên (O) thì $M(ABCD)$ không đổi (khi M trùng với A, B, C, D thì MA, MB, MC, MD tương ứng được coi là tiếp tuyến của (O) tại A, B, C, D).

3 Tứ giác điều hòa.

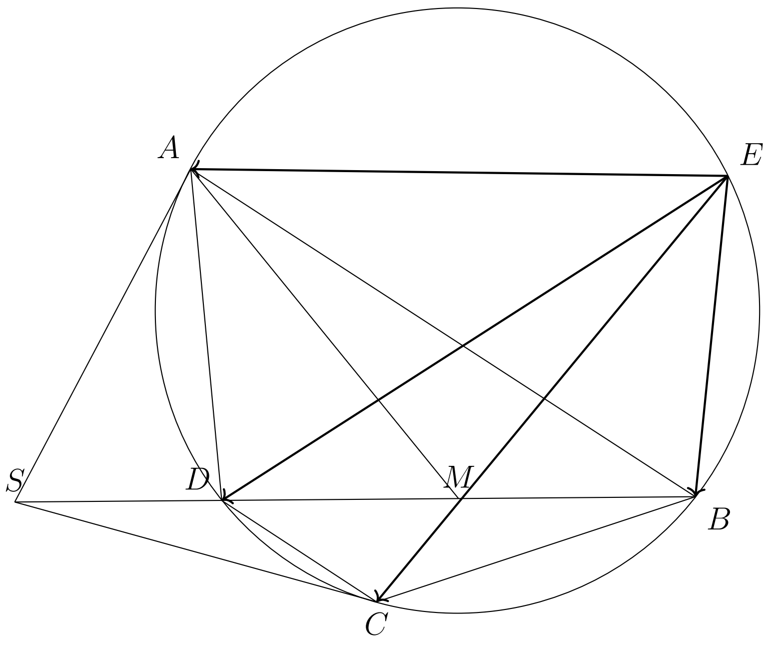
3.1 Định nghĩa.

Tứ giác nội tiếp $ABCD$ được gọi là tứ giác điều hòa nếu tồn tại điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác sao cho $M(ABCD) = -1$, cũng tức là $(ABCD) = -1$.
Như vậy, nếu tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa thì $M(ABCD) = -1$ với mọi điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

3.2 Tính chất.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d$ lần lượt là tiếp tuyến với (O) tại A, B, C, D. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:
a. Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa.
b. $AB.CD = AD.BC$.
c. Δ_a, Δ_c, BD đồng quy và Δ_b, Δ_d, AC đồng quy.
d. Các phân giác của các góc $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$ cắt nhau tại một điểm trên đường chéo BD, các phân giác của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ cắt nhau tại một điểm trên đường chéo AC.
e. $\widehat{MAD} = \widehat{BCA}$ với M là trung điểm BD. Tương tự với trung điểm AC.

3.3 Chứng minh tính chất.

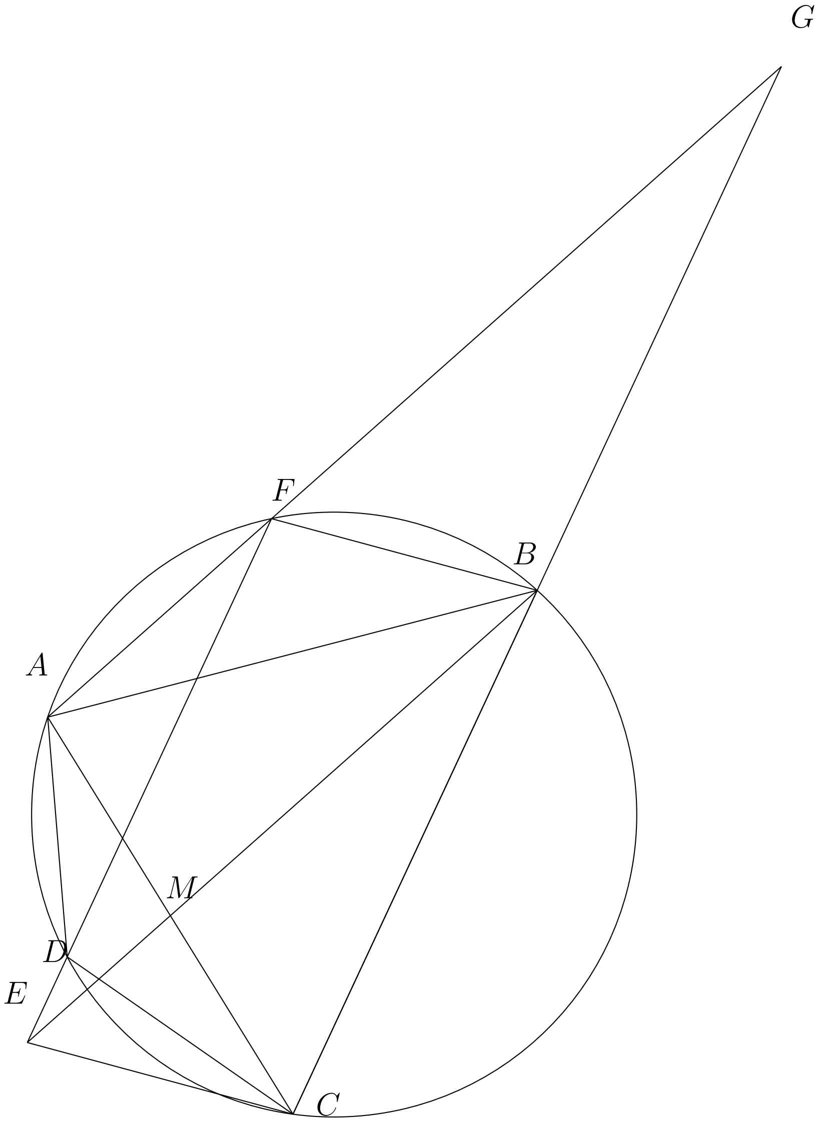


$*\,(a \Leftrightarrow b)$ Lấy E bất kì trên (O). Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa.
$\Leftrightarrow E(ABCD) = -1$ (theo định nghĩa tứ giác điều hòa).
$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EC}\right)} : \frac{\sin\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}\right)} = -1$.
$\Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$ (theo định lí hàm số sin).
$\Leftrightarrow AB.CD = AD.CB$.
$*\,(b \Leftrightarrow c)$
$(c \Rightarrow b)$ Gọi S là điểm đồng quy của Δ_a, Δ_c, BD.
Hai tam giác SAB và SDA đồng dạng, hai tam giác SCB và SDC đồng dạng.
Suy ra: $\frac{AB}{DA} = \frac{SA}{SD}; \frac{CB}{DC} = \frac{SC}{SD}$
Mà $SA = SC \Rightarrow \frac{AB}{DA} = \frac{CB}{DC} \Rightarrow AB.CD = AD.BC$.

$(b \Rightarrow c)$ Gọi S là giao điểm của Δ_a và Δ_c.
Gọi D' là giao điểm của tia SB và cung $\overset{\frown}{AC}$ (chứa D) của đường tròn (O).
Suy ra: Δ_a, Δ_c, BD' đồng quy tại S. Do đó, theo $(c \Rightarrow b)$, ta có: $AB.CD' = AD'.CB$.
Mặt khác, do $AB.CD = AD.BC$ nên $\frac{CD'}{CD} = \frac{AD'}{AD}$, mà D và D' cùng thuộc cung $\overset{\frown}{AC}$ (không chứa B) nên $\widehat{ADC} = \widehat{AD'C}$. Do đó, hai tam giác ADC và $AD'C$ đồng dạng.
Từ đó, tương tự như trên, ta có D' trung với D nên S, B, D thẳng hàng.
Vậy Δ_a, Δ_c, BD đồng quy. Tương tự với Δ_b, Δ_d, AC.
$*\,(a \Leftrightarrow d)$
Gọi P, N lần lượt là giao điểm của phân giác các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ với AC.
Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa.
$\Leftrightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$.
$\Leftrightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{NA}{NC}$.
$\Leftrightarrow P \equiv N \; (P, N \in AC)$.
$*\,(a \Leftrightarrow e)$
$*\,(e \Rightarrow a)$ Ta có: $\widehat{MAD} = \widehat{BAC}$ (theo giả thiết), $\widehat{MDA} = \widehat{BCA}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$).
$\Rightarrow$ Hai tam giác MAD và BAC đồng dạng $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{MD}{BC}$.
$\Rightarrow AD.BC = MD.AC = \frac{1}{2}AC.BD$.
Mặt khác, theo định lí Ptolemy, ta có:
$AD.BC + AB.CD = AC.BD$.
$\Rightarrow AB.CD = \frac{1}{2}AC.BD$.
$\Rightarrow AB.CD = AD.BC$.
$(a \Rightarrow e)$ Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa nên $AD.BC = AB.CD = \frac{1}{2}BD.AC = MD.AC$.
$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{MD}{BC}$.
Mà $\widehat{MDA} = \widehat{BCA}$ nên hai tam giác MAD và BAC đồng dạng. $\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BAC}$.

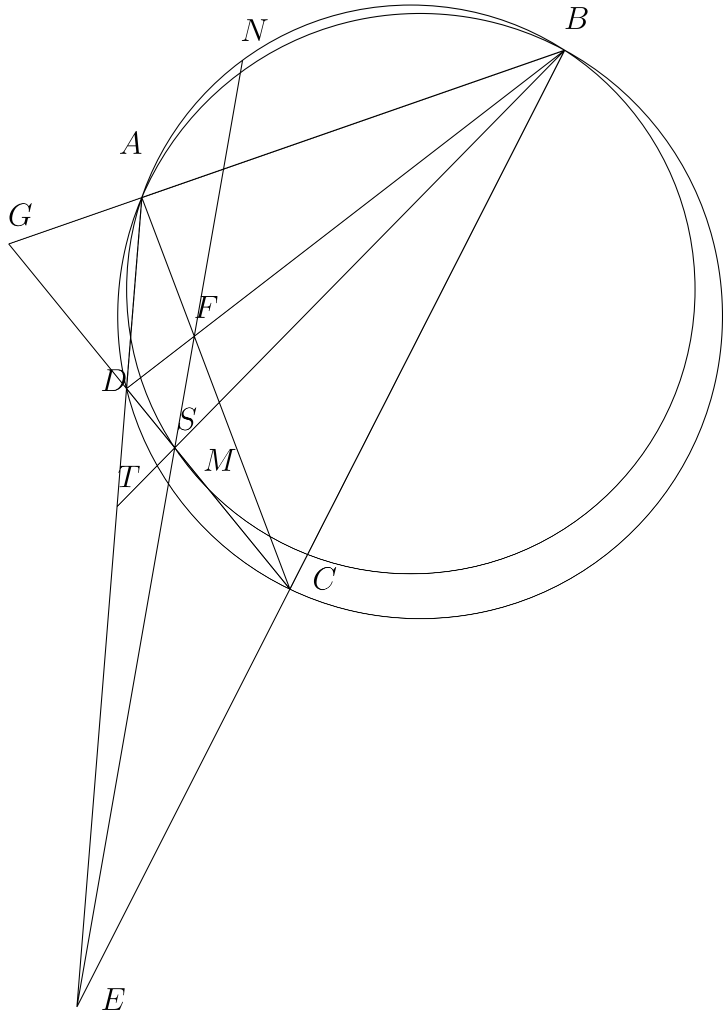
4 Một vài ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có hai đường phân giác trong các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ đồng quy với AC. Gọi M là trung điểm AC, đường thẳng qua D và song song với BC cắt BM tại E và cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại F. Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ là hình bình hành.



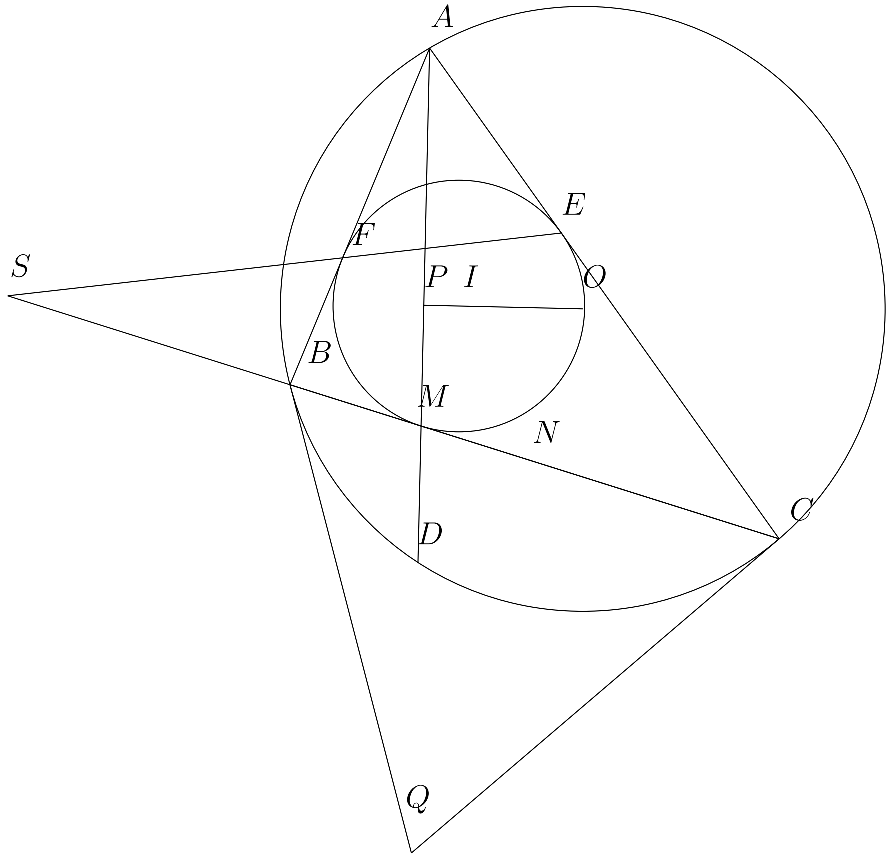
Lời giải. Gọi G là giao điểm của AF và BC.
Từ giả thiết, hai đường phân giác trong các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ đồng quy với AC nên tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa, do đó $F\,(ABCD) = -1$, hay $F\,(GBCD) = -1$.
Mà FD song song với GC nên B là trung điểm của GC.
Do đó, BM là đường trung bình của tam giác GAC. $\Rightarrow BM$ song song với GA, mà $F\,(ABCD) = -1$, hay $F\,(GBCE) = -1$ nên FC đi qua trung điểm của BE.
Lại có BC song song với EF nên tứ giác $BCEF$ là hình bình hành.

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi F, E lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AC và BD, AD và BC. Gọi M là trung điểm CD. EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB tại điểm N (N nằm khác phía với M qua AB). Chứng minh tứ giác $NAMB$ là tứ giác điều hòa. (http://k2pi.net.vn/showthread.php?t=18601)



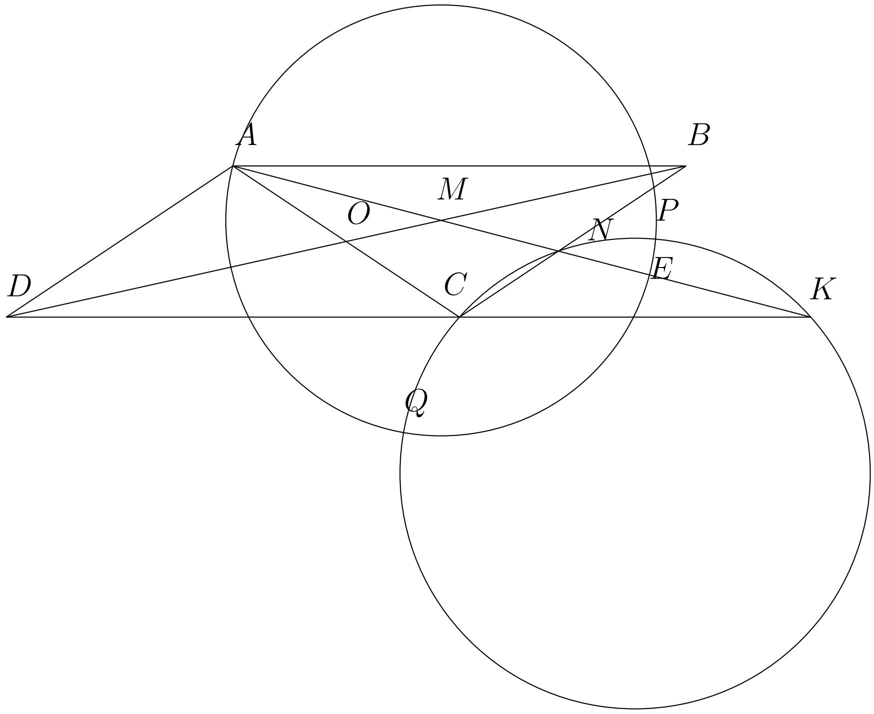
Lời giải. Gọi G là giao điểm của AB và CD, S là giao điểm của EF và CD.
Ta có: $(GSDC) = -1$ (hàng điều hòa tứ giác toàn phần).
M là trung điểm của CD nên theo công thức Maclaurin, ta có: $\overline{GS}.\overline{GM} = \overline{GD}.\overline{GC}$
Mà $\overline{GD}.\overline{GC} = \overline{GA}.\overline{GB}$ (phương tích của điểm G đến đường tròn (O)).
$\Rightarrow \overline{GS}.\overline{GM} = \overline{GA}.\overline{GB} \Rightarrow A, B, M, S$ cùng thuộc một đường tròn.
Gọi T là giao điểm của SB và DE.
$\Rightarrow (TADE) = -1$ (hàng điều hòa tứ giác toàn phần $DECF$.
$\Rightarrow S\,(TADE) = -1 \Rightarrow S\,(BANM) = -1$.
Do đó, tứ giác $BNAM$ là tứ giác điều hòa.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M là tiếp điểm của BC với (I), D là giao điểm thứ hai của AM và (O). Chứng minh rằng nếu OI vuông góc với AM thì tứ giác $ABDC$ là tứ giác điều hòa. (Đề kiểm tra chọn đội tuyển Ninh Bình)



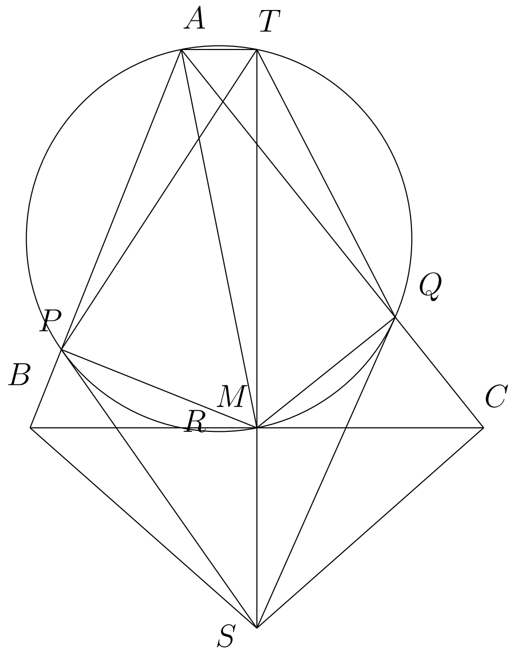
Lời giải. Gọi N là trung điểm BC; E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC, AB.
Gọi S là giao điểm của EF và BC, P là giao điểm của OI và AM.
$\Rightarrow A, F, P, I, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính AI.
Ta có: $P_{S/(IM)} = SM^2 = \overline{SF}.\overline{SE} = P_{S/(IA)}$ với P là kí hiệu phương tích từ một điểm đến một đường tròn.
$\Rightarrow S$ là điểm đẳng phương của đường tròn đường kính IM và đường tròn đường kính AI.
Mà hai đường tròn này cắt nhau tại I và P nên S, P, I, O thẳng hàng.
Ta có $(SMBC) = -1$ (hàng điều hòa tứ giác toàn phần $EFBC$).
$\Rightarrow \overline{SB}.\overline{SC} = \overline{SM}.\overline{SN}$ (Maclaurin).
$\overline{SP}.\overline{SO} = \overline{SM}.\overline{SN}$ (M, P, O, N đồng viên). $\Rightarrow \overline{SB}.\overline{SC} = \overline{SP}.\overline{SO}$
$\Rightarrow B, P, O, C$ đồng viên.
Gọi Q là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O).
$\Rightarrow B, P, O, C, Q$ cùng thuộc đường tròn đường kính OQ.
$\Rightarrow \widehat{OPQ} = 90^\circ$, mà theo giả thiết ta được $\widehat{OPQ} = 90^\circ$ nên A, P, D, Q thẳng hàng $\Rightarrow$ BQ, CQ, AD đồng quy tại Q.
$\Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa.

Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$, M là một điểm nằm trên đường chéo BD. AM cắt CD, CB lần lượt tại K, N. Gọi (C_1) là đường tròn tâm M, bán kính MA; (C_2) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KCN. (C_1) và (C_2) cắt nhau tại P, Q. Chứng minh rằng tứ giác $PKQN$ là tứ giác điều hòa. (A. Rermerov)



Lời giải. Gọi O là trung điểm AC, E là giao điểm thứ hai của AM và (C_1).
MO là đường trung bình của tam giác CAE nên CE song song với BD. $\Rightarrow C\,(EDOB) = -1$ (chùm điều hòa trung tuyến).
Hay $(AEKN) = -1$.
$\Rightarrow MA^2 = \overline{MK}.\overline{MN}$ (Newton). Lại có P, Q cùng thuộc đường tròn (C_1) nên $MA = MP = MQ$ $\Rightarrow \overline{MK}.\overline{MN} = MP^2 = MQ^2$. $\Rightarrow MP, MQ$ là tiếp tuyến của (C_2), do đó tứ giác $PKQN$ là tứ giác điều hòa.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC không cân, M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính AM lần lượt cắt AB, AC, BC tại điểm thứ hai P, Q, R. Tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn đường kính AM cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SB = SC$.



Lời giải. Gọi T là giao điểm thứ hai của SM với đường tròn đường kính AM. Khi đó, ta có tứ giác $TPMQ$ là tứ giác điều hòa.

Điểm A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $TPMQ$ nên $A\,(TMPQ) = -1$.

$\Rightarrow A\,(TMBC) = -1$. Mà M là trung điểm BC nên chùm $A\,(TMBC)$ là chùm trung tuyến, do đó AT song song với BC.

Lại có $AT \perp TM$ hay $AT \perp SM$ (do T thuộc đường tròn đường kính AM).

$\Rightarrow SM \perp BC$ tại trung điểm M của BC nên SM là đường trung trực của BC.

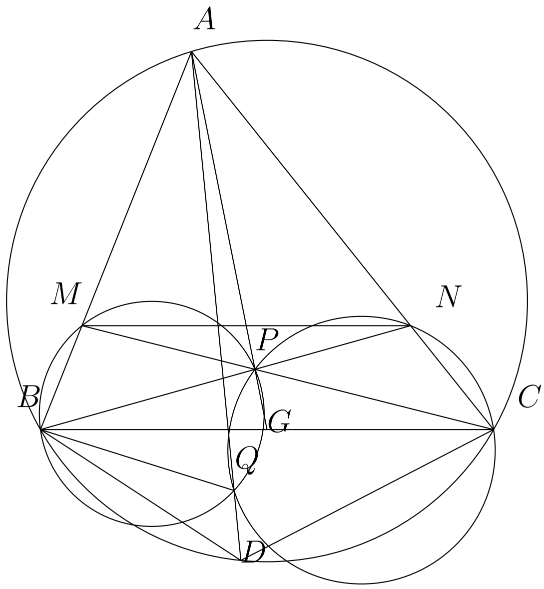
Vậy $SB = SC$.

Nhận xét: Bài toán trên là một bài toán khá đơn giản, ta hoàn toàn có thể nhìn ra điểm T một cách dễ dàng. Dù vậy, kết luận của bài toán này thực sự rất thú vị, nó xuất hiện trong nhiều bài toán khác như sau:

Ví dụ 5.1. Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Kẻ BI vuông góc với MP tại I, CK vuông góc với NP tại K. Tiếp tuyến tại I, K của đường tròn ngoại tiếp tam giác IKP cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$. (VMO 2014).

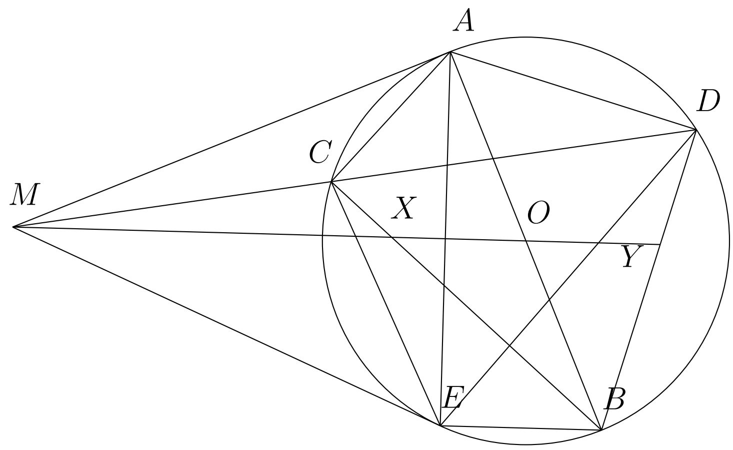
Ví dụ 5.2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ OM vuông góc với AD ($M \in AC$), ON vuông góc với BC ($N \in BD$) . Tiếp tuyến tại M và N của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cắt nhau tại S. Chứng minh rằng $SB = SC$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, M, N lần lượt nằm trên AB, AC sao cho MN song song với BC. Gọi P là giao điểm của CM và BN. Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MBP và NPC cắt nhau tại điểm thứ hai Q) . Chứng minh rằng $\widehat{BAQ} = \widehat{PAC}$.

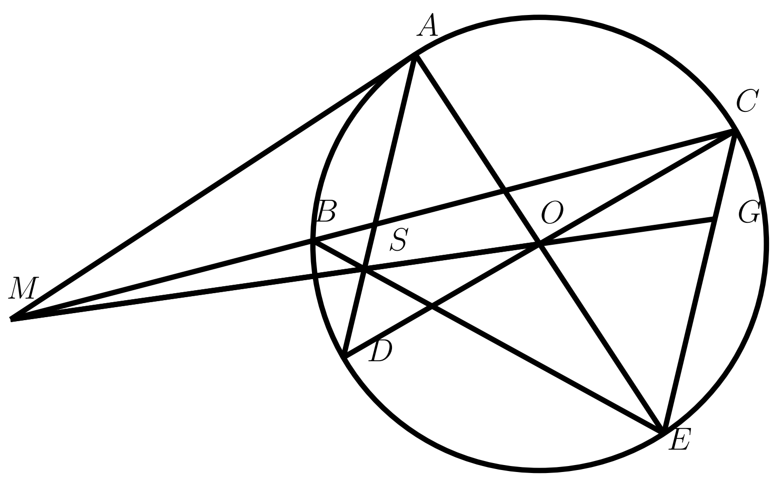


Lời giải. Gọi G là giao điểm của AP và BC, AQ cắt đường tròn (ABC) tại điểm thứ hai D.
Theo định lí Ceva, ta được G là trung điểm của BC.
Xét mod π: $(BQ, BM) \equiv (PQ, PC) \equiv (NQ, NC)$.
$\Rightarrow B, A, N, Q$ đồng viên $\Rightarrow \widehat{BQD} = \widehat{BNC}$.
$\Rightarrow$ Hai tam giác BQD và BNC đồng dạng $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{QD}{NC}$.
Tương tự: $\frac{CD}{BC} = \frac{QD}{MB}$. Khi đó: $\frac{BD}{CD} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$.
Do đó, tứ giác $ABDC$ là tứ giác điều hòa.
G là trung điểm BC nên $\widehat{BAD} = \widehat{GAC}$, suy ra đpcm.
Nhận xét: Đây là một bài toán hay và lạ. Bài toán không hề nhắc đến tứ giác điều hòa hay các tính chất của nó, tuy vậy ta vẫn có thể nhìn ra G là trung điểm BC cộng với yêu cầu của đề bài để tìm cách chứng minh AQ là đường đối trung của tam giác ABC, hay $ABCD$ là tứ giác điều hòa. Sau đây xin gửi đến bạn đọc một bài toán tương tự, cũng khá hay và đẹp:
Ví dụ 6.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm P nằm bên trong tam giác. AP, BP, CP lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), EF, BC đồng quy tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. GE, GF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N. CN cắt DM tại I. Chứng minh rằng $\widehat{ABD} = \widehat{IAC}$.

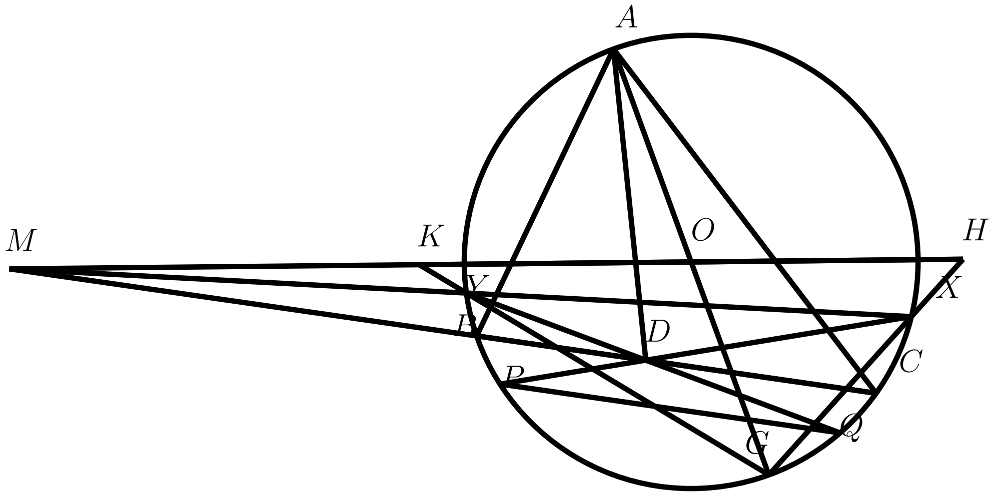
Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến tại A của (O), lấy điểm M khác A. Từ M, kẻ cát tuyến MCD đến đường tròn (O). MO cắt BC, BD lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng $OX = OY$.



Lời giải. Gọi ME là tiếp tuyến thứ hai từ M đến (O) (E là tiếp điểm).
Ta được tứ giác $ACED$ là tứ giác điều hòa.
$\Rightarrow B(AECD) = -1$ hay $B(OEXY) = -1$.
Mà MO song song với BE do cùng vuông góc với AE nên $OX = OY$ (chùm điều hòa trung tuyến).
Nhận xét: Thực sự rất ấn tượng với lời giải ngắn gọn bằng tứ giác điều hòa của bài toán. Nếu giải bằng kiến thức Trung học Cơ sở, ta sẽ phải xét hai trường hợp với lời giải khá rắc rối cùng hình phụ. Bài toán trên đồng thời cũng là một bổ đề hay được sử dụng nhiều trong các kết quả đẹp khác, chẳng hạn như:
Ví dụ 7.1. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), kẻ tiếp tuyến MA, cát tuyến MBC đến đường tròn. D, E lần lượt là điểm đối xứng với C, A qua O. .Chứng minh rằng EB, DA, MO đồng quy.

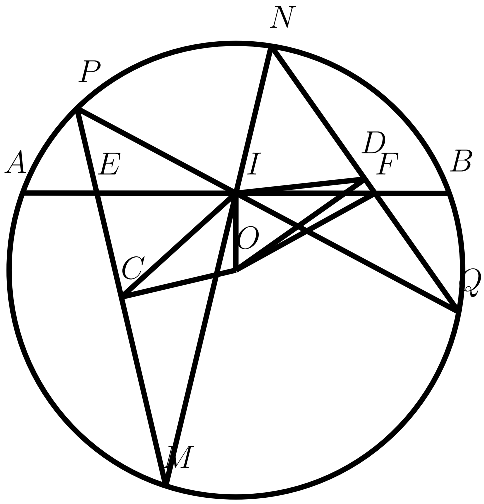


Gợi ý. Gọi G, S lần lượt là giao điểm của MO với EC, EB.
Theo ví dụ 7, ta có O là trung điểm $GS \Rightarrow DS$ song song với EC.
Mà tứ giác $DACE$ là hình chữ nhật nên DA song song với CE. Do đó, D, S, A thẳng hàng.
Ví dụ 7.2 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có phân giác AD. Dây cung PQ bất kì của (O) song song với BC. PD, QD lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai X, Y. G là điểm đối xứng với A qua O. XY cắt BC tại M, GX cắt MO tại H, GY cắt MO tại K. Chứng minh rằng O là trung điểm của HK.



Gợi ý. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại M'.
Ta có: $AM'^2 = \overline{M'B}.\overline{M'C}$, mà $AM' = DM'$ nên $DM'^2 = \overline{M'B}.\overline{M'C}$.
Lại có hai tam giác MDY và MXD đồng dạng nên $MD^2 = \overline{MX}.\overline{MY} = \overline{MB}.\overline{MC}$.
Vậy $M' \equiv M$, dẫn đến đpcm.
Nhận xét: Hai bài toán trên nếu không biết cách đưa về bổ đề quen thuộc thì sẽ dẫn đến thế khó, cả hai bài đều có sự phức tạp về hình vẽ, khó suy đoán hướng làm, thế nhưng nếu biết cách tận dụng yếu tố tứ giác điều hòa để giải quyết thì vấn đề sẽ trở nên đơn giản.

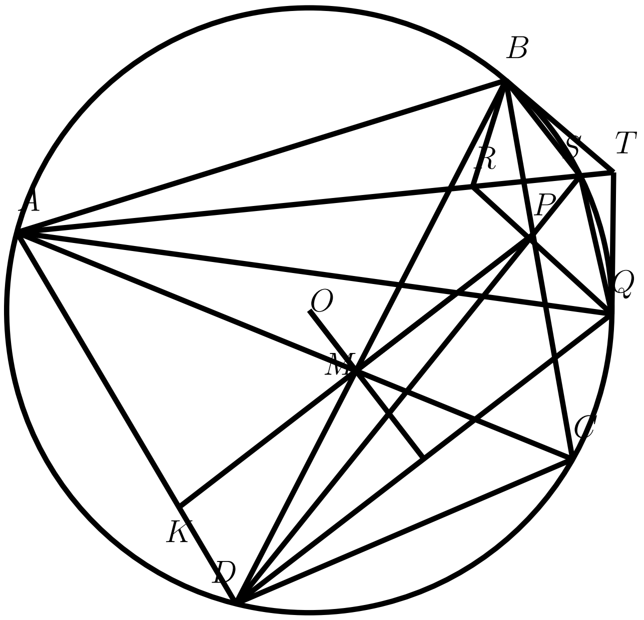
Ví dụ 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), AC cắt BD tại M. Đường thẳng qua M và vuông góc với MO cắt BC tại P, DP cắt (O) tại điểm thứ hai S. Lấy điểm Q nằm trên (O) sao cho DQ vuông góc với OM. TIa phân giác các góc $\widehat{ABS}, \widehat{AQS}$ cắt nhau tại R. Tiếp tuyến tại B, Q của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng A, R, S, T thẳng hàng.
Lời giải. Bổ đề: Cho đường tròn (O) với dây cung AB. Gọi I là trung điểm của AB, qua I dựng hai dây cung MN, PQ sao cho MP, NQ cắt AB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng I là trung điểm của EF.



Vì I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$.
Gọi C, D lần lượt là trung điểm của $MP, NQ \Rightarrow OC \perp MP$ và $OD \perp NQ$.
Vậy các tứ giác $IOCE, IODF$ là tứ giác nội tiếp.
$\Rightarrow \widehat{IOE} = \widehat{ICE}$ và $\widehat{IOF} = \widehat{IDF}$.
Mặt khác, hai tam giác IMP và IQN đồng dạng và IC, ID là hai đường trung tuyến tương ứng $\Rightarrow \frac{IC}{ID} = \frac{IP}{IN} = \frac{PM}{NQ} = \frac{CP}{DN}$. Do đó, hai tam giác ICP và IDN đồng dạng. Từ đó, ta có: $\widehat{ICE} = \widehat{IDF}$.

Do đó: $\widehat{IOE} = \widehat{IOF} \Rightarrow$ tam giác OEF cân tại $O \Rightarrow I$ là trung điểm EF.

Quay lại bài toán:

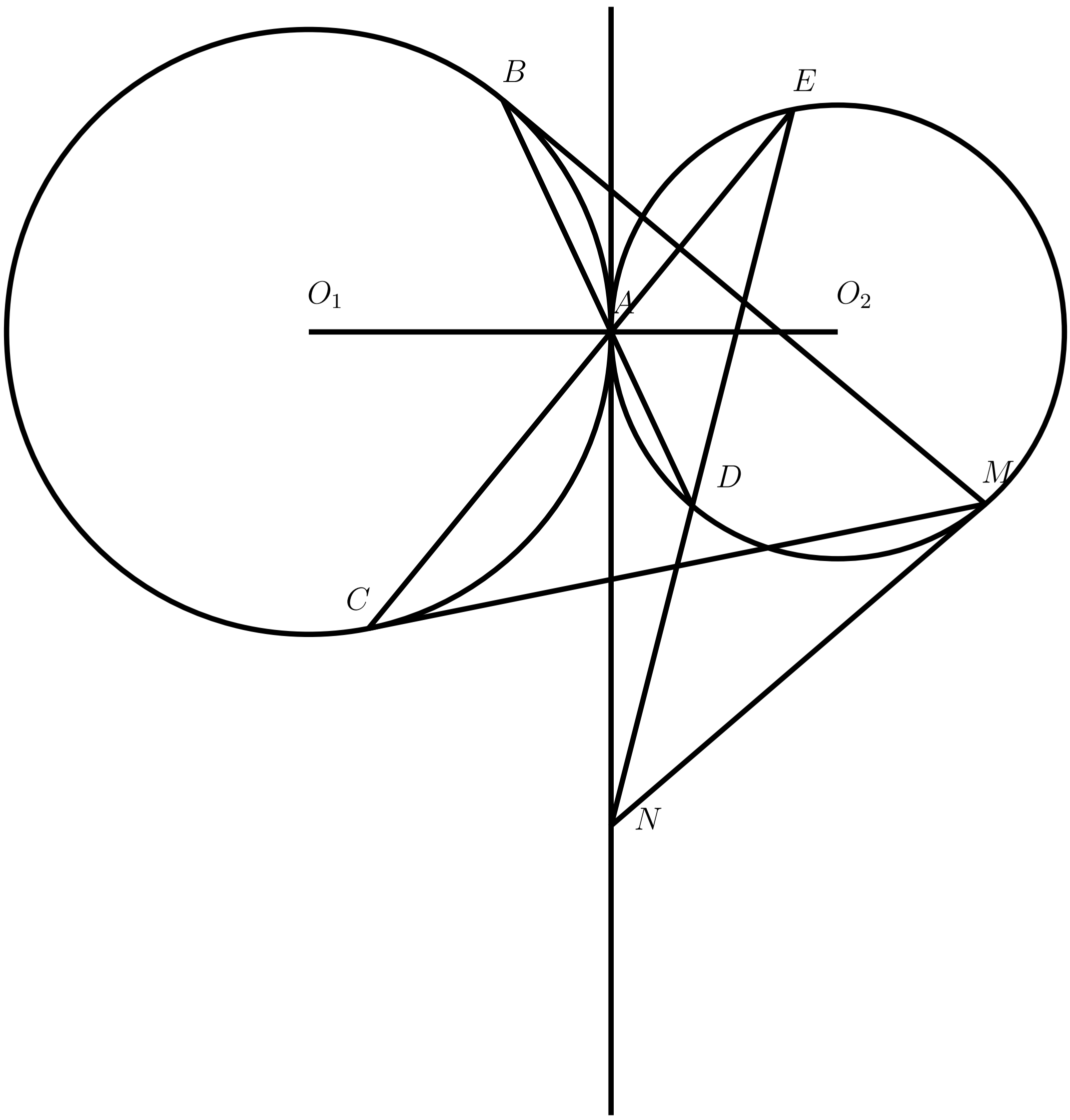


Gọi K là giao điểm của PM và AD. Theo bổ đề, ta có M là trung điểm của PK. Mà DQ song song với PK nên $D\left(KPMQ\right) = -1$, hay $D\left(ASPQ\right) = -1$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $APQS$ là tứ giác điều hòa. $\Rightarrow$ Tiếp tuyến tại B, Q của đường tròn (O) đồng quy với AS.

Tương tự như trên, ta có tứ giác $ABSQ$ là tứ giác điều hòa nên đường phân giác hai góc $\widehat{ABS}, \widehat{AQS}$ cắt nhau tại một điểm trên AS. Do đó, A, R, S, T thẳng hàng.

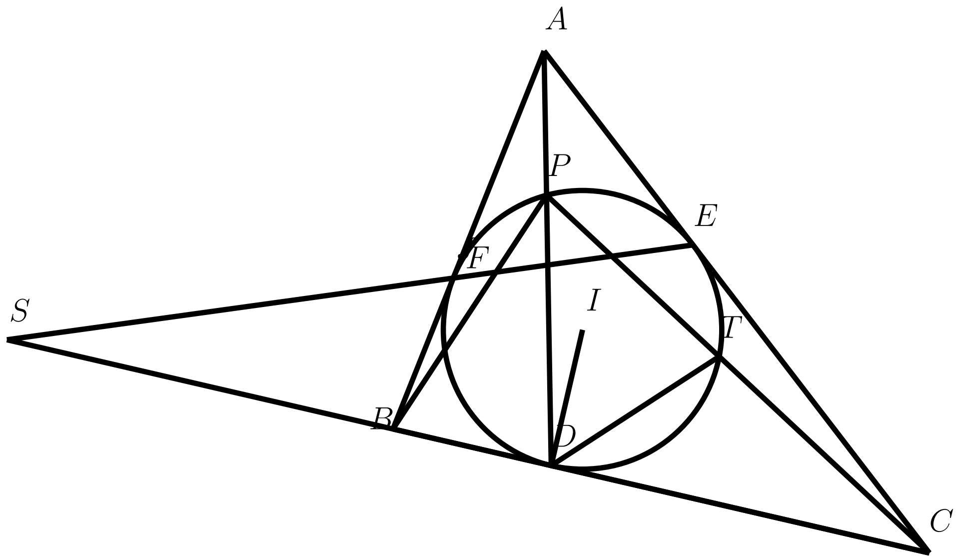
Ví dụ 9. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Từ một điểm M trên (O_2) nhưng không thuộc O_1O_2, kẻ hai tiếp tuyến MB, MC tới (O_1). AB, AC cắt (O_2) tại điểm thứ hai D, E. DE và tiếp tuyến tại M của đường tròn (O_2) cắt nhau tại N. Chứng minh rằng N luôn nằm trên đường thẳng cố định khi M thay đổi. (VMO 2003)



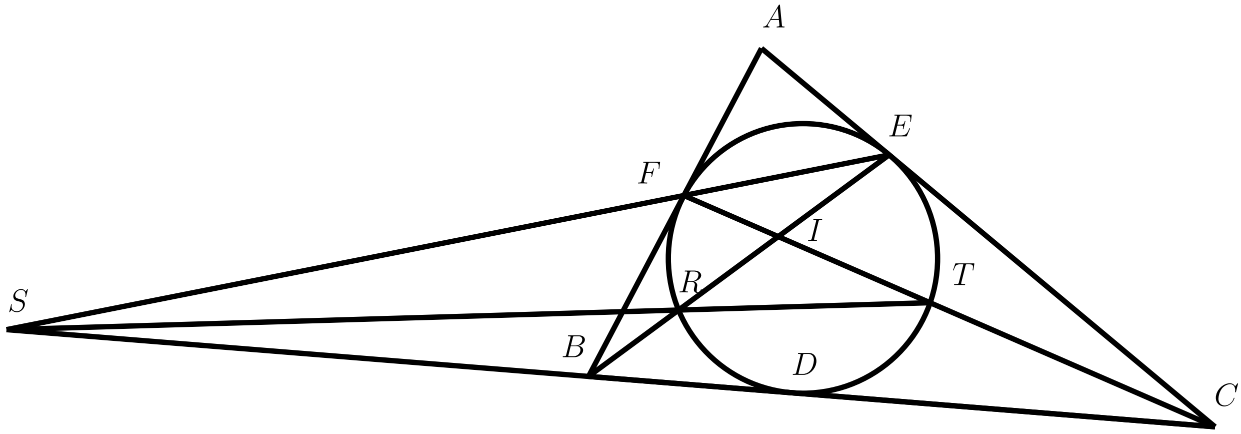
Lời giải. Ta có hai tam giác O_1AB và O_2AD đồng dạng với nhau nên $\widehat{AO_1B} = \widehat{AO_2D}$.
Tương tự: $\widehat{AO_1C} = \widehat{AO_2E}$.
$\Rightarrow \frac{\overline{EC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{DA}}$.
Mà $\widehat{MBA} = \frac{1}{2}\widehat{AO_1B} = \frac{1}{2}\widehat{AO_2D} = \widehat{AMD}$. nên hai tam giác AMD và MBD đồng dạng.
$\Rightarrow DM^2 = \overline{DA}.\overline{DB}$. Tương tự: $EM^2 = \overline{EA}.\overline{EC}$.
$\Rightarrow \frac{DM^2}{EM^2} = \frac{\overline{DA}.\overline{DB}}{\overline{EA}.\overline{EC}} = \frac{DA^2}{EA^2} \Rightarrow \frac{DM}{EM} = \frac{DA}{EA}$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $AEMD$ là tứ giác điều hòa.
Mặt khác, N là giao điểm của DE và tiếp tuyến tại M của (O_2) nên N thuộc tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn. Đường thẳng này cố định nên ta có đpcm.
Nhận xét: Đây là một bài toán khá hay và lời giải sử dụng tứ giác điều hòa khá đẹp mắt, ngoài cách giải bằng tứ giác điều hòa, ta có thể chứng minh bài toán bằng cách sử dụng phương tích, trục đẳng phương, chứng minh N là điểm đẳng phương của hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ và đường tròn điểm M. Sau đây là một số bài toán về quỹ tích chứng minh bằng tính chất của tứ giác điều hòa.
Ví dụ 9.1. (Vietnam TST 2001) Trong mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1, ω_2 có tâm lần lượt

là O_1, O_2 cắt nhau tại hai điể A, B. Các tiếp tuyến tại A, B của ω_1 cắt nhau tại K. Giả sử M là một điểm nằm trên ω_1 nhưng không trùng với A, B. Đường thẳng AM cắt ω_2 tại điểm thứ hai P, đường thẳng KM cắt ω_1 tại điểm thứ hai C và đường thẳng AC cắt ω_2 tại điểm thứ hai Q.
a. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng MC.
b. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên ω_1.
Ví dụ 9.2 Từ một điểm M nằm ngoài (O) kẻ hai tiếp tuyến MB, MC đến đường tròn. A là một điểm cố định trên (O). Đường thẳng bất kì qua A cắt (O) tại G, cắt MB, MC lần lượt tại D, E, BE cắt CD tại S. Chứng minh rằng GS luôn đi qua một điểm cố định.

Ví dụ 10. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. AD cắt (I) tại điểm thứ hai P. Cho rằng $\widehat{BPC} = 90°$, chứng minh rằng $EA + AP = PD$. (China 2003)

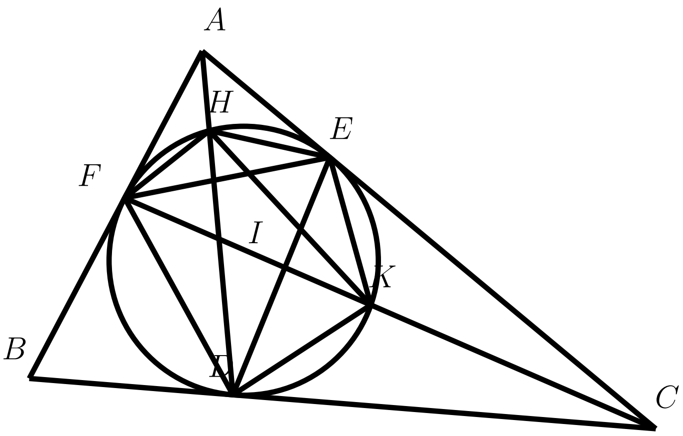


Lời giải. Gọi S là giao điểm của EF và BC, T là giao điểm thứ hai của BC và (I).
Ta có: $P\,(BCDE) = -1$, mà $BP \perp PC \Rightarrow PC$ là tia phân giác của góc $\widehat{DPS}$.
$\Rightarrow \widehat{DPC} = \widehat{CPS} = \widehat{PDT}$.
$\Rightarrow PT = DT$.
Lại có tứ giác $PETD$ là tứ giác điều hòa nên $PT.DE = 2PE.DT$ (định lí Ptolemy).
Mà $PT = DT$ nên $DE = 2PE$.
Mặt khác, hai tam giác AEP và ADE đồng dạng
$\Rightarrow AD = 2AE$ và $AE = 2AP$ suy ra: $PD = EA + AP$.
Nhận xét: Đây là một bài toán hay, làm nổi bật tính chất của tứ giác điều hòa và định lí Ptolemy, vốn có quan hệ sâu sắc với nhau. Chìa khóa để giải bài toán này nằm ở việc tạo ra tứ giác $PETD$ là tứ giác điều hòa và sử dụng các tính chất quen thuộc để suy ra các quan hệ độ dài. Mối liên kết giữa định lí Ptolemy và tứ giác điều hòa còn được thể hiện qua các bài toán sau:
Ví dụ 10.1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. BE, CF lần lượt cắt (I) tại điểm thứ hai R, T. Chứng minh rằng EF, BC, RT đồng quy.



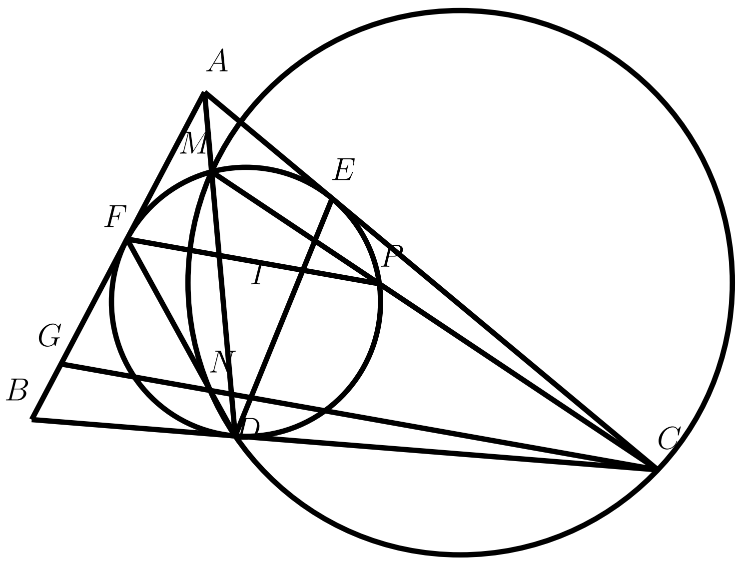
Lời giải. Gọi S, S' lần lượt là giao điểm của EF với BC, RT.
Ta có: $\frac{\overline{SE}}{\overline{SF}} = \frac{DE^2}{DF^2}, \frac{\overline{S'E}}{\overline{S'F}} = \frac{RE}{RF}.\frac{TE}{TF}$.
Theo định lí Ptolemy:
Tứ giác $EFRD$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow \frac{RE}{RF} = 2\frac{DE}{DF}$.
Tứ giác $EFDT$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow \frac{TE}{TF} = \frac{DE}{2DF}$.
$\Rightarrow \frac{\overline{SE}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{S'E}}{\overline{S'F}} \Rightarrow S \equiv S'$.
Vậy ta có đpcm.
Nhận xét: Bản chất của bài toán trên chính là một bổ đề quen thuộc: Từ M ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai cát tuyến MAB, MCD, hai tiếp tuyến MP, MQ đến đường tròn. Chứng minh rằng PQ, AD, BC đồng quy.

Ví dụ 10.2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. AD, CF lần lượt cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai H, K. Chứng minh rằng $\frac{FD.HK}{FH.DK} = 3$.



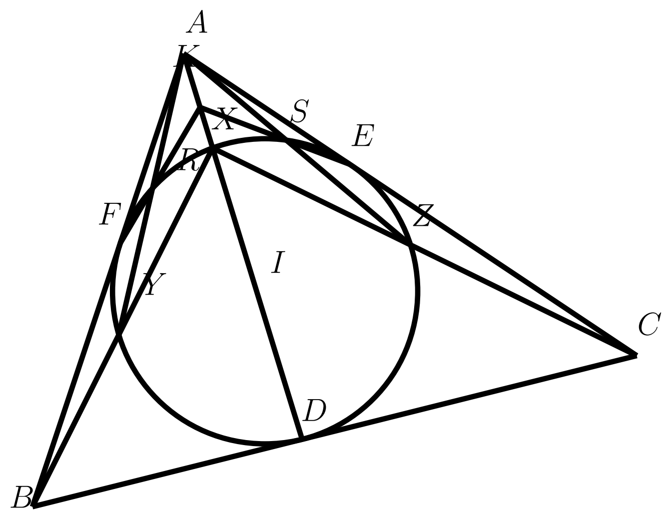
Lời giải. Theo định lí Ptolemy:
Tứ giác $FHED$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow ED.FK = 2FE.DK$.
Tứ giác $FEKD$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow HD.FE = 2HF.DE$.
Nhân vế theo vế của hai đẳng thức trên, ta được: $FK.HD = 4DK.HF$.
Mà $FH.DK + FD.HK = FK.HD$.
Từ hai điều trên, ta có: $FD.HK = 3FH.DK$ (đpcm).
Nhận xét: Bài toán trên cho ta gợi ý về tính chất của các cặp tứ giác điều hòa có chung ba đỉnh, cụ thể trong lời giải trên là $FHED$ và $FEKD$. Mời bạn đọc đến với một kết quả đẹp sau đây phát triển từ ví dụ trên:
Ví dụ 10.3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm với BC, CA, AB lần

lượt là D, E, F. AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD cắt DF tại điểm thứ hai N. CN cắt AB tại G. Chứng minh $CD = 3FG$.



Lời giải. Gọi P là giao điểm thứ hai của MC và đường tròn (I). Ta có FP song song với CG.
$\Rightarrow \frac{FG}{CD} = \frac{FG}{CP}.\frac{CP}{CD} = \frac{\sin\widehat{PCG}}{\sin\widehat{FGC}}.\frac{\sin\widehat{PDC}}{\sin\widehat{DPC}} = \frac{\sin\widehat{DFP}}{\sin\widehat{FDP}}.\frac{\sin\widehat{FDM}}{\sin\widehat{DFM}} = \frac{PD}{PF}.\frac{MF}{MD}$.
Theo định lí Ptolemy:
Tứ giác $FMED$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow FM.ED = ME.FD$.
Tứ giác $PEMD$ là tứ giác điều hòa $\Rightarrow 2EM.PD = MP.ED$.
Nhân vế theo vế hai đẳng thức trên, ta có: $2FM.DP = FD.MP$.
Mà $FM.DP + FD.MP = FP.MD$.
$\Rightarrow 3FM.DP = FP.DM. \Rightarrow \frac{FG}{CD} = \frac{1}{3}$. (đpcm)

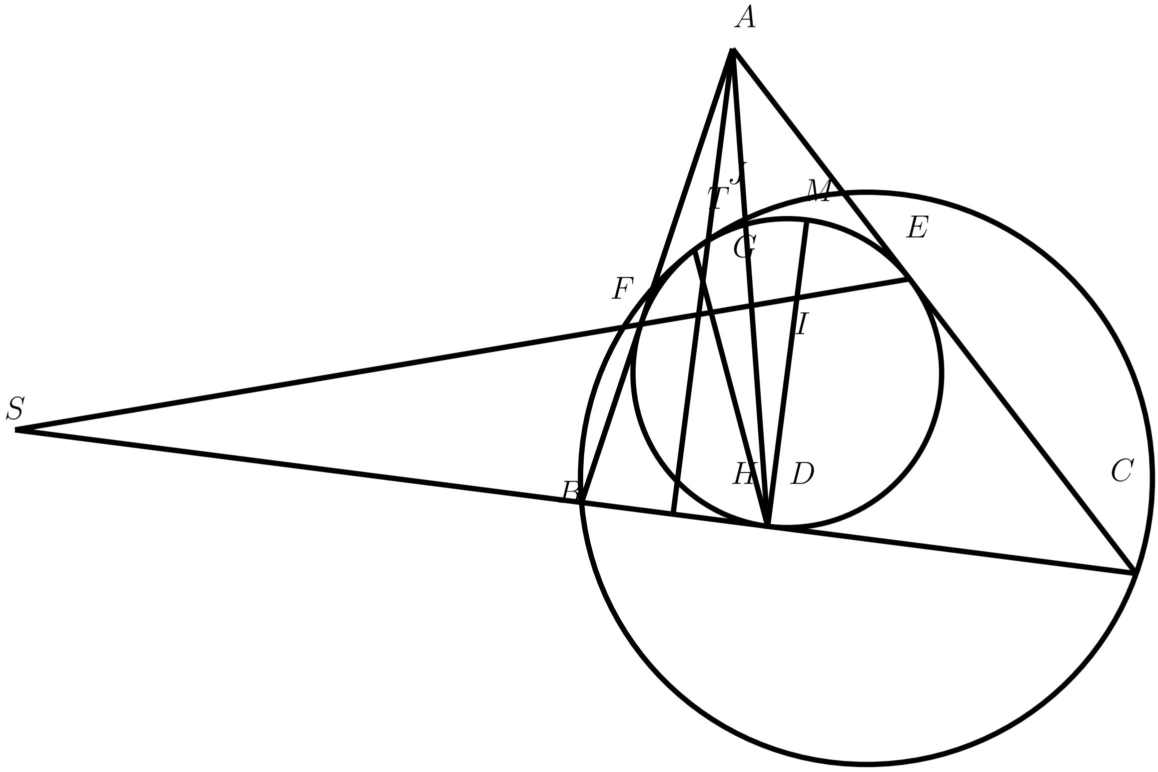
Ví dụ 11. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. AD cắt (I) tại điểm thứ hai X. BX, CX theo thứ tự cắt (I) tại điểm thứ hai Y, Z. AY, AZ lần lượt cắt (I) tại điểm thứ hai R, S. Chứng minh rằng AD, ES, FR đồng quy.



Lời giải. Gọi K là giao điểm của ES và AD.
Tứ giác $ZEXD$ là tứ giác điều hòa và S là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ZEXD$ nên $S\,(ZEXD) = -1$.
$\Rightarrow (AXKD) = S\,(AXKD) = S\,(ZEXD) = -1$.

Gọi K' là giao điểm của FR và AD. Tương tự như trên, ta được $(AXK'D) = -1$.
$\Rightarrow K \equiv K'$. Vậy AD, ES, FR đồng quy.

Ví dụ 12. (IMO 2002) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), các tiếp điểm với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi G là trung điểm của đường cao AH. DG cắt (I) tại điểm thứ hai T. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC tiếp xúc với đường tròn (I).



Lời giải. Gọi S là giao điểm của BC và EF, J là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (I), M là giao điểm của đoạn thẳng AI và đường tròn (I).
Ta có: $D\,(MGAH) = -1$ (chùm điều hòa trung tuyến) nên tứ giác $MTJD$ là tứ giác điều hòa.
SJ là tiếp tuyến của đường tròn (I) do tứ giác $JFDE$ là tứ giác điều hòa.
Nên SD là tiếp tuyến của (I).
$\Rightarrow S, T, M$ thẳng hàng, mà $SM \perp TD$ nên TD là phân giác trong của góc $\widehat{BTC}$.
Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC, Q là điểm chính giữa cung BC không chứa T của đường tròn này thì T, D, Q thẳng hàng và LQ song song với ID.
Suy ra: $\widehat{DTI} = \widehat{TDI} = \widehat{TQL} = \widehat{QTL}$.
Do đó, T, I, L thẳng hàng. Từ đó, ta có đpcm.
Nhận xét: Đây là một bài toán hay và điển hình cho ứng dụng của tứ giác điều hòa xuất hiện trong kì thi Olympic Toán quốc tế, sau đây xin đưa ra một kết quả khác được phát triển dựa trên bài toán trên.
Ví dụ 12.1 (Đề chọn đội tuyển Hải Phòng 2016 - 2017)
Cho tam giác nhọn ABC, $(AB < AC)$, phân giác trong đỉnh A cắt BC tại D, E là điểm trên đoạn BC sao cho $BD = BE$. Phân giác ngoài tại đỉnh A cắt đường thẳng qua D và vuông góc với BC tại F. I là trung điểm của DF, đường thẳng EI cắt AD tại M, đường thẳng EF cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại K.
a. Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại P, KD cắt đường tròn đường kính DF tại điểm thứ hai L. Chứng minh rằng đường thẳng PL tiếp xúc với đường tròn đường kính DF.
b. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KBC.

5 Bài tập rèn luyện.

Bài 1. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là giao điểm của BH và AC, E là giao điểm của CH và AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm F khác A. Chứng minh rằng phân giác trong các góc $\widehat{BFC}, \widehat{BHC}$ cắt nhau tại một điểm trên BC.
Bài 2. (IMO 2003) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ cắt nhau tại một điểm trên AC.
Bài 3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I), (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. AD cắt (I) tại điểm thứ hai $M.BM, CM$ cắt (I) lần lượt tại Y, Z. Chứng minh rằng BZ, CY, AD đồng quy.
Bài 4. (Vietnam TST 2002) Trong mặt phẳng cho hai đường tròn ω_1 tâm O và ω_2 tâm O' cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A, B của ω_1 cắt nhau tại K. Giả sử M là một điểm nằm trên ω_1 nhưng không trùng với A và B. Đường thẳng AM cắt ω_2 tại điểm thứ hai P, đường thẳng KM cắt ω_1 tại điểm thứ hai C và đường thẳng AC cắt ω_2 tại điểm thứ hai Q.
a. Chứng minh rằng trung điểm PQ thuộc đường thẳng MC.
b. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên ω_1.
Bài 5. (China TST 2008) Cho tam giác ABC nhọn có đường tròn (I) nội tiếp. M, N là trung điểm của cung nhỏ AC, AB của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm của MN. Gọi G là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC của (O). Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABG, ACG. P là giao điểm thứ hai của (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác GI_1I_2. Chứng minh rằng P, I, D thẳng hàng.
Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I), AD là đường phân giác trong. (K), (L) lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ABD, ACD, J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL. IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL tại P khác I. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC nằm trên (O).

6 Tài liệu tham khảo.

1. Tài liệu chuyên Toán Hình học 10 - Đoàn Quỳnh (chủ biên) - NXB Giáo dục Việt Nam 2011.
2. Chuyên đề Tứ giác điều hòa - lớp 10 Toán Khóa 17 - THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Bình Định.
3. Chuyên đề Tứ giác điều hòa - Nguyễn Việt Hà (THPT Chuyên Lào Cai).
4. Chuyên đề Tứ giác điều hòa - Phan Nguyễn Văn Trường, Lục Đình Khánh, Bùi Hà Đăng Quang - Trường Phổ thông Năng khiếu - ĐHQG TPHCM.
5. Julielltv Blog (Blog của chuyên Hà Tĩnh) - https://julielltv.wordpress.com
6. Chuyên đề Tứ giác điều hòa - diễn đàn Mathcopes (chuyên KHTN).
7. dinhtrungphan.blogspot.com/2014/06/bai-toan-1-e-thi-olympic-duyen-hai-bac.html

7 Lời kết

Các bạn thân mến, qua những bài tập trên, chúng ta thấy được vẻ đẹp của tứ giác điều hòa trong hình học. Tứ giác điều hòa là một công cụ mạnh giúp chúng ta có thể dễ dàng giải quyết các bài khó, nếu nắm vững kiến thức về tứ giác điều hòa, chúng ta có thể tạo ra nhiều bài toán "hay" và "đẹp".
Để hoàn thành chuyên đề này, chúng em nhận được nhiều sự giúp đỡ, quan tâm của mọi người, đặc biệt là thầy Trần Quang Vinh - người đã tận tình hướng dẫn để chúng em có thể hoàn tất chuyên đề. Đây là lần đầu nhóm chúng em làm chuyên đề Toán với nội dung về Tứ giác điều hoa - một chuyên đề hay và quan trọng. Có thể kiến thức cung cấp ở trên chưa thực sự đầy đủ, đôi chỗ bài tập giải chưa đầy đủ, chi tiết như mong muốn nhưng đó đã là nỗ lực trong quá trình tìm hiểu của cả nhóm. Dù vậy, chuyên đề chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót, chúng em rất mong nhận được đóng góp quý báu của các thầy cô và các bạn để kiến thức trong lĩnh vực này của chúng em được hoàn thiện hơn. Hi vọng chuyên đề này sẽ mang lại được nhiều điều bổ ích cho bạn đọc.
Xin chân thành cảm ơn!

Nhóm tác giả