Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131
STT: 99b
Lớp: 20CTT1

BÀI TẬP ĐIỂM CỘNG CUỐI KÌ TUẦN 12

Bài toán 1.

Cho đường cong C với tham số hóa (đơn, chính qui) $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ và hàm f liên tục trên C. Đặt $m = \min\limits_C f$ và $M = \max\limits_C f$. Chứng minh

$$m \leqslant \frac{1}{L_C} \int_C f ds \leqslant M,$$

trong đó L_C là độ dài đường cong C.

Lời giải.
Theo công thức tính tích phân đường loại 1,

$$\int_C f ds = \int\limits_a^b f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt.$$

Độ dài L_C của đường cong C được tính theo công thức:

$$L_C = \int_C 1 ds = \int\limits_a^b \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt.$$

Do $m = \min\limits_C f$ và $M = \max\limits_C f$ nên

$$m \leqslant f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \leqslant M, \forall t \in [a, b]. \tag{1}$$

Do r là tham số hóa chính qui nên $\left|\overrightarrow{r}'(t)\right| > 0, \forall t \in [a, b]$. Vì vậy, từ (1) ta suy ra

$$m \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| \leqslant f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| \leqslant M \left|\overrightarrow{r}'(t)\right|, \forall t \in [a, b]. \tag{2}$$

Từ (2), theo bất đẳng thức tích phân

$$\int\limits_a^b m \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt \leqslant \int\limits_a^b f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt \leqslant \int\limits_a^b M \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt.$$

$$\Rightarrow m \int\limits_a^b \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt \leqslant \int\limits_a^b f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt \leqslant M \int\limits_a^b \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt.$$

$$\Rightarrow m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt}{\int\limits_a^b \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt} \leqslant M, \left(\int\limits_a^b \left|\overrightarrow{r}'(t)\right| dt = L_C > 0\right).$$

$$\Rightarrow m \leqslant \frac{\int_C f ds}{L_c} \leqslant M.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.

a. Chứng minh rằng với mỗi bộ số $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tồn tại duy nhất số thực z thỏa mãn phương trình $\frac{5z^3}{4} + (2x^2 + 1) z + x^2 + y^2 - y - 2 = 0$. Từ đó, hãy chứng minh tồn tại hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\frac{5z^3}{4} + \left(2x^2 + 1\right) z + x^2 + y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y).$$

Điều này có nghĩa rằng mặt cong $(S) : \frac{5z^3}{4} + (2x^2 + 1) z + x^2 + y^2 - y - 2 = 0$ chính là đồ thị hàm f.
b. Xét hàm $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ xác định bởi , $G(x, y, z) = \frac{5z^3}{4} + (2x^2 + 1) z + x^2 + y^2 - y - 2$. Chứng minh rằng

$$G(x, y, f(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

c. Tìm $f(0, 2)$.
d. Viết phương trình mặt tiếp xúc với (S) tại $(0, 2, f(0, 2))$.
e. Tìm $f_x(0, 2)$ và $f_y(0, 2)$.
f. Tìm xấp xỉ cho giá trị $f(0.03, 1.99)$.
g. Xét hàm $g(x, y) = f(x^2 - y, y^2 + x)$. Tìm $g_x(1, 1)$ và $g_y(1, 1)$.
h. Tìm cực trị hàm f.

Lời giải.

h. Với $z = f(x, y)$, ta có

$$\frac{5z^3}{4} + \left(2x^2 + 1\right) z + x^2 + y^2 - y - 2 = 0. \tag{3}$$

Ta có các đạo hàm riêng của G như sau:

$$\begin{cases} G_x(x, y, z) = 4xz + 2x \\ G_y(x, y, z) = 2y - 1 \\ G_z(x, y, z) = \dfrac{15z^2}{4} + 2x^2 + 1 \end{cases}.$$

Vì vậy G_x, G_y, G_z xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^3$.
Do $G_z(x, y, z) = \frac{15z^2}{4} + 2x^2 + 1 > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nên theo định lí hàm ẩn

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -\dfrac{G_x(x, y, z)}{G_z(x, y, z)} \\ f_y(x, y) = -\dfrac{G_y(x, y, z)}{G_z(x, y, z)} \end{cases}.$$

Điểm dừng của f thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Hệ phương trình (4) tương đương với

$$\begin{cases} G_x(x, y, z) = 0 \\ G_y(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4xz + 2x = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(2z+1\right) = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Thay $y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$ vào (3), ta được

$$-\frac{5}{32} - x^2 - \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Vậy f có một điểm dừng là $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
Thay $(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ vào (3), ta được

$$\frac{5z^3}{4} + z - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow z = 1.$$

Ta sẽ đi tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của f.
Một vài đạo hàm riêng cấp 2 của G như sau:

$$\begin{cases} G_{xx}\left(x,y,z\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(G_x\left(x,y,z\right)\right) = 4z + 4xf_x\left(x,y\right) + 2 \\ G_{zx}\left(x,y,z\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(G_z\left(x,y,z\right)\right) = \dfrac{15}{2}zf_x\left(x,y\right) + 4x \\ G_{yy}\left(x,y,z\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(G_y\left(x,y,z\right)\right) = 2 \\ G_{zy}\left(x,y,z\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(G_z\left(x,y,z\right)\right) = \dfrac{15}{2}zf_y\left(x,y\right) \\ G_{xy}\left(x,y,z\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(G_x\left(x,y,z\right)\right) = 4xzf_y\left(x,y\right) \end{cases}.$$

Thay $(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right), f_x\left(0, \frac{1}{2}\right) = f_y\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0$, ta được

$$\begin{cases} G_{xx}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 6 \\ G_{zx}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 0 \\ G_{yy}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 2 \\ G_{zy}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 0 \\ G_{xy}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 0 \\ G_{x}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 0 \\ G_{y}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = 0 \\ G_{z}\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right) = \dfrac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó,

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{G_x(x,y,z)}{G_z(x,y,z)}\right)$$

$$\Rightarrow f_{xx}(x,y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(G_x(x,y,z)\right)G_z(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}\left(G_z(x,y,z)\right)G_x(x,y,z)}{\left(G_z(x,y,z)\right)^2}$$

$$\Rightarrow f_{xx}(x,y) = -\frac{G_{xx}(x,y,z)\,G_z(x,y,z) - G_{zx}(x,y,z)\,G_x(x,y,z)}{\left(G_z(x,y,z)\right)^2}.$$

$$\Rightarrow f_{xx}\left(0,\frac{1}{2}\right) = -\frac{6\cdot\frac{19}{4}}{\left(\frac{19}{4}\right)^2} = -\frac{24}{19}.$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_y(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{G_y(x,y,z)}{G_z(x,y,z)}\right)$$

$$\Rightarrow f_{yy}(x,y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(G_y(x,y,z)\right)G_z(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\left(G_z(x,y,z)\right)G_y(x,y,z)}{\left(G_z(x,y,z)\right)^2}$$

$$\Rightarrow f_{yy}(x,y) = -\frac{G_{yy}(x,y,z)\,G_z(x,y,z) - G_{zy}(x,y,z)\,G_y(x,y,z)}{\left(G_z\right)(x,y,z)^2}.$$

$$\Rightarrow f_{yy}\left(0,\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\cdot\frac{19}{4}}{\left(\frac{19}{4}\right)^2} = -\frac{8}{19}.$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{G_x(x,y,z)}{G_z(x,y,z)}\right)$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(G_x(x,y,z)\right)G_z(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\left(G_z(x,y,z)\right)G_x(x,y,z)}{\left(G_z(x,y,z)\right)^2}$$

$$\Rightarrow f_{xy}(x,y) = -\frac{G_{xy}(x,y,z)\,G_z(x,y,z) - G_{zy}(x,y,z)\,G_y(x,y,z)}{\left(G_z(x,y,z)\right)^2}.$$

$$\Rightarrow f_{xy}\left(0,\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ta có $D\left(0,\frac{1}{2}\right) = f_{xx}\left(0,\frac{1}{2}\right)f_{yy}\left(0,\frac{1}{2}\right) - \left[f_{xy}\left(0,\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{192}{361} > 0.$
Mà $f_{xx}\left(0,\frac{1}{2}\right) = -\frac{24}{19} < 0$ nên điểm $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ là cực đại của f.
Vậy f có một điểm cực đại là $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.