**Họ và tên:** Nguyễn Văn Lộc
**MSSV:** 20120131
**STT:** 99b
**Lớp:** 20CTT1

## BÀI TẬP ĐIỂM CỘNG CUỐI KÌ TUẦN 14

**Bài toán.**

Cho $D$ là một miền con của $\mathbb{R}^2$ và $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^2$ là trường trơn và bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$. Cho $f$ và $g$ là các hàm thế của $\vec{F}$.
a. Khi $D = \mathbb{R}^2$, chứng minh rằng $f - g$ là hàm hằng.
b. Với tập $D$ như thế nào thì kết luận ở câu a. vẫn còn đúng?

**Lời giải.**
a. Theo đề bài, ta có

$$f \text{ và } g \text{ đều là hàm thế của } \vec{F} \text{ trên } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \nabla f = \vec{F} = \nabla g.$$

$$\Rightarrow \nabla f = \nabla g.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = g_y(x,y) \end{cases}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Từ phương trình đầu tiên của hệ (1), ta được

$$\int f_x(x,y)\,dx = \int g_x(x,y)\,dx, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = g(x,y) + D(y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(g(x,y) + D(y)), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow f_y(x,y) = g_y(x,y) + D'(y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Từ phương trình thứ hai của hệ (1), ta suy ra

$$D'(y) = 0 \Rightarrow D(y) = C, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\Rightarrow f(x,y) - g(x,y) = C, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.
b. Để kết luận ở câu a. vẫn còn đúng, $D$ phải là miền mở, hình sao.
Tức là, tồn tại điểm $P_0 \in D$ sao cho với mọi $P \in D$ thì đoạn nối $P_0$ và $P$ nằm trong $D$.