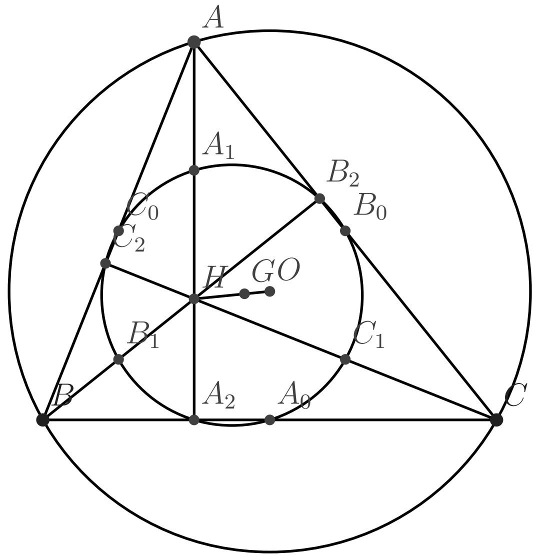
CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC PHẲNG

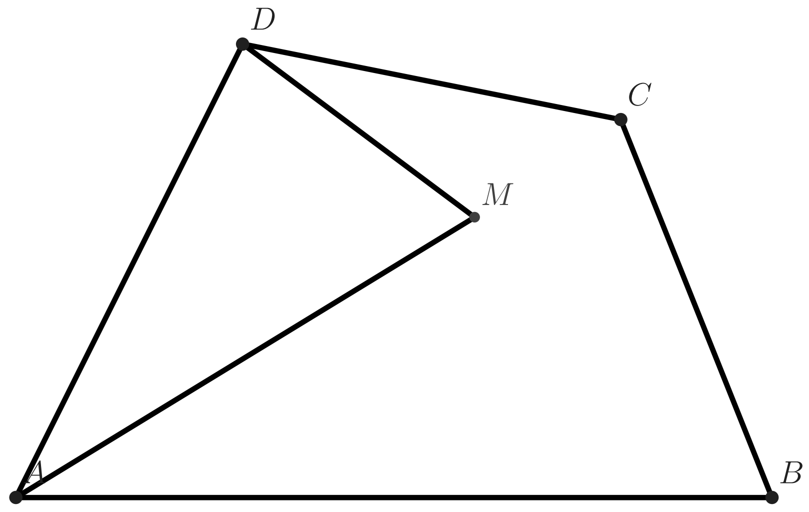
1. Đường tròn Euler - đường thẳng Euler.

Cho tam giác ABC có trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp là O.
Bài toán 1. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB; A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm HA, HB, HC; A_2, B_2, C_2 lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C. Khi đó, chín điểm $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ cùng thuộc một đường tròn, tâm là trung điểm OH, gọi là đường tròn Euler của tam giác ABC.
Bài toán 2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó, ba điểm O, H, G cùng thuộc một đường thẳng, gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC và $GH = 2GO$.



2. Định lí Ptolemy.

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thuộc miền trong tứ giác sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{MDA} = \widehat{BCA}$.



Hai tam giác AMD và ABC đồng dạng nên ta có $\frac{AD}{AC} = \frac{MD}{BC} = \frac{AM}{AB}$.

$$\Rightarrow AD.BC = AC.MD \quad (1)$$

Lại có: $\frac{AD}{AM} = \frac{AC}{AB}$ nên hai tam giác ADC và AMB đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{CD}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AM}$.

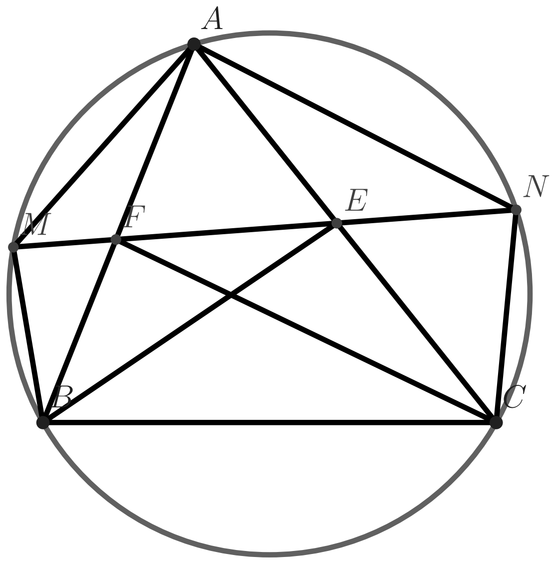
$$\Rightarrow AB.CD = AC.BM \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $AB.CD + AD.BC = AC\left(BM + MD\right) \geq AC.BD$. gọi là **hệ thức Ptolemy**. Dấu bằng xảy ra khi tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Định lí Ptolemy: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, khi đó: $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Bài tập. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của các góc B, C cắt các cạnh đối theo thứ tự tại E, F. Các tia EF, FE cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng

a. $\frac{AM.AN}{BM.BN} = \frac{CA}{CB}$.
b. $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{CN}$.



a. Ta có hai tam giác MFA và BFM đồng dạng nên $\frac{MA}{NB} = \frac{MF}{BF}$.

Tương tự với hai tam giác AFN, MFB ta được $\frac{AN}{BM} = \frac{AF}{MF}$.

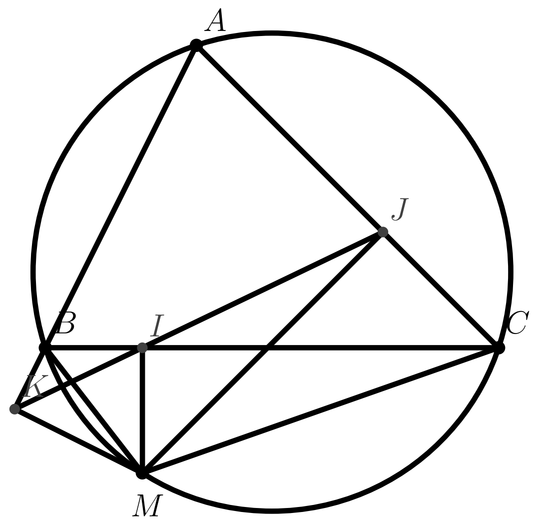
Do đó: $\frac{MA.AN}{NB.BM} = \frac{AF}{MF} . \frac{MF}{BF} = \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{CB}$ (theo tính chất đường phân giác trong tam giác).
b. Tương tự câu a, ta có: $\frac{AM.AN}{CM.CN} = \frac{BA}{BC}$.
Do đó: $BC.AM.AN = AC.BM.BN = AB.CM.CN = k$.
Các tứ giác $AMBC, ABCN$ nội tiếp nên theo định lí Ptolemy:
$BC.AM + AC.BM = AB.CM$ và $BC.AN + AB.CN = AC.BN$.
Cộng từng vế hai đẳng thức, ta có:

$$BC.AM + AC.BM + BC.AN + AB.CN = AB.CM + AC.BN.$$
$$\Rightarrow \frac{BC.AM}{k} + \frac{AC.BM}{k} + \frac{BC.AN}{k} + \frac{AB.CN}{k} = \frac{AB.CM}{k} + \frac{AC.BN}{k}.$$

$\Rightarrow \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{AM} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{CN} = \frac{1}{BM}$ (đpcm).

3. Đường thẳng Simson.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M nằm trên đường tròn đó (không trùng với ba đỉnh của tam giác). Gọi I, J, K theo thứ tự là chân đường cao kẻ từ M đến BC, CA, AB. thì I, J, K cùng nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng Simson của điểm M đối với tam giác tam giác ABC).



Chứng minh: *Ở đây ta xét trường hợp tam giác* ABC *nhọn và* M *nằm trên cung nhỏ* BC *của đường tròn* (O). Do $\widehat{MIC} = \widehat{MJC} = 90^\circ$ nên tứ giác $MIJC$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{JIC} = \widehat{JMC}.$$

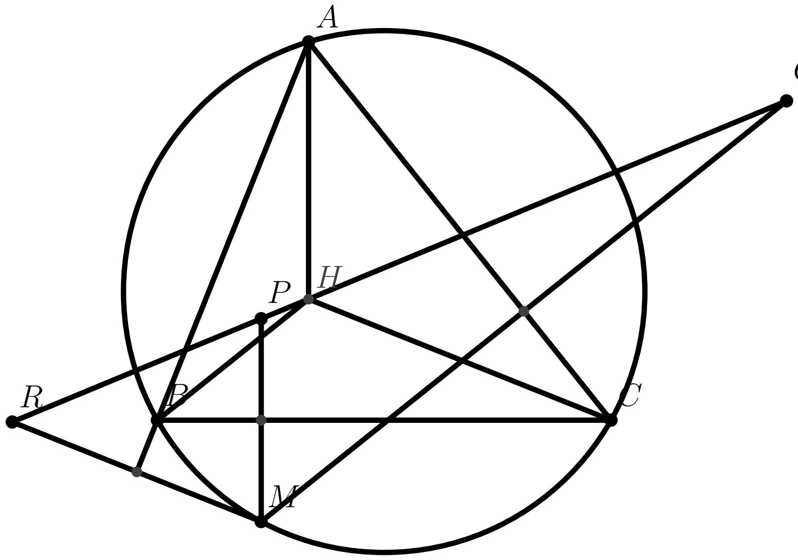
Tương tự, ta có: $\widehat{KMB} = \widehat{KIB}$.

Mặt khác, ta có $\widehat{KBM} = \widehat{ACM}$ do cùng bù với $\widehat{ABM}$.

Vì vậy, hai tam giác vuông MKB và MJC đồng dạng nên $\widehat{KMB} = \widehat{JMC}$.
$\Rightarrow \widehat{KIB} = \widehat{JIC}$. Do đó, I, J, K thẳng hàng. Đường thẳng này được goi là **đường thẳng Simson của điểm** M **đối với tam giác** ABC.

4. Đường thẳng Steiner.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M nằm trên đường tròn đó (không trùng với ba đỉnh của tam giác). Gọi P, Q, R lần lượt là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Khi đó, P, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng, gọi là đường thẳng Steiner của điểm M đối với tam giác ABC.



Chứng minh: *Ở đây ta xét trường hợp tam giác ABC nhọn và M nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn (O).*

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

$\widehat{ARB} + \widehat{AHB} = \widehat{AMB} + \left(180^\circ - \widehat{ACB}\right) = 180^\circ$ nên tứ giác $ARBH$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AHR} = \widehat{ABR} = \widehat{ABM}$.

Chứng minh tương tự, ta được: $\widehat{AHQ} = \widehat{ACQ} = \widehat{ACM}$.

$\Rightarrow \widehat{AHR} + \widehat{AHQ} = \widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 180^\circ$.

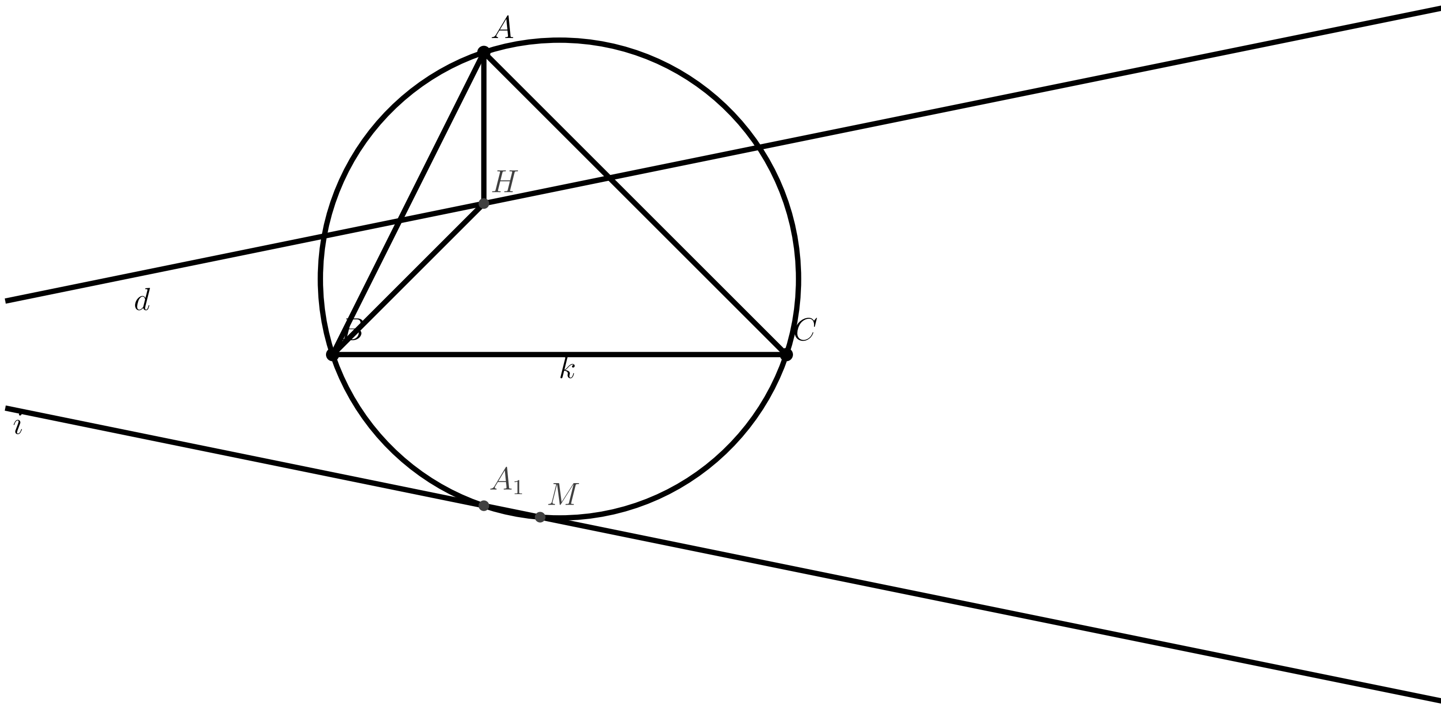
$\Rightarrow H, R, Q$ thẳng hàng.

$\Rightarrow H, P, Q, R$ cùng nằm trên một đường thẳng, gọi là đường thẳng Steiner của

điểm M đối với tam giác ABC.
Tính chất: Đường thẳng Steiner đi qua trực tâm H của tam giác ABC.

5. Điểm anti-Steiner.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), d là đường thẳng đi qua trực tâm H của tam giác. Tìm điểm M trên đường tròn (O) sao cho d là đường thẳng Steiner của tam giác ABC.



Chứng minh: *Ở đây ta xét trường hợp tam giác ABC nhọn và M nằm trên cung nhỏ BC của đường tròn (O).*
Gọi d_1 là đường thẳng đối xứng với d qua BC, d_1 cắt đường tròn (O) tại A_1 và M, trong đó A_1 là điểm đối xứng của H qua BC, còn M là điểm anti-Steiner cần tìm. Tương tự với hai cạnh AC và AB.