Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131
Lớp: 20CTT1

Bài tập môn Xác suất thống kê
Chương 6: Kiểm định giả thuyết thống kê

1 So sánh μ với một số

Bài tập 5.29 Một hệ thống tên lửa phản lực sử dụng động cơ đẩy nhiên liệu rắn. Tốc độ cháy của nhiên liệu rắn là một đặc trưng quan trọng của động cơ. Thông số kỹ thuật yêu cầu tốc độ cháy trung bình của nhiên liệu là 50cm/s. Các kỹ sư biết rằng độ lệch chuẩn của tốc độ cháy là 2cm/s. Những kỹ sư kiểm nghiệm xác định xác suất của sai lầm loại I hoặc mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ và chọn cỡ mẫu là $n = 25$ với trung bình mẫu tốc độ cháy là $\overline{x} = 51.3$cm/s. Kết luận rút ra như thế nào?

Lời giải. Gọi μ là tốc độ cháy trung bình của thanh nhiên liệu.
Ta đã biết σ^2.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \ \mu = 50 \\ H_1 : \ \mu \neq 50 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x} - 50}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 3.25.$$

Tra bảng Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa 0.05.
Vậy ta kết luận: với độ tin cậy 95% thì tốc độ cháy trung bình của thanh nhiên liệu không phải là 50cm/s.

Bài tập 5.30 Nhiệt độ nước trung bình hạ lưu từ ống thấp xả giải nhiệt của nhà máy điện không được lớn hơn 100°F. Kinh nghiệm quá khứ đã chỉ ra rằng độ lệch chuẩn của nhiệt độ là 2°F. Nhiệt độ nước được đo trên chín ngày được lựa chọn ngẫu nhiên, và nhiệt độ trung bình được tìm thấy là 98°F.
a. Có bằng chứng gì cho ta thấy nhiệt độ nước có thể chấp nhận được hay không với mức ý nghĩa 0.05?
b. Tính $p-$giá trị của kiểm định.
c. Tính xác suất chấp nhận giả thuyết H_0 với $\alpha = 0.05$ nếu nhiệt độ trung bình thực sự của nước là 104°F.

Lời giải.
a. Gọi μ là nhiệt độ nước trung bình hạ lưu từ ống thấp xả giải nhiệt của nhà máy.
Ta đã biết σ^2.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \ \mu \leqslant 100 \\ H_1 : \ \mu > 100 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x} - 100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -3.$$

Tra bảng Gauss: $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.645$.
Do $z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa 0.05.

Vậy ta kết luận: với độ tin cậy 95% thì nhiệt độ nước có thể chấp nhận được.
b.

$$p - \text{giá trị} = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(-3) = \Phi(3) = 0.9987.$$

c. (?)

Bài tập 5.31 Một nhà sản xuất làm trục khuỷu (crankshafts) cho động cơ ô tô. Mức độ mòn của trục khuỷu sau 100000 dặm (0.0001 inch) là quan tâm vì nó có thể có ảnh hưởng đến thời hạn bảo hành. Một mẫu ngẫu nhiên của $n = 15$ trục được kiểm tra và $\overline{x} = 2.78$. Biết rằng $\sigma = 0.9$ và thường được giả định có phân phối chuẩn.
a. Kiểm định $H_0: \ \mu = 3$ với đối thuyết $H_1: \ \mu \neq 3$ với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
b. Độ mạnh của kiểm định nếu $\mu = 3.25$.
c. Cỡ mẫu phải là bao nhiêu để nhận thấy giá trị trung bình đúng là 3.75 nếu ta muốn độ mạnh của kiểm định ít nhất 0.9.

Lời giải.
a.

$$z = \frac{\overline{x} - 3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx -0.9467.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Do $|z| \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa 0.05.
b.

$$\beta = 1 - \Phi\left(-\left|\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) = \Phi\left(\left|\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) \approx 0.8577.$$

Độ mạnh kiểm định: $1 - \beta \approx 0.1423$.
c.

$$n = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\beta}\right)^2 \sigma^2}{\delta^2} \approx 15.1632.$$

Vậy cỡ mẫu ít nhất phải là 16.

Bài tập 5.34 Tuổi thọ của pin được xem như có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 1.25$ giờ. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 viên pin có tuổi thọ trung bình là $\overline{x} = 40.5$ giờ, $\alpha = 0.05$.
a. Có thêm bằng chứng gì để hỗ trợ cho tuyên bố rằng tuổi thọ của pin không vượt quá 40 giờ?
b. Tính $p-$ giá trị cho phép kiểm định ở câu trên.
c. Tính xác suất của sai lầm loại II hay sai số β nếu tuổi thọ trung bình đúng của pin là 42 giờ.
d. Cỡ mẫu phải bao nhiêu để sai số β không vượt quá 0.01 nếu tuổi thọ trung bình đúng của pin là 44 giờ.

Lời giải.
a. Gọi μ là tuổi thọ trung bình của pin.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu \leqslant 40 \\ H_1: \ \mu > 40 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x} - 40}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1.2649.$$

Tra bảng Gauss: $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.645$.
Do $z \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa 0.05.

Vậy ta kết luận: với độ tin cậy 95% thì tuổi thọ của pin không vượt quá 40 giờ.
b. $p -$ giá trị $= 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(1.2649) = 0.1038$.
c.

$$\beta = 1 - \Phi\left(-\left|\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) = \Phi\left(\left|\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) \approx 0.0001$$

d.

$$n = \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\beta}\right)^2 \sigma^2}{\delta^2} \approx 1.0252.$$

Vậy cỡ mẫu ít nhất phải là 2.

Bài tập 5.35 Các kỹ sư nghiên cứu độ bền sức kéo của một hợp kim được sử dụng làm trục của gậy đúng golf biết rừng độ bền xấp xỉ phân phối chuẩn với $\sigma = 60$ psi. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 12 mẫu vật có trung bình độ bền là 3450 psi.
a. Kiểm định giả thuyết rằng trung bình độ bền là 3500 psi với $\alpha = 0.01$.
b. Tính mức ý nghĩa nhỏ nhất khi bạn đưa ra kết luận bác bỏ giả thuyết H_0.
c. Tính xác suất của sai lầm loại II hay sai số β nếu giá trị trung bình thật là 3470.
d. Giả sử ta muốn bác bỏ giả thuyết H_0 với xác suất ít nhất 0.8 khi trung bình thật là $\mu = 3500$ thì cỡ mẫu phải là bao nhiêu?
e. Giải thích thêm cho kết luận ở phàn trên bằng cách sử dụng khoảng tin cậy của μ.

Lời giải.
a. Gọi μ là độ bền trung bình của gậy đánh golf.
Ta đã biết σ^2.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 3500 \\ H_1: \ \mu \neq 3500 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x} - 3500}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx -2.8868.$$

Tra bảng Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa 0.01.
Vậy ta kết luận: với độ tin cậy 99% thì độ bền trung bình của gậy đánh golf không phải là 3500.
b.

$$p - \text{giá trị} = 2\left(1 - \Phi\left(|z|\right)\right) \approx 0.0038.$$

c.

$$\beta = 1 - \Phi\left(-\left|\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) = \Phi\left(\left|\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\right) \approx 0.9573.$$

Bài tập 5.47 Một bài viết trong *Growth: A Journal Devoted to Problems of Normal and Abnormal Growth* ("Comparison of Measured and Estimated Fat-Free Weight, Fat, Potassium and Nitrogen of Growing Guinea Pigs", Vol. 46, No. 4, 1982, pp. 306-321) trình bày kết quả của một nghiên cứu đo trọng lượng cơ thể (tính bằng gam) đối với lợn Guinea khi sinh.

421.0 452.6 456.1 494.6 373.8

90.5 110.7 96.4 81.7 102.4

241.0 296.0 317.0 290.9 256.5

447.8 687.6 705.7 879.0 88.8

296.0 273.0 268.0 227.5 279.3

258.5 296.0

a. Kiểm định giả thuyết trọng lượng trung bình là 300 gram với $\alpha = 0.05$. Tính $p-$ giá trị.
b. Giải thích thêm kết luận ở phần trên bằng cách sử dụng khoảng tin cậy của μ.

Lời giải.
a. $n = 27$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 325.4963$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 39515.6865$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 198.7855$.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 300 \\ H_1: \ \mu \neq 300 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 27 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx 0.6665.$$

Tra bảng Student, ta được: $t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.0555$. Do $|t| \leqslant t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy ta kết luận: trọng lượng trung bình là 300 gram với độ tin cậy 95%.
b. Khoảng tin cậy $1-\alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[246.8724, 404.1202].$$

Bài tập 5.48 Một bài báo năm 1992 trên Tạp chí Hiệp hội Y khoa Ho Kỳ ("A Critical Appraisal of 98.6 Degrees F, the Upper Limit of the Normal Body Temperature, and Other Legacies of Carl Reinhold August Wunderlich") đã báo cáo nhiệt độ cơ thể, giới tính và nhịp tim cho một số đối tượng. Nhiệt độ cơ thể cho 25 đối tượng nữ như sau: 97.8 97.2 97.4 97.6 97.8 97.9 98.0 98.0 98.0 98.1 98.2 98.3 98.3 98.4 98.4 98.4 98.5 98.6 98.6 98.7 98.8 98.8 98.9 98.9 99.0.
a. Kiểm tra giả thuyết $H_0 : \mu = 98.6$ có đối thuyết $H_1 : \mu \neq 98.6$ với $\alpha = 0.05$. Tính $p-$ giá trị.
b. Giải thích thêm cho kết luận ở phần trên bằng cách sử dụng khoảng tin cậy của μ.

Lời giải.
a. $n = 25$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 98.264$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 0.2324$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.4821$.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 98.6 \\ H_1: \ \mu \neq 98.6 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 27 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx -3.4848.$$

Tra bảng Student, ta được: $t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.0639$. Do $|t| > t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
b. Khoảng tin cậy $1-\alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[98.0650, 98.4630].$$

Bài tập 5.49 Hàm lượng natri của hai mươi hộp bắp hữu cơ 300 gram được xác định. Dữ liệu (tính bằng miligam) như sau: 131.15 130.69 130.91 129.54 129.64 128.77 130.72 128.33 128.24 129.65 130.14 129.29 128.71 129.00 129.39 130.42 129.53 130.12 129.78 130.92.
a. Bạn hãy kiểm định giá trị trung bình có khác 130 milligram với $\alpha = 0.05$. Tính $p-$ giá trị.
b. Giải thích thêm cho kết luận ở phần trên bằng cách sử dụng khoảng tin cậy của μ.

Lời giải.
a. $n = 20$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=11}^{n} x_i \approx 129.747$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 0.7681$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.8764$.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: & \mu = 130 \\ H_1: & \mu \neq 130 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 20 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx -1.2910.$$

Tra bảng Student, ta được: $t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.0930$. Do $|t| \leqslant t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
b. Khoảng tin cậy $1-\alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[129.3368, 130.1572].$$

Bài tập 5.50 Đo cholesterol (đơn vị mg% cho một nhóm người, ta ghi nhận lại được

X	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200	200-210
Số người	3	9	11	3	2	1

a. Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu.
b. Tìm khoảng ước lượng cho trung bình cholesterol trong dân số với độ tin cậy 0.95.
c. Có tài liệu cho biết lượng cholesterol trung bình là 175mg%. Giá trị này có phù hợp với mẫu

quan sát không? (kết luận với $\alpha = 0.05$).

Lời giải.
Ta lấy giá trị của mỗi khoảng là giá trị trung bình của khoảng đó. Ta được:

X	155	165	175	185	195	205
Số người	3	9	11	3	2	1

$n = 29$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 173.2759$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 143.3498$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 11.9729$.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 175 \\ H_1: \ \mu \neq 175 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 20 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx -0.7755.$$

Tra bảng Student, ta được: $t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.0484$. Do $|t| \leqslant t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[168.7217, 177.8301].$$

Bài tập 5.51 Một máy đóng gói các sản phẩm có khối lượng 1kg. Nghi ngờ máy hoạt động không bình thường, người ta chọn ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 100 sản phẩm thì thấy như sau:

Khối lượng	0.95	0.97	0.99	1.01	1.03	1.05
Số gói	9	31	40	15	3	2

Với mức ý nghĩa 0.05, hãy kết luận về nghi ngờ trên.

Lời giải.
$n = 100$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 0.9856$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 4.3297 \cdot 10^{-4}$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.0208$.

Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 1 \\ H_1: \ \mu \neq 1 \end{cases}$

Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 100 \geqslant 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx -6.9231.$$

Tra bảng Gauss, ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

Bài tập 5.52 Quan sát số hoa hồng bán ra trong một ngày của một cửa hàng bán hoa sau một thời gian, người ta ghi được số liệu sau:

Số hoa hồng (đóa)	12	13	15	16	17	18	19
Số ngày	3	2	7	7	3	2	1

a. Tìm ước lượng điểm của số hoa hồng trung bình bán được trong một ngày.
b. Sau khi tính toán, ông chủ cửa hàng nói rằng nếu trung bình một ngày không bán được 15 đóa hoa thì chẳng thà đóng cửa còn hơn. Dựa vào số liệu trên, anh (chị) hãy kết luận giúp ông chủ cửa hàng xem có nên tiếp tục bán hay không ở mức ý nghĩa 0.05.
c. Giả sử những ngày bán được từ 13 đến 17 đóa hồng là những ngày "bình thường". Hãy ước lượng tỉ lệ của những ngày bình thường của cửa hàng ở độ tin cậy 90%. (Giả thiết rằng số hoa bán ra trong ngày có phân phối chuẩn).

Lời giải.
a. $n = 25$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=11}^{n} x_i \approx 15.4$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 3.5$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 1.8708$.
b. Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu \geqslant 15 \\ H_1: \ \mu < 15 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 25 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx 1.0691.$$

Tra bảng Student, ta được: $t_{n-1}^{1-\alpha} = 1.7109$. Do $t \geqslant -t_{n-1}^{1-\alpha}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy ông chủ nên tiếp tục bán với mức ý nghĩa 0.05.
c.

$$\widehat{p} = \frac{19}{25}.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.95} = 1.645$.
Dung sai: $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \approx 0.14$. Khoảng tin cậy 90% cho tỉ lệ của những ngày bình thường là:

$$[0.62, 0.9].$$

Bài tập 5.54 Đối với người Việt Nam, lượng huyết sắc tố trung bình là $138.3g/l$. Khám cho 80 công nhân ở nhà máy có tiếp xúc hóa chất, thấy huyết sắc tố trung bình là $120g/l$, $s = 15g/l$. Từ kết quả trên, có thể kết luận lượng huyết sắc tố trung bình của công nhân nhà máy hóa chất này thấp hơn mức chung không?

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu \geqslant 138.3 \\ H_1: \ \mu < 138.3 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 80 \geqslant 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx -10.9120.$$

Tra bảng Gauss, ta được: $z_{1-\alpha} = 1.645$.
Do $z < z_{1-\alpha}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy lượng huyết sắc tố trung bình của công nhân nhà máy hóa chất này thấp hơn mức chung với độ tin cậy 95%.

Bài tập 5.55 Trong một báo cáo nghiên cứu, Richard H. Weindruch của Trường Y khoa UCLA công bố rằng một con chuột với tuổi thọ trung bình 32 tháng sẽ sống đến khoảng 40 tháng khi 40% lượng calory trong khẩu phần ăn được thay bằng vitamin và protein. Có bằng chứng nào để tin rằng $\mu < 40$ hay không nếu 64 con chuột được cho ăn khẩu phần này có tuổi thọ trung bình 38 tháng với độ lệch chuẩn 5.8 tháng? Sử dụng $p-$ giá trị trong kết luận của bạn.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu \geqslant 40 \\ H_1: \ \mu < 40 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 64 \geqslant 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx -2.7586.$$

$$p - \text{giá trị} = \Phi(z) = 0.0029$$

$\alpha = 0.05 \geqslant p-$ giá trị nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì ta kết luận $\mu < 40$.

Bài tập 5.59 Kiểm định giả thuyết rằng dung tích trung bình của các bình chứa dầu nào đó là 10 lít nếu dung tích của một mẫu ngẫu nhiên 10 bình chứa là 10.2 9.7 10.1 10.3 10.1 9.8 9.9 10.4 10.3 9.8. Sử dụng mức ý nghĩa 0.01 và giả sử rằng phân phối của dung tích là chuẩn.

Lời giải.
$n = 10$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 10.06$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 0.0604$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.2459$.

Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 10 \\ H_1: \ \mu \neq 10 \end{cases}$

Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 10 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx 0.7716.$$

Tra bảng Student, ta được: $t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 3.2498$. Do $|t| \leqslant t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.01$.
Vậy với độ tin cậy 99% thì dung tích trung bình của các bình chứa dầu là 10 lít.

Bài tập 5.60 Chiều cao trung bình của nữ sinh năm nhất tại một trường đại học theo lịch sử là 165.5cm với độ lệch chuẩn 6.9cm. Có lý do để tin rằng có sự thay đổi về chiều cao trung bình hay không nếu một mẫu ngẫu nhiên 50 nữ sinh năm nhất hiện nay có chiều cao trung bình 165.2cm? Sử dụng $p -$ giá trị trong kết luận của bạn. Giả sử rằng độ lệch chuẩn giữ nguyên không đổi.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 162.5 \\ H_1: \ \mu \neq 162.5 \end{cases}$

Ta đã biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 50 \geqslant 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx 2.7670.$$

Tra bảng Gauss, ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì ta có thể kết luận chiều cao trung bình đã thay đổi.

Bài tập 5.61 Người ta công bố rằng các ô tô được lái trung bình hơn 20000km mỗi năm. Để kiểm định công bố này, 100 chủ sở hữu ô tô được chọn ngẫu nhiên được yêu cầu ghi lại số kilometer mà họ đi. Bạn có đồng ý với công bố này không nếu mẫu ngẫu nhiên cho thấy trung bình là 23500km và độ lệch chuẩn là 3900km? Sử dụng $p -$ giá trị trong kết luận của bạn.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu \geqslant 20000 \\ H_1: \ \mu < 20000 \end{cases}$

Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 100 \geqslant 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx 8.9744.$$

$$p - \text{giá trị} = \Phi(z) \geqslant 0.9998$$

$\alpha = 0.05 < p -$ giá trị nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95%, ta có thể đồng ý với công bố rằng các ô tô được lái trung bình hơn 20000km mỗi năm.

Bài tập 5.62 Theo một nghiên cứu về chế độ ăn uống, hàm lượng muối ăn cao có thể liên quan đến loét, ung thư dạ dày và đau nửa đầu. Nhu cầu cơ thể về muối chỉ là 220mg mỗi ngày, lượng này bị vượt quá trong hầu hết các khẩu phần ăn của các loại ngũ cốc ăn liền. Nếu một mẫu ngẫu nhiên 20 khẩu phần tương tự của một loại ngũ cốc nào đó có hàm lượng muối trung bình 244mg và độ lệch chuẩn 24.5mg, thì điều này có cho thấy tại mức ý nghĩa 0.05 tằng hàm lượng muối trung bình cho một khẩu phần ăn của loại ngũ cốc này là lớn hơn 220mg hay không? Giả sử phân phối của hàm lượng muối là chuẩn?

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: \ \mu \leqslant 220 \\ H_1: \ \mu > 220 \end{cases}$
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 20 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \approx 4.3809.$$

Tra bảng Student ta được: $t_{n-1}^{1-\alpha} = 1.7291$.
Do $t > t_{n-1}^{1-\alpha}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì ta có thể kết luận hàm lượng muối trung bình cho một khẩu phần ăn của loại ngũ cốc này là lớn hơn 220mg.

2 So sánh p với một số

Bài tập 5.78 Một bài báo trên tạp chí Fortune (ngày 21 tháng 9 năm 1992) tuyên bố rằng gần một nửa số kỹ sư tiếp tục học bậc học sau đại học, cuối cùng nhận được bằng thạc sĩ hoặc tiến sĩ. Dữ liệu từ bài viết trong Engineering Horizons (mùa xuân 1990) cho thấy rằng 117 trong số 484 sinh viên tốt nghiệp ngành kỹ thuật có kế hoạch học sau đại học.
a. Dữ liệu từ Engineering Horizons có phù hợp với yêu cầu của Fortune không? Sử dụng $\alpha = 0.05$ để đưa ra kết luận của bạn. Tìm $p-$ giá trị cho kiểm định trên.
b. Giải thích thêm cho kết luận trên bằng khoảng tin cậy cho p.

Lời giải.
a. Giả thuyết: $\begin{cases} H_0: p = 0.5 \\ H_1: p \neq 0.5 \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{117}{484}.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx -11.364.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy ta kết luận rằng dữ liệu từ Engineering Horizons không phù hợp với yêu cầu của Fortune với độ tin cậy 95%.
b. Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tỉ lệ tổng thể là:

$$\left[\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% của tỉ lệ sinh viên có kế hoạch học sau đại học là:

$$[0.2036, 0.2800].$$

Bài tập 5.79 Một nhà nghiên cứu tuyên bố rằng ít nhất 10% của tất cả các mũ bảo hiểm bóng chày có lỗi sản xuất có thể gây thương tích cho người đội. Một mẫu 200 mũ bảo hiểm cho thấy 16 mũ bảo hiểm chứa các khuyết tật như vậy.
a. Mẫu này có ủng hộ tuyên bố của nhà nghiên cứu không?
b. Giải thích thêm cho kết luận trên bằng khoảng tin cậy cho p.

Lời giải.
a. Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p \geqslant 0.1 \\ H_1 : p < 0.1 \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{16}{200} = 0.08.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx -0.9428.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\alpha} = 1.645$.
Do $z \geqslant -z_{1-\alpha}$ nên ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy ta kết luận rằng mẫu này ủng hộ cho tuyên bố của nhà nghiên cứu với độ tin cậy 95%.
b. Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tỉ lệ tổng thể là:

$$\left[\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% của tỉ lệ sinh viên có kế hoạch học sau đại học là:

$$[0.0484, 0.1116].$$

Bài tập 5.80 Quảng cáo pin của một hãng sản xuất điện thoại di động cho rằng pin sẽ hoạt động liên tục 48 giờ, với một lần sạc pin đúng kỹ thuật. Một nghiên cứu về 5000 pin được thực hiện và 15 pin ngừng hoạt động trước 48 giờ. Những kết quả thử nghiệm này có ủng hộ cho tuyên bố rằng dưới 0.2% pin của công ti sẽ có thời gian hoạt động không như quảng cáo với một lần sạc pin đúng kỹ thuật không? Sử dụng kiểm định giả thuyết trên với $\alpha = 0.01$.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p \geqslant \frac{1}{500} \\ H_1 : p < \frac{1}{500} \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{15}{5000} = \frac{3}{1000}.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx 1.5827.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\alpha} = 2.325$.
Do $z \geqslant -z_{1-\alpha}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.01$.
Vậy với độ tin cậy 99% thì ta kết luận rằng kết quả thử nghiệm này không ủng hộ cho tuyên bố của công ty.

Bài tập 5.85 Một thiết bị radar mới đang được xem xét cho một hệ thống phòng thủ tên lửa. Hệ thống được kiểm tra bằng cách thử nghiệm với phi cơ trong đó việc tiêu diệt hay không tiêu diệt được mô phỏng. Nếu trong 300 phép thử, 250 lần bị tiêu diệt, thì chấp nhận hay bác bỏ, tại mức ý nghĩa 0.04, công bố rằng xác suất tiêu diệt của hệ thống mới thấp hơn xác suất 0.8 của thiết bị đang dùng.

Lời giải.

Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p \geqslant 0.8 \\ H_1 : p < 0.8 \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{250}{300} = \frac{5}{6}.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx 1.4434.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\alpha} = 1.75$.
Do $z \geqslant -z_{1-\alpha}$ nên ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.04$.
Vậy với độ tin cậy 96% thì ta bác bỏ công bố rằng xác suất tiêu diệt của hệ thống mới thấp hơn xác suất 0.8 của thiết bị đang dùng.

Bài tập 5.86 Người ta tin rằng ít nhất 60% cư dân trong một khu vực ủng hộ hợp đồng sáp nhập của một thành phố lân cận. Kết luận nào được rút ra nếu chỉ 110 người trong một mẫu 200 cử tri ủng hộ hợp đồng? Sử dụng mức ý nghĩa 0.05.

Lời giải.

Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p \geqslant 0.6 \\ H_1 : p < 0.6 \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{110}{200} = \frac{11}{20} = 0.55.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx -1.4434.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\alpha} = 1.645$.
Do $z \geqslant -z_{1-\alpha}$ nên ta không đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì ta bác bỏ tuyên bố rằng ít nhất 60% cư dân trong một khu vực ủng hộ hợp đồng sáp nhập của một thành phố lân cận.

Bài tập 5.87 Một công ti dầu lửa công bố rằng một phần năm căn hộ trong một thành phố nào đó được sưởi ấm bằng dầu lửa. Hỏi ta có lý do để tin rằng có ít hơn một phần năm được sưởi ấm bằng dầu lửa không nếu, trong một mẫu ngẫu nhiên 1000 căn hộ trong thành phố này, có 136 căn được sưởi ấm bằng dầu lửa? Sử dụng $p-$ giá trị trong kết luận của bạn. Mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

Lời giải.

Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p \geqslant 0.2 \\ H_1 : p < 0.2 \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{136}{1000} = \frac{17}{125} = 0.136.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx -5.0596.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\alpha} = 1.645$.
Do $z < -z_{1-\alpha}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì ta kết luận rằng tuyên bố này là không đáng tin.

Bài tập 5.88 Ở một trường cao đẳng nào đó, người ta ước tính rằng trên 25% sinh viên chạy xe đạp đi học. Đây có phải là một ước tính hợp lệ nếu trong trong một mẫu ngẫu nhiên 90 sinh viên cao đẳng, có 28 sinh viên được thấy đi xe đạp đi học? Sử dụng mức ý nghĩa 0.05.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p \leqslant 0.2 \\ H_1 : p > 0.2 \end{cases}$

$$\widehat{p} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45} \approx 0.3111.$$

$$z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx 2.6352.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\alpha} = 1.645$.
Do $z > z_{1-\alpha}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì tuyên bố rằng trên 25% sinh viên chạy xe đạp đi học là đúng.

3 So sánh μ_1 và μ_2

Bài tập 5.92 Hai máy được sử dụng để làm đầy các chai nhựa với khối lượng tịnh là 16.0 ounce. Khối lượng làm đầy có thể được giả định có phân phối chuẩn, với độ lệch chuẩn $\sigma_1 = 0.020$ và $\sigma_2 = 0.025$ ounce. Một thành viên của đội ngũ nhân viên kỹ thuật chất lượng nghi ngờ rằng cả hai máy đều có cùng khối lượng trung bình, dù khối lượng này có là 16.0 ounce hay không. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 chai được lấy từ đầu ra của mỗi máy:
Máy 1: 16.03 16.01 16.04 15.96 16.05 15.98 16.05 16.02 16.02 15.99
Máy 2: 16.02 16.03 15.97 16.04 15.96 16.02 16.01 16.01 15.99 16.00
Suy nghĩ của đội ngũ kỹ sư có đúng không? Sử dụng $\alpha = 0.05$. Tính $p -$ giá trị.

Lời giải.
Mẫu 1: $n_1 = 10,\ \overline{x_1} = 16.015, \sigma_1 = 0.020$.
Mẫu 2: $n_2 = 10,\ \overline{x_2} = 16.005, \sigma_2 = 0.025$.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx 0.9877$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
$p -$ giá trị $= 2\left(1 - Phi\left(|z|\right)\right) = 0.3222$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì suy nghĩ của đội kỹ sư rằng cả hai máy đều có cùng khối lượng trung bình là đúng.

Bài tập 5.93 Hai loại nhựa phù hợp để sử dụng cho một nhà sản xuất linh kiện điện tử. Sức mạnh chịu sự phá hủy của loại nhựa này là quan trọng. Được biết $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ psi. Từ một mẫu ngẫu nhiên có kích thước $n_1 = 10$ và $n_2 = 12$, ta có được $\overline{x_1} = 162.5$ và $\overline{x_2} = 155.0$. Công ty sẽ không áp dụng nhựa loại 1 trừ khi sức chịu phá vỡ trung bình của nó vượt quá nhựa loại 2 ít nhất 10 psi.
a. Trên cơ sở thông tin đó, ta có nên sử dụng nhựa loại 1 không? Sử dụng $\alpha = 0.05$ đưa ra câu trả lời. Tìm $p-$ giá trị.
b. Giả sử sự khác nhau giữa chúng đúng là 12 psi. Tính độ mạnh của kiểm định với $\alpha = 0.05$.
c. Giả sử sự khác nhau giữa chúng đúng là 12 psi. Cỡ mẫu ở câu a có đủ để có khẳng định đúng đắn?

Lời giải.
a. Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant 10 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 10 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - 10}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx -5.8387$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
$p-$ giá trị $= 2\left(1 - Phi\left(|z|\right)\right) \approx 4 \cdot 10^{-4}$.
Vậy với độ tin cậy 95% thì ta không nên sử dụng nhựa loại 1.
b.

$$\beta = \Phi\left(\left|\frac{\mu_1 - \mu_2 - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|\right) \approx 0.9998$$

Độ mạnh của kiểm định: $1 - \beta \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

Bài tập 5.94 Tốc độ cháy của hai loại nguyên liệu rắn sử dụng trong động cơ tên lửa được nghiên cứu. Được biết tốc độ cháy của hai loại này có xấp xỉ phân phối chuẩn với $\sigma_1 = \sigma_2 = 3cm/s$. Hai mẫu ngẫu nhiên với cỡ mẫu $n_1 = n_2 = 20$ được xem xét có tốc độ cháy trung bình $\overline{x_1} = 18cm/s$ và $\overline{x_2} = 24cm/s$.
Kiểm định xem hai loại này có cùng trung bình hay không? Với $\alpha = 0.05$, hãy tìm $p-$ giá trị.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx -6.3246$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
$p-$ giá trị $= 2\left(1 - Phi\left(|z|\right)\right) \approx 4 \cdot 10^{-4}$.
Vậy với độ tin cậy 95%, ta có thể kết luận rằng hai loại này không có cùng trung bình.

Bài tập 5.95 Hai công thức khác nhau của nhiên liệu động cơ oxy hóa đang được thử nghiệm để nghiên cứu số octane của chúng. Phương sai chỉ số octane của công thức thứ nhất $\sigma_1^2 = 1.5$ và công thức thứ hai $\sigma_2^2 = 1.2$. Hai mẫu ngẫu nhiên có cỡ mẫu $n_1 = 15$ và $n_2 = 20$ được nghiên cứu có chỉ số octane trung bình lần lượt là $\overline{x_1} = 89.6$ và $\overline{x_2} = 92.5$. Với giả sử có phân phối

chuẩn.
Nếu công thức 2 tạo ra một số octane cao hơn so với công thức 1, nhà sản xuất muốn phát hiện nó. Xây dựng và kiểm định giả thuyết thích hợp sử dụng $\alpha = 0.05$ và tính $p-$ giá trị.

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx -7.25$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
$p-$ giá trị $= 2\left(1 - Phi\left(|z|\right)\right) \approx 4 \cdot 10^{-4}$.
Vậy với độ tin cậy 95%, nhà sản xuất có thể phát hiện công thức 2.

Bài tập 5.99 Đường kính của các thanh thép được sản xuất trên hai máy đúc khác nhau đang được nghiên cứu. Hai mẫu ngẫu nhiên có cỡ mẫu $n_1 = 15, n_2 = 17$ được chọn có trung bình và phương sai mẫu $\overline{x_1} = 8.73, s_1^2 = 0.35$ và $\overline{x_2} = 8.68, s_2^2 = 0.40$. Giả sử rằng $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và quan trắc lấy có phân phối chuẩn. Có bằng chứng để khẳng định rằng hai máy sản xuất thanh thép có đường kính trung bình khác nhau? Sử dụng $\alpha = 0.05$ khi đưa ra kết luận này. Tính $p-$ giá trị.

Lời giải.
Ta đã biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và cỡ mẫu nhỏ.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
Đặt

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{113}{300}.$$

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx 0.2300$$

Bậc tự do $n = n_1 + n_2 - 2 = 30$.
Tra bảng Student ta được: $t_{n-1}^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.0452$.
Do $|t| \leqslant t_n^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

$$p - \text{giá trị} = 2\mathbb{P}\left(t\left(n\right) > |t|\right) = 2\left(1 - \mathbb{P}\left(t\left(n\right) \leqslant |t|\right)\right) \approx 0.818$$

Vậy với độ tin cậy 95%, ta có thể kết luận rừng hai nhà máy sản xuất thanh thép có đường kính trung bình giống nhau.

Bài tập 5.100 Hai chất xúc tác có thể được sử dụng trong một phản ứng hóa học hàng loạt. Mười hai lô được sử dụng chất xúc tác 1, dẫn đến năng suất trung bình là 86 và độ lệch chuẩn mẫu là 3. Mười lăm lô được sử dụng chất xúc tác 2, và kết quả là năng suất trung bình 89 với độ lệch chuẩn là 2. Giả sử năng suất các phép đo xấp xỉ thường được phân phối với cùng độ lệch chuẩn. Có bằng chứng để khẳng định rằng chất xúc tác 2 tạo ra năng suất trung bình cao hơn chất xúc tác 1 không? Sử dụng $\alpha = 0.01$.

Lời giải.
Ta đã biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và cỡ mẫu nhỏ.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$
Đặt

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 6.2.$$

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx -3.1109$$

Bậc tự do $n = n_1 + n_2 - 2 = 25$.
Tra bảng Student ta được: $t_n^{1-\alpha} = 2.4851$.
Do $t < -t_{n-1}^{1-\alpha}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.01$.
Vậy với độ tin cậy 99%, ta có thể khẳng định chất xúc tác 2 tạo ra năng suất trung bình cao hơn chất xúc tác 1.

Bài tập 5.102 Các điểm nóng chảy của hai hợp kim được sử dụng trong công thức hàn được điều tra bằng cách làm tan chảy 21 mẫu của mỗi vật lên. Trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu của hợp kim thứ nhất là $\overline{x_1} = 420°F, s_1 = 4°F$ và của hợp kim thứ hai là $\overline{x_2} = 426°F, s_2 = 3°F$. Dữ liệu mẫu có hỗ trợ cho rằng cả hai hợp kim có cùng điểm nóng chảy không? Sử dụng $\alpha = 0.05$ và giả định rằng cả hai tổng thể thường có phân phối chuẩn và có cùng độ lệch chuẩn. Tìm $p-$ giá trị cho kiểm định.

Lời giải.
Ta đã biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và cỡ mẫu nhỏ.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
Đặt

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 12.5.$$

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx -5.5$$

Bậc tự do $n = n_1 + n_2 - 2 = 40$.
Tra bảng Student ta được: $t_n^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.0211$.
Do $|t| > t_n^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

$$p - \text{giá trị} = 2\mathbb{P}\left(t\,(n) > |t|\right) = 2\left(1 - \mathbb{P}\left(t\,(n) \leqslant |t|\right)\right) \approx 2 \cdot 10^{-4}.$$

Vậy với độ tin cậy 95% thì ta có thể kết luận rằng cả hai hợp kim có điểm nóng chảy khác nhau.

Bài tập 5.114 Một nghiên cứu được thực hiện để xem việc tăng nồng độ cơ chất có tác động đáng kể đến tốc độ của một phản ứng hóa học hay không. Với một nồng độ cơ chất 1.5mol/l, phản ứng được chạy 15 lần, với tốc độ trùng bình 7.5 micromoles mỗi 30 phút và độ lệch chuẩn 1.5. Với nồng độ cơ chất 2.0mol/l, 12 lần chạy được thực hiện, thu được tốc độ trung bình 8.8 micromoles mỗi 30 phút và độ lệch chuẩn mẫu 1.2. Có lý do để tin rằng việc tăng nồng độ cơ chất làm tăng tốc độ trung bình của phản ứng 0.5 micromole mỗi 30 phút hay không? Sử dụng mức ý nghĩa 0.01 và giả sử rằng các tổng thể là xấp xỉ chuẩn với các phương sai bằng nhau.

Lời giải.
Ta đã biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và cỡ mẫu nhỏ.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0.5 \\ H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq 0.5 \end{cases}$
Đặt
$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 1.8936.$$
$$t = \frac{\overline{x_2} - \overline{x_1} - 0.5}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx 1.5011$$
Bậc tự do $n = n_1 + n_2 - 2 = 25$.
Tra bảng Student ta được: $t_n^{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.7874$.
Do $|t| \leqslant t_n^{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta chưa có đủ cơ sở bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.01$.
Vậy với độ tin cậy 99%, ta có thể kết luận rằng khi tăng nồng độ cơ chất thì tốc độ trung bình của phản ứng tăng lên 0.5 micromoles mỗi 30 phút.

Bài tập 5.115 Một nghiên cứu được thực hiện để xác định xem các chủ đề môn học trong môn vật lý có dđược hiểu tốt hơn không khi môn học có phần thực hành. Các sinh viên được lựa chọn ngẫu nhiên để tham gia vào khóa học 3 giờ học không có thực hành hoặc một khóa học 4 giờ học có thực hành. Trong khóa học có thực hành 11 sinh viên có điểm trung bình 85 với độ lệch chuẩn 4.7, và trong khóa học không có thực hành, 17 sinh viên có điểm trung bình 79 với độ lệch chuẩn 6.1. Bạn có nói được rằng khóa học có thực hành làm tăng điểm trung bình lên 8 điểm hay không? Sử dụng $p-$ giá trị trong kết luận của bạn và giả sử các tổng thể là xấp xỉ chuẩn với các phương sai bằng nhau.

Lời giải.
Ta đã biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và cỡ mẫu nhỏ.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 8 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 8 \end{cases}$
Đặt
$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 31.3946.$$
$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - 8}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx -0.9225$$
Bậc tự do $n = n_1 + n_2 - 2 = 26$.
$$p - \text{giá trị} = 2\mathbb{P}\left(t\,(n) > |t|\right) = 2\left(1 - \mathbb{P}\left(t\,(n) \leqslant |t|\right)\right) \approx 1.6261.$$
Do $\alpha < p-$ giá trị nên ta chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95%, ta có thể kết luận rằng khóa học có thực hành làm tăng điểm trung bình lên 8 điểm.

Bài tập 5.116 Để tìm ra liệu một loại huyết thanh huyết thanh mới có kìm hãm được bệnh bạch cầu hay không, 9 con chuột, tất cả các con đều trong giai đoạn tiến triển của bệnh, được chọn. Năm con chuột nhận trị liệu và 4 con không. Thời gian sống, theo năm, từ thời thí nghiệm bắt đầu là như sau:

Trị liệu	2.1	5.3	1.4	4.6	0.9
Không trị liệu	1.9	0.5	2.8	3.1	•

Tại mức ý nghĩa 0.05, huyết thanh có thể được nói là có hiệu quả hay không? Giả sử hai tổng thể có phân phối chuẩn với các phương sai bằng nhau.

Lời giải.
Ta đã biết $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và cỡ mẫu nhỏ.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$
Mẫu 1:
$n = 5$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 2.86$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 3.883$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 1.9705$.
Mẫu 2:
$n = 4$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 2.075$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 1.3625$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 1.1673$.
Đặt

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \approx 2.8028.$$

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \approx 0.6990$$

Bậc tự do $n = n_1 + n_2 - 2 = 7$.
Tra bảng Student ta được: $t_n^{1-\alpha} = 1.8946$.
Do $t < t_n^{1-\alpha}$ nên ta chưa có đủ cơ sở bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.
Vậy với độ tin cậy 95%, ta có thể kết luận thuốc chưa có hiệu quả.

4 So sánh p_1 và p_2

Bài tập 5.128 Một mẫu ngẫu nhiên gồm 500 cư dân trưởng thành của Quận Maricopa chỉ ra rằng 385 ủng hộ việc tăng giới hạn tốc độ đường cao tốc lên 75 dặm một giờ, và một mẫu khác gồm 400 cư dân trưởng hành của Hạt Pima đã chỉ ra rằng 267 ủng hộ giới hạn tốc độ tăng lên. Những dữ liệu này cho thấy có sự khác biệt trong việc hỗ trợ tăng giới hạn tốc độ cho cư dân của hai quận? Sử dụng $\alpha = 0.05$. $p-$ giá trị cho kiểm định này là bao nhiêu?

Lời giải.
Giả thuyết: $\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$

$$\widehat{p_1} = \frac{385}{500} = \frac{77}{100}.$$

$$\widehat{p_2} = \frac{267}{400}.$$

$$\widehat{p} = \frac{385 + 267}{500 + 400} = \frac{163}{225}.$$

$$z = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\widehat{p}\left(1 - \widehat{p}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \approx 3.4198.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Do $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nên ta bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

$$p - \text{giá trị} = 2\left(1 - Phi\left(|z|\right)\right) = 6 \cdot 10^{-4}.$$

Vậy với độ tin cậy 95%, ta kết luận rằng có sự khác biệt trong việc hỗ trợ tăng giới hạn tốc độ cho cư dân của hai quận.