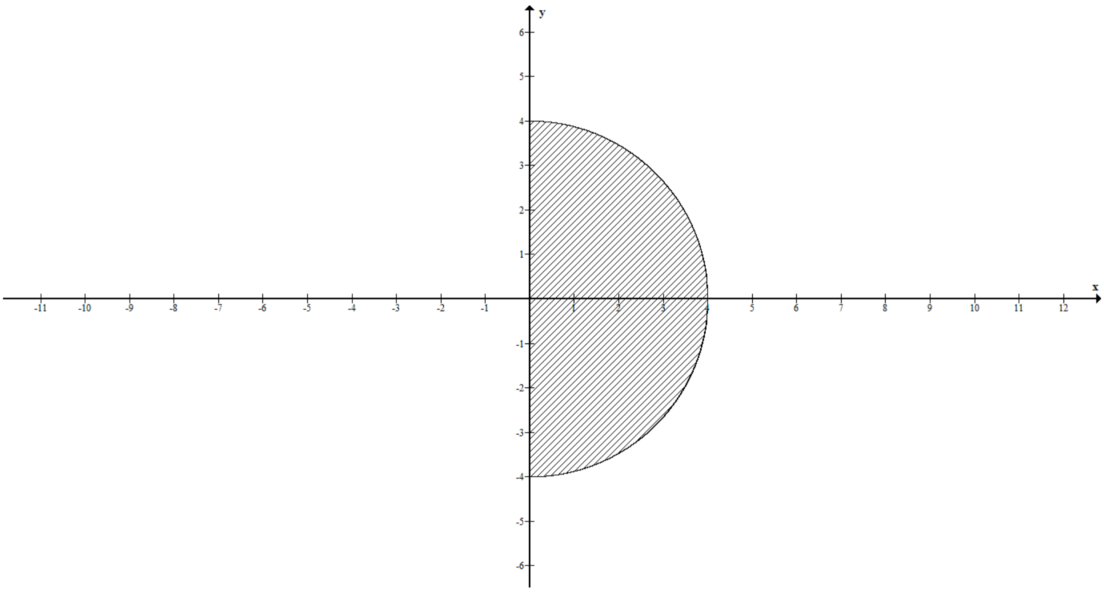
Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131
Lớp: 20CTT1TN
Ca: Ca 1 sáng thứ 4

BÀI TẬP THỰC HÀNH VI TÍCH PHÂN 2B
CHƯƠNG 4: GIẢI TÍCH VECTOR

Trang 74.
Bài 3.

Tính tích phân đường $I = \int_C xy^4 ds$ với C là nửa bên phải của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.



Một tham số của đường cong C là

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

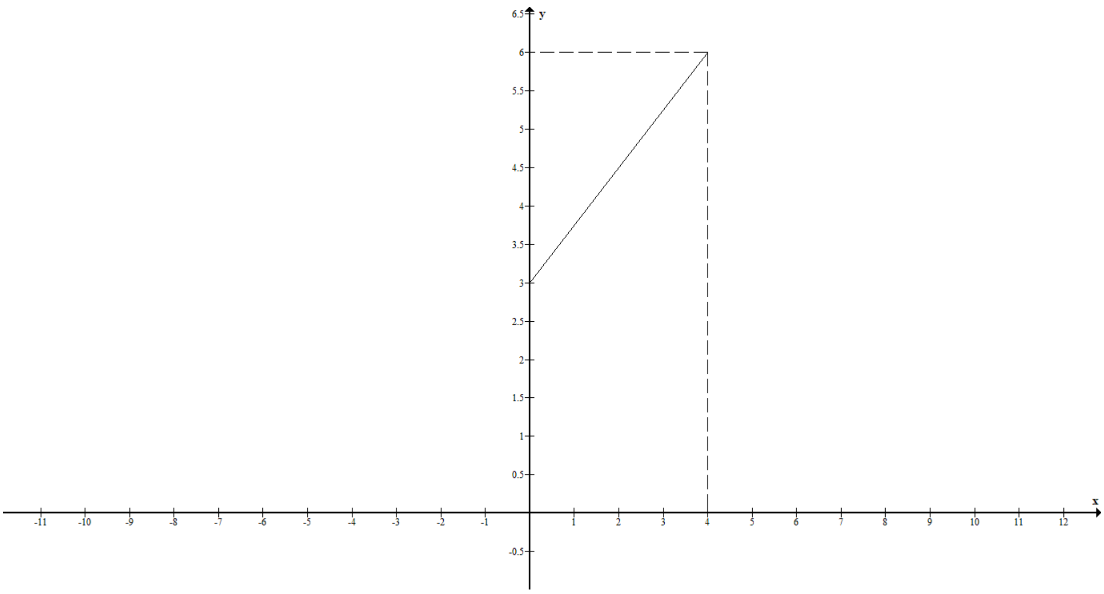
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = 4\cos t \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t \cdot (4\sin t)^4 \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2} dt$$

$$\Rightarrow I = 4096 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = 4096 \cdot \frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{8192}{5}.$$

Bài 4.

Tính tích phân đường $I = \int_C x \sin y ds$ với C là đoạn thẳng nối từ $(0,3)$ đến $(4,6)$.



Phương trình đường thẳng nối từ $(0,3)$ đến $(4,6)$ là $y = \frac{3}{4}x + 3$.
Một tham số của C là

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3}{4}t + 3 \end{cases}, t \in [0,4].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^4 t \sin\left(\frac{3}{4}t + 3\right)\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{5}{4}\int_0^4 t \sin\left(\frac{3}{4}t + 3\right) dt.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = \sin\left(\dfrac{3}{4}t + 3\right) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{3}{4}t + 3\right) \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = \frac{5}{4}\left[-\frac{4}{3}t\cos\left(\frac{3}{4}t + 3\right)\Big|_{t=0}^{t=4} + \frac{4}{3}\int_0^4 \cos\left(\frac{3}{4}t + 3\right) dt\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{5}{4}\left[-\frac{4}{3}(\cos 6 - \cos 3) + \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{4}t + 3\right)\Big|_{t=0}^{t=4}\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{5}{4}\left[-\frac{4}{3}(\cos 6 - \cos 3) + \frac{16}{9}(\sin 6 - \sin 3)\right]$$

$$\Rightarrow I = -\frac{5}{3}(\cos 6 - \cos 3) + \frac{20}{9}(\sin 6 - \sin 3).$$

Bài 5.

Tính tích phân đường $I = \int_C xyzds$ với $C : x = 2\sin t, y = t, z = -2\cos t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Một tham số của C là

$$C : \begin{cases} x = 2\sin t \\ y = t \\ z = -2\cos t \end{cases}, t \in [0, \pi].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dz}{dt} = 2\sin t \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi 2\sin t \cdot t \cdot (-2\cos t)\sqrt{(2\cos t)^2 + 1^2 + (2\sin t)^2}dt$$

$$\Rightarrow I = -2\sqrt{5}\int_0^\pi t\sin(2t)dt = \sqrt{5}\int_0^\pi t \cdot (-2\sin(2t))dt.$$

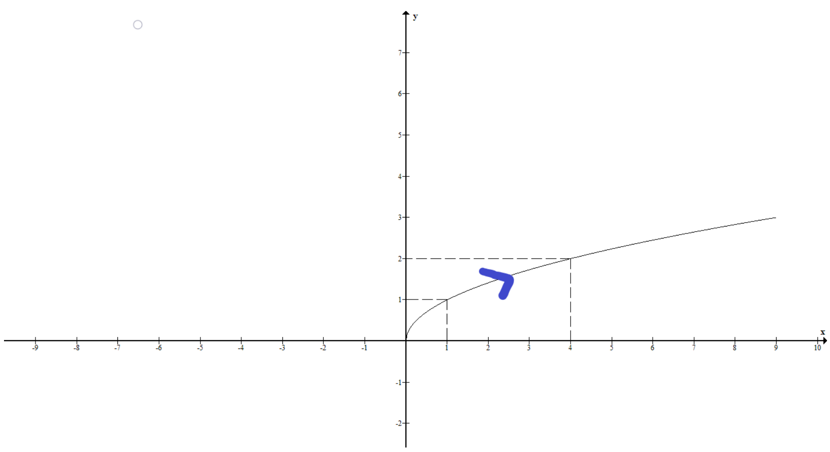
Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = -2\sin(2t)\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \cos(2t) \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = \sqrt{5}\left[t\cos(2t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \cos(2t)\,dt\right]$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{5}\left[\pi - \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_{t=0}^{t=\pi}\right] = \pi\sqrt{5}.$$

Trang 77.
Bài 1.

Tính tích phân đường loại 2 : $I = \int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})dy$ với C là đoạn cong $y = \sqrt{x}$ từ $(1, 1)$ đến $(4, 2)$.



Một tham số của C là

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [1, 4].$$

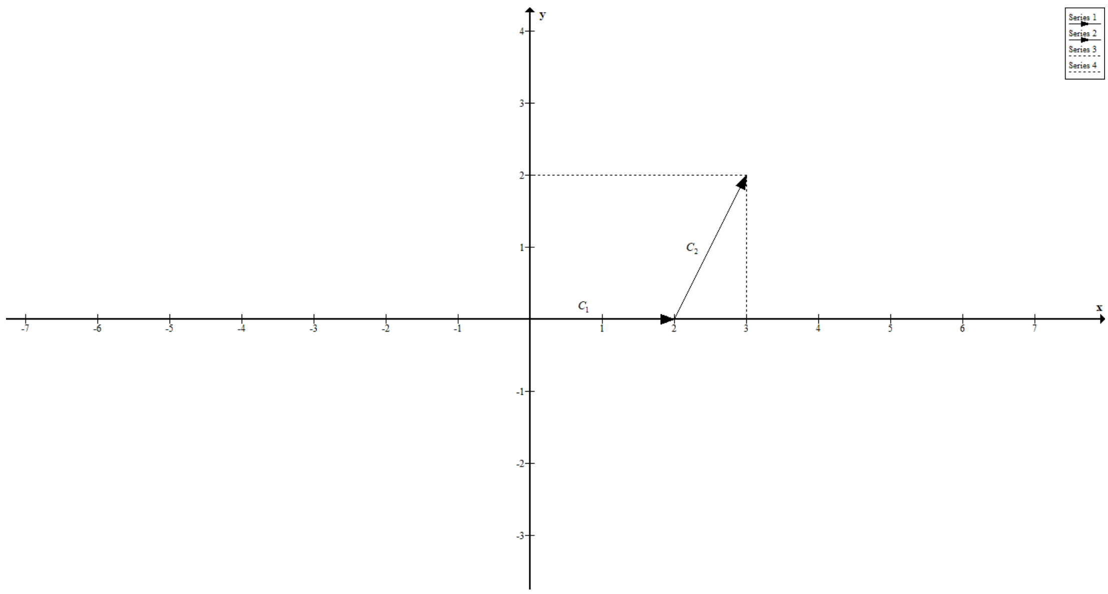
$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_1^4 \left(t^2 \cdot t\sqrt{t} - \sqrt{t}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int\limits_1^4 \left(t^3 - 1\right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^4}{4} - t\right)\Bigg|_{t=1}^{t=4} = \frac{243}{8}.$$

Bài 3.

Tính tích phân đường loại 2 : $I = \int_C xydx + (x-y)\,dy$ với C gồm các đoạn thẳng từ $(0,0)$ đến $(2,0)$ và từ $(2,0)$ đến $(3,2)$.



Ta chia C thành 2 phần: C_1 là đoạn thẳng nối từ $(0,0)$ đến $(2,0)$, C_2 là đoạn thẳng nối từ $(2,0)$ đến $(3,2)$.

$$\Rightarrow I = \int_C xydx + (x-y)\,dy = \int_{C_1 \cup C_2} xydx + (x-y)\,dy$$

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} xydx + (x-y)\,dy + \int_{C_2} xydx + (x-y)\,dy.$$

Một tham số của C_1 là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [0, 2].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} xydx + (x-y)\,dy = \int\limits_0^2 0dt = 0.$$

Phương trình đường thẳng nối từ $(2,0)$ đến $(3,2)$ là $y = 2x - 4$.
$\Rightarrow$ Một tham số của C_2 là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 4 \end{cases}, t \in [2,3].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 \end{cases}.$$

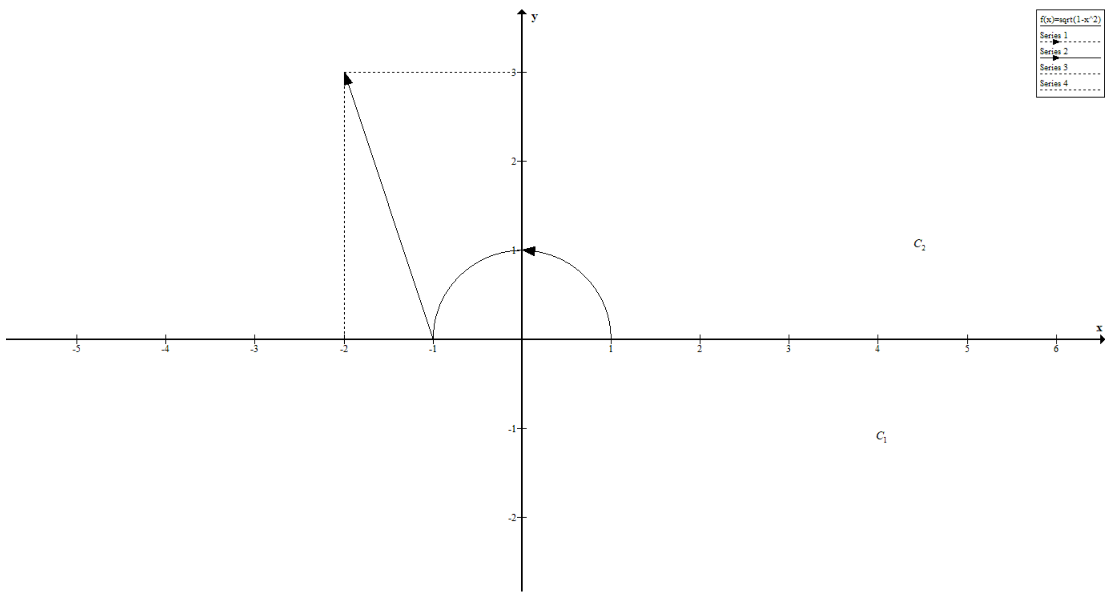
$$\Rightarrow \int_{C_2} xydx + (x-y)\,dy = \int\limits_2^3 t\,(2t-4)\,dt + [t - (2t-4)]\,2dt$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} xydx + (x-y)\,dy = \int\limits_2^3 \left(2t^2 - 6t + 8\right) dt = \frac{17}{3}.$$

$$\Rightarrow I = 0 + \frac{17}{3} = \frac{17}{3}.$$

Bài 4.

Tính tích phân đường loại 2 : $I = \int_C \sin x dx + \cos y dy$ với C gồm nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ từ $(1,0)$ đến $(-1,0)$ và đoạn thẳng từ $(-1,0)$ đến $(-2,3)$.



Ta chia C thành 2 phần: C_1 là nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ từ $(1,0)$ đến $(-1,0)$ và C_2 là đoạn thẳng từ $(-1,0)$ đến $(-2,3)$.

$$\Rightarrow I = \int_C \sin x dx + \cos y dy = \int_{C_1 \cup C_2} \sin x dx + \cos y dy$$

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} \sin x dx + \cos y dy + \int_{C_2} \sin x dx + \cos y dy.$$

Một tham số của C_1 là

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos t \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{C_1} \sin x dx + \cos y dy = \int\limits_0^\pi \sin(\cos t)(-\sin t)dt + \cos(\sin t)\cos t dt$$

$$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^\pi \sin(\cos t)(-\sin t)dt + \int\limits_0^\pi \cos(\sin t)\cos t dt$$

$$\Rightarrow I_1 = -\cos(\cos t)|_{t=0}^{t=\pi} + \sin(\sin t)|_{t=0}^{t=\pi} = -\cos(-1) + \cos(1) + \sin(0) - \sin(0) = 0.$$

Phương trình đường thẳng nối từ $(-1, 0)$ đến $(-2, 3)$ là $y = -3x - 3$.
$\Rightarrow$ Một tham số của C_2 là

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3t - 3 \end{cases}, t \in [1, 2].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{C_2} \sin x dx + \cos y dy = \int\limits_1^2 [\sin(-t)(-dt) + \cos(3t-3) \cdot 3dt]$$

$$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^2 [\sin t + 3\cos(3t-3)]dt = [-\cos t + \sin(3t-3)]|_{t=1}^{t=2} = \cos(1) - \cos(2) + \sin(3).$$

Bài 5.

Tính tích phân đường loại 2 : $I = \int_C x^2 y\sqrt{z} dz$ với $C : x = t^3, y = t, z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$$z = t^2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 2t.$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 t^6 \cdot t \cdot t \cdot 2t dt = 2\int\limits_0^1 t^9 dt = \left.\frac{t^{10}}{5}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{5}.$$

Bài 9.

Tính tích phân $I = \int_C \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$ với $\overrightarrow{F}(x, y) = xy\overrightarrow{i} + 3y^2\overrightarrow{j}$ và C là vết của đường đi $\overrightarrow{r}$ định bởi $r(t) = 11t^4\overrightarrow{i} + t^3\overrightarrow{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\langle xy, 3y^2\right\rangle = \left\langle P(x,y), Q(x,y)\right\rangle.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x,y) = xy \\ Q(x,y) = 3y^2 \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{r}(t) = \left\langle 11t^4, t^3\right\rangle = \left\langle x(t), y(t)\right\rangle.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 11t^4 \\ y(t) = t^3 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 11t^4 \\ y(t) = t^3 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int_C Pdx + Qdy$$

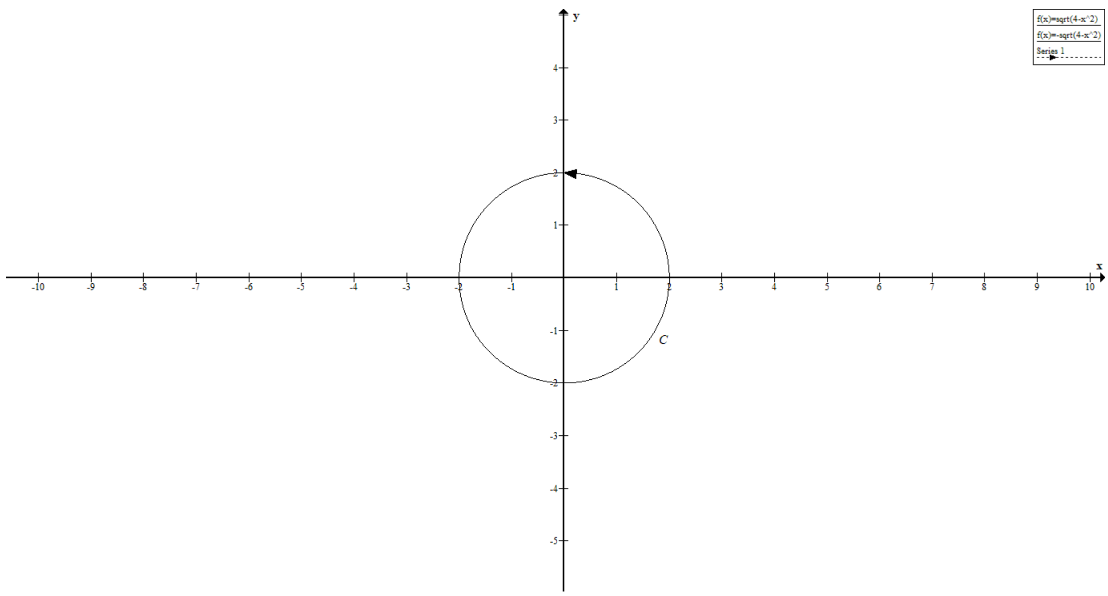
$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]dt$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 \left(11t^4 \cdot t^3 \cdot 44t^3 + 3 \cdot \left(t^3\right)^2 \cdot 3t^2\right)dt$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^1 \left(484t^{10} + 9t^8\right)dt = \left(44t^{11} + t^9\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = 45.$$

Trang 78.
Bài 1.

Tính tích phân đường $I = \oint_C (x-y)\,dx + (x+y)\,dy$ với C là đường tròn có tâm ở gốc tọa độ, bán kính 2 theo 2 cách:
a. Tính trực tiếp.
b. Dùng định lí Green.



a. Tính trực tiếp.
Một tham số của C là

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\cos t \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} (2\cos t - 2\sin t)(-2\sin t)\,dt + (2\cos + 2\sin t)\, 2\cos t dt$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^{2\pi} 4dt = 4t|_{t=0}^{t=2\pi} = 8\pi.$$

b. Dùng định lí Green.

$$D = \{(r, \theta) |\, 0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

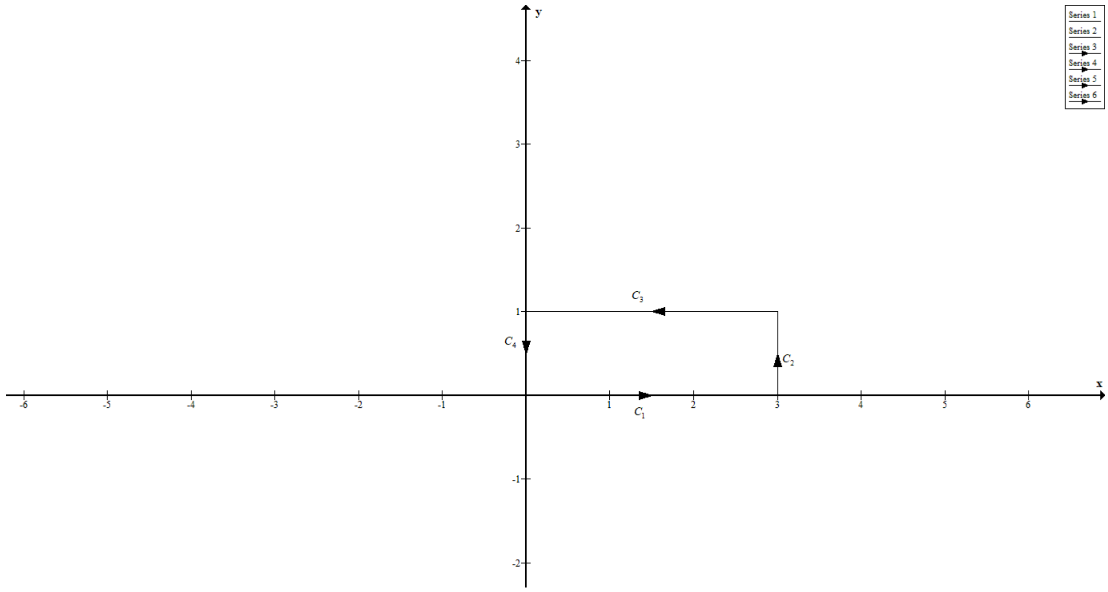
Đặt $\begin{cases} P(x,y) = x - y \\ Q(x,y) = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 2r dr d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 2r dr d\theta$$

Bài 2.

Tính tích phân đường $I = \oint_C xydx + x^2dy$ với C là hình chữ nhật có các đỉnh $(0,0), (3,0), (3,1), (0,1)$ theo 2 cách:
a. Tính trực tiếp.
b. Dùng định lí Green.



a. Tính trực tiếp.

Ta chia C thành 4 đường cong C_1, C_2, C_3, C_4.

- C_1 là đoạn nối từ $(0,0)$ đến $(3,0)$. Một tham số của C_1 là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [0,3].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}.$$

- C_2 là đoạn nối từ $(3,0)$ đến $(3,1)$. Một tham số của C_2 là

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}, t \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 \end{cases}.$$

- C_3 là đoạn nối từ $(3,1)$ đến $(0,1)$. Một tham số của C_3 là

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 \end{cases}, t \in [-3,0].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}.$$

- C_4 là đoạn nối từ $(0,1)$ đến $(0,0)$. Một tham số của C_4 là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \end{cases}, t \in [-1,0].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -1 \end{cases}.$$

$$I = \oint_C xydx + x^2dy = \oint_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4} xydx + x^2dy$$

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} xydx + x^2dy + \int_{C_2} xydx + x^2dy + \int_{C_3} xydx + x^2dy + \int_{C_4} xydx + x^2dy.$$

$$\int_{C_1} xydx + x^2dy = \int\limits_0^3 0dt = 0.$$

$$\int_{C_2} xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 3t \cdot 0 + 9dt = \int\limits_0^1 9dt = 9.$$

$$\int_{C_3} xydx + x^2dy = \int\limits_{-3}^0 (-t)(-dt) + x^2 \cdot 0 = \int\limits_{-3}^0 tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=-3}^{t=0} = -\frac{9}{2}.$$

$$\int_{C_4} xydx + x^2dy = \int\limits_{-1}^0 0dt = 0.$$

$$\Rightarrow I = 0 + 9 - \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}.$$

b. Dùng định lí Green.

$$D = \{(x, y)|\, 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

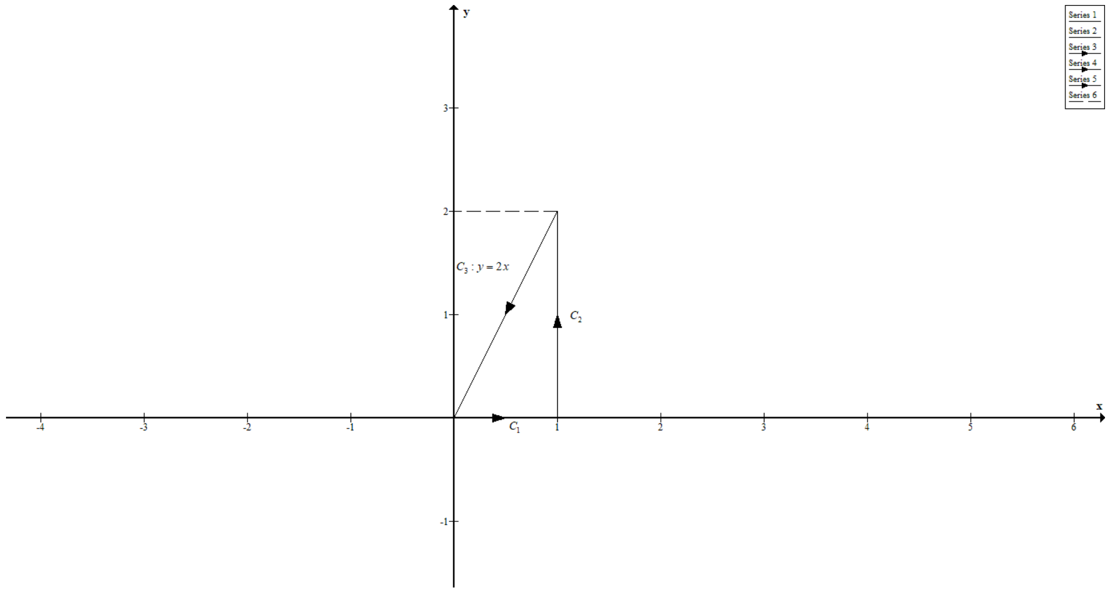
Đặt $\begin{cases} P(x, y) = xy \\ Q(x, y) = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{cases}.$

$$I = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int\limits_0^3 \int\limits_0^1 (2x - x)\, dydx$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^3 \int\limits_0^1 xdydx = \int\limits_0^3 \left(xy|_{y=0}^{y=1}\right) dx = \int\limits_0^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=3} = \frac{9}{2}.$$

Bài 3.

Tính tích phân đường $I = \oint_C xydx + x^2y^3dy$ với C là hình tam giác có các đỉnh là $(0, 0), (1, 0), (1, 2)$ theo 2 cách:
a. Tính trực tiếp.
b. Dùng định lí Green.



a. Tính trực tiếp.

Ta chia C thành 3 đường cong: C_1, C_2, C_3.

- C_1 là đoạn nối từ $(0,0)$ đến $(1,0)$. Một tham số của C_1 là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}.$$

- C_2 là đoạn nối từ $(1,0)$ đến $(1,2)$. Một tham số của C_2 là

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, t \in [0,2].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 \end{cases}.$$

- C_3 là đoạn nối từ $(1,2)$ đến $(0,0)$. Một tham số của C_3 là

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}, t \in [-1,0].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2 \end{cases}.$$

$$I = \oint_C xydx + x^2y^3dy = \oint_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} xydx + x^2y^3dy$$

$$\Rightarrow I=\int_{C_1} xydx+x^2y^3dy+\int_{C_2} xydx+x^2y^3dy+\int_{C_3} xydx+x^2y^3dy.$$

$$\int_{C_1} xydx+x^2y^3dy=\int\limits_0^1 0dt=0.$$

$$\int_{C_2} xydx+x^2y^3dy=\int\limits_0^2 \left(t\cdot 0+t^3\right)dt=\int\limits_0^2 t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_{t=0}^{t=2}=4.$$

$$\int_{C_3} xydx+x^2y^3dy=\int\limits_{-1}^0 t\left(-2t\right)dt+t^2(-2t)^3\left(-2dt\right)=\int\limits_{-1}^0 \left(-2t^2+16t^5\right)dt=\left.\left(-\frac{2}{3}t^3+\frac{8}{3}t^6\right)\right|_{t=-1}^{t=0}=-\frac{10}{3}.$$

$$\Rightarrow I=0+4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}.$$

b. Dùng định lí Green.

$$D=\left\{(x,y)|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2x\right\}.$$

Đặt $\begin{cases} Px,y=xy \\ Qx,y=x^2y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}=x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy^3 \end{cases}.$

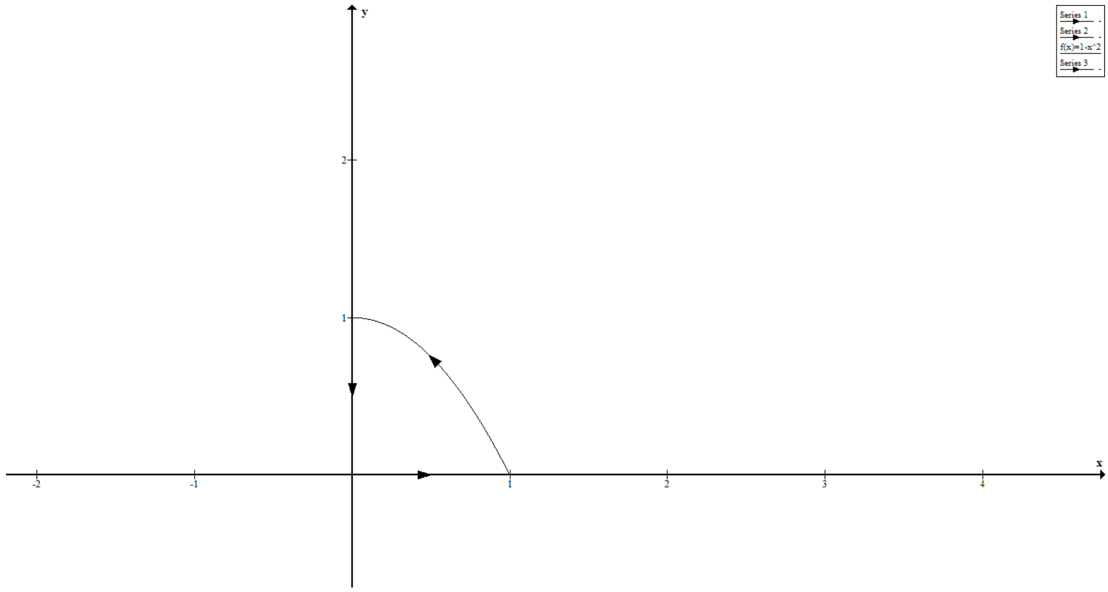
$$I=\int\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2x}\left(2xy^3-x\right)dydx$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 \left.\left(\frac{xy^4}{2}-xy\right)\right|_{y=0}^{y=2x}dx=\int\limits_0^1 \left(8x^5-2x^2\right)dx$$

$$\Rightarrow I=\left.\left(\frac{4}{3}x^6-\frac{2}{3}x^3\right)\right|_{x=0}^{x=1}=\frac{2}{3}.$$

Trang 79.
Bài 4.

Tính tích phân đường $I=\oint_C xdx+ydy$ với C là đoạn thẳng từ $(0,1)$ đến $(0,0)$, từ $(0,0)$ đến $(1,0)$ và đoạn parabola $(1,0)$ từ $(1,0)$ đến $(0,1)$ theo 2 cách:
a. Tính trực tiếp.
b. Dùng định lí Green.



a. **Tính trực tiếp.**
Ta chia C thành 3 đường cong: C_1, C_2, C_3.

- C_1 là đoạn thẳng nối từ từ $(0,1)$ đến $(0,0)$. Một tham số của C_1 là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \end{cases}, t \in [-1, 0].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -1 \end{cases}.$$

- C_2 là đoạn thẳng nối từ $(0,0)$ đến $(1,0)$. Một tham số của C_2 là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [0, 1].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}.$$

- C_3 là đoạn parabola $(1,0)$ từ $(1,0)$ đến $(0,1)$. Một tham số của C_3 là

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}, t \in [-1, 0].$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2t \end{cases}.$$

$$I = \oint_C xdx + ydy = \oint_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} xdx + ydy$$

$$\Rightarrow I = \int_{C_1} xdx + ydy + \int_{C_2} xdx + ydy + \int_{C_3} xdx + ydy.$$

$$\int_{C_1} xdx + ydy = \int\limits_{-1}^{0} 0 + (-t)\,(-dt) = \int\limits_{-1}^{0} tdt = -\frac{1}{2}.$$

$$\int_{C_2} xdx + ydy = \int\limits_{0}^{1} tdt = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{C_3} xdx + ydy = \int\limits_{-1}^{0} (-t)\,(-dt) + \left(1 - t^2\right)(-2tdt) = \int\limits_{-1}^{0} \left(t - 2t + 2t^3\right) dt = 0.$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0.$$

b. Dùng định lí Green.

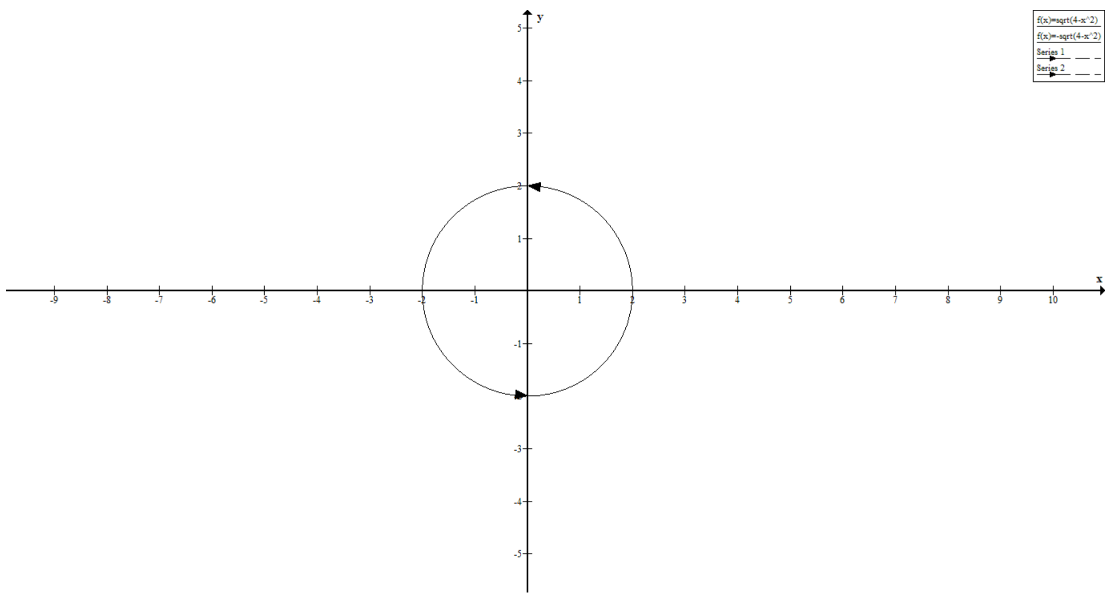
$$D = \left\{ (x, y) |\, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2 \right\}.$$

Đặt $\begin{cases} P\,(x, y) = x \\ Q\,(x, y) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}.$

$$I = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-x^2} 0dydx = \int\limits_{0}^{1} 0dx = 0.$$

Bài 9.

Dùng định lí Green để tính tích phân $I = \oint_C y^3dx - x^3dy$ dọc theo đường cong kín C với C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.



$$D = \{(r,\theta) |\, 0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Đặt $\begin{cases} P(x,y) = y^3 \\ Q(x,y) = -x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 \end{cases}.$

$$I = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(-3r^2\cos^2\theta - 3r^2\sin^2\theta\right) r dr d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi}\int_0^2 -3r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{4}r^4\bigg|_{r=0}^{r=2}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} (-12)\, d\theta$$

$$\Rightarrow I = (-12\theta)\big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -24\pi.$$

Trang 82.
Bài 5.

Xác định xem trường 2 chiều $\overrightarrow{F}$ định bởi $\overrightarrow{F}(x,y) = (2x-3y)\overrightarrow{i} + (-3x+4y-8)\overrightarrow{j}$ có phải là trường bảo toàn không? Nếu có, tìm hàm thế f của trường này.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \langle 2x-3y, -3x+4y-8\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x-3y) = -3.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3x+4y-8) = -3.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(2x-3y) = \frac{\partial}{\partial x}(-3x+4y-8).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}$ là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$.

$$\int (2x-3y)\, dx = x^2 - 3xy + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 3xy + C(y)\right) = -3x + C'(y).$$

$$\Rightarrow C'(y) = 4y - 8.$$

Ta chọn $C(y) = 2y^2 - 8y$.
Vậy $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y - 8$ là một hàm thế của trường $\overrightarrow{F}$.
Bài 6.

Xác định xem trường 2 chiều $\overrightarrow{F}$ định bởi $\overrightarrow{F}(x,y) = e^x\cos y\,\overrightarrow{i} + e^x\sin y\,\overrightarrow{j}$ có phải là trường bảo toàn không? Nếu có, tìm hàm thế f của trường này.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \langle e^x\cos y, e^x\sin y\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y) = -e^x\sin y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) = e^x\sin y.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}$ không là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$.

Bài 13.

Chứng minh trường $\overrightarrow{F}$ định bởi $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j}$ là trường bảo toàn, sau đó dùng hàm thế của $\overrightarrow{F}$ để tính $I = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ với C là đoạn parabola $y = 2x^2$ nối từ $(-1,2)$ đến $(2,8)$.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\langle x^2, y^2 \right\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}$ là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}x^3 + C(y)\right) = C'(y).$$

$$\Rightarrow C'(y) = y^2.$$

Ta chọn $C(y) = \frac{1}{3}y^3$.

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$ là một hàm thế của trường $\overrightarrow{F}$.

$$\Rightarrow I = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = f(2,8) - f(-1,2) = \frac{520}{3} - \frac{7}{3} = 171.$$

Bài 14.

Chứng minh trường $\overrightarrow{F}$ định bởi $\overrightarrow{F}(x,y) = xy^2\overrightarrow{i} + x^2y\overrightarrow{j}$ là trường bảo toàn, sau đó dùng hàm thế của $\overrightarrow{F}$ để tính $I = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ với $C : \overrightarrow{r}(t) = \left\langle t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \frac{1}{2}\cos\pi t \right\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left\langle xy^2, x^2y \right\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) = 2xy.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right) = 2xy.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F}$ là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$.

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y^2+C\left(y\right)\right)=x^2y+C'\left(y\right).$$

$$\Rightarrow C'\left(y\right)=0.$$

Ta chọn $C\left(y\right)=0$.
$\Rightarrow f\left(x,y\right)=\frac{1}{2}x^2y^2$ là một hàm thế của trường $\overrightarrow{F}$.
Điểm đầu của C là $\overrightarrow{r}\left(0\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, điểm cuối của C là $\overrightarrow{r}\left(1\right)=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

$$\Rightarrow I=\int_C\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=f\left(2,\frac{1}{2}\right)-f\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Bài 17.

Chứng minh rằng tích phân $I=\int_C\left(1-ye^{-x}\right)dx+e^{-x}dy$, với C là bất kì đường đi nào nối từ $\left(0,1\right)$ đến $\left(1,2\right)$, độc lập với đường đi và tính tích phân đó.

Xét trường $\overrightarrow{F}$ định bởi

$$\overrightarrow{F}\left(x,y\right)=\left\langle 1-ye^{-x},e^{-x}\right\rangle.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1-ye^{-x}\right)=-e^{-x}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}\right)=-e^{-x}.$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(1-ye^{-x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x}\right).$$

$\Rightarrow\overrightarrow{F}$ là trường bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$.
$\Rightarrow$ Tích phân I độc lập với đường đi.

$$\int\left(1-ye^{-x}\right)dx=x+ye^{-x}+C\left(y\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x+ye^{-x}\right)=e^{-x}+C'\left(y\right).$$

$$\Rightarrow C'\left(y\right)=0.$$

Ta chọn $C\left(y\right)=0$.
$\Rightarrow f\left(x,y\right)=x+ye^{-x}$ là một hàm thế của trường $\overrightarrow{F}$.

$$\Rightarrow I=f\left(1,2\right)-f\left(0,1\right)=1+\frac{2}{e}-1=\frac{2}{e}.$$