

Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc  
MSSV: 20120131  
Lớp: 20CTT1TN  
Ca: Ca 1 sáng thứ 4

**BÀI TẬP THỰC HÀNH VI TÍCH PHÂN 2B**  
**CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN BỘI**

**Teang 52**  
**Bài 15.**

Tính tích phân kép  $I = \int \int_R (6x^2y^3 - 5y^4) dA$  với  $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_0^1 (6x^2y^3 - 5y^4) dy dx = \int_0^3 \left( \int_0^1 (6x^2y^3 - 5y^4) dy \right) dx \\ &= \int_0^3 \left( \left( \frac{3}{2}x^2y^4 - y^5 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_0^3 \left( \frac{3}{2}x^2 - 1 \right) dx = \left( \frac{1}{2}x^3 - x \right) \Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

**Trang 53.**  
**Bài 21.**

Tính tích phân kép  $I = \int \int_R xye^{x^2y} dA$  với  $R = [1, 2] \times [0, 2]$ .

$$I = \int_0^2 \int_1^2 xye^{x^2y} dx dy = \int_0^2 \left( \int_1^2 xye^{x^2y} dx \right) dy$$

Đặt  $t = x^2y \Rightarrow dt = 2xy dx$ .

$$\Rightarrow \int xye^{x^2y} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{x^2y}}{2} + C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \left( e^{x^2y} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (e^{4y} - e^y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{4y}}{4} - e^y \right) \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{e^8}{8} - \frac{e^2}{2} + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

**Bài 28.**

Tính thể tích khối rắn được bao quanh bởi các mặt  $z = x \sec^2 y$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  và  $y = \frac{\pi}{4}$ .

Thể tích cần tìm là:

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 y dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 y dy \right) dx = \int_0^2 \left( (x \tan y) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} \right) dx \\
&= \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=2} = 2 \Rightarrow V = 2.
\end{aligned}$$

**Bài 30.**

Tính thể tích khối rắn được bao bởi mặt paraboloid  $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$  và các mặt phẳng  $z = 1, x = 1, x = -1, y = 0, y = 4$ .

Thể tích cần tìm là  $V = |I|$ , với  $I = \int_{-1}^1 \int_0^4 (2 + x^2 + (y - 2)^2 - 1) dy dx$ .

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^4 (2 + x^2 + (y - 2)^2 - 1) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left( \int_0^4 (x^2 + y^2 - 4y + 5) dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left( \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 5y \right) \Big|_{y=0}^{y=4} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( 4x^2 + \frac{28}{3} \right) dx = \frac{64}{3}. \\
&\Rightarrow V = \frac{64}{3}.
\end{aligned}$$

**Trang 56**

**Bài 6.**

Tính tích phân lặp  $I = \int \int_D y^2 dA$ , với  $D = \{ (x, y) | -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y \}$ .

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \int_{-y-2}^y y^2 dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{-y-2}^y y^2 dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left( (xy^2) \Big|_{x=-y-2}^{x=y} \right) dy = \int_{-1}^1 (2y^3 + 2y^2) dy = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

**Bài 12.**

Tính tích phân lặp  $I = \int \int_D x \cos y dA$ , với  $D$  là miền được bao bởi  $y = 0, y = x^2, x = 1$ .

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned}
x^2 &= 0 \Leftrightarrow x = 0. \\
\Rightarrow I &= \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y dy dx \\
I &= \int_0^1 \left( (x \sin y) \Big|_{y=0}^{y=x^2} \right) dx = \int_0^1 x \sin(x^2) dx
\end{aligned}$$

$$= \left( -\frac{1}{2} \cos(x^2) \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2} \cos(1) + \frac{1}{2}.$$

### Bài 13.

Tính tích phân lặp  $I = \int \int_D (x + y) dA$ , với  $D$  là miền được bao bởi  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ .

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\forall x \in [0, 1], x^2 \leq \sqrt{x}.$$

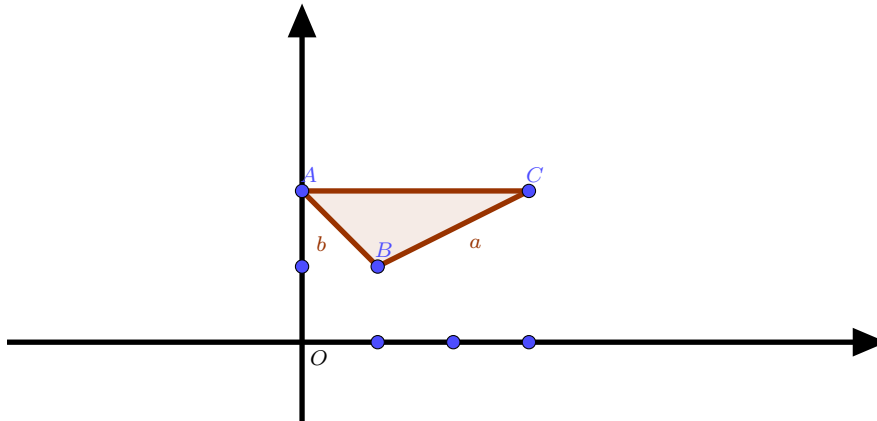
$$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx.$$

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx = \int_0^1 \left( \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left( \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{10}.$$

### Bài 14.

Tính tích phân lặp  $I = \int \int_D y^3 dA$ , với  $D$  là miền hình tam giác với các đỉnh  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(3, 2)$ .



Đường thẳng  $BC$  có phương trình:

$$x - 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2y - 1.$$

Đường thẳng  $AB$  có phương trình:

$$x + y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y + 2.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= \int_1^2 \int_{-y+2}^{2y-1} y^3 dx dy. \\ I &= \int_1^2 \int_{-y+2}^{2y-1} y^3 dx dy = \int_1^2 \left( (xy^3) \Big|_{x=-y+2}^{x=2y-1} \right) dy \\ &= \int_1^2 (3y^4 - 3y^3) dy = \frac{147}{20}.\end{aligned}$$

### Bài 21.

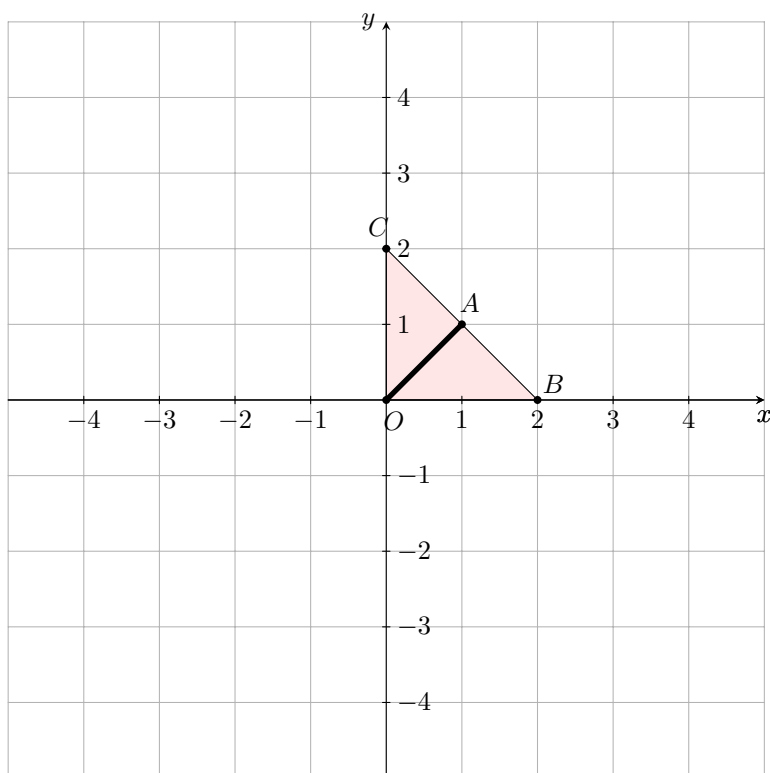
Tính thể tích khối rắn được bao bởi paraboloid  $z = x^2 + 3y^3$  và mặt  $x = 0, y = 1, y = x, z = 0$ .

Thể tích cần tìm là  $V = |I|$ , với  $I = \int_0^1 \int_x^1 (x^2 + 3y^3) dy dx$ .

$$I = \int_0^1 \left( \left( x^2 y + \frac{3y^4}{4} \right) \Big|_{y=x}^{y=1} \right) dx = \int_0^1 \left( x^2 + \frac{3}{4} - x^3 - \frac{3y^4}{4} \right) dx = \frac{41}{60}.$$

### Bài 23.

Tính thể tích khối rắn tạo bởi các mặt phẳng  $z = x, y = x, x + y = 2$ , và  $z = 0$ .



Đường thẳng  $OA$  có phương trình  $y = x$ .

Đường thẳng  $AB$  có phương trình  $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ .

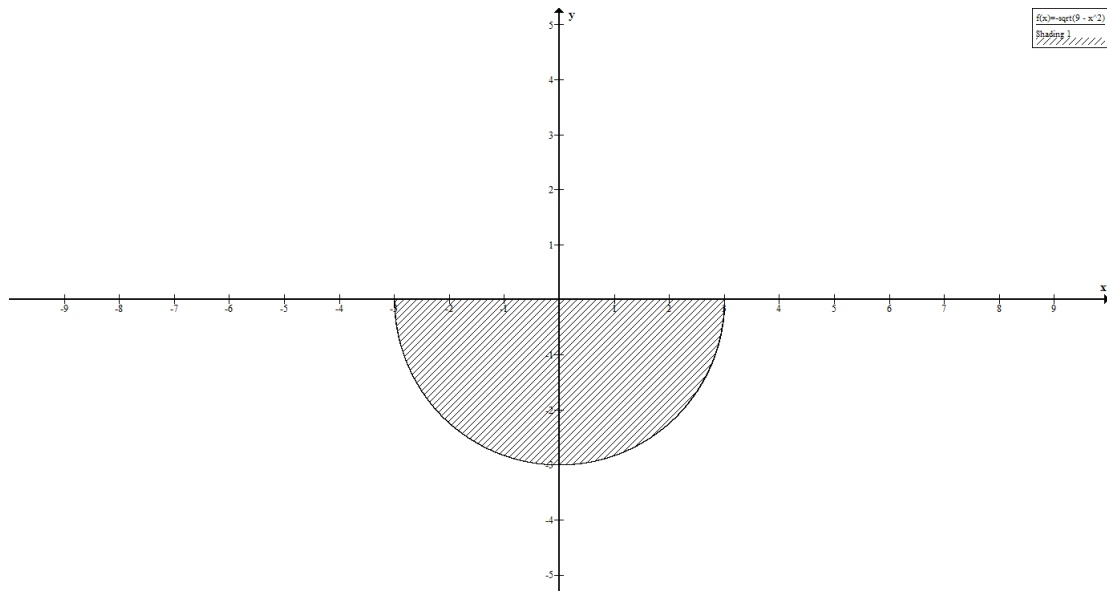
Dựa vào hình vẽ, ta được  $V = \int \int_D x dA$ , với  $D$  là miền thỏa mãn  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x\}$ .  
 Từ đó,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_x^{2-x} x dy dx = \int_0^1 \left( (xy) \Big|_{y=x}^{y=2-x} \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Trang 60.**

**Bài 9.**

Tính tích phân  $I = \int \int_R \cos(x^2 + y^2) dA$ , với  $R$  là miền nằm dưới trục  $Ox$  và bên trong đường tròn  $x^2 + y^2 = 9$  bằng cách đổi hệ tọa độ cực.



Ta viết lại miền  $R$  như sau:

$$R = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 3, -\pi \leq \theta \leq 0\}.$$

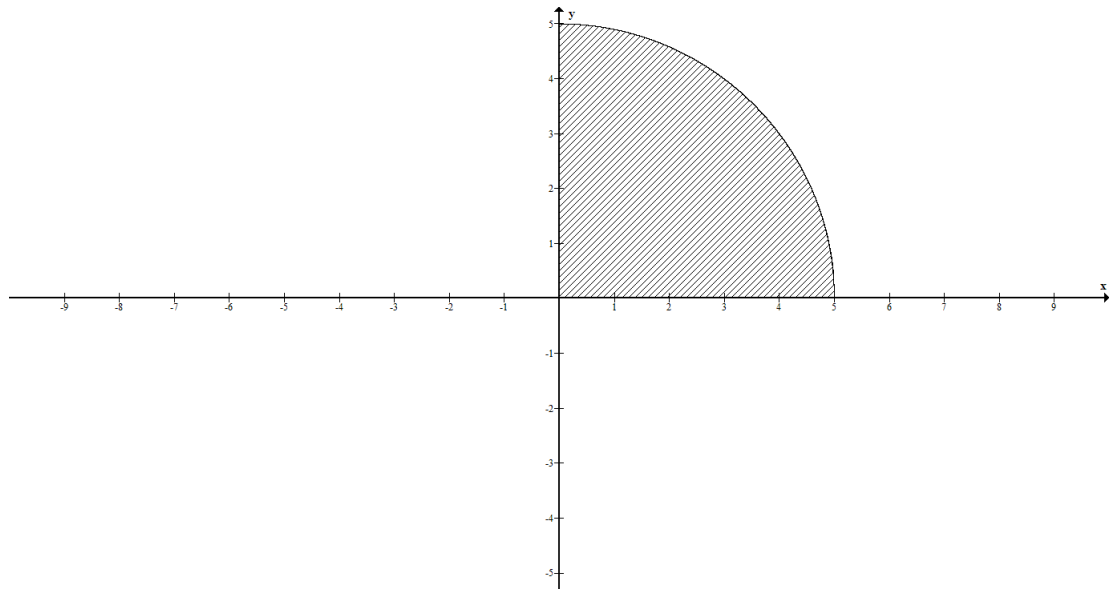
$$\Rightarrow I = \int_{-\pi}^0 \int_0^3 \cos(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi}^0 \int_0^3 \cos(r^2) r dr d\theta = \int_{-\pi}^0 \left( \frac{1}{2} \sin(r^2) \right) \Big|_{r=0}^{r=3} d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin 9}{2} d\theta = \theta \cdot \frac{\sin 9}{2} \Big|_{\theta=-\pi}^{\theta=0} = \frac{\pi \sin 9}{2}.$$

**Bài 11.**

Tính tích phân  $I = \int \int_R ye^x dA$ , với  $R$  là miền nằm dưới trục  $Ox$  và bên trong đường tròn  $I = \int \int_R ye^x dA$  bằng phương pháp đổi hệ tọa độ cực.



Ta viết lại miền  $R$  như sau:

$$R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 r \sin \theta e^{r \cos \theta} r dr d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^5 r^2 \sin \theta e^{r \cos \theta} dr d\theta = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta e^{r \cos \theta} d\theta dr$$

$$\Rightarrow I = \int_0^5 \left( -r e^{r \cos \theta} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^5 (-r + r e^r) dr$$

$$\Rightarrow I = \left( -\frac{r^2}{2} + (r-1)e^r \right) \Big|_{r=0}^{r=5} = 4e^5 - \frac{23}{2}.$$