

Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131
Lớp: 20CTT1

Bài tập môn Xác suất thống kê
Chương 2: Biến ngẫu nhiên - Vector ngẫu nhiên
Ngày 07/10/2021

Bài 1. Dòng điện trong một mạch nhất định được đo bằng một ampere kế là biến ngẫu nhiên liên tục X với hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0.075x + 0.2, & \text{khi } 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

- a. Tính $\mathbb{P}(X \leq 4)$ và so sánh với xác suất $\mathbb{P}(X > 4)$.
b. Tính xác suất $\mathbb{P}(3.5 \leq X \leq 4.5)$ và so sánh với xác suất $\mathbb{P}(X > 4.5)$.

$$\text{a. } \mathbb{P}(X \leq 4) = \int_{-\infty}^4 f(x) dx = \int_{-\infty}^3 0 dx + \int_3^4 (0.075x + 0.2) dx = 0.4625$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X > 4) = 1 - 0.4625 = 0.5375$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \leq 4) < \mathbb{P}(X > 4).$$

$$\text{b. } \mathbb{P}(3.5 \leq X \leq 4.5) = \int_{3.5}^{4.5} (0.075x + 0.2) dx = 0.5$$

$$\mathbb{P}(X \leq 4.5) = \int_{-\infty}^4 .5f(x) dx = \int_{-\infty}^3 0 dx + \int_3^4 .5(0.075x + 0.2) = 0.721875$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(3.5 \leq X \leq 4.5) > \mathbb{P}(X > 4.5).$$

Bài 2. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất

X	1	2	3	4	5	6	7
p	a	$2a$	$2a$	$3a$	a^2	$2a^2$	$7a^2 + a$

- a. Xác định a .
b. Tính $\mathbb{P}(X \geq 5)$ và $\mathbb{P}(X > 3)$.
c. Tìm k nhỏ nhất sao cho $\mathbb{P}(X \leq k) \geq \frac{1}{2}$.

a.

$$a + 2a + 2a + 3a + a^2 + 2a^2 + 7a^2 + a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 0.1, (\text{vì } a \geq 0).$$

b. Hàm phân phối xác suất của X như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 1 \\ 0.1, & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 0.3, & \text{nếu } 2 \leq x < 3 \\ 0.5, & \text{nếu } 3 \leq x < 4 \\ 0.8, & \text{nếu } 4 \leq x < 5 \\ 0.81, & \text{nếu } 5 \leq x < 6 \\ 0.83, & \text{nếu } 6 \leq x < 7 \\ 1, & \text{nếu } x \geq 7 \end{cases}.$$

$$F(3) = 0.5 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq 3) = 0.5$$

$F(5) = 0.81 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq 5) = 0.81 \Rightarrow \mathbb{P}(X > 5) = 0.19$ c. Dựa vào hàm phân phối xác suất của X , ta được $k = 3$.

Bài 3. Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập X và Y có bảng phân phối xác suất như sau.

X	-1	0	1	2
p	0.3	0.2	0.3	0.2

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

Lập bảng phân phối xác suất của $X + Y$ và XY .

Bảng phân phối xác suất của $X + Y$.

$X + Y$	-2	-1	0	1	2	3
p	0.09	0.18	0.26	0.24	0.17	0.06

Bảng phân phối xác suất của XY .

XY	-2	-1	0	1	2
p	0.06	0.18	0.52	0.18	0.06

Bài 4. Linda là một nhân viên bán hàng tại một đại lý ô tô lớn. Với mức hoa hồng 25% lợi nhuận tính trên mỗi chiếc xe cô bán, Linda dự kiến sẽ kiếm được 350\$ cho mỗi chiếc xe hơi bán được và 400\$ cho mỗi chiếc xe tải hoặc SUV bán được. Linda thúc đẩy bản thân bằng cách sử dụng ước lượng xác suất cho doanh thu của mình. Vào một ngày Thứ Bảy của tháng Tư, cô ước tính doanh số bán xe hơi và xe tải hoặc SUV của mình như sau: Đặt X là số xe hơi Linda bán và Y là số xe tải hoặc SUV.

X	0	1	2	3
p	0.3	0.4	0.2	0.1

Y	0	1	2
p	0.4	0.5	0.1

a. Hãy tính trung bình lượng xe mỗi loại cô bán, từ đó suy ra doanh thu trung bình cô thu được.

b. Tính phương sai và độ lệch chuẩn cho biến X .

$$a. \mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1.1$$

\Rightarrow Trung bình Linda bán được 1.1 chiếc xe hơi, kiếm được 385\$.

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.1 = 0.7$$

\Rightarrow Trung bình Linda bán được 0.7 chiếc xe tải hoặc SUV, kiếm được 280\$.

b. Bảng phân phối xác suất của X^2 như sau:

X^2	0	1	4	9
p	0.3	0.4	0.2	0.1

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 = 2.1$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0.89$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{89}}{10}.$$

Bài 5. Một nhà sản xuất ổ đĩa bán ra các thiết bị lưu trữ với dung lượng 1 terabyte, 500 gigabyte và 100 gigabyte với tỷ lệ tương ứng là 50%, 30% và 20%. Doanh thu ước tính trong năm tương ứng với từng thiết bị bán ra là 50 triệu \$, 25 triệu \$ và 10 triệu \$. Xác định hàm xác suất, hàm phân phối cho doanh thu của thiết bị lưu trữ trong năm đó. Tính doanh thu trung bình của thiết bị lưu trữ trong năm đó.

Gọi X là doanh thu của nhà sản xuất, đơn vị triệu \$. Bảng phân phối xác suất của X như sau:

X^2	10	25	30
p	0.2	0.3	0.5

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 10 \\ 0.2, & \text{nếu } 10 \leq x < 25 \\ 0.5, & \text{nếu } 25 \leq x < 50 \\ 1, & \text{nếu } x \geq 50 \end{cases}.$$

Doanh thu trung bình của nhà sản xuất trong năm đó là:

$$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 0.2 + 25 \cdot 0.3 + 50 \cdot 0.5 = 234.5 \text{ (triệu \$)}.$$

Bài 6. Đặt ngẫu nhiên mỗi một trái banh trong ba trái banh đang có vào một trong ba cái chén. Tìm phân phối xác suất cho Y với Y là số cái chén trống.

Gọi x_1, x_2, x_3 với $x_i \geq 0$ là số trái banh trong chén thứ i . Ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Phương trình này có số lượng nghiệm nguyên không âm là: $K_3^3 = 10$.

Trường hợp 1: Không có cái chén nào rỗng.

Trong trường hợp này, mỗi cái chén chứa đúng một trái banh. Số cách chọn là 1. Xác suất cho trường hợp này là $p_1 = \frac{1}{10} = 0.1$

Trường hợp 2: Có một cái chén rỗng.

Trong hai cái chén còn lại, có một cái chén chứa hai trái banh. Số cách chọn cho trường hợp này là $C_3^1 \cdot C_2^1 = 6$. Xác suất cho trường hợp này là $p_2 = \frac{6}{10} = 0.6$

Trường hợp 3: Có hai cái chén rỗng.

Số cách chọn cho trường hợp này là $C_3^2 = 3$. Xác suất cho trường hợp này là $p_3 = \frac{3}{10} = 0.3$

Bảng phân phối xác suất cho Y như sau

Y	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

Bài 7. . Một giáo sư đại học không bao giờ kết thúc bài giảng của mình trước khi hết giờ và luôn hoàn thành bài giảng của mình trong vòng 2 phút sau giờ học. Cho X là thời gian trôi qua giữa thời điểm hết tiết học và kết thúc bài giảng của giáo sư. Giả sử hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

- Tìm k .
- Hãy tính xác suất bài giảng kết thúc trong vòng 1 phút sau khi giờ học kết thúc.
- Hãy tính xác suất bài giảng tiếp tục diễn ra sau khi giờ học kết thúc từ 60s đến 90s.
- Xác suất mà bài giảng tiếp tục trong ít nhất 90s ngoài giờ kết thúc là bao nhiêu?

a. $f(x)$ là hàm mật độ xác suất

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 kx^2 dx + \int_2^{\infty} 0 dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{8k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 1) &= \int_{-\infty}^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

c.

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{19}{64}.$$

d.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 1.5) &= \int_{-\infty}^{1.5} f(x) dx \\ &= \int_0^{1.5} \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{27}{64} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 1.5) &= \frac{37}{64}.\end{aligned}$$

Bài 8. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & \text{nếu } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

- a. Tìm hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = 2X - 3$.
b. Tính $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y)$.

a. Gọi G là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y .

$$\begin{aligned}G(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(2X - 3 \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y+3}{2}\right)\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $y < -3$. $G(y) = 0$.

Trường hợp 2: $-3 \leq y \leq -1$.

$$\begin{aligned}G(y) &= \int_{-\infty}^{\frac{y+3}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{y+3}{2}} 6x(1-x) dx \\ &= (3x^2 - 2x^3) \Big|_0^{\frac{y+3}{2}} = -\frac{y^3 + 6y^2 + 9y}{4}\end{aligned}$$

Trường hợp 3: $y \geq -1$. $G(y) = 1$.

Vậy hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên Y là:

$$g(y) = \begin{cases} -\frac{3y^2 + 12y + 9}{4}, & \text{nếu } y \in [-3, -1] \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

b.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) dx = \frac{1}{2} \\ \mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) dx = \frac{3}{10} \\ \mathbb{E}(Y) &= \int_{-3}^{-1} y \cdot \left(-\frac{3y^2 + 12y + 9}{4}\right) dy = -2\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-3}^{-1} y^2 \cdot \left(-\frac{3y^2 + 12y + 9}{4} \right) dy = \frac{21}{5}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{20}.$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{5}.$$

Bài 9. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 0 \\ 1, & \text{nếu } x > \frac{\pi}{4} \\ \sin(2x), & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

a. Tìm hàm mật độ xác suất của X .

b. Tính $\mathbb{P}\left(-\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

a. Hàm mật độ xác suất của X là:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos(2x), & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

b.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(-\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos(2x) dx = 1. \end{aligned}$$

Bài 10. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của X và Y

$X \backslash Y$	1.5	2	3.5
1	3λ	λ	0
2	2λ	4λ	2λ
4	λ	2λ	5λ

a. Xác định hằng số λ .

b. Tìm các phân phối lề của biến ngẫu nhiên X và biến ngẫu nhiên Y .

c. Tìm hàm mật độ có điều kiện của Y khi biết $X = x$ và hàm mật độ có điều kiện của X khi $Y = y$.

a. Tổng xác suất trong bảng bằng 1 nên:

$$3\lambda + \lambda + 2\lambda + 4\lambda + 2\lambda + \lambda + 2\lambda + 5\lambda = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0.05$$

b. Bảng phân phối lẽ của biến ngẫu nhiên X :

X	1	2	4
$f_X(X)$	0.2	0.4	0.4

Bảng phân phối lẽ của biến ngẫu nhiên Y :

Y	1	2	4
$f_Y(y)$	0.3	0.35	0.35

c. $f_{X|Y}(x|y)$

$X \backslash Y$	1.5	2	3.5
1	0.75	0.25	0
2	0.25	0.5	0.25
4	0.125	0.25	0.625

$f_{Y|X}(y|x)$

$X \backslash Y$	1.5	2	3.5
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	0
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

Bài tập làm thêm

Bài tập 2.9 (bài này giống bài 4 ở trên a)

Bài tập 2.15 (bài này giống bài 5 ở trên a)

Bài tập 2.16 Một kết cấu gồm 3 thành phần cơ khí hoạt động độc lập với nhau. Giả sử rằng xác suất mà các thành phần thứ nhất, thứ hai và thứ ba đáp ứng được các chỉ tiết kỹ thuật lần lượt là 0.95, 0.98, 0.99. Tìm hàm xác suất, hàm phân phối xác suất cho số lượng các thành phần đáp ứng chỉ tiết kỹ thuật trong kết cấu.

Gọi X là số lượng thành phần đáp ứng các chỉ tiết kỹ thuật.

Trường hợp 1. Không có thành phần nào đáp ứng các chỉ tiết kỹ thuật.

Xác suất cho trường hợp này là $p_1 = 0.05 \cdot 0.02 \cdot 0.01 = \frac{1}{100000}$.

Trường hợp 2. Có đúng một thành phần đáp ứng các chỉ tiết kỹ thuật.

Xác suất cho trường hợp này là $p_2 = 0.95 \cdot 0.02 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.98 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.02 \cdot 0.99 = \frac{167}{100000}$.

Trường hợp 3. Có đúng hai thành phần đáp ứng các chi tiết kỹ thuật. Xác suất cho trường hợp này là $p_3 = 0.95 \cdot 0.98 \cdot 0.01 + 0.95 \cdot 0.02 \cdot 0.99 + 0.05 \cdot 0.98 \cdot 0.99 = \frac{7663}{100000}$.

Trường hợp 4. Cả ba thành phần đều đáp ứng các chi tiết kỹ thuật.

Xác suất cho trường hợp này là $p_4 = 0.95 \cdot 0.98 \cdot 0.99 = \frac{92169}{100000}$.

Do đó, ta có bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X như sau:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{100000}$	$\frac{167}{100000}$	$\frac{7663}{100000}$	$\frac{92169}{100000}$

Vậy ta được hàm phân phối xác suất của X như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 0 \\ \frac{1}{100000}, & \text{nếu } 0 \leq x < 1 \\ \frac{21}{12500}, & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7831}{100000}, & \text{nếu } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{nếu } x \geq 3 \end{cases}$$

Bài tập 2.17 Miền giá trị của biến ngẫu nhiên Y là $\{0, 1, 2, 3, y\}$ với y chưa biết và $\mathbb{P}(Y = a) = 0.2$ với $a = 0, 1, 2, 3, y$. Tìm y để giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên Y là 6.

$$0.2(0 + 1 + 2 + 3 + y) = 6$$

$$\Leftrightarrow y = 24.$$

Bài tập 2.18 Trong một hộp có hai đồng xu 10 cent và một đồng xu 50 cent. Chọn ngẫu nhiên hai đồng xu từ hộp. Gọi X là tổng giá trị hai đồng xu lấy ra.

- X có thể nhận những giá trị nào?
- Tìm hàm phân phối xác suất của X .

a. X có thể nhận các giá trị 20, 60.

b. Xác suất cho trường hợp X nhận giá trị 20 là: $\frac{1}{C_3^1} = \frac{1}{3}$.

Xác suất cho trường hợp X nhận giá trị 60 là: $\frac{C_2^1}{C_3^1} = \frac{2}{3}$.

Bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	20	60
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Hàm phân phối xác suất của X như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 20 \\ \frac{1}{3}, & \text{nếu } 20 \leq x < 60 \\ 1, & \text{nếu } x \geq 60 \end{cases}$$

Bài tập 2.19 Sở Y tế kiểm tra hai tạp chất thường thấy trong nước uống ở những giếng tư nhân trong một tỉnh. Kết quả kiểm tra cho thấy có 20% các giếng có cả hai tạp chất, 40% các giếng có tạp chất A, 50% các giếng có tạp chất B. Nếu chọn ngẫu nhiên một giếng từ các giếng trong tỉnh, tìm phân phối xác suất cho Y , với Y là số tạp chất được tìm thấy trong giếng.

Phần trăm số lượng các giếng chỉ có tạp chất A là: 20%.

Phần trăm số lượng các giếng chỉ có tạp chất B là: 30%.

Phần trăm số lượng các giếng có cả hai tạp chất là 20%.

Phần trăm số lượng các giếng không có tạp chất là: $100\% - 20\% - 30\% - 20\% = 30\%$.

Vậy bảng phân phối xác suất của Y là:

Y	0	1	2
p	0.3	0.5	0.2

Bài tập 2.20 Trong một kiểm tra đưa ra cho các đứa trẻ, có ba tấm hình về các động vật, yêu cầu các đứa trẻ nối một tấm hình đến một từ để nhận biết các động vật đó. Nếu một đứa trẻ gán ba từ một cách ngẫu nhiên đến ba hình ảnh, tìm phân phối xác suất cho Y với Y là số lần nhận diện đúng.

Trường hợp 1: $Y = 3$. Xác suất cho trường hợp này là $\frac{1}{6}$.

Trường hợp $Y = 2$ không xảy ra vì nếu đứa trẻ đó đã nhận diện đúng hai động vật thì động vật thứ ba cũng đúng.

Trường hợp 2: $Y = 1$. Xác suất cho trường hợp này là $\frac{1}{2}$.

Trường hợp 3: $Y = 0$. Xác suất cho trường hợp này là $\frac{1}{3}$.

Bảng phân phối xác suất của Y như sau:

Y	0	1	3
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Bài tập 2.21 (bài này giống bài 6 ở trên ạ)

Bài tập 2.26 (bài này giống bài 1 ở trên ạ)

Bài tập 2.27 Lỗi liên quan đến việc thực hiện một phép đo nhất định là một biến ngẫu nhiên X với hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0.09375(4 - x^2), & \text{nếu } -2 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}.$$

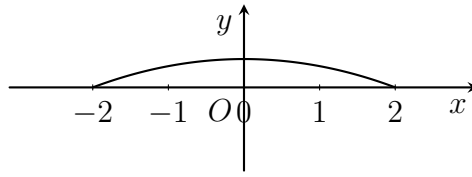
a. Hãy vẽ hàm mật độ xác suất của X .

b. Tính $\mathbb{P}(X > 0)$.

c. Tính $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$.

d. Tính $\mathbb{P}(X < -0.5 \text{ hoặc } X > 0.5)$.

a.



b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 0) &= \int_{-2}^0 0.09375 (4 - x^2) dx = \frac{1}{2}. \\ \Rightarrow \mathbb{P}(X > 0) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c.

$$\mathbb{P}(-1 < x < 1) = \int_{-1}^1 0.09375 (4 - x^2) dx = \frac{11}{16}.$$

d.

$$\mathbb{P}(X < -0.5 \text{ hoặc } X > 0.5) = 1 - \int_{-0.5}^{0.5} 0.09375 (4 - x^2) dx = 1 - \frac{81}{128}.$$

Bài tập 2.28 (bài này giống bài 7 ở trên ạ)

Bài tập 2.29 Giả sử nhiệt độ phản ứng X (tính theo $^{\circ}C$) trong một quá trình phản ứng hóa học nào đó có phân phối đều với $A = -5$ và $B = 5$.

a. Tính $\mathbb{P}(X < 0)$.

b. Tính $\mathbb{P}(-2.5 < X < 2.5)$.

c. $\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 3)$.

d. Với k thỏa $-5 < k < k + 4 < 5$, hãy tính $\mathbb{P}(k < X < k + 4)$.

a. Do X có phân phối đều nên hàm mật độ xác suất của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{nếu } -5 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{còn lại} \end{cases}.$$

$$\mathbb{P}(X < 0) = \int_{-5}^0 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}.$$

b.

$$\mathbb{P}(-2.5 < X < 2.5) = \int_{-2.5}^{2.5} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}.$$

c.

$$\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 3) = \int_{-2}^3 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}.$$

d.

$$\mathbb{P}(k < X < k + 4) = \int_k^{k+4} \frac{1}{10} dx = \frac{2}{5}.$$

Bài tập 2.34 Gọi X là tuổi thọ của con người. Một công trình nghiên cứu cho biết hàm mật độ xác suất của X là:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(100-x)^2, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 100 \\ 0, & \text{còn lại.} \end{cases}.$$

- Xác định hằng số c .
- Tính trung bình và phương sai của X .
- Tính xác suất của một người có tuổi thọ ≥ 60 .
- Tính xác suất của một người có tuổi thọ ≥ 60 , biết rằng hiện nay người đó đã 50 tuổi.

a.

$$\int_0^{100} cx^2(100-x)^2 dx = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{10^9}.$$

b.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{100} x \cdot \frac{3}{10^9} x^2 (100-x)^2 dx = 50. \\ \mathbb{E}(X^2) &= \int_0^{100} x^2 \cdot \frac{3}{10^9} x^2 (100-x)^2 dx = \frac{20000}{7}. \\ \mathbb{V}(X) &= \frac{20000}{7} - 50^2 = \frac{2500}{7}. \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 60) &= \int_0^{60} \frac{3}{10^9} x^2 (100-x)^2 dx = \frac{2133}{3125}. \\ \mathbb{P}(X \geq 60) &= 1 - \frac{2133}{3125} = \frac{992}{3125}. \end{aligned}$$

d.

$$\mathbb{P}(X \leq 60 | X \leq 50) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 60)}{\mathbb{P}(X \geq 50)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq 60)}{1 - \mathbb{P}(X \leq 50)} = \frac{1984}{3125}.$$

Bài tập 2.37 Cho X là một biến ngẫu nhiên có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{nếu } x > 2 \end{cases}.$$

- Tính $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
- Tính $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 1)$.

- c. Tính $\mathbb{P}(X \geq 1.5)$.
- d. Tìm giá trị trung vị của X .
- e. Tìm hàm mật độ xác suất $f(x)$.
- f. Tính $\mathbb{E}(X)$.
- g. Tính $\mathbb{V}(X)$ và σ_X .
- h. Tính trung bình của biến ngẫu nhiên $h(X) = X^2$.

a.

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}.$$

b.

$$\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0.5) = \frac{3}{16}.$$

c.

$$\mathbb{P}(X \geq 1.5) = 1 - \mathbb{P}(X < 1.5) = 1 - F(1.5) + F(0) = \frac{7}{16}.$$

d. Giá trị trung vị của X là x_M thỏa: $F(x_M) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_M = \sqrt{2}$.

Vậy $Med(X) = \sqrt{2}$.

e. Hàm mật độ xác suất của X như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

f.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}.$$

g.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = 2.$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{9}.$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

h. $\mathbb{E}(X^2) = 2$.

Bài tập 2.174 Cho vector ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y)^2, & \text{khi } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}.$$

a. Tìm các hàm mật độ lề $f_X(x), f_Y(y)$.

b. Tìm các trung bình μ_X, μ_Y , các phương sai σ_X^2, σ_Y^2 , và hệ số tương quan $\rho_{X,Y}$.

a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 c(x+y)^2 dy dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{6}{7}.$$

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dy = \frac{6}{7}x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{2}{7}.$$

Tương tự:

$$f_Y(y) = \frac{6}{7}y^2 + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}.$$

b.

$$\mu_X = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{6}{7}x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{2}{7} \right) dx = \frac{9}{14}.$$

$$\mu_Y = \int_0^1 y \cdot \left(\frac{6}{7}y^2 + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7} \right) dy = \frac{9}{14}.$$

$$\mu_{X^2} = \int_0^1 x^2 \cdot \left(\frac{6}{7}x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{2}{7} \right) dx = \frac{101}{210}.$$

$$\mu_{Y^2} = \int_0^1 y^2 \cdot \left(\frac{6}{7}y^2 + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7} \right) dy = \frac{101}{210}.$$

$$\sigma_X^2 = \mu_{X^2} - (\mu_X)^2 = \frac{199}{2940}.$$

$$\sigma_Y^2 = \mu_{Y^2} - (\mu_Y)^2 = \frac{199}{2940}.$$

$$\mu_{XY} = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot \frac{6}{7}(x+y)^2 dy dx = \frac{17}{42}.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mu_{XY} - \mu_X \mu_Y = -\frac{5}{588}.$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = -\frac{25}{199}.$$

Bài tập 2.175 Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan nếu biết hàm xác suất đồng thời như sau:

x	1	1	2	4
y	3	4	5	6
$f_{X,Y}(x, y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	3	4	5	6	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
4	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
$f_Y(y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	

$$\mathbb{E}(X) = \frac{15}{8}.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{37}{8}.$$

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{75}{8}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{35}{8}.$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{177}{8}.$$

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{45}{64}.$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{55}{64}.$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{47}{64}.$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} \approx 0.885.$$