Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131
Lớp: 20CTT1

Bài tập môn Xác suất thống kê
Chương 5: Lý thuyết mẫu – Lý thuyết ước lượng

Bài tập 4.20 Giả sử tuổi thọ của bóng đèn do một công ty sản xuất xấp xỉ phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 40 giờ. Một mẫu 30 bóng đèn cho thấy tuổi thọ trung bình là 780 giờ.
a. Hãy tìm khoảng tin cậy 96% cho tuổi thọ trung bình của tất cả bóng đèn do công ty này sản xuất.
b. Nếu muốn sái số ước lượng không quá 10 giờ thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu bóng đèn?

Lời giải.
a. Ta đã biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.98} = 2.055$.
Vậy khoảng tin cậy 96% cho tham số μ là:

$$[764.9924, 795.0076].$$

b. Sai số ước lượng:

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \approx 67.5684$$

Vậy để sai số ước lượng không vượt quá E thì phải quan sát ít nhất 68 trường hợp.

Bài tập 4.21 Một máy sản xuất ra các ống kim loại có dạng hình trụ. Một mẫu gồm các ống kim loại được chọn ra để khảo sát với các đường kính thu được là: $1.01; 0.97; 1.03; 1.04; 0.99; 0.98; 0.99; 1.01$ và 1.03 cm.
a. Tìm khoảng tin cậy 99% cho đường kính trung bình của ống kim loại được sản xuất từ máy này, giả sử đường kính của ống kim loại xấp xỉ phân phối chuẩn.
b. Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.0005 inch với độ tin cậy 95% thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.
a. $n = 9$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 1.0056$.

Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 6.0278 \cdot 10^{-4}$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.0246$.
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 9 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Student: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = 3.3554$.
Vậy khoảng tin cậy 99% cho tham số μ là:

$$[0.9781, 1.0331].$$

b. 0.0005 inch = 0.00127cm.
Giả sử phải quan sát nhiều nhất là 30 sản phẩm. Sai số ước lượng:

$$e = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{29} \cdot s}{e}\right)^2 \approx 1569.4025 > 30.$$

Vậy phải quan sát nhiều hơn 30 sản phẩm. Khi đó:

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{E}\right)^2 \approx 1441.3681$$

Vậy để sai số ước lượng không vượt quá E thì phải quan sát ít nhất 1442 trường hợp.

Bài tập 4.22 Một mẫu ngẫu nhiên của 100 chủ sở hữu ô tô ở bang Virginia cho thấy rằng một chiếc ô tô được lái trung bình 23500km mỗi năm với độ lệch tiêu chuẩn là 3900km. Giả sử số km ô tô đi được là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Tìm khoảng tin cậy 99% cho số km ô tô lăn bánh trung bình mỗi năm ở Virginia.

Lời giải. Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 100 > 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
Vậy khoảng tin cậy 99% cho tham số μ là:

$$[22495.75, 24504.25].$$

Bài tập 4.23 Giả sử năng lượng của thanh chocolate là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 10 thanh chocolate của một thương hiệu nào đó cho thấy năng lượng trung bình là 230 calo mỗi thanh, với độ lệch chuẩn là 15 calo. Xây dựng một khoảng tin cậy 99% cho con số calo trung bình thực sự của thương hiệu này.

Lời giải. Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 10 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Student: $t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = 3.2498$.
Vậy khoảng tin cậy 99% cho tham số μ là:

$$[214.5848, 245.4152].$$

Bài tập 4.28 Cường độ nén của bê tông đang được thử nghiệm bởi một kỹ sư dân dụng. Anh ta kiểm tra 12 mẫu vật và thu được dữ liệu sau đây

2216 2237 2249 2204 2225 2301

2281 2263 2318 2255 2275 2295

Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho cường độ nén trung bình.

Lời giải.
$n = 12$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 2259.9167$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 1265.1742$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 35.5693$.
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 12 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Student: $t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.2010$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[2237.3169, 2282.5165].$$

Bài tập 4.29 Một máy sản xuất các thanh kim loại được sử dụng trong một hệ thống treo ô tô. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 15 que được chọn để đo đường kính. Dữ liệu kết quả (tính bằng millimeter) như sau:

8.24 8.25 8.20 8.23 8.24 8.21 8.26

8.26 8.20 8.25 8.23 8.19 8.28 8.24

Xác định khoảng tin cậy 90% cho đường kính trung bình.

Lời giải.
$n = 14$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=11}^{n} x_i \approx 8.2343$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 6.8791 \cdot 10^{-4}$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.0262$.
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 14 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Student: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = 1.7709$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[8.2219, 8.2467].$$

Bài tập 4.30 Đo lượng cholesterol (đơn vị mg%) cho một số người, ta được

X	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200	200-210
Số người	2	4	5	6	4	3

a. Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu.
b. Một mẫu thứ nhì Y có 30 người cho trung bình 180mg% và độ lệch chuẩn 16mg%. Nhập hai mẫu lại, tính trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu nhập.

Lời giải. Ta lấy giá trị của mỗi khoảng là giá trị trung bình của khoảng đó. Ta được:

X	155	165	175	185	195	205
Số người	2	4	5	6	4	3

a. $n = 24$
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx 181.25$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 224.4565$.

Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 14.9819$.
b. Trung bình mẫu nhập:

$$\widehat{z} = \frac{\widehat{x} \cdot n_1 + \widehat{y} \cdot n_2}{n_1 + n_2} \approx 180.5556.$$

Phương sai mẫu nhập:

$$s_z^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_x^2 + (n_2 - 1)\, s_y^2}{n_1 + n_2 - 2} \approx 242.0481.$$

Độ lệch chuẩn mẫu nhập:

$$s_z \approx 15.5579.$$

Bài tập 4.47 Đo đường kính của một chi tiết máy do một máy tiện tự động sản xuất, ta ghi nhận được số liệu như sau:

X	12.00	12.05	12.10	12.15	12.20	12.25	12.30	12.35	12.40
N	2	3	7	9	10	8	6	5	3

với N chỉ số trường hợp tính theo từng giá trị của X (mm).
a. Tính trung bình mẫu và độ lệch chuẩn của mẫu.
b. Ước lượng đường kính trung binh μ ở độ tin cậy 0.95.
c. Nếu muốn sai số ước lượng không quá $E = 0.02$mm ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp?

Lời giải.
a. $n = 53$
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \approx 12.2066$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 0.0106$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 0.1029$.
b. Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 53 > 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[12.2032, 12.2100].$$

c. Sai số ước lượng là:

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{E}\right)^2 \approx 101.6911$$

Vậy để sai số ước lượng không vượt quá E thì phải quan sát ít nhất 102 trường hợp.

Bài tập 4.48 Quan sát chiều cao X (mm) của một số người, ta ghi nhận:

X	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170
Số người	1	3	7	9	5	2

a. Tính trung bình mẫu và phương sai mẫu.
b. Ước lượng trung bình và phương sai của tổng thể ở độ tin cậy 0.95.

Lời giải. Ta lấy giá trị của mỗi khoảng là giá trị trung bình của khoảng đó. Ta được:

X	142.5	147.5	152.5	157.5	162.5	167.5
Số người	1	3	7	9	5	2

a. $n = 27$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 156.2037$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 37.6781$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 6.1382$.
b. Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 27 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Student: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = 2.0555$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[153.7755, 158.6319].$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho phương sai tổng thể σ^2 là:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% cho tham số σ^2 là:

$$[23.3674, 70.7621].$$

Bài tập 4.49 Đem cân một số trái cây vừa thu hoạch, ta được kết quả sau:

X	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
Số trái	12	17	20	18	15

a. Tìm khoảng ước lượng của trọng lượng trung bình của trái cây với độ tin cậy 0.95 và 0.99.
b. Nếu muốn sai số ước lượng không quá $E = 2$g ở độ tin cậy 99% thì phải quan sát ít nhất bao nhiêu trái?

Lời giải.
a. Ta lấy giá trị của mỗi khoảng là giá trị trung bình của khoảng đó. Ta được:

X	205	215	225	235	245
Số trái	12	17	20	18	15

$n = 82$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 225.8537$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \approx 175.8055$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 13.2592$.
Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước lớn $(n = 82 > 30)$.

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[222.9838, 228.7236].$$

Tra bảng phân phối Gauss: $z_{1-\frac{\beta}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
Vậy khoảng tin cậy 99% cho tham số μ là:

$$[222.0833, 229.6241].$$

b. Sai số ước lượng:

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{E}\right)^2 \approx 291.4266$$

Vậy để sai số ước lượng không vượt quá E thì phải quan sát ít nhất 292 trường hợp.

Bài tập 4.50 Người ta đo Na^+ trên một số người và ghi nhận lại kết quả như sau:

$$129, 132, 140, 141, 138, 143, 133, 137, 140, 143, 138, 140$$

a. Tính trung bình mẫu và phương sai mẫu.
b. Ước lượng trung bình và phương sai của tổng thể ở độ tin cậy 0.95.
c. Nếu muốn sai số ước lượng trung bình không quá $E = 1$ với độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát mẫu gồm ít nhất mấy người?

Lời giải.
a. $n = 12$.
Trung bình mẫu: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=11}^{n} x_i \approx 137.8333$.
Phương sai mẫu: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 19.4242$.
Độ lệch chuẩn mẫu: $s_x \approx 4.4073$.
b. Ta chưa biết phương sai tổng thể (σ^2) và mẫu có kích thước nhỏ $(n = 10 < 30)$.

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tham số μ là:

$$\left[\overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Tra bảng phân phối Student: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = 2.2010$.
Vậy khoảng tin cậy 95% cho tham số μ là:

$$[135.0333, 140.6336].$$

Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho phương sai tổng thể σ^2 là:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% cho tham số σ^2 là:

$$[9.7475, 55.9922].$$

c. Giả sử phải quan sát nhiều nhất là 30 sản phẩm. Sai số ước lượng:

$$e = t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{29} \cdot s}{e}\right)^2 \approx 81.2488 > 30.$$

Vậy phải quan sát nhiều hơn 30 sản phẩm. Khi đó:

$$e = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$e \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s}{E}\right)^2 \approx 74.6204$$

Vậy để sai số ước lượng không vượt quá E thì phải quan sát ít nhất 75 trường hợp.

Bài tập 4.55 Trong số 1000 trường hợp ung thư phổi được lựa chọn ngẫu nhiên, 823 trường hợp tử vong trong vòng 10 năm.
a. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ tử vong do ung thư phổi.
b. Sử dụng ước lượng điểm của p thu được từ mẫu trên, hỏi cỡ mẫu tối thiểu để sai số khi ước lượng giá trị thực của p nhỏ hơn 0.03 với độ tin cậy 95%?
c. Không sử dụng ước lượng điểm của p thu được từ mẫu trên, hỏi mẫu phải lớn đến mức nào nếu ta muốn, với độ tin cậy ít nhất 95%, sai số khi ước lượng giá trị thực của p nhỏ hơn 0.03?

Lời giải.
a.

$$\widehat{p} = \frac{823}{1000}.$$

$$n\widehat{p} = 823 \geqslant 5, n\left(1 - \widehat{p}\right) \geqslant 5.$$

Tra bảng Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tỉ lệ tổng thể là:

$$\left[\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ tử vong do ung thư phổi là:

$$[0.7993, 0.8467].$$

b. Dung sai:

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}$$

$$\varepsilon \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{E^2} \approx 621.7886$$

Vậy phải kiểm tra ít nhất 622 trường hợp.

Bài tập 4.56 Một mẫu ngẫu nhiên gồm 50 mũ bảo hiểm được sử dụng bởi người đi xe máy và người lái xe đua ô tô đã được thử nghiệm va chạm, và 18 trong số những chiếc mũ bảo hiểm đã bị thiệt hại.
a. Tìm khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ mũ bảo hiểm loại này sẽ cho thấy thiệt hại từ thử nghiệm này.
b. Sử dụng ước lượng điểm của p thu được từ mẫu trên, hỏi cỡ mẫu tối thiểu để sai số khi ước lượng giá trị thực của p nhỏ hơn 0.02 với độ tin cậy 95%?
c. Không sử dụng ước lượng điểm của p thu được từ mẫu trên, hỏi mẫu phải lớn đến mức nào nếu ta muốn, với độ tin cậy ít nhất 95%, sai số khi ước lượng giá trị thực của p nhỏ hơn 0.02?

Lời giải.
a.

$$\widehat{p} = \frac{18}{50}.$$

$$n\widehat{p} \geqslant 5, n\left(1 - \widehat{p}\right) \geqslant 5.$$

Tra bảng Gauss: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
Khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho tỉ lệ tổng thể là:

$$\left[\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ mũ bảo hiểm sẽ bị thiệt hại là:

$$[0.2270, 0.4930].$$

b. Dung sai:

$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}$$

$$\varepsilon \leqslant E \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{E^2} \approx 2212.7616$$

Vậy phải kiểm tra ít nhất 2213 trường hợp.

Bài tập 4.58 Một nghiên cứu sẽ được thực hiện về tỉ lệ gia đình có ít nhất hai tivi. Một mẫu được yêu cầu lớn đến mức nào nếu chúng tôi muốn tự tin rằng sai số khi ước tính số lượng này nhỏ hơn 0.017 với độ tin cậy 99%?

Lời giải.
Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
Để sai số ước lượng $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ thì ta chọn n thỏa mãn:

$$n \geqslant \frac{0.25\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{\varepsilon_0^2} \approx 5735.8348.$$

Vậy để sai số nhỏ hơn 0.017 với độ tin cậy 99% thì ta phải kiểm tra ít nhất 5736 trường hợp.

Bài tập 4.59 Trong số liệu từ cuộc bầu cử tổng thống năm 2004, một bang quan trọng là bang Ohio đã cho kết quả sau đây: đã có 2020 người trả lời trong các cuộc thăm dò xuất cảnh và 768 là sinh viên tốt nghiệp đại học. Trong số các sinh viên tốt nghiệp đại học có 412 bầu cho George Bush. Xây dựng khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp đại học bầu cho George Bush.

Lời giải.

$$\widehat{p} = \frac{412}{768} = \frac{103}{192}.$$

$$n\widehat{p} \geqslant 5, n\left(1-\widehat{p}\right) \geqslant 5.$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Khoảng tin cậy $1-\alpha$ cho tỉ lệ tổng thể là:

$$\left[\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}\right].$$

Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp đại học bầu cho George Bush là:

$$\left[0.5012, 0.5717\right].$$

Bài tập 4.60 Một loại thuốc mới đem điều trị cho 50 người bị bệnh B, kết quả có 40 người khỏi bệnh.
a. Ước lượng tỉ lệ khỏi bệnh p nếu dùng thuốc đó điều trị với độ tin cậy 0.95 và độ tin cậy 0.99.
b. Nếu muốn sai số ước lượng không quá 0.02 ở độ tin cậy 0.95 thì phải quan sát ít nhất mấy trường hợp?

Lời giải.
a.

$$\widehat{p} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}.$$
$$n\widehat{p} \geqslant 5, n\left(1-\widehat{p}\right) \geqslant 5.$$

Khoảng tin cậy $1-\alpha$ cho tỉ lệ tổng thể là:

$$\left[\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}\left(1-\widehat{p}\right)}{n}}\right].$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp đại học bầu cho George Bush là:

$$\left[0.6891, 0.9109\right].$$

Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\beta}{2}} = z_{0.995} = 2.575$.
Khoảng tin cậy 95% cho tỉ lệ sinh viên tốt nghiệp đại học bầu cho George Bush là:

$$\left[0.6543, 0.0.9457\right].$$

b. Để sai số ước lượng $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ thì ta chọn n thỏa mãn:

$$n \geqslant \frac{0.25\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{\varepsilon_0^2} \approx 2401.$$

Vậy để sai số nhỏ hơn 0.02 với độ tin cậy 95% thì ta phải kiểm tra ít nhất 2402 trường hợp.

Bài tập 4.61 Một loại bệnh có tỉ lệ tử vong là 0.01. Muốn chứng tỏ một loại thuốc có hiệu nghiệm (nghĩa là hạ thấp được tỉ lệ tử vong nhỏ hơn 0.005) ở độ tin cậy 0.95 thì phải thử thuốc đó trên ít nhất bao nhiêu người?

Lời giải. Tra bảng Gauss ta được: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.975} = 1.96$.
Để sai số ước lượng $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ thì ta chọn n thỏa mãn:

$$n \geqslant \frac{0.25\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{\varepsilon_0^2} \approx 38416.$$

Vậy để sai số nhỏ hơn 0.005 với độ tin cậy 95% thì ta phải kiểm tra ít nhất 38417 trường hợp.