ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tổng hợp bởi Nguyễn Văn Lộc

Mục lục

Chương 1

Ma trận và hệ phương trình tuyến tính

1.1 Ma trận

1.1.1 Định nghĩa và ký hiệu

Định nghĩa ma trận

Một *ma trận* A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng n cột mới $m \times n$ phần tử trong $\mathbb{R}$, có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu

- $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- a_{ij} hay A_{ij} là phần tử ở vị trí dòng i cột j của A.
- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$: tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

Ma trận không

Ma trận cấp $m \times n$ có các phần tử đều bằng 0 được gọi là *ma trận không,* ký hiệu $0_{m\times n}$ (hay 0).

1.1.2 Ma trận vuông

Định nghĩa ma trận vuông

Ma trận vuông là ma trận có số dòng bằng số cột.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$M_n(\mathbb{R})$: tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$.

Đường chéo chính

Nếu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là *đường chéo chính* (hay *đường chéo*) của A.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Ma trận tam giác, ma trận đường chéo

Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông. Khi đó

- Nếu các phần tử nằm dưới đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j$) thì A được gọi là ***ma trận tam giác trên.***
- Nếu các phần tử nằm trên đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i < j$) thì A được gọi là ***ma trận tam giác dưới.***
- Nếu mọi phần tử nằm ngoài đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$) thì A được gọi là ***ma trận đường chéo,*** ký hiệu

$$A = \text{diag}\,(a_1, a_2, ..., a_n)\,.$$

Nhận xét. Ma trận A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi A vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

Ma trận đơn vị

Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là *ma trận đơn vị* cấp n, ký hiệu I_n (hoặc I).

1.1.3 Các phép toán trên ma trận

So sánh hai ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó, nếu $A_{ij} = B_{ij}, \forall i, j$ thì A và B được gọi là *hai ma trận bằng nhau,* ký hiệu $A = B$.

Chuyển vị ma trận

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi *ma trận chuyển vị* của A, ký hiệu A^{T}, là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tính chất. Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó:
- $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$;
- $A^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow A = B$.

Định nghĩa. Cho A là ma trận vuông. Nếu $A^{\mathrm{T}} = A$ thì ta nói A là ***ma trận đối xứng.***

Nhân một số với ma trận

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa *tích* của α với A (kí hiệu αA) là ma trận được xác định bằng cách nhân các phần tử của A với α, nghĩa là

$$(\alpha A)_{ij} := \alpha A_{ij}, \forall i, j.$$

Nếu $\alpha = -1$, ta ký hiệu $(-1)A$ bởi $-A$ và gọi là *ma trận đối* của A.

Tính chất. Cho A là ma trận và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- $(aA)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;
- $0 \cdot A = 0$ và $1 \cdot A = A$.

Tổng của hai ma trận

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó *tổng* của A và B, ký hiệu là $A + B$, là ma trận được xác định bởi

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}, \forall i, j.$$

Nhận xét. Để tính $A + B$ thì:
- A và B cùng cấp;
- Các vị trí tương ứng cộng lại.

Ký hiệu. $A - B := A + (-B)$ và được gọi là *hiệu* của A và B.

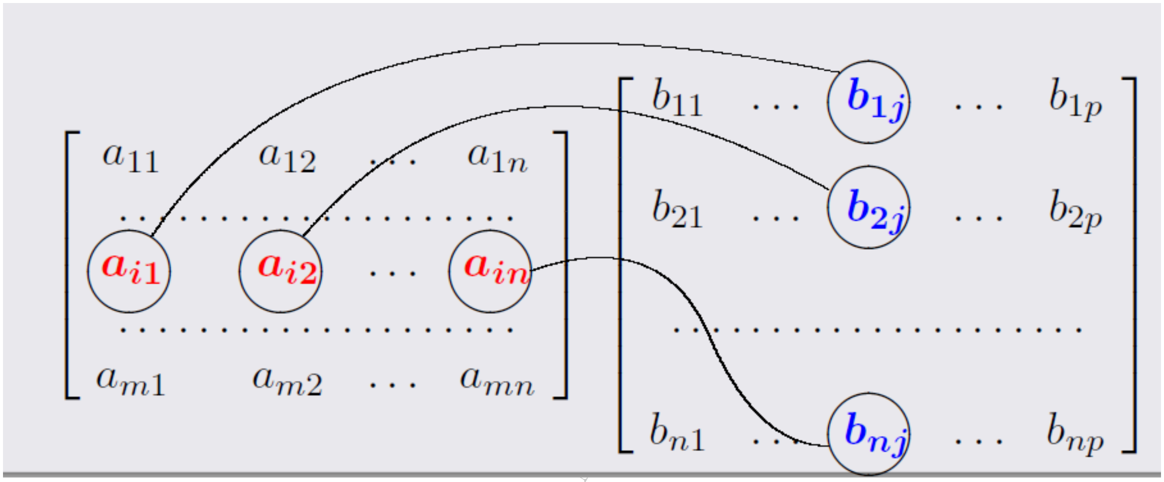
Tính chất. Cho $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có
- $A + B = B + A$ (*tính giao hoán*);
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*tính kết hợp*);
- $0 + A = A + 0 = A$;
- $A + (-A) = (-A) + A = 0$;
- $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

- $(\alpha+\beta)\,A = \alpha A + \beta A$;

Tích của hai ma trận

Cho hai ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Khi đó, *tích* của A với B (ký hiệu AB) là ma trận thuộc $M_{m\times p}(\mathbb{R})$ được xác định bởi

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &:= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}.\end{aligned}$$



Nhận xét. Để tính tích AB thì
- Số cột của A bằng số dòng của B;
- Phần tử vị trí i, j của AB bằng dòng i của A nhân với cột j của B.

Tính chất. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, và $D_1, D_2 \in M_{q\times m}(\mathbb{R})$. Khi đó
- $I_m A = A$ và $AI_n = A$. Đặc biệt, với $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta có
$$I_n A = AI_n = A.$$
- $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ và $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. Đặc biệt, với với $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta có
$$0_n A = A0_n = 0_n.$$
- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.
- $(AB)\,C = A\,(BC)$.

- $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
- $(D_1 + D_2) = D_1A + D_2A$.

Lũy thừa ma trận

Cho A là ma trận vuông. Khi đó *lũy thừa* bậc k của A, ký hiệu A^k, được xác định như sau:

$$A^0 := I_n; A^1 := A; A^2 = AA; ...; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A...A}_{k \text{ lần}}$.

Tính chất. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó:

- $I_n^k = I_n$;
- $A^kA^l = A^{k+l}$;
- $\left(A^k\right)^l = A^{kl}$.

Đa thức ma trận

Cho A là ma trận vuông trêN $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức biến x trên $\mathbb{R}$ (nghĩa là $\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, m}$). Khi đó,

$$f(A) := \alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

được gọi là *đa thức theo ma trận A*.

Nhận xét. Cho A là ma trận vuông. Khi đó các hằng đẳng thức, nhị thức Newton vẫn đúng với A.

1.2 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

1.2.1 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng,* viết tắt là BĐSCTD trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

- **Loại 1.** Hoán vị hai dòng i và j $(i \neq j)$.
  Ký hiệu: $d_i \leftrightarrow d_j$
- **Loại 2.** Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$.
  Ký hiệu: αd_i.
- Cộng vào dòng i với β lần dòng j $(j \neq i)$.
  Ký hiệu: $d_i + \beta d_j$

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ là ma trận có được từ A thông qua φ.

Nhận xét. Với định nghĩa tương tự ta cũng có khái niệm các phép biến đổi sơ cấp trên cột: $c_i \leftrightarrow c_j, \alpha c_i, c_i + \beta c_j$.

Nhận xét. Cho A là ma trận và $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

- Nếu $\xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j}$ thì $A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$;
- Nếu $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ thì $A' \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} d_i} A$;
- Nếu $A \xrightarrow{d_i + \beta d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_i - \beta d_j} A$.

Tương đương dòng

Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A *tương đương dòng* với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A thông qua hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{Tồn tại các phép BĐSCTD } \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k \text{ sao cho}$$

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} ... \xrightarrow{\varphi_k} = A_k = B.$$

Quan hệ tương đương dòng của ma trận là một quan hệ tương đương, nghĩa là $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, ta có

- $A \sim A$ (tính phản xạ).
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (tính đối xứng).
- $A \sim B$ và $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (tính bắc cầu).

1.2.2 Ma trận bậc thang

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác 0 đầu tiên của một dòng kể từ bên trái qua được gọi là *phần tử cơ sở* của dòng đó.
Một ma trận được gọi là *ma trận bậc thang* nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

- Các dòng bằng không (nếu có) luôn nằm dưới;
- Phần tử cơ sở của dòng dưới luôn nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Ma trận bậc thang rút gọn

Ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu thỏa 3 điều kiện sau:

- A là ma trận bậc thang.
- Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
- Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các phần tử không phải phần tử cơ sở đều bằng 0.

1.2.3 Hạng của ma trận (dạng bậc thang)

Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một *dạng bậc thang* của A.

Nhận xét. Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có số dòng khác không bằng nhau. Ta gọi số dòng khác không này là ***hạng*** của A, ký hiệu $r\left(A\right)$.

Cho $A, B \in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$. Khi đó:

- $0 \leqslant r\left(A\right) \leqslant \min\left\{m, n\right\}$;
- $r\left(A\right) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- Nếu $A \sim B$ thì $r\left(A\right) = r\left(B\right)$;
- $r\left(A^{\mathrm{T}}\right) = r\left(A\right)$.

Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là *dạng bậc thang rút gọn* của A.

Định lí 1.1 *Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất, được ký hiệu là R_A.*

Thuật toán Gauss tìm một dạng bậc thang của $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$

Bước 1. Cho $i := 1, j := 1$.
Bước 2. Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.
Bước 3.

- Nếu $a_{ij} \neq 0$, thực hiện các phép biến đổi sau:
$$d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \text{ với } k > i.$$
Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về bước 2.
- Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang bước 4.

Bước 4.

- Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép biến đổi $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về bước 3.
- Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về bước 2.

Lưu ý. Trong quá trình đưa về dạng bậc thang, ta nên sử dụng các phép biến đổi phù hợp để hạn chế việc tính toán các số không đẹp.

Lưu ý. Vì $r\left(A\right) = r\left(A^{\mathrm{T}}\right)$ nên trong quá trình tính toán hạng của A ta có thể sử dụng các *phép biến đổi sơ cấp trên cột.*

Thuật toán Gauss – Jordan tìm dạng bậc thang rút gọn của $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$

Chỉ khác Thuật toán Gauss ở bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

- $\frac{1}{a_{ij}} d_i$.
- $d_k - a_{kj} d_i$ với mọi $k \neq i$.

1.3 Hệ phương trình tuyến tính

1.3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Một *hệ phương trình tuyến tính* trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$: các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, ..., x_n$: các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Nếu (1.1) có các hệ số tự do bằng 0 thì ta nói (1.1) là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* trên $\mathbb{R}$.
Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ta gọi A là *ma trận hệ số*, X là cột các *ẩn*, B là cột các *hệ số tự do* của hệ (1.1). Khi đó hệ (1.1) được viết dưới dạng $AX = B$.
Ta gọi $\widetilde{A} = (A|\,B)$ là *ma trận mở rộng* (hay ma trận bổ sung) của hệ (1.1).

1.3.2 Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ là *nghiệm* của hệ phương trình (1.1) nếu ta thế $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong (1.1) đều thỏa.
Hai hệ phương trình được gọi là *tương đương* nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nhận xét. Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- Hoán đổi hai phương trình cho nhau.
- Nhân hai vế của một phương trình với một số khác 0.
- Cộng vào một phương trình với một bội của phương trình khác.

Định lí 1.2 *Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.*

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:

- Vô nghiệm;
- Duy nhất một nghiệm;
- Vô số nghiệm.

Nhận xét. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, ..., 0)$. Nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường.*

Lưu ý. Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, ta có các hệ số tự do bằng 0 và không thay đổi khi ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. DO đó, khi giải hệ này ta chỉ cần sử dụng ma trận hệ số.

1.3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính:

- Gauss: Đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang
- Gauss − Jordan: Đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang rút gọn.

1.3.4 Định lí Kronecker − Capelli

Định lí 1.3 *Cho* $\widetilde{A} = (A|\, B)$ *là ma trận mở rộng của hệ phương trình gồm n ẩn* $AX = B$. *Khi đó*

$$r\left(\widetilde{A}\right) = r\left(A\right) \text{ hoặc } r\left(\widetilde{A}\right) = r\left(A\right) + 1.$$

Hơn nữa,

- *nếu* $r\left(\widetilde{A}\right) = r\left(A\right) + 1$ *thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu* $r\left(\widetilde{A}\right) = r\left(A\right) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- $r\left(\widetilde{A}\right) = r\left(A\right) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là* $n - r\left(A\right)$.

1.4 Ma trận khả nghịch

1.4.1 Định nghĩa

Cho $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$. Ta nói A *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận B sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Nếu B thỏa điều kiện trên được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A.
Mệnh đề. Ma trận nghịch đảo cảu một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

Định lí 1.4 *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Ma trận* A *khả nghịch khi và chỉ khi tồn tại ma trận* $B \in M_n(\mathbb{R})$ *sao cho* $AB = I_n$ *hay* $BA = I_n$. *Khi đó* $A^{-1} = B$.

Nhận xét.

- Ma trận đơn vị I_n khả nghịch và $I_n^{-1} = I_n$.
- Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ có một dòng hoặc một cột bằng không thì A không khả nghịch.

Mệnh đề. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó

- A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^{T} khả nghịch và $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu A và B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.4.2 Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Định lí 1.5 *Cho* $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó các khẳng định sau tương đương:*

- *A khả nghịch.*
- $r(A) = n$.
- $A \sim I_n$.
- *Tồn tại các phép BĐSCTD* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ *biến ma trận* A *thành ma trận đơn vị* I_n :

  $$A \overset{\varphi_1}{\to} A_1 \overset{\varphi_2}{\to} ... \overset{\varphi_k}{\to} = A_k = I_n.$$

  Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$, *sẽ biến ma trận đơn vị* I_n *thành ma trận nghịch đảo* A^{-1} :

  $$I_n \overset{\varphi_1}{\to} B_1 \overset{\varphi_2}{\to} ... \overset{\varphi_k}{\to} = B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|\, I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A|\, I_n) \overset{\varphi_1}{\to} (A_1|\, B_1) \to ... \overset{\varphi_k}{\to} (A_p|\, B_p) \to ...$$

Trong quá trình biến đổi nếu xuất hiện ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng không thì A không khả nghịch.
Ngược lại ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n|\, B)$. Khi đó A khả nghịch và $A^{-1} = B$.
Lưu ý. Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không thì ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng thuật toán Gauss).

1.5 Phương trình ma trận

Định lí 1.6 *Cho các ma trận* $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), D \in M_n(\mathbb{R})$.

- $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$;
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$;
- $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$.

Chương 2

Định thức

2.1 Định nghĩa và tính chất

2.1.1 Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta gọi ma trận $A\left(i|\,j\right)$ là ma trận có được từ A bằng cách *xóa đi dòng i và cột j* của A. Rõ ràng ma trận $A\left(i|\,j\right)$ có cấp là $n-1$.
Cho $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$. *Định thức* của ma trận A, được ký hiệu là $|A|$ (hay $\det\left(A\right)$) là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- Nếu $n=1$, nghĩa là $A=\left(a\right)$, thì $|A|=a$.
- Nếu $n=2$, nghĩa là $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, thì $|A|=ad-bc$.
- Nếu $n>2$, nghĩa là $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì

$$|A|\overset{\text{dòng } 1}{=}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\left|A\left(1|\,j\right)\right|$$

$$=a_{11}\left|A\left(1|\,1\right)\right|-a_{12}\left|A\left(1|\,2\right)\right|+...+a_{1n}(-1)^{1+n}\left|A\left(1|\,n\right)\right|.$$

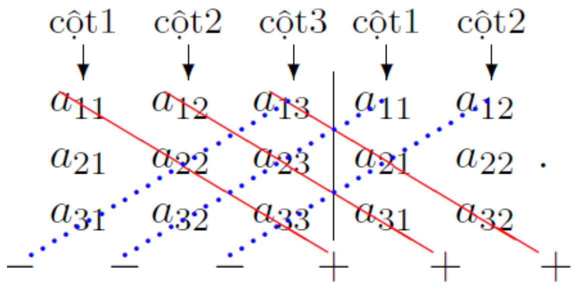
2.1.2 Quy tắc Sarrus $(n=3)$

Cho $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Theo định nghĩa của định thức, ta có

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau



$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

(Tổng ba đường chéo **đỏ** - tổng ba đường chéo **xanh**)

2.1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Với mỗi $i, j \in \overline{1, n}$, ta gọi

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|\, j)|$$

là *phần bù đại số* của a_{ij}.

Định lí 2.1 *Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Với mỗi $i, j \in \overline{1, n}$, ta gọi c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij}. Ta có công thức khai triển $|a|$,*

- *theo dòng i : $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$.*

- *theo dòng j : $|A| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$.*

Nhận xét.

$$A \overset{\text{dòng } i}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} |A(i|\, k)|$$

$$\overset{\text{cột } j}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} |A(k|\, j)|$$

Lưu ý. Khi tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để khai triển.

Mệnh đề. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó:

- $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$.

- Nếu A có một dòng hay một cột bằng không thì $|A| = 0$.

- Nếu A là ma trận tam giác thì $|A|$ được tính bằng tích các phần tử trên đường chéo, nghĩa là

$$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}.$$

Định lí 2.2 *Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thì $|AB| = |A|\,|B|$.*

Hệ quả. Cho $A, A_1, A_2, ..., A_m \in M_n(\mathbb{R})$ và $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

- $|A_1 A_2 ... A_m| = |A_1|\,|A_2| ... |A_n|$;
- $\left|A^k\right| = |A|^k$.

Định lí 2.3 *Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó*

- *Nếu $A \underset{i \neq j}{\overset{d_i \leftrightarrow d_j}{\rightarrow}} A'$ thì $|A'| = -|A|$;*
- *Nếu $A \overset{\alpha d_i}{\rightarrow} A'$ thì $|A'| = \alpha |A|$ hay $|A| = \frac{1}{\alpha} |A'|$;*
- *Nếu $A \underset{i \neq j}{\overset{d_i + \beta d_j}{\rightarrow}} A'$ thì $|A'| = |A|$.*

Hệ quả. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|.$$

Lưu ý. Vì $\left|A^{\mathrm{T}}\right| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Lưu ý. Trong quá trình tính định thức, phép biến đổi sơ cấp loại 3 được khuyến khích dùng bởi vì nó không làm thay đổi giá trị định thức.

2.2 Định thức và ma trận khả nghịch

2.2.1 Ma trận phụ hợp

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A(i|\, j)|$$

là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị C^{T} của C là *ma trận phụ hợp* (hay *ma trận phó*) của A, ký hiệu là $\operatorname{adj}(A)$.

2.2.2 Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lí 2.4 *Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. Hơn nữa*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A).$$

Hệ quả. Ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ khả nghịch khi và chỉ khi $ad - bc \neq 0$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Mệnh đề. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và A khả nghịch. Khi đó

- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;
- $|\mathrm{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.

2.3 Ứng dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính

2.3.1 Quy tắc Cramer

Định lí 2.5 *Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ gồm n ẩn và m phương trình (ma trận A có m dòng và n cột). Đặt*

$$\Delta = \det(A); \qquad \Delta_i = \det(A_i), \forall i \in \overline{1, n},$$

trong đó A_i là ,a trận có từ A bằng cách thay cột i bằng cột B. Khi đó

- *Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ có một nghiệm duy nhất là*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \forall i \in \overline{1, n}.$$

- *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_i \neq 0$ với một i nào đó thì hệ vô nghiệm.*
- *$\Delta = 0$ và $\Delta_i = 0$ $\forall i \in \overline{1, n}$ thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm. Trong trường hợp này ta phải dùng phương pháp Gauss hoặc Gauss − Jordan để giải.*

2.3.2 Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính bằng Cramer

Chương 3

Không gian vector

3.1 Không gian vector

Cho V là một tập hợp với phép toán cộng $+$ và phép nhân vô hướng $\cdot$ của $\mathbb{R}$ với V. Khi đó V được gọi là *không gian vector* trên $\mathbb{R}$ nếu mọi $u, v, w \in V$ và mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa 8 tính chất sau:

- $u + v = v + u$ (tính giao hoán);
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ (tính kết hợp);
- tồn tại $\mathbf{0} \in V$ sao cho: $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ (phần tử không);
- tồn tại $u' \in V$ sao cho: $u + u' = u' + u = \mathbf{0}$ (phần tử đối);
- $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha\,(\beta \cdot u)$;
- $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
- $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (tính phân phối);
- $1 \cdot u = u$ (nhân với số 1).

Khi đó ta gọi:

- mỗi phần tử $u \in V$ là một *vector*.
- vector $\mathbf{0}$ là *vector không*.
- vector u' là *vector đối* của u.

Mệnh đề. Cho V là một không gian vector trên $\mathbb{R}$. Khi đó với mọi $u \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

- $\alpha u = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha = 0$ hoặc $u = \mathbf{0})$;
- $(-1)\,u = u'$. Do đó để đơn giản ta có thể ký hiệu $-u$ thay cho u'.

3.2 Tổ hợp tuyến tính

3.2.1 Tổ hợp tuyến tính

Cho $u_1, u_2, ..., u_m \in V$. Một *tổ hợp tuyến tính* của $u_1, u_2, ..., u_m$ là một vector có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m, \text{ với } a_i \in \mathbb{R}$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là *dạng biểu diễn* của u theo các vector $u_1, u_2, ..., u_m$.

Nhận xét. Vector $\mathbf{0}$ luôn luôn là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ vì

$$\mathbf{0} = 0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_m.$$

Để kiểm tra u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$ ta áp dụng các bước sau:

- Lập ma trận mở rộng
$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_1^{\mathrm{T}} & u_2^{\mathrm{T}} & ... & u_m^{\mathrm{T}} & u^{\mathrm{T}} \end{array} \right) \tag{3.1}$$
- Giải hệ phương trình (3.1).
  - Nếu (3.1) **vô nghiệm,** thì u **không** là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$.
  - Nếu (3.1) **có nghiệm** $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ thì u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_m$ và có dạng biểu diễn là
  $$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m.$$

3.2.2 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Cho $u_1, u_2, ..., u_m \in V$. Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m = 0. \tag{3.2}$$

- Nếu (3.2) chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, ..., u_m$ (hay $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$) *độc lập tuyến tính.*
- Nếu (3.2) *có nghiệm không tầm thường* thì ta nói $u_1, u_2, ..., u_m$ (hay $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$) *phụ thuộc tuyến tính.*

Nói cách khác,

- Nếu phương trình (3.2) có nghiệm duy nhất thì $u_1, u_2, ..., u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu phương trình (3.2) có vô số nghiệm thì $u_1, u_2, ..., u_m$ phụ thuộc tuyến tính

Nhận xét. Họ vector $u_1, u_2, ..., u_m$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại vector u_i là tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại.

Nhắc lại. Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ có m ẩn Khi đó $r(A) = r\left(\widetilde{A}\right)$ với $\widetilde{A}$ là ma trận mở rộng. Hơn nữa áp dụng định lí Kronecker - Capelli ta có

- Nếu $r(A) = m$ hệ chỉ có nghiệm tầm thường.
- Nếu $r(A) < m$ hệ có vô số nghiệm.

Nhắc lại. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- Hệ phương trình $AX = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường;
- $r(A) = n$;
- $\det(A) \neq 0$.

Mệnh đề. Cho V là không gian vector trên $\mathbb{R}$ và $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ là tập hợp các vector thuộc V. Khi đó

- Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì mọi tập chứa S đều phụ thuộc tuyến tính.
- Nếu S độc lập tuyến tính thì mọi tập con của S đều độc lập tuyến tính.

Nhắc lại. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó $r\left(A^{\mathrm{T}}\right) = r(A)$.

Mệnh đề. Cho $u_1, u_2, ..., u_m$ là m vector trong $\mathbb{R}^n$. Gọi A là ma trận có được bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng. Khi đó $u_1, u_2, ..., u_m$ ***độc lập tuyến tính*** khi và chỉ khi A có hạng $r(A) = m$.

Từ mệnh đề trên ta sẽ xây dựng thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vector trong $\mathbb{R}^n$ như sau:

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vector $u_1, u_2, ..., u_m$ trong $\mathbb{R}^n$

Bước 1. Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_m$ thành các cột hoặc thành các dòng.
Bước 2. Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $r(A) = m$ thì $u_1, u_2, ..., u_m$ **độc lập tuyến tính.**
- Nếu $r(A) < m$ thì $u_1, u_2, ..., u_m$ **phụ thuộc tuyến tính.**

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:
Bước 2'. Tính định thức của A.

- Nếu $\det(A) \neq 0$ thì $u_1, u_2, ..., u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $\det(A) = 0$ thì $u_1, u_2, ..., u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

3.3 Cơ sở và số chiều của không gian vector

3.3.1 Tập sinh

Cho V là không gian vector và S là tập con của V. Tập S được gọi là *tập sinh* của V nếu mọi vector của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S *sinh ra* V hoặc V *được sinh bởi* S, ký hiệu $V = \langle S\rangle$.

3.3.2 Cơ sở và số chiều

Cơ sở

Cho V là không gian vector và $\mathbf{B}$ là tập con của V. Tập B được gọi là một *cơ sở* của V nếu $\mathbf{B}$ là một tập sinh của V và $\mathbf{B}$ độc lập tuyến tính.

Số chiều

Mệnh đề. Giả sử V sinh bởi m vector, $V = \langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle$. Khi đó mọi tập con độc lập tuyến tính của V có không quá m phần tử.

Hệ quả. Giả sử V có một cơ sở $\mathbf{B}$ gồm n vector. Khi đó mọi cơ sở khác của V cũng có đúng n vector.
Cho V là không gian vector. *Số chiều* của V, ký hiệu là $\dim V$, là số vector của một cơ sở nào đó của V.

Nhận xét. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, xét $\mathbf{B}_0 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, trong đó

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\,,$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)\,.$$

Với $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Do đó $\mathbf{B}_0$ là tập sinh của $\mathbb{R}^n$. Mặt khác $\mathbf{B}_0$ độc lập tuyến tính nên $\mathbf{B}_0$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Ta gọi $\mathbf{B}_0$ là *cơ sở chính tắc* của $\mathbb{R}^n$. Như vậy

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

Mệnh đề. Cho V là không gian vector có $\dim V = n$. Khi đó

- Mọi tập con của V chứa nhiều hơn n vector thì phụ thuộc tuyến tính.
- Mọi tập con của V chứa ít hơn n vector thì không là tập sinh của V.

Nhận diện cơ sở của không gian V có $\dim V = n$

Vì $\dim V = n$ nên mọi cơ sở của V phải gồm n vector. Hơn nữa, nếu S là tập con của V và số phần tử của S bằng n thì

S là cơ sở của V
$\Leftrightarrow$ S độc lập tuyến tính
$\Leftrightarrow$ S là tập sinh của V.

3.4 Không gian vector con

3.4.1 Định nghĩa

Cho W là một tập con khác rỗng của không gian vector V. Ta nói W là *không gian vector con* (gọi tắt là *không gian con*) của V, ký hiệu $W \leqslant V$, nếu W với phép toán $(+, \cdot)$ được hạn chế từ V cũng là một không gian vector.

Định lí 3.1 *Cho W là một tập con khác rỗng của V. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

- $W \leqslant V$.
- *Với mọi $u, v \in W$ và mọi $\alpha in\mathbb{R}$, ta có $u + v \in W$ và $\alpha \cdot u \in W$.*
- *Với mọi $u, v \in W$ và mọi $\alpha in\mathbb{R}$, ta có $\alpha \cdot u + v \in W$.*

Nhận xét. Cho V là không gian vector và W là tập con của V. Khi đó

- Nếu W là không gian con của V thì $\mathbf{0} \in W$.
- Nếu $\mathbf{0} \notin W$ thì W không là không gian con của V.

Phương pháp kiểm tra không gian con

Cho W là tập con của không gian V. Để kiểm tra W là không gian con của V, ta tiến hành như sau:
Bước 1. Kiểm tra vector $\mathbf{0} \in W$.

- Nếu $\mathbf{0} \notin W$ thì kết luận W không là không gian con của v. Dừng.
- Nếu $\mathbf{0} \in W$ thì sang Bước 2.

Bước 2. Với mọi $u, v \in W$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Nếu $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$ thì kết luận $W \leqslant V$.
- Ngược lại, ta cần chỉ ra một ví dụ cụ thể chứng tỏ $u, v \in W$ nhưng $u + v \notin W$ hoặc $u \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ nhưng $\alpha \cdot u \notin W$. Khi đó kết luận W không là không gian con của V.

Định lí 3.2 *Nếu W_1, W_2 là hai không gain con của V thì $W_1 \cap W_2$ cũng là không gian con của V.*

Định lí 3.3 *Nếu W_1, W_2 là không gian con của V, ta định nghĩa*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 |\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Khi đó $W_1 + W_2$ cũng là một không gian con của V.

3.4.2 Không gian sinh bởi tập hợp

Định lí 3.4 *ChO V là không gian vector trên $\mathbb{R}$ và S là tập con khác rỗng của V. Ta đặt W là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó:*

- $W \leqslant V$.
- *W là không gian nhỏ nhất trong tất cả các không gian của V mà chứa S.*

Không gian S được gọi là không gian con sinh bởi tập hợp S, ký hiệu $W = \langle S \rangle$. Cụ thể, nếu $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ thì

$$W = \langle S \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m | \, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Nhận xét. Vì không gian sinh bởi S là không gian nhỏ nhất chứa S nên ta quy ước $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Định lí 3.5 *Cho V là không gian vector và S_1, S_2 là tập con của V. Khi đó, nếu mọi vector của S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của S_2 và ngược lại thì $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.*

Định lí 3.6 (về cơ sở không toàn vẹn) *Cho V là một không gian vector và S là một tập con độc lập tuyến tính của V. Khi đó, nếu S không là cơ sở của V thì có thể thêm vào S một số vector để được một cơ sở của V.*

Định lí 3.7 *Cho V là một không gian vector sinh bởi S. Khi đó tồn tại một cơ sở $\mathbf{B}$ của V sao cho $\mathbf{B} \subset S$. Nói cách khác, nếu S không phải là một cơ sở của V thì ta có thể loại bỏ ra khỏi S một số vector để được một cơ sở của V.*

3.4.3 Không gian dòng của ma trận

Cho $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix};$$
$$u_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \end{pmatrix};$$
$$.......................................$$
$$u_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

và

$$W_A = \langle u_1, u_2, ..., u_m \rangle.$$

Ta gọi $u_1, u_2, ..., u_m$ là các *vector dòng* của A, và W_A được gọi là *không gian dòng* của A.
Bổ đề. Nếu A và B là hai ma trận tương đương dòng thì $W_A = W_B$, nghĩa là hai ma trận tương đương dòng có cùng không gian dòng.

Định lí 3.8 *Giả sử* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó,* $\dim W_A = r(A)$ *và tập hợp các vector khác không trong một dạng bậc thang của* A *là cơ sở của* W_A.

3.4.4 Không gian tổng

Định lí 3.9 *Cho* V *là không gian vector trên* $\mathbb{R}$ *và* W_1, W_2 *là hai không gian con của* V. *Nếu* $W_1 = \langle S_1 \rangle$ *và* $W_2 = \langle S_2 \rangle$ *thì*

$$W_1 + W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle .$$

3.5 Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

3.5.1 Mở đầu

Định lí 3.10 *Gọi* W *là tập hợp nghiệm* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *của hệ phương trình tuyến tính* ***thuần nhất***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Khi đó, W *là không gian con của* $\mathbb{R}^n$ *và số chiều của* W *bằng số ẩn tự do của hệ. Như vậy*

$$W = \left\{ u \in \mathbb{R}^n |\, Au^{\mathrm{T}} = 0 \right\}$$

với A *là ma trận cho trước và* $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

3.5.2 Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán.
Bước 1. Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.
Bước 2. Lần lượt cho bộ ẩn tự do các giá trị

$$(1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)$$

ta được các nghiệm cơ bản $u_1, u_2, ..., u_m$.
Bước 3. Khi đó không gian nghiệm có cơ sở là $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$.

3.5.3 Không gian giao

Nhận xét. Cho V là không gian vector và W_1, W_2 là hai không gian con của V. Nếu $W_1 = \langle S_1 \rangle, W_2 = \langle S_2 \rangle$ thì $u \in W_1 \cap W_2$ khi và chỉ khi u là tổ hợp tuyến tính của S_1 và u là tổ hợp tuyến tính của S_2.

Định lí 3.11 *Cho W_1, W_2 là hai không gian con của V. Khi đó*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

3.6 Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

3.6.1 Tọa độ

Cho V là không gian vector và $\mathbf{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ là một cơ sở của V. Khi đó $\mathbf{B}$ được gọi là *một cơ sở được sắp* của V nếu thứ tự các vector trong $\mathbf{B}$ được cố đinh. Ta thường dùng ký hiệu

$$(u_1, u_2, ..., u_n)$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự $u_1, u_2, ..., u_n$.

Cho $\mathbf{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là cơ sở được sắp của V. Khi đó mọi vector $u \in V$ đều được *biểu diễn một cách duy nhất* dưới dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n.$$

Cho $\mathbf{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là một cơ sở được sắp của V và $u \in V$. Khi đó u sẽ được biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n.$$

Ta đặt

$$[u]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó $[u]_{\mathbf{B}}$ được gọi là *tọa độ* của u theo cơ sở $\mathbf{B}$.

Đối với cơ sở chính tắc $\mathbf{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ của không gian $\mathbb{R}^n$ và $B_0 = (e_1, e_2, ..., e_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$[u]_{\mathbf{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = u^{\mathrm{T}}.$$

Tọa độ của một vector theo cơ sở chính tắc chính là các thành phần của nó.

Phương pháp tìm $[u]_B$

Cho V là không gian vector có cơ sở là $\mathbf{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ và $u \in V$. Để tìm $[u]_B$ ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n \tag{3.3}$$

với ẩn $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Do B là cơ sở nên phương trình (3.3) có nghiệm duy nhất

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (c_1, c_2, ..., c_n).$$

Khi đó

$$[u]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Lưu ý. Khi V là không gian con của $\mathbb{R}^m$, để giải phương trình (3.3) ta lập hệ

$$\left(u_1^{\mathrm{T}} u_2^{\mathrm{T}} \dots\ u_n^{\mathrm{T}} \middle|\ u^{\mathrm{T}}\right).$$

Mệnh đề. Cho $\mathbf{B}$ là cơ sở của V. Khi đó, với mọi $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ ta có:

- $[u+v]_{\mathbf{B}} = [u]_{\mathbf{B}} + [v]_{\mathbf{B}}$.
- $[\alpha u]_{\mathbf{B}} = \alpha [u]_{\mathbf{B}}$.

3.6.2 Ma trận chuyển cơ sở

Cho V là một không gian vector và

$$\mathbf{B}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{B}_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

là hai cơ sở của V. Đặt

$$P = \left([v_1]_{\mathbf{B}_1} [v_2]_{\mathbf{B}_1} \dots [v_n]_{\mathbf{B}_1}\right).$$

Khi đó P được gọi là *ma trận chuyển cơ sở* từ cơ sở $\mathbf{B}_1$ sang cơ sở $\mathbf{B}_2$ và được kí hiệu là $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)$.

Nhận xét. Nếu $\mathbf{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\mathbf{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ thì

$$(\mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}) = \left(u_1^{\mathrm{T}} u_2^{\mathrm{T}} \dots u_n^{\mathrm{T}}\right).$$

Phương pháp tìm $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)$

Giả sử $\mathbf{B}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ và $\mathbf{B}_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ là hai cơ sở của V. Để tìm $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)$, ta thực hiện như sau:

- Cho u là vector bất kì của V, xác định $[u]_{B\mathbf{B}_1}$.
- Lần lượt thay thế u bằng $v_1, v_2, \dots, v_n$ ta xác định được

  $$[v_1]_{\mathbf{B}_1}, [v_2]_{\mathbf{B}_1}, \dots, [v_n]_{\mathbf{B}_1}.$$

  Khi đó

  $$(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2) = \left([v_1]_{\mathbf{B}_1} [v_2]_{\mathbf{B}_1} \dots [v_n]_{\mathbf{B}_1}\right).$$

Đặc biệt, khi $V = \mathbb{R}^n$, để xác định $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)$ ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận mở rộng $\left(\begin{array}{cccc|cccc} u_1^{\mathrm{T}} & u_2^{\mathrm{T}} & \dots & u_n^{\mathrm{T}} & v_1^{\mathrm{T}} & v_2^{\mathrm{T}} & \dots & v_n^{\mathrm{T}} \end{array}\right)$.
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng $(I_n |\ P)$.
- Khi đó $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2) = P$.

Định lí 3.12 *Cho V là một không gian vector n chiều và $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ là những cơ sở của V. Khi đó*

- $(\mathbf{B} \to \mathbf{B}) = I_n$.
- $\forall u \in V, [u]_{\mathbf{B}_1} = (\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)\,[u]_{\mathbf{B}_2}$.
- $(\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1) = (\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)^{-1}$.
- $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3) = (\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2)\,(\mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_3)$.

Nhắc lại. Cho $\mathbf{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}) = \left(u_1^{\mathrm{T}} u_2^{\mathrm{T}} ... u_n^{\mathrm{T}}\right).$$

Hệ quả. Cho $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ là những cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$. Khi đó

- $(\mathbf{B} \to \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B}_0 \to \mathbf{B})^{-1}$.
- $\forall u \in V, [u]_{\mathbf{B}} = (\mathbf{B}_0 \to \mathbf{B})^{-1}[u]_{\mathbf{B}_0}$.
- $(\mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2) = (\mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_1)^{-1}\,(\mathbf{B}_0 \to \mathbf{B}_2)$.

Chương 4

Ánh xạ tuyến tính

4.1 Định nghĩa

4.1.1 Ánh xạ

Một *ánh xạ* f từ tập X vào tập Y là một phép liên kết từ X vào Y sao cho mỗi phần tử x của X được liên kết duy nhất một phần tử y của Y, ký hiệu $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x) \end{aligned} \; .$$

Khi đó X được gọi là *tập nguồn*, Y được gọi là *tập đích.*

4.1.2 Ánh xạ tuyến tính

Cho V và W là hai không gian vector trên $\mathbb{R}$. Ta nói ánh xạ $f: V \to W$ là một *ánh xạ tuyến tính* nếu thỏa hai điều kiện sau:

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;
- $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. Hai điều kiện trong định nghĩa trên có thể được thay thế bằng một điều kiện:

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

Ký hiệu:

- $\mathbf{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào W.
- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một *toán tử tuyến tính* trên V. Viết tắt $f \in L(V)$.

Mệnh đề. Cho $f: V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó

- $f(0) = 0$;
- Với mọi $u \in V$, ta có $f(-u) = -f(u)$;
- Với mọi $u_1, u_2, ..., u_m \in V$ và với mọi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + ... + \alpha_m f(u_m).$$

Định lí 4.1 *Cho* V *và* W *là hai không gian vector và* $\mathbf{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *là cơ sở của* V*. Khi đó, nếu* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *là một tập con của* W *thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính* $f : V \to W$ *sao cho*

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, ..., f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu $[u]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *thì*

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + ... + \alpha_n f(u_n).$$

4.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

4.2.1 Không gian nhân

Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\ker f = \{u \in V | f(u) = 0\}$$

Khi đó $\ker f$ là không gian con của V, ta gọi $\ker f$ alaf *không gian nhân* của f.

Nhận xét. Dựa vào định nghĩa, ta được

$$u \in \ker f \Leftrightarrow f(u) = 0.$$

4.2.2 Không gian ảnh

Cho $f : V \in W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\operatorname{Im} f = \{f(u) | u \in V\}.$$

Khi đó $\operatorname{Im} f$ là không gian con của W, ta gọi $\operatorname{Im} f$ là *không gian ảnh* của f.

Định lí 4.2 *Cho* $f : V \in W$ *là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu*

$$S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$$

là tập sinh của V *thì*

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m)\}$$

là tập sinh của $\operatorname{Im} f$.

Nhận xét. Dựa vào định lí trên, để tìm cơ sở của $\operatorname{Im} f$, ta chọn một tập sinh S của V (để đơn giản ta nên chọn cơ sở chính tắc). Khi đó $\operatorname{Im} f$ sinh bởi tập ảnh của S.

Định lí 4.3 *Cho $f : V \in W$ là một ánh xạ tuyến tính và V hữu hạn chiều. Khi đó*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim V.$$

4.3 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Cho $\mathbf{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là cơ sở của V, $\mathbf{C} = (v_1, v_2, ..., v_m)$ là cơ sở của W và $f \in L(V, W)$. Ta đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathbf{C}}[f(u_2)]_{\mathbf{C}}...[f(u_n)]_{\mathbf{C}}).$$

Khi đó ma trận P được gọi là *ma trận biểu diễn* của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathbf{B}, \mathbf{C}$, ký hiệu là $P = [f]_{\mathbf{B},\mathbf{C}}$ (hoặc $[f]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{C}}$).

Nhận xét. Khi $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$, ta có phương pháp tìm $P = [f]_{\mathbf{B},\mathbf{C}}$ như sau:

- Tính $f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)$.
- Đặt $M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} v_1^{\mathrm{T}} & v_2^{\mathrm{T}} & ... & v_m^{\mathrm{T}} & f(u_1)^{\mathrm{T}} & f(u_2)^{\mathrm{T}} & ... & f(u_n)^{\mathrm{T}} \end{array} \right)$.
- Dùng thuật toán Gauss − Jordan, đưa M về dạng $(I_m | P)$.
- Khi đó $[f]_{\mathbf{B},\mathbf{C}} = P$.

Cho $\mathbf{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ là cơ sở của V và $f \in L(V)$. Khi đó ma trận $[f]_{\mathbf{B},\mathbf{B}}$ được gọi là *ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính* f, ký hiệu là $[f]_{\mathbf{B}}$. Rõ ràng

$$[f]_{\mathbf{B}} = ([f(u_1)]_{\mathbf{B}}[f(u_2)]_{\mathbf{B}}...[f(u_n)]_{\mathbf{B}}).$$

Định lí 4.4 *Cho V và W là các không gian vector; $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ và $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở của V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ ta có*

- $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathbf{C}} = [f]_{\mathbf{B},\mathbf{C}}[u]_{\mathbf{B}}$.
- $[f]_{\mathbf{B}',\mathbf{C}'} = (\mathbf{C} \to \mathbf{C}')^{-1}[f]_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(\mathbf{B} \to \mathbf{B}')$.

Hệ quả. Cho $\mathbf{B}$ và $\mathbf{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V. Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có

- $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathbf{B}} = [f]_{\mathbf{B}}[u]_{\mathbf{B}}$.
- $[f]_{\mathbf{B}'} = (\mathbf{B} \to \mathbf{B}')^{-1}[f]_{\mathbf{B}}(\mathbf{B} \to \mathbf{B}')$.