Análisis Numérico

Profa. Úrsula Iturrán Viveros
Ayudantes: Iván Mendez, Jorge Salazar

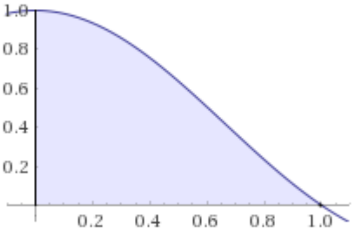
Facultad de Ciencias

Cuadratura Gaussiana

Ejemplo: aproximar

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} dx$$

por cuadratura gaussiana de 3 puntos



$$f(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

Observación: $f(0) = 1$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

1 Cambio de intervalo de [1,0] a [-1,1]

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \lambda'(t) f(\lambda(t))dt$$

$\lambda(t)$ es recta tal que $\lambda(-1) = 0$ y $\lambda(1) = 1$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{\lambda(1) - \lambda(-1)}{1 - (-1)}(t - (-1)) + \lambda(-1) \\ &= \frac{1}{2}(t+1) \end{aligned}$$

$$\lambda'(t) = \frac{1}{2}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

1 Cambio de intervalo de [1,0] a [-1,1]

Así

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)dt$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

2 La forma de la cuadratura

Cuadratura en intervalo [-1,1] de la forma

$$\int_{-1}^{1} \text{función}(t)dt \approx p_1 \cdot \text{función}(t_1) + p_2 \cdot \text{función}(t_2) + p_3 \cdot \text{función}(t_3)$$

pesos p_1, p_2, p_3

nodos t_1, t_2, t_3

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

2 La forma de la cuadratura

Cuadratura en intervalo [-1,1]

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)}_{\text{función}(t)} dt \approx p_1 f\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right) + p_2 f\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right) + p_3 f\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)$$

pesos p_1, p_2, p_3

nodos t_1, t_2, t_3

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

2 La forma de la cuadratura

Cuadratura en intervalo [0,1]

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[p_1 f\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)+p_2 f\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)+p_3 f\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\right]$$

pesos $\frac{1}{2}p_1,\ \frac{1}{2}p_2,\ \frac{1}{2}p_3$

nodos $\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

2 La forma de la cuadratura

Cuadratura en intervalo [0,1]

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}dx \approx \frac{1}{2}\left[p_1\frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)\pi} + p_2\frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)\pi} + p_3\frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]$$

pesos $\quad \frac{1}{2}p_1,\ \frac{1}{2}p_2,\ \frac{1}{2}p_3$

nodos $\quad \frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

¿cómo obtener los 3 pesos p_i y los 3 nodos t_i
de la cuadratura sobre intervalo $[-1, 1]$?

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

3 Crea sucesión de polinomios $\{q_k\}$ por recurrencia

- dame los dos primeros polinomios $q_0,\ q_1$
- genero q_k usando los dos anteriorres $q_{k-1},\ q_{k-2}$

$$\begin{aligned} q_0(t) &= 1 \\ q_1(t) &= t \\ kq_k(t) &= (2k-1)tq_{k-1}(t) - (k-1)q_{k-2}(t) \end{aligned}$$

Cuadratura de 3 puntos $\longrightarrow$ buscamos q_3 (grado 3)

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

3 Crea sucesión de polinomios $\{q_k\}$ por recurrencia

- dame los dos primeros polinomios $q_0, \; q_1$
- genero q_k usando los dos anteriorres $q_{k-1}, \; q_{k-2}$

$$\begin{aligned} q_0(t) &= 1 \\ q_1(t) &= t \\ kq_k(t) &= (2k-1)tq_{k-1}(t) - (k-1)q_{k-2}(t) \end{aligned}$$

Cuadratura de 3 puntos $\longrightarrow$ buscamos q_3 (grado 3)

$$k = 2 \qquad q_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

$$k = 3 \qquad q_3(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{3}{2}t$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

4 Los nodos de la cuadratura en $[-1, 1]$ son los ceros de q_3

$$
\begin{aligned}
q_3(t) = 0 \qquad & \Longrightarrow \quad \frac{5}{3}t^3 - \frac{3}{2}t = 0 \\
& \Longrightarrow \quad t\left(t^2 - \frac{3}{5}\right) = 0
\end{aligned}
$$

nodos

$$
t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad t_2 = 0, \qquad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}
$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

5 Hallar los pesos de cuadratura sobre $[-1, 1]$

idea: cuadratura gaussiana de 3 puntos es exacta para los primeros 3 polinomios $1,\ t,\ t^2$ de la base canónica $\{1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots\}$

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = p_1 p(t_1) + p_2 p(t_2) + p_3 p(t_3), \qquad p(t) \in \{1, t, t^2\}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

5 Hallar los pesos de cuadratura sobre $[-1, 1]$

Sistema de ecuaciones lineales de 3×3

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & = & \int_{-1}^{1} dt \\ p_1 t_1 & + & p_2 t_2 & + & p_3 t_3 & = & \int_{-1}^{1} t dt \\ p_1 t_1^2 & + & p_2 t_2^2 & + & p_3 t_3^2 & = & \int_{-1}^{1} t^2 dt \end{array}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

5 Hallar los pesos de cuadratura sobre $[-1, 1]$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2$$

Sistema de ecuaciones lineales 2×2

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{3}{5}}p_1 \quad &+ \quad \sqrt{\frac{3}{5}}p_3 \quad &= 0 \\ \frac{3}{5}p_1 \quad &+ \quad \frac{3}{5}p_3 \quad &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

5 Hallar los pesos de cuadratura sobre $[-1, 1]$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2$$

Sistema de ecuaciones lineales 2×2

$$\begin{array}{rcrl} -\sqrt{\dfrac{3}{5}}p_1 & + & \sqrt{\dfrac{3}{5}}p_3 & = 0 \\ \dfrac{3}{5}p_1 & + & \dfrac{3}{5}p_3 & = \dfrac{2}{3} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} p_1 = \dfrac{5}{9} \\ p_3 = \dfrac{5}{9} \end{array}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

5 Hallar los pesos de cuadratura sobre $[-1, 1]$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 2 \quad \longrightarrow \quad p_2 = 2 - p_1 - p_3 = \frac{8}{9}$$

Sistema de ecuaciones lineales 2×2

$$\begin{array}{rcrl} -\sqrt{\frac{3}{5}}p_1 & + & \sqrt{\frac{3}{5}}p_3 & = 0 \\ \frac{3}{5}p_1 & + & \frac{3}{5}p_3 & = \frac{2}{3} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} p_1 = \frac{5}{9} \\ p_3 = \frac{5}{9} \end{array}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

6 Sustituir

$$p_1 = \frac{5}{9}, \qquad p_2 = \frac{8}{9}, \quad p_3 = \frac{5}{9}$$
$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

en cuadratura sobre [0,1]

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} dx \approx \frac{1}{2}\left[p_1 \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)\pi} + p_2 \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)\pi} + p_3 \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

6 Sustituir

$$p_1 = \frac{5}{9}, \qquad p_2 = \frac{8}{9}, \quad p_3 = \frac{5}{9}$$
$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

en cuadratura sobre [0,1]

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} dx &\approx \frac{1}{2}\left[p_1 \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}\right)\pi} + p_2 \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}\right)\pi} + p_3 \frac{\operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(\frac{1}{2}t_3+\frac{1}{2}\right)\pi} \right] \\ &= 0.5895\end{aligned}$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

Observación 1:

$$\int_{-1}^{1} q_2(t)q_3(t)dt = 0$$

porque

$$\int_{-1}^{1} q_2(t)q_3(t)dt = \frac{15}{4}\int_{-1}^{1} t^5 dt - \frac{14}{4}\int_{-1}^{1} t^3 dt + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} t dt$$

y la integral de una función impar sobre $[-1, 1]$ es cero.

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

Observación 1:
En general, si tomamos polinomios distintos q_i, q_j generados por la recurrencia, entonces

$$\int_{-1}^{1} q_i(t)q_j(t)dt = 0$$

En este sentido los polinomios de la sucesión son ortogonales

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

Observación 2:
La cuadratura gaussiana de 3 puntos sobre intervalo [-1,1] es exacta para polinomios de grado $2(3) - 1$

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = p_1 t_1^k + p_2 t_2^k + p_3 t_3^k, \qquad k = 0, \ldots, 5$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

Observación 2:
La cuadratura gaussiana de 3 puntos sobre intervalo [-1,1] es exacta para polinomios de grado $2(3) - 1$

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^k + \frac{8}{9}(0)^k + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^k, \qquad k = 0, \ldots, 5$$

Cuadratura Gaussiana de 3 puntos

Observación 2:
La cuadratura gaussiana de 3 puntos sobre intervalo [-1,1] es exacta para polinomios de grado $2(3) - 1$

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^k + \frac{8}{9}(0)^k + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^k, \qquad k = 0, \ldots, 5$$

Si uso cuadratura gaussiana de 2 puntos sobre intervalo [-1,1]
¿cúal es el grado máximo del polinomio donde es exacta?

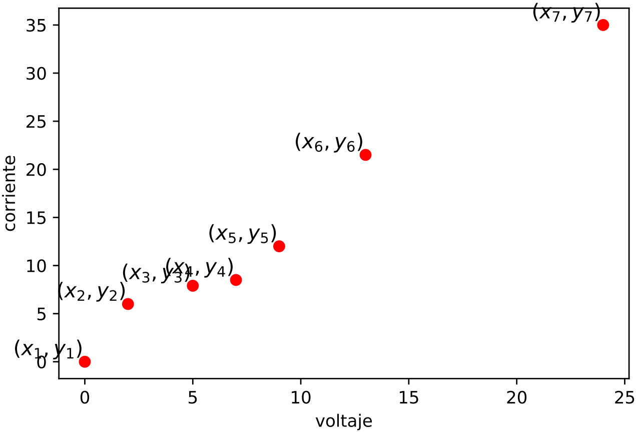
Cuadratura Gaussiana

TAREA MORAL

1. Aproximar
$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x} dx$$
por cuadratura gaussiana de 2 puntos
2. Aproximar
$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{-x^2} dx$$
por cuadratura gaussiana de 3 puntos

Mínimos Cuadrados

Ejemplo: Ajuste una recta $y = d + m \cdot x$ por los 7 puntos (x_i, y_i)



x = voltaje	0	2	5	7	9	13	24
y = corriente	0	6	7.9	8.5	12	21.5	35

Mínimos Cuadrados

Estimar los parámetros p, d

Modelo Lineal

$$
\begin{aligned}
y_1 &= d + m \cdot x_1 + \epsilon_1, \\
y_2 &= d + m \cdot x_2 + \epsilon_2, \\
y_3 &= d + m \cdot x_3 + \epsilon_3, \\
y_4 &= d + m \cdot x_4 + \epsilon_4, \\
y_5 &= d + m \cdot x_5 + \epsilon_5, \\
y_6 &= d + m \cdot x_6 + \epsilon_6, \\
y_7 &= d + m \cdot x_7 + \underset{\text{errores}}{\underset{\downarrow}{\epsilon_7}}
\end{aligned}
$$

Mínimos Cuadrados

Estimar los parámetros p, d

Modelo Lineal

$$
\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_7 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{y} & = & X & \boldsymbol{\beta} & + & \boldsymbol{\epsilon}
\end{array}
$$

Mínimos Cuadrados

Estimar los parámetros d, m

Modelo Lineal

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7.9 \\ 8.5 \\ 12 \\ 21.5 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 13 \\ 1 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = X \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

Mínimos Cuadrados

Estimar los parámetros p, d

Modelo Lineal

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7.9 \\ 8.5 \\ 12 \\ 21.5 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 13 \\ 1 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_7 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{y} = X \quad \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}
$$

- NO conocemos los errores ϵ_i
- número de ecuaciones $>$ número de párametros
- columnas de matriz X son linealmente independientes

Mínimos Cuadrados

Estimar los parámetros d, m $\longrightarrow$ estimador $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ para $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix}$

<u>Idea</u>: minimizar tamaño del error $\boldsymbol{\epsilon} = X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}$

$$\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^2} \|\boldsymbol{\epsilon}\|_2^2$$

$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}} \text{ es el mínimo}}$

Mínimos Cuadrados

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2} \|\boldsymbol{\epsilon}\|_2^2$$

$$\downarrow$$

Problema Lineal de Mínimos Cuadrados

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2} \|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

Mínimos Cuadrados

Estimar los parámetros p, d $\longrightarrow$ estimador $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ para $\boldsymbol{\beta}$

minimizar tamaño de $\boldsymbol{\epsilon} = X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}$

$$\downarrow$$

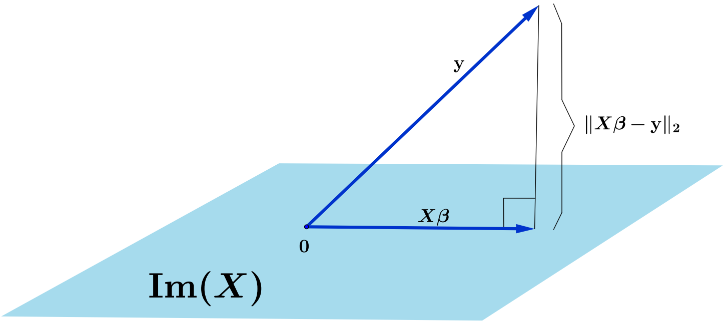
Problema Lineal de Mínimos Cuadrados

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2} \|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

Como ajustamos recta $y = d + m \cdot x$,

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2} \|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2^2 = \min_{d,m\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{7} ((d + m \cdot x_i) - y_i)^2$$

Mínimos Cuadrados



buscar vector $X\boldsymbol{\beta}$ en la imagen de matriz X tal que la distancia $\|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2$ sea mínima

Mínimos Cuadrados

$$f(\boldsymbol{\beta}) := \|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

$$\downarrow$$

Problema Lineal de Mínimos Cuadrados

$$\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\beta})$$

Hallar puntos críticos:

puntos donde el gradiente de f es cero

$$\nabla f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$$

Mínimos Cuadrados

$$f(\boldsymbol{\beta}) := \|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

$$\downarrow$$

Problema Lineal de Mínimos Cuadrados

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\beta})$$

Hallar puntos críticos:

$$\nabla f(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad X^T X \widehat{\boldsymbol{\beta}} = X^T \boldsymbol{y}$$

Estimador de cuadrados mínimos $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dado por la solución de ecuaciones normales

Ecuaciones Normales

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 & 13 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 1 & 5\\ 1 & 7\\ 1 & 9\\ 1 & 13\\ 1 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 & 13 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 6\\ 7.9\\ 8.5\\ 12\\ 21.5\\ 35\end{pmatrix}$$

$$X^T \quad X \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}} = X^T \quad \boldsymbol{y}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}7 & 60\\ 60 & 904\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90.9\\ 1338.5\end{pmatrix}$$

Ecuaciones Normales

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix}$$

$$X^T \qquad X \qquad \widehat{\boldsymbol{\beta}} = X^T \qquad \boldsymbol{y}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 & \sum_{i=1}^{7} x_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i & \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{7} y_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Usar matriz X del modelo lineal en ecuaciones normales

Solución de las Ecuaciones Normales

Ecuación

$$X^T X \widehat{\boldsymbol{\beta}} = X^T \boldsymbol{y}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 60 \\ 60 & 904 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90.9 \\ 1338.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & \sum_{i=1}^{7} x_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i & \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{7} y_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i y_i \end{pmatrix}$$

Solución Mínimos Cuadrados

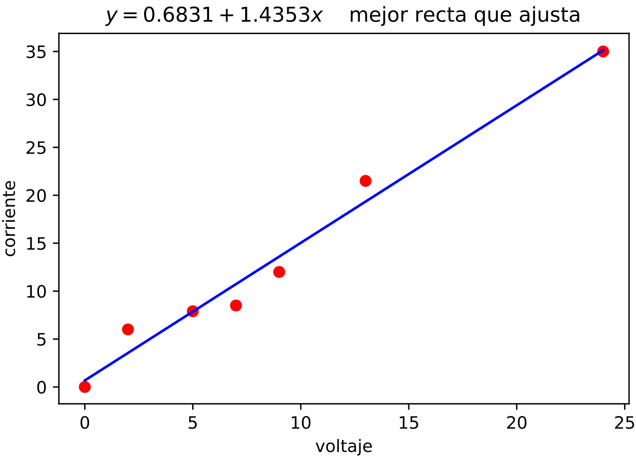
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \boldsymbol{y}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6831 \\ 1.4353 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d \\ m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{7} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{7} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)}{7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2} \\ \dfrac{7\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)}{7\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2} \end{bmatrix}$$

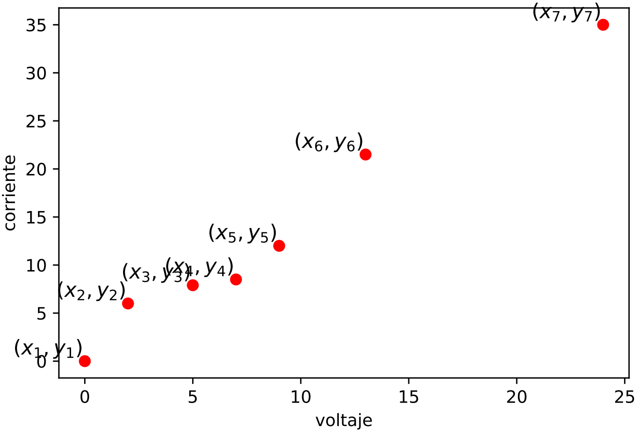
misma ecuación

Mínimos Cuadrados



Mínimos Cuadrados

Ejemplo: Ajuste una cuadrática $y = c + b \cdot x + a \cdot x^2$ por los 7 puntos



x = voltaje	0	2	5	7	9	13	24
y = corriente	0	6	7.9	8.5	12	21.5	35

Mínimos Cuadrados

Ejemplo: Ajuste una cuadrática $y = c + b \cdot x + a \cdot x^2$ por los 7 puntos

Modelo Lineal

$$y_i = c + b \cdot x_i + a \cdot x_i^2 + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

Mínimos Cuadrados

Ejemplo: Ajuste una cuadrática $y = c + b \cdot x + a \cdot x^2$ por los 7 puntos

Modelo Lineal

$$y_i = c + b \cdot x_i + a \cdot x_i^2 + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7.9 \\ 8.5 \\ 12 \\ 21.5 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \\ 1 & 9 & 9^2 \\ 1 & 13 & 13^2 \\ 1 & 24 & 24^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = X \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

Mínimos Cuadrados

Hallar estimador de cuadrados mínimos $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ para $\boldsymbol{\beta}$

$$\downarrow$$

Problema Lineal de cuadrados mínimos

$$\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^3} \|X\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{y}\|_2^2$$

$$\downarrow$$

Ecuaciones Normales

$$X^T X\widehat{\boldsymbol{\beta}} = X^T\boldsymbol{y}$$

Ecuaciones Normales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 & 13 & 24 \\ 0 & 2^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 & 13^2 & 24^2 \end{pmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 7 & 7^2 \\ 1 & 9 & 9^2 \\ 1 & 13 & 13^2 \\ 1 & 24 & 24^2 \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}}_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 9 & 13 & 24 \\ 0 & 2^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 & 13^2 & 24^2 \end{pmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7.9 \\ 8.5 \\ 12 \\ 21.5 \\ 35 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 60 & 904 \\ 60 & 904 & 17226 \\ 904 & 17226 & 369940 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90.9 \\ 1338.5 \\ 25404 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones Normales

Solución por Factorización de Cholesky

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8977 \\ 1.3695 \\ 0.0027 \end{pmatrix}$$

Mínimos Cuadrados