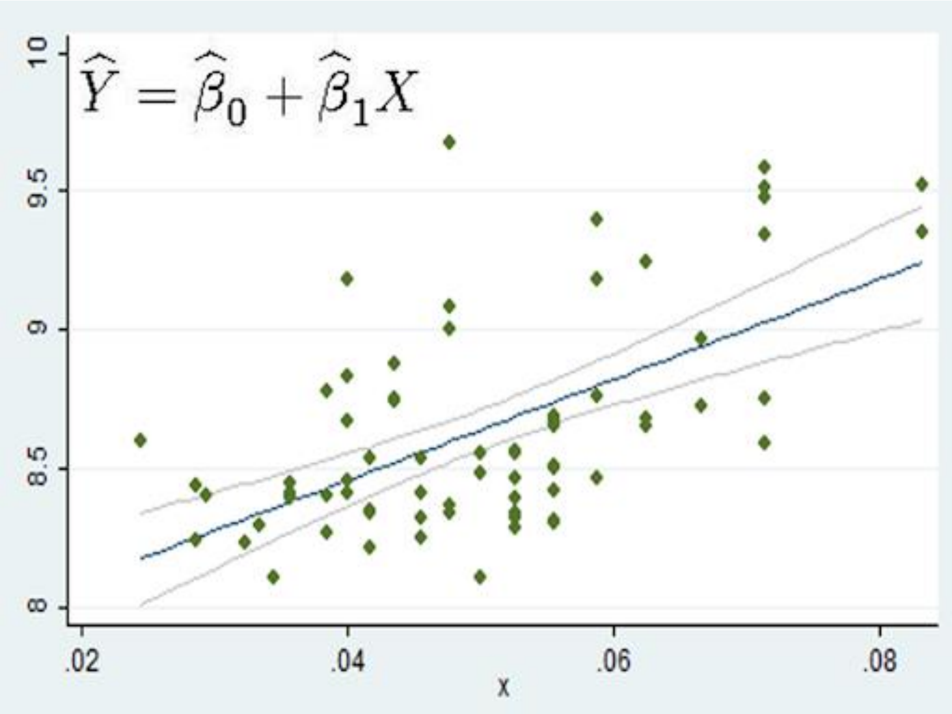
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA ESTATAL DEL CARCHI

UPEC

POLITÉCNICA DEL CARCHI



Modelos Lineales

Clase 3: Características deseables de los estimadores de MCO

Lourdes C. Montesdeoca

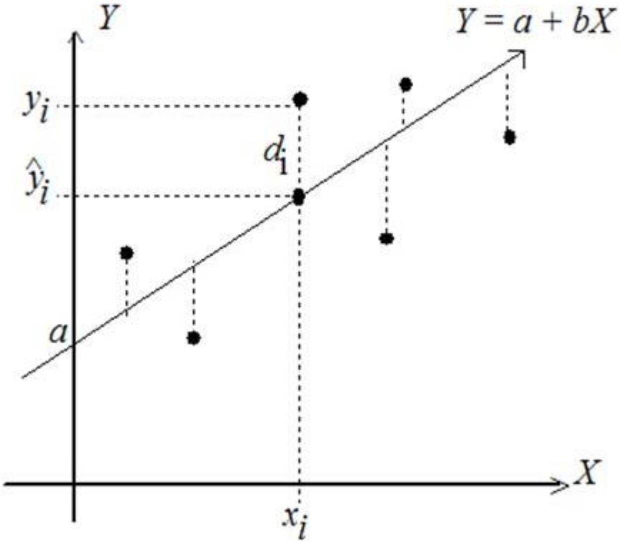
Mayo-Junio 2023

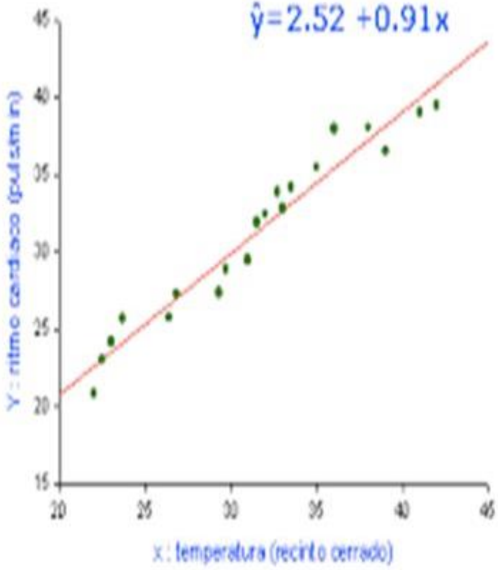
Contenido:

1. Estimadores de MCO
2. Propiedades estadísticas de los estimadores de MCO
3. Introducción al Modelo de Regresión Lineal Múltiple -MRLM-

0. Recapitulación

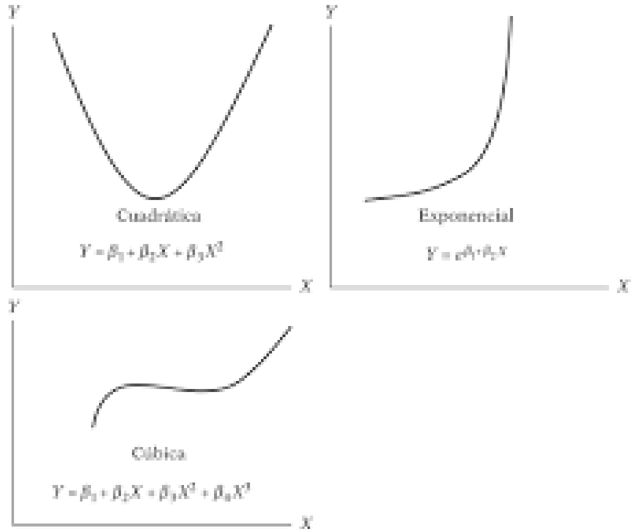
Modelo de Regresión Lineal Simple –MRLS-





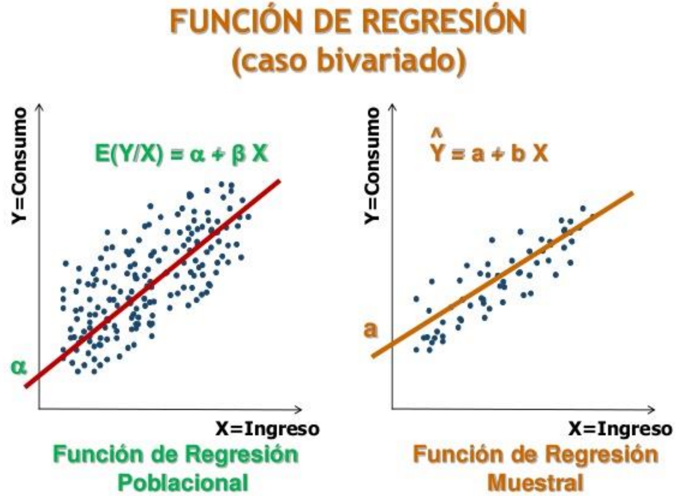
Primer problema a resolver: La especificación funcional

Modelo	Var.Dep	Var.Indep	Interpretación
Nivel-nivel	Y	X	$\Delta Y = \beta_1 \Delta X$
Nivel-log	Y	$log(X)$	$\Delta Y = (\beta_1/100)\,\%\Delta X$
Log-nivel	$log(Y)$	X	$\%\Delta Y = (100\beta_1)\Delta X$
Log-log	$log(Y)$	$log(X)$	$\%\Delta Y = \beta_1\,\%\Delta X$

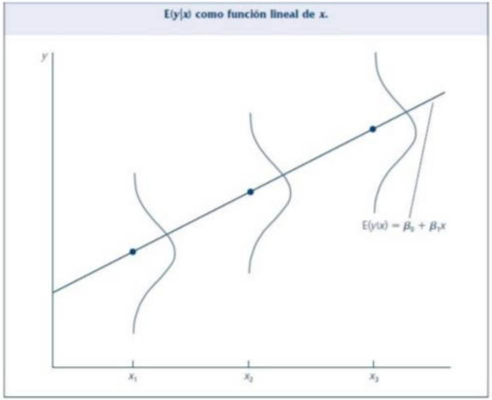


1. Estimadores de MCO

Dos modelos de RLS



$E(y|x)$ es una función lineal de x, donde para cualquier x la distribución de y está centrada alrededor de $E(y|x)$.



Fuente: Wooldridge (2005).

MRLS de la población

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u,$$

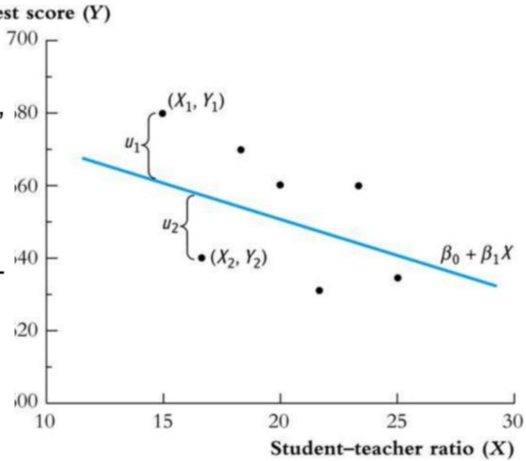
donde

- y: variable dependiente, endógena, explicada o regresando...
- x: variable independiente, exógena, explicativa, de control, regresor...
- β_0 y β_1: parámetros poblacionales.
- u: término de error o perturbación no observable.

MRLS de la población

- β_1: parámetro de pendiente. Mide la relación entre x e y, es decir, cómo cambia y cuando se producen modificaciones en x.
- β_0: término constante. Es el valor de y cuando x y u son cero.
- Si todos los demás factores contenidos en u se mantienen constantes ($\Delta u = 0$), x tiene un efecto lineal sobre y, es decir,

$$\Delta y = \beta_1 \Delta x \qquad \text{si} \quad \Delta u = 0.$$



Fuente: Stock & Watson (2011)

MRLS observada o muestral

- **Idea básica de la regresión**: estimar los parámetros poblacionales (β_0, β_1) a partir de un conjunto de datos.
- Siendo $\{(x_i, y_i) : i = 1, \cdots, n\}$ una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población desconocida, para cada observación i tenemos

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

- **Supuesto necesario estimadores OLS**: $E(u|x) = E(u) = 0$ que también implica $Cov(x, u) = E(xu) = 0$.

MRLS observada o muestral

Criterio MCO: escoger $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$ tal que la suma de residuos al cuadrado, $E(u_i^2)$, sea lo más pequeña posible.

Residuos: diferencia existente entre el valor observado y_i y el valor ajustado o predicho $\widehat{y}_i$:

$$\widehat{u}_i = y_i - \widehat{y}_i = y_i - \left(\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i\right)$$

Análogo muestral del modelo del problema a minimizar $E(u_i^2)$

$$\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} (\widehat{u}_i)^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i\right)^2 .$$

Criterio de minimización de los residuos

Las condiciones de primer orden son

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i\right) = 0.$$

Estas condiciones de primer orden son el análogo muestral de las condiciones de primer orden poblacionales, es decir,

$$E(u) = 0,$$

$$Cov(x, u) = 0.$$

Estimadores de MCO resultantes

$$\widehat{\beta}_0 = \overline{y} - \widehat{\beta}_1 \overline{x},$$

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

2. Propiedades estadísticas deseables de los estimadores de MCO

Propiedades estadísticas: 1. Insesgadez

Los estimadores MCO de β_0 y β_1 son insesgados.

La prueba de insesgadez de los estimadores MCO depende de los 4 supuestos. Si uno sólo falla entonces los estimadores MCO no son necesariamente insesgados.

La insesgadez es una descripción de los estimadores. En concreto, nos indica si está <u>cerca</u> o <u>lejos</u> del verdadero parámetro.

Propiedades estadísticas: 1. Insesgadez

De este modo,

$$\widehat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})u_i}{s_x^2}.$$

Definiendo $d_i = (x_i - \overline{x})$,

$$\widehat{\beta}_1 = \beta_1 + \left(\frac{1}{s_x^2}\right)\sum_{i=1}^{n} d_i u_i.$$

Finalmente,

$$E(\widehat{\beta}_1) = \beta_1 + \left(\frac{1}{s_x^2}\right)\sum_{i=1}^{n} d_i E(u_i) = \beta_1$$

Propiedades estadísticas: 2. mejor, óptima o varianza eficiente

Además de saber que la distribución muestral de $\widehat{\beta}_1$ está centrada en β_1, también es relevante saber qué tanto puede esperarse que $\widehat{\beta}_1$ se aleje, en promedio, de β_1.

Así seremos capaces de elegir el mejor estimador de una amplia gama de estimadores insesgados.

Propiedades estadísticas: 2. mejor, óptima o varianza eficiente

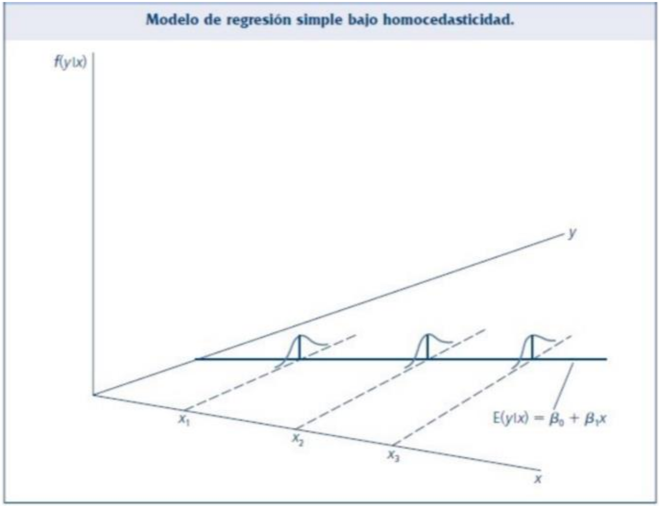
Supuesto adicional: $Var(u|x) = \sigma^2$ (**homocedasticidad**) y dado que $Var(u|x) = E(u^2|x) - [E(u|x)]^2$ y $E(u|x) = 0$,

$$\sigma^2 = E(u^2|x) = E(u^2) = Var(u).$$

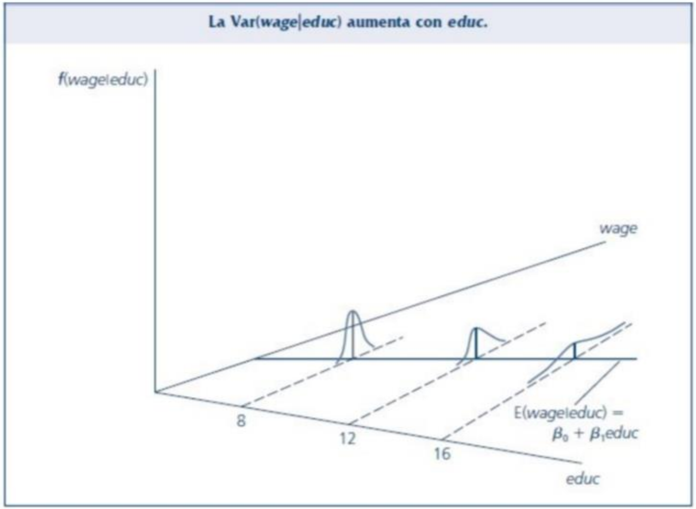
Así, σ^2 es la varianza incondicional, también conocida como la varianza del error.

σ (la raíz cuadrada de la varianza del error) es conocida como la desviación estándar del error.

Propiedades estadísticas: 2. mejor, óptima o varianza eficiente



Fuente: Wooldridge (2005)



Fuente: Wooldridge (2005)

Varianza del estimador OLS

Cuanto mayor sea la varianza del error (σ^2) mayor será la varianza del estimador de la pendiente $Var(\widehat{\beta}_1)$.

A medida que aumenta la variabilidad de las x_i, la varianza del estimador de la pendiente $Var(\widehat{\beta}_1)$ será menor.

Como resultado, a medida que se incrementa el tamaño de la muestra n también aumentará la varianzación total de las x_i obteniendo una menor $Var(\widehat{\beta}_1)$.

Problema: la varianza del error (σ^2) es desconocida.

Varianza del estimador OLS

Dado que los errores, u_i, no pueden ser observados nosotros nos conocemos la varianza del error, σ^2.

Lo que podemos observar son los residuos de modo que podemos usarlos para estimar la varianza del error:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_i &= y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i \\ &= u_i - \left(\widehat{\beta}_0 - \beta_0\right) - \left(\widehat{\beta}_1 - \beta_1\right) x_i . \end{aligned}$$

Reemplazando los errores por los residuos, un estimador factible de σ^2 sería

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2 .$$

Regresión a través del origen

En ocasiones se impone la restricción de que cuando $x = 0$ el valor esperado de y es cero. Ej: si el ingreso es cero ($x = 0$), la recaudación de impuestos de las rentas del trabajo y debe ser cero.

Regresión a través del origen:

$$\widetilde{y} = \widetilde{\beta}_1 x.$$

Problema de suma de cuadrados residual:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widetilde{\beta}_1 x_i \right)^2 .$$

Estimador MCO:

$$\widetilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

3. Introducción al Modelo de Regresión Lineal Múltiple -MRLM-

Modelo de RL Múltiple

Cuando en la regresión lineal intervienen dos o más variables explicativas, se trata de una regresión lineal múltiple.

- **Especificación general:**

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \ldots + \beta_\kappa x_{ki} + e_i$$

Especificación matricial:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Dónde:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k,1} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k,2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & x_{n,1} & x_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{k,n} \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

- Preguntas & Respuestas

Fin de la sesión

Referencias:

- Wooldridge, Jeffrey (2010). “El modelo de regresión simple”, en Introducción a la econometría: un enfoque moderno, Cengage Learning, México, pp. 22-166. Capìtulos 2, 3 y 4.
- Wooldridge, Jeffrey (2005). Introducción a la econometría: un enfoque moderno, Cengage Learning.