Wetenschappelijk rekenen – {`python`, `sympy`, `numpy`, `matplotlib`}

Oefeningen

1 Functie-analyse

Gebruik volgend (vereenvoudigd) stappenplan om het verloop van een functie f te onderzoeken:

1. Bepaal het definitiegebied van de functie f;
2. Zoek de nulpunten en onderzoek het teken;
3. Ga na of de functie asymptoten heeft;
   - De rechte $x = a$ is een verticale asymptoot als en slechts als
   $$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \pm\infty \text{ of } \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \pm\infty;$$
   - De rechte $y = b$ is een horizontale asymptoot als en slechts als
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \text{ of } \lim_{x\to+\infty} f(x) = b;$$
   - De rechte $y = a \cdot x + b$ is een schuine asymptoot als en slechts als
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = a \text{ en } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - a \cdot x = b;$$
4. Bepaal de afgeleide functie f', bereken de kritieke punten en onderzoek het teken;
   - De functie heeft een kritiek punt in a als en slechts als $f'(a) = 0$ of, equivalent, als de functie f een horizontale raaklijn $y = f(a)$ heeft in het punt $\big(a, f(a)\big)$;
   - Is $f'(x) > 0$ voor alle $x \in]a, b[$, dan is f stijgend op $]a, b[$;
   - Is $f'(x) < 0$ voor alle $x \in]a, b[$, dan is f dalend op $]a, b[$;
   - Een kritiek punt is een extremum als de afgeleide van teken verandert;
5. Bepaal de tweede afgeleide f'', bereken de nulpunten en onderzoek het teken;
   - Is $f''(x) > 0$ voor alle $x \in]a, b[$, dan is f hol op $]a, b[$;
   - Is $f''(x) < 0$ voor alle $x \in]a, b[$, dan is f bol op $]a, b[$;
   - Een nulpunt a van de tweede afgeleide is een buigpunt met buigraaklijn $y = f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$ als de tweede afgeleide van teken verandert in a en de eerste afgeleide $f'(a)$ bestaat;
6. Maak een schets van de functie op basis van deze gegevens.

Pas dit stappenplan toe op volgende functies, gebruik `Python` zo veel mogelijk voor het maken van de berekeningen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1};$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \exp(-\frac{x^2}{2});$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}.$$