シミュレーション実習 中間レポート

262201018 在田 陽一

2022/05/11

問題 1

(1)

条件より, 棒の下半分が y 軸と交わるためには,

$$y_s \leq \frac{l}{2}\sin\theta \tag{1.1}$$

であればよい。
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y_s \leq \frac{d}{2}$ より, この範囲において変数 y_s, θ が式 (1.1) を満たす確率を求めればよい.
よって確率 p は,

$$p \sim \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\sin\theta}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d} \tag{1.2}$$

となる.

(2)

式 (1.2) より,

$$\pi \sim \frac{2l}{pd} \tag{1.3}$$

と表せるので, y_s と θ を乱数生成させることで式 (1.1) と比較し, それをもとに (1.3) 式によって π を実測する.
プログラムの実行手順としては, まずデータを buffon.py によって出力し, それを problem1.ipynb によって出力した.

問題 2

(1)

式 (1) は定数係数の二階微分方程式より,$x = e^{\lambda x}$ とおいて整理すると

$$m\lambda^2 + \zeta\lambda + k = 0 \tag{2.1}$$

という特性方程式 (2.1) を得る．この解は

$$\lambda = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4mk}}{2} \tag{2.2}$$

であり, ルートの中身について場合分けすると, 減衰振動, 過減衰, 臨界減衰を示す条件はそれぞれ

$$\zeta > \sqrt{4mk} \qquad (\text{減衰振動}) \tag{2.3}$$
$$\zeta < \sqrt{4mk} \qquad (\text{過減衰}) \tag{2.4}$$
$$\zeta = \sqrt{4mk} \qquad (\text{臨界減衰}) \tag{2.5}$$

となる．

(2)

式 (1) について $x = \tilde{x}$, $t = t_0\tilde{t}$, $\dot{x} = v = \frac{a}{t_0}\tilde{v}$ を代入して

$$m\frac{a}{t_0}\dot{\tilde{v}}(\tilde{t}) = -\zeta\frac{a}{t_0}\tilde{v}(\tilde{t}) - ka\tilde{x}(\tilde{t}) \tag{2.6}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{dt} &= \frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} \\ &= \frac{1}{t_0}\frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

より, 式 (2.6) は

$$\frac{m}{t_0^2}\frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{\zeta}{t_0}\tilde{v}(\tilde{t}) - k\tilde{x}(\tilde{t}) \tag{2.8}$$

と表される．式 (2.8) 左辺について, 刻み幅 $\Delta\tilde{t}$ に関するオイラー法による離散化を実行すると

$$\frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) - \tilde{v}(\tilde{t})}{\Delta\tilde{t}} \tag{2.9}$$

より, これを式 (2.8) に代入して整理すると

$$\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2\Delta\tilde{t}}{m}\tilde{x}(\tilde{t}) \tag{2.10}$$

また $\tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})$ について, 半陰的オイラー法に基づき

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) &= \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\
&= \left(1 - \frac{kt_0^2\Delta\tilde{t}}{m}\right)\tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{\zeta t_0\Delta\tilde{t}}{m}\right)\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

以上より, 求める 2 項間漸化式は

$$
\begin{cases}
\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0\Delta\tilde{t}}{m}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2\Delta\tilde{t}}{m}\tilde{x}(\tilde{t}) \\
\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{kt_0^2\Delta\tilde{t}}{m}\right)\tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{\zeta t_0\Delta\tilde{t}}{m}\right)\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}
\end{cases} \qquad (2.12)
$$

となる.

(3)

式 (2.12) について $t_d = \frac{m}{\zeta}$, $t_s = \sqrt{\frac{m}{k}}$ を代入すると

$$
\begin{cases}
\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \left(\frac{t_0}{t_s}\right)^2\tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\
\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left[1 - \left(\frac{t_0}{t_s}\right)^2\Delta\tilde{t}\right]\tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{t_0}{t_d}\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}
\end{cases} \qquad (2.13)
$$

となる.

(4)

式 (2.13) において $t_s = t_0$ を代入し, さらに $\frac{t_0}{t_d} = T$ とすると

$$
\begin{cases}
\tilde{v}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = \left(1 - T\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t}) - \tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\
\tilde{x}(\tilde{t}+\Delta\tilde{t}) = (1 - \Delta\tilde{t})\tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - T\Delta\tilde{t}\right)\tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t}
\end{cases} \qquad (2.14)
$$

となる. また,$t_d = \frac{m}{\zeta}$, $t_s = \sqrt{\frac{m}{k}}$, $t_s = t_0$ を式 (2.3)-(2.5) に代入することで $\frac{t_0}{t_d} = T$ とおいたとき

$$T < 2 \qquad (\text{減衰振動}) \qquad (2.3)$$

$$T > 2 \qquad (\text{過減衰}) \qquad (2.4)$$

$$T = 2 \qquad (\text{臨界減衰}) \qquad (2.5)$$

となるので,$T = 0, 1, 2, 3, 4$ のときの $x(t)$ を図 2.1 にプロットした. 各 T における t と $x(t)$ の関係を problem2.py を用いて出力し, それらを problem2.ipynb

によって 1 つの図にプロットした．ここで, $\Delta t = 0.01$, $\frac{a}{t_0} = 0.1$ として計算し, t の範囲は (0,500) とした.

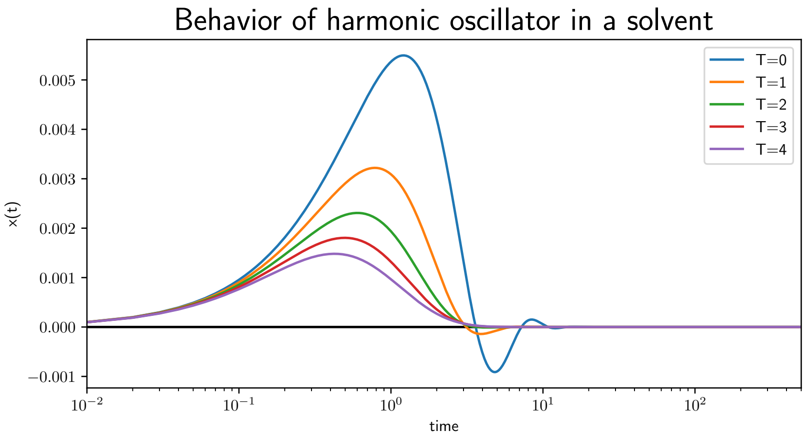

図 1: 調和振動子のふるまい