

シミュレーション実習 中間レポート

262201018 在田 陽一

2022/05/11

問題 1

(1)

条件より, 棒の下半分が y 軸と交わるためには

$$y_s \leq \frac{l}{2} \sin \theta \quad (1.1)$$

であればよい.

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y_s \leq \frac{d}{2}$ より, この範囲において変数 y_s , θ が式 (1.1) を満たす確率を求めればよい.

よって確率 p は,

$$p \sim \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin \theta}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2l}{\pi d} \quad (1.2)$$

となる.

(2)

式 (1.2) より,

$$\pi \sim \frac{2l}{pd} \quad (1.3)$$

と表せるので, y_s と θ を乱数生成させることで式 (1.1) と比較し, それをもとに式 (1.3) によって π を実測する.

プログラムの実行手順としては, まずデータを `buffon.py` によって出力し, それを `problem1.ipynb` によって出力した. 落とした棒の本数と実測した π の値の関係を図 1 に示す. なお, π の理論値を赤線で重ね合わせた.

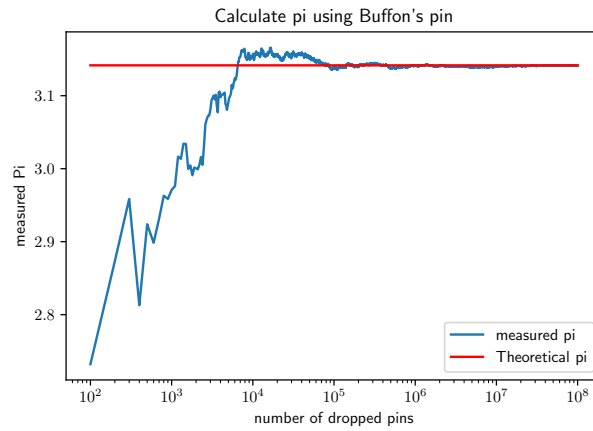


図 1: Buffon の針による円周率の数値的見積もり

(3)

(2) で実測した π の値と理論値の差の誤差を、絶対値として示す。プログラムの実行手順としては、まずデータを `buffon.py` によって出力し、それを `problem1.ipynb` によって出力した。誤差の絶対値と落とした棒の本数の関係を図 2 に示す。ここで、 $\frac{C}{\sqrt{n}}$ を、 $C = 3.0$ として重ね合わせた。

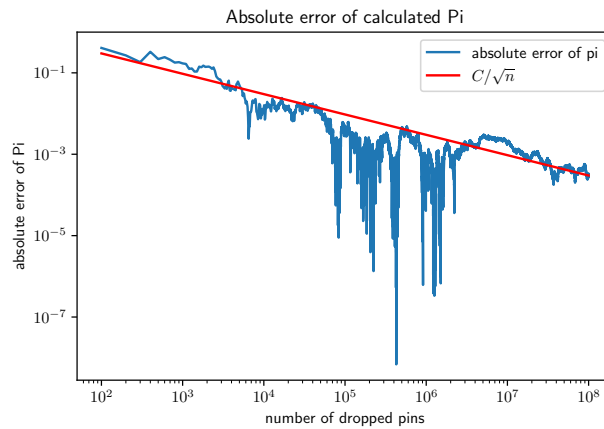


図 2: 数値的の見積もった円周率の絶対誤差

問題 2

(1)

式 (1) は定数係数の二階微分方程式より, $x = e^{\lambda x}$ において整理すると

$$m\lambda^2 + \zeta\lambda + k = 0 \quad (2.1)$$

という特性方程式 (2.1) を得る. この解は

$$\lambda = \frac{-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4mk}}{2} \quad (2.2)$$

であり, ルートの中身について場合分けすると, 減衰振動, 過減衰, 臨界減衰を示す条件はそれぞれ

$$\zeta > \sqrt{4mk} \quad (\text{減衰振動}) \quad (2.3)$$

$$\zeta < \sqrt{4mk} \quad (\text{過減衰}) \quad (2.4)$$

$$\zeta = \sqrt{4mk} \quad (\text{臨界減衰}) \quad (2.5)$$

となる.

(2)

式 (1) について $x = \tilde{x}$, $t = t_0\tilde{t}$, $\dot{x} = v = \frac{a}{t_0}\tilde{v}$ を代入して

$$m\frac{a}{t_0}\dot{\tilde{v}}(\tilde{t}) = -\zeta\frac{a}{t_0}\tilde{v}(\tilde{t}) - ka\tilde{x}(\tilde{t}) \quad (2.6)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{dt} &= \frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} \\ &= \frac{1}{t_0} \frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

より, 式 (2.6) は

$$\frac{m}{t_0^2} \frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{\zeta}{t_0} \tilde{v}(\tilde{t}) - k\tilde{x}(\tilde{t}) \quad (2.8)$$

と表される. 式 (2.8) 左辺について, 刻み幅 $\Delta\tilde{t}$ に関するオイラー法による離散化を実行すると

$$\frac{d\tilde{v}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) - \tilde{v}(\tilde{t})}{\Delta\tilde{t}} \quad (2.9)$$

より, これを式 (2.8) に代入して整理すると

$$\tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2 \Delta\tilde{t}}{m} \tilde{x}(\tilde{t}) \quad (2.10)$$

また $\tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})$ について, 半陰的オイラー法に基づき

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) &= \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ &= \left(1 - \frac{kt_0^2 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

以上より, 求める 2 項間漸化式は

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \frac{kt_0^2 \Delta\tilde{t}}{m} \tilde{x}(\tilde{t}) \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{kt_0^2 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{\zeta t_0 \Delta\tilde{t}}{m}\right) \tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases} \quad (2.12)$$

となる.

(3)

式 (2.12) について $t_d = \frac{m}{\zeta}$, $t_s = \sqrt{\frac{m}{k}}$ を代入すると

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left(1 - \frac{t_0}{t_d} \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t}) - \left(\frac{t_0}{t_s}\right)^2 \tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \left[1 - \left(\frac{t_0}{t_s}\right)^2 \Delta\tilde{t}\right] \tilde{x}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{t_0}{t_d} \Delta\tilde{t}\right) \tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases} \quad (2.13)$$

となる.

(4)

式 (2.13) において $t_s = t_0$ を代入し, さらに $\frac{t_0}{t_d} = T$ とすると

$$\begin{cases} \tilde{v}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - T\Delta\tilde{t}) \tilde{v}(\tilde{t}) - \tilde{x}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = (1 - \Delta\tilde{t})\tilde{x}(\tilde{t}) + (1 - T\Delta\tilde{t}) \tilde{v}(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases} \quad (2.14)$$

となる. また, $t_d = \frac{m}{\zeta}$, $t_s = \sqrt{\frac{m}{k}}$, $t_s = t_0$ を式 (2.3)-(2.5) に代入することで $\frac{t_0}{t_d} = T$ とおいたとき

$$T < 2 \quad (\text{減衰振動}) \quad (2.3)$$

$$T > 2 \quad (\text{過減衰}) \quad (2.4)$$

$$T = 2 \quad (\text{臨界減衰}) \quad (2.5)$$

となるので, $T = 0, 1, 2, 3, 4$ のときの $x(t)$ を図 2.1 にプロットした. 各 T における t と $x(t)$ の関係を problem2.py を用いて出力し, それらを problem2.ipynb によって 1 つの図にプロットした. ここで, $\Delta t = 0.01$, $\frac{a}{t_0} = 0.1$ として計算し, t の範囲は (0,500) とした.

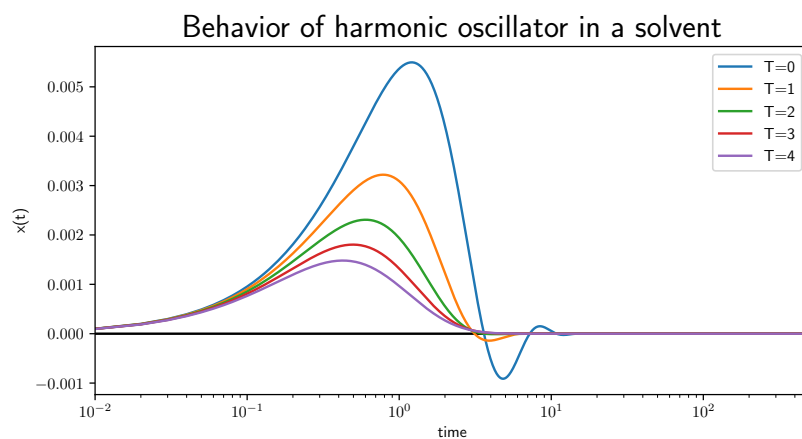


図 3: 調和振動子のふるまい

添付ファイル・buffon.py ・ploblem2.py ・ploblem1.ipynb ・ploblem2.ipynb