

BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

I. MỞ ĐẦU :

Phép biến đổi Fourier rời rạc là phép biến đổi Fourier được áp dụng để rời rạc hoá một chuỗi giá trị phức.

Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT) được áp dụng vào nhiều ứng dụng như lọc, nén ảnh, phóng đại ảnh. chúng ta sẽ nghiên cứu 2-D DFT và các kỹ thuật tính toán. Đầu tiên, chúng ta sẽ xem xét DFT một chiều, sau đó mở rộng ra cho DFT 2 chiều.

Một số khái niệm cơ bản :

- **DFT đối với tín hiệu tương tự :**

Với một hàm liên tục một biến $F(t)$, phép biến đổi Fourier $F(f)$ được định nghĩa là:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

và biến đổi ngược

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$$

với j là căn bậc 2 của -1 và e biểu thị số mũ tự nhiên.

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta).$$

- **DFT đối với tín hiệu rời rạc :**

Giả sử một chuỗi phức $X(k)$ với phép lấy mẫu gồm N mẫu :

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k, \dots, X_{N-1}$$

Với x là số phức

$$x_i = x_{\text{real}} + j x_{\text{imag}}$$

Phép biến đổi Fourier của chuỗi này được biểu thị $X(k)$ gồm N mẫu

Phép biến đổi thuận được định nghĩa :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-jk2\pi n/N} \quad \text{for } n=0..N-1$$

Phép biến đổi ngược:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{jk2\pi n/N} \quad \text{for } n=0..N-1$$

Với chuỗi số thực tương tự với phần ảo $= 0$.

II. DFT CHO TÍN HIỆU MỘT CHIỀU :

1. Định nghĩa :

- **Biến đổi Fourier 1-D** cho tín hiệu thời gian rời rạc $f(kT)$ tính theo công thức :

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j2\pi/N \cdot nk}$$

Công thức này có thể viết lại dưới dạng

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-nk}$$

Ở đây $f(k) = f(kT)$ và $W_N = e^{-j2\pi/N}$. W_N được gọi là *hạt nhân* của phép biến đổi. Tổng quát, $F(n)$ có dạng

$$F(n) = A(n) e^{j\phi(n)}$$

Ký hiệu $A(n)$, $\phi(n)$ gọi là *phổ khuếch đại* và *phổ pha* của $F(n)$.

- **Biến đổi ngược DFT**

Hàm $f(k)$ là biến đổi ngược DFT của $F(n)$ cho bởi theo biểu thức

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Khi $f(k)$ có thể rút ra từ $F(n)$ và ngược lại, chúng gọi là *cặp biến đổi*. Cặp biến đổi này có dạng

$$f(k) \Leftrightarrow F(n)$$

Mặc dù $f(k)$ được xác định trên miền $k \in [0, N]$, nó vẫn là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ NT .

2. Một số tính chất của DFT :

- **Tính chất 1 : Tuyến tính.** Nếu ta có hai dãy tuần hoàn cùng $f_1(n)$ và $f_2(n)$, và cả hai dãy này tuần hoàn với chu kỳ N , được dùng để tính

$$f_3(k) = af_1(k) + bf_2(k)$$

là kết quả của biến đổi DFT $f_3(n)$ cho bởi

$$F_3(n) = aF_1(n) + bF_2(n)$$

ở đây a , b là hằng số và

$F_1(n) = \text{DFT của } f_1(k)$

$F_2(n) = \text{DFT của } f_2(k)$

- **Tính chất 2 : Tính đối xứng.**

Tính đối xứng của DFT rất hay được dùng.

$$\begin{aligned} F(N-n) &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-k(N-n)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot N} e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot nk} \end{aligned}$$

Nếu $f(k)$ là thực thì
$$F(N-n) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot nk} \right]^* = F(n)^*$$

Dấu $*$ có nghĩa là liên hợp phức.

- **Tính chất 3 : Tích chập tuần hoàn.**

Coi $f_1(k)$ và $f_2(k)$ là hai dãy tuần hoàn có chu kỳ N , với biến đổi Fourier rời rạc là $F_1(n)$ và $F_2(n)$. Xem xét tích $F_1(n_1).F_2(n_2)$

khi
$$F_1(n_1) = \sum_{k_1=0}^{N-1} f_1(k_1) W_N^{-n_1 k_1}$$

$$F_2(n_2) = \sum_{k_2=0}^{N-1} f_2(k_2) W_N^{-n_2 k_2}$$

và tại các vị trí $n_1 = n_2 = n$

$$\begin{aligned} F_1(n_1).F_2(n_1) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} f_1(k_1) W_N^{-n_1 k_1} \cdot \sum_{k_2=0}^{N-1} f_2(k_2) W_N^{-n_2 k_2} \\ &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{n_1=0}^{N-1} f_1(k_1) f_2(k_2) W_N^{-n_1 k_1} W_N^{-n_2 k_2} \end{aligned}$$

Đặt $f_3(k) = \text{IDFT của } F_1(n).F_2(n)$

$$\text{hay } f_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (F_1(n).F_2(n)) W_N^{nk}$$

vì vậy

$$f_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} f_1(k_1) f_2(k_2) W_N^{-n(k_1+k_2)} \right] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{N-1} f_1(k_1) \sum_{k_2=0}^{N-1} f_2(k_2) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-n(k_1+k_2-k)} \right]$$

Chú ý là : $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-n(k_1+k_2-k)} = \begin{cases} 1 & \text{cho } k = k_1 + k_2 + lN \\ 0 & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases}$

ở đây l là số nguyên. Vì vậy mà

$$f_3(k) = \sum_{k_1=0}^{N-1} f_1(k_1) f_2(k - k_1 - lN)$$

ở đây $k = 0$ đến $2N - 1$.

Biểu thức trên biểu diễn tích chập của hai tín hiệu tuần hoàn. Chú ý rằng biểu thức này chỉ áp dụng cho hai dãy có chung một chu kỳ, và chiều dài của dãy tính theo biểu thức trên là $2N - 1$. Kết quả này chứng minh rằng trong DFT, tín hiệu có số mẫu lớn hơn N sẽ được biến đổi thành dãy tuần hoàn có chu kỳ N . Khi dùng DFT cho một tín hiệu không có chu kỳ, mà kết quả thu được từ tích hai dãy, ta sẽ phạm một sai lầm gọi là lỗi *wraparound*. Đó là lý do ta phải làm cho cả hai dãy có chu kỳ bằng nhau. Để sửa lỗi này, một số số 0 cần phải thêm vào cả hai dãy để chiều dài hai dãy bằng nhau. Ví dụ, nếu một dãy có chiều dài A , một dãy có chiều dài B , kết quả ta phải thêm các số 0 cho cả hai dãy có chiều dài ít nhất là $A + B - 1$.

Với tín hiệu một chiều, người ta biểu diễn bởi một chuỗi trực giao các hàm cơ sở. Với các hàm liên tục, khai triển chuỗi trực giao sẽ cung cấp chuỗi các hệ số dùng trong nhiều quá trình khác nhau hay trong phân tích hàm. Khai triển Fourier rời rạc cho DFT cho một dãy $\{u(n), n=0,1,\dots,N-1\}$ định nghĩa bởi:

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) W_N^{kn} \quad \text{với } k=0,1,2,\dots,N-1$$

với $W_N = e^{-j2\pi/N}$

Và biến đổi ngược:

$$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) W_N^{-kn}, n = 0,1,\dots,N-1$$

Trong xử lý ảnh người ta hay dùng phép biến đổi DFT đơn vị:

$$v(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Ma trận DFT thuần nhất $N \times N$ được đưa ra với:

$$F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{kn} \right\} \quad 0 \leq k, n \leq N-1$$

DFT là một trong số các phép biến đổi quan trọng nhất trong tín hiệu số & xử lý ảnh. Nó có vài thuộc tính làm thu hút các ứng dụng xử lý ảnh.

3. Các thuộc tính của DFT & DFT đơn vị:

$u(n)$ là một chuỗi bất kỳ với $n=0, 1, 2, \dots, N-1$. Dịch trái vòng l mẫu của $u(n)$ ký hiệu $u(n-l)_c$ được định nghĩa là: $u[(n-l) \bmod N]$. Ma trận DFT & DFT đơn vị là đối xứng. Vì vậy: $F^{-1} = F^*$

Sự mở rộng là tuần hoàn. Sự mở rộng của DFT & DFT đơn vị của một chuỗi và phép biến đổi ngược của chúng có tính chất tuần hoàn với chu kỳ N .

DFT là phổ mẫu của chuỗi liên tục xác định $u(n)$ mở rộng với các giá trị 0 bên ngoài Giới thiệu phép biến đổi Fourier rời rạc là phép biến đổi Fourier được áp dụng để rời rạc hoá một chuỗi giá trị phức.

Ngoài khoảng $[0, N-1]$. Với chuỗi mở rộng 0 được định nghĩa:

$$\tilde{u}(n) = \begin{cases} u(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

khi đó phép biến đổi Fourier là:

$$\tilde{u}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{u}(n) \exp(-jwn) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot \exp(-jwn)$$

So sánh điều này với công thức trên ta được : $u(k) = \tilde{u}\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$

Khi đó biến đổi DFT đơn vị trở thành: $\tilde{u}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) / \sqrt{N}$

DFT & DFT đơn vị của chiều N có thể được bổ sung bởi một phép toán nhanh với độ phức tạp tính toán là: $O(N \log_2 N)$. Ở đó tồn tại một tập các tính toán gọi là phép biến đổi Fourier nhanh mà yêu cầu độ phức tạp tính toán của DFT & DFT đơn vị là $O(N \log_2 N)$, các phép tính ở đây là cộng & nhân số thực. Độ chính xác tính toán phụ thuộc vào N ngay khi các phép lựa chọn đặc biệt của thuật toán trong lớp đó. Phần lớn các thuật toán FFT nói chung yêu cầu $N = 2^p$, p là một số nguyên dương.

DFT & DFT đơn vị của một chuỗi liên tục thực $\{x(n), n=0, \dots, N-1\}$ là đối xứng liên hợp qua $N/2$.

$$v^*(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} u^*(n) W_N^{-(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) W_N^{kn} = v(k)$$

$$\Rightarrow v\left(\frac{N}{2} - k\right) = v^*\left(\frac{N}{2} + k\right), \quad k=0, \dots, N/2 - 1$$

$$\Rightarrow \left|v\left(\frac{N}{2} - k\right)\right| = \left|v\left(\frac{N}{2} + k\right)\right|$$

Có thể nói rằng DFT hoặc DFT đơn vị của chuỗi tuần tự thực $N \times 1$ có N mức và thứ tự lưu trữ phải giống thứ tự chuỗi $u(n)$.

Các vectơ cơ sở của DFT đơn vị là vectơ trực giao của bất kỳ ma trận tuần hoàn nào. Các giá trị riêng của ma trận tuần hoàn được cho bởi DFT của cột đầu tiên của nó. Cho H là một ma trận (circulant). \rightarrow nó thỏa mãn:

$$[H]_{m,n} = h(m-n) = h[(m-n) \text{ modulo } N], \quad 0 \leq m, n \leq N-1$$

Vectơ cơ sở của DFT thuần nhất là các cột của $F^{*T} = F^*$, đó là:

$$\Phi_k = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{-kn}, 0 \leq n \leq N-1 \right\}^T, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\text{Xét biểu thức: } [H \Phi_k]_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum h(m-n) W_N^{-kn}$$

Viết $m-n=l$ và sắp xếp lại các mục chúng ta có thể viết:

$$[H \Phi_k]_m = \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{-km} \left[\sum_{l=0}^{N-1} h(l) W_N^{kl} + \sum_{l=-N+m+1}^{-1} h(l) W_N^{kl} - \sum_{l=m+1}^{N-1} h(l) W_N^{kl} \right]$$

Với $W_N^{-1} = W_N^{N-1}$ (khi W_N^{N-1}) \rightarrow giá trị riêng nguyên:

$$[H \Phi_k]_m = \lambda_k \Phi_k(m) \quad \text{hoặc} \quad H \Phi_k = \lambda_k \Phi_k$$

λ_k các giá trị riêng của H được định nghĩa là:

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{N-1} h(l) W_N^{kl} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Đó là DFT đơn giản của cột đầu tiên của H

Dựa trên các thuộc tính trước của DFT, các thuộc tính thêm vào sau đây có thể được chứng minh

- *Thuyết chập vòng* : DFT chập vòng của 2 chuỗi tuần tự cân bằng với sản phẩm DFT của nó. Nghĩa là:

$$\text{Nếu } x_2 = \sum_{k=0}^{N-1} h(n-k) x_1(k), 0 \leq n \leq N-1$$

$$\text{Thì DFT } \{x_2(n)\}_N = \text{DFT} \{h(n)\}_N \text{DFT} \{x_1(n)\}_N$$

DFT $\{x(n)\}_N$ chỉ rõ DFT của chuỗi tuần tự $x(n)$ kích thước N . Điều đó có nghĩa là để tính chập vòng, trước tiên chúng ta tính DFT của $x_2(n)$, sau đó tính DFT ngược của nó. Sử dụng DFT sẽ đạt được độ phức tạp tính toán là $O(N \log_2 N)$ so với ước lượng trực tiếp N^2 phép tính.

Chập tuyến tính của 2 chuỗi tuần tự có thể đạt được trong FFT bằng việc nhúng nó vào 1 Chập vòng. Tổng quát, chập tuyến tính của 2 chuỗi tuần tự $\{h(n), n=0, \dots, N-1\}$ và $\{x_1(n), n=0, \dots, N-1\}$ là một chuỗi tuần tự: $\{x_2(n), 0 \leq n \leq N' + N - 2\}$ và có thể thu được bằng thuật toán sau:

Bước 1: cho $M \geq N' + N - 1$ là một số nguyên

Bước 2: Xác định $\bar{h}(n)$ và $\bar{x}_1(n)$, $0 \leq n \leq M - 1$ là một chuỗi mở rộng tương ứng với từng cặp $\bar{h}(n)$ và $\bar{x}_1(n)$

Bước 3: Cho $\bar{y}_1(k) = DFT\{\bar{x}_1(n)\}_M$ xác định $\bar{y}_2(k) = \lambda_k \bar{y}_1(k)$
 $k=0, \dots, M-1$.

Bước 4: Lấy DFT ngược của $\bar{y}_2(k)$ để thu được $\bar{x}_2(n)$ sau đó tính $x_2(n) = \bar{x}_2(n)$ với $0 \leq n \leq N+N' - 2$.

Bất kỳ ma trận nào cũng có thể được chéo hoá bởi DFT/DFT đơn vị:

$$FHF^* = A.$$

ở đó $A = \text{Diag}\{\lambda_k, 0 \leq k \leq N-1\}$ và λ_k được cho bởi (

c, c_1, c_2 là các ma trận vòng với các tính chất:

$c_1 c_2 = c_2 c_1$, tính chất giao hoán.

C^{-1} là một ma trận vòng và có thể tính toán với độ phức tạp tính toán là $O(N \log N)$

C^T , $C_1 + C_2$ và $f(C)$ là các ma trận vòng, $f(C)$ là một hàm tùy ý của C .

III. DFT HAI CHIỀU :

1. Định nghĩa:

DFT hai chiều của một ảnh $N \times N$ $\{u(m, n)\}$ là một phép biến đổi tách được và được định nghĩa như sau:

$$v(k, l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) W_N^{km} W_N^{ln} \quad 0 \leq k, l \leq N-1$$

Và biến đổi ngược của nó là:

$$u(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k, l) W_N^{-km} W_N^{-ln} \quad 0 \leq k, l \leq N-1$$

Cặp biến đổi DFT đơn vị được định nghĩa là:

$$v(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) W_N^{km} W_N^{ln} \quad 0 \leq k, l \leq N-1$$

$$u(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k, l) W_N^{-km} W_N^{-ln} \quad 0 \leq k, l \leq N-1$$

Dạng rút gọn:

$$V = FUF$$

$$U = F^* V F^*$$

Nếu U và V được ánh xạ vào các vectơ sắp xếp theo hàng u, v thì:

$$v = Fu, u = F^* v$$

$$F = F \otimes F$$

F là một ma trận kích thước $N^2 \times N^2$ và là một biểu diễn của DFT đơn vị hai chiều.

2. Tính chất của DFT hai chiều :

- **Tính chất 1: đối xứng, đơn vị:**

$$F^T = F \quad F^{-1} = F^* = F^* \otimes F^*$$

- **Tính chất 2 : Tính tuần hoàn**

$$v(k+N, l+N) = v(k, l) \quad \forall k, l$$

$$u(m+N, n+N) = u(m, n) \quad \forall m, n$$

- **Tính chất 3 : Lấy mẫu phổ fourier**

Nếu $\tilde{u}(m, n) = u(m, n)$ $0 \leq m, n \leq N-1$ và $\tilde{u}(m, n) = 0$ thì:

$$\tilde{U}\left(\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi l}{N}\right) = DFT\{u(m, n)\} = v(k, l)$$

Với $\tilde{U}(w_1, w_2)$ là biến đổi nhanh Fourier của $\tilde{U}(m, n)$

- **Tính chất 4 : Biến đổi nhanh**

Vì DFT hai chiều là tách được, biến đổi tương đương với $2N$ phép DFT một chiều với độ phức tạp tính toán $O(N \log_2 N)$ theo cách tính FFT. Do vậy độ phức tạp tính toán tổng là: $O(N^2 \log_2 N)$.

- **Tính chất 5 : Đối xứng kết hợp**

Biến đổi DFT và DFT đơn vị của ảnh thực có tính đối xứng kết hợp

$$v\left(\frac{N}{2} \pm k, \frac{N}{2} \pm l\right) = v^*\left(\frac{N}{2} \mu k, \frac{N}{2} \mu l\right) \quad 0 \leq k, l \leq N/2 - 1$$

$$\text{hay } v(N \pm k, N \pm l) = v^*(N \mu k, N \mu l) \quad 0 \leq k, l \leq N-1$$

- **Tính chất 6 : ảnh cơ sở**

Ảnh cơ sở được cho bởi định nghĩa

$$A_{k,l}^* = \Phi_k \Phi_l^T = \frac{1}{N} \{W_N^{-(km+ln)} \quad 0 \leq m, n \leq N-1$$

$$0 \leq k, l \leq N-1$$

- **Tính chất 7: Định lý chập vòng hai chiều:**

DFT của chập vòng hai chiều của hai mảng là tích các DFT của chúng. Chập vòng hai chiều của hai mảng $N \times N$ $U(m,n) \times U_1(m,n)$ được định nghĩa là:

$$U_2(m,n) = \sum_{m'=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} h(m-m', n-n')_c U(m'-n') \quad 0 \leq m,n \leq N-1$$

với $h(m,n)_c = h(m \text{ module } N, n \text{ module } N)$

Chập vòng chính là khai triển theo chu kì của $h(m,n)$ chồng lên miền $N \times N$ của $u_1(m,n)$ DFT hai chiều của $h(m-m', n-n')_c$ đối với hai giá trị cố định m', n' là

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(m-m', n-n')_c W_N^{(mk+nl)} &= W_N^{(m'k+n'l)} \sum_{i=m'}^{N-1-m'} \sum_{j=n'}^{N-1-n'} h(i,j)_c W_N^{(ik+jl)} \\ &= W_N^{(m'k+n'l)} \sum \sum h(m,n) W_N^{(mk+nl)} = W_N^{(m'k+n'l)} DFT \{h(m,n)\}_N \end{aligned}$$

Theo tính chất biến đổi nhanh (P142) ta có chập vòng $N \times N$ có thể tính toán được với độ phức tạp tính toán là: $O(N^2 \log_2 N)$

Ta có thể tính chập vòng như sau:

$$x_3(m,n) = \sum_{m'=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x_2(m-m', n-n') x_1(m', n')$$

Với $x_1(m,n)$ & $x_2(m,n)$ được giả thiết $= \emptyset$

Với $m,n \notin [0, M-1]$ miền xác định $x_3(m,n)$ là $\{0 \leq m,n \leq 2M-2\}$

Đặt $N \geq 2M-1$ & định nghĩa mảng $N \times N$

$$\tilde{h}(m,n) = \begin{cases} x_2(m,n) & 0 \leq m,n \leq M-1 \\ 0 & m,n \neq \end{cases}$$

$$\tilde{u}_1(m,n) = \begin{cases} x_1(m,n) & 0 \leq m,n \leq M-1 \\ 0 & m,n \neq \end{cases}$$

Ký hiệu $DFT\{x(m,n)\}_N$ là DFT hai chiều của mảng $N \times N$

$$x(m,n) \quad 0 \leq m,n \leq 2M-1$$

• Tính chất 8 :

Chia theo cả hai chiều theo N & sử dụng định nghĩa tính knoncker

$$\text{ta có: } (F \otimes F)H = D(F \otimes F)$$

Với H là ma trận vòng hai lần và D là ma trận đường chéo có

$$\begin{aligned} \text{các thành phần cho bởi : } [D]_{kN+l, kN+l} &\stackrel{\Delta}{=} d_{k,l} = DFT \{h(m,n)\}_N \quad 0 \leq \\ k,l &\leq N-1 \end{aligned}$$

Từ các tính chất của phép biến đổi nhanh ta có thể rút ra: Một ma trận vòng khối hai lần có thể được chéo hoá bằng $O(N^2 \log_2 N)$ phép toán. Trị riêng của K cho bởi DFT hai chiều của $h(m,n)$ giống như phép

tính $N \cdot F$ trong cột đầu tiên của K là các thành phần $h(m,n)$ được ánh xạ vào theo thứ tự từ điển.

IV. BIẾN ĐỔI NHANH FOURIER (FFT)

1. Giới thiệu :

Phép biến đổi DFT có thể áp dụng với bất kỳ chuỗi giá trị phức nào nhưng với các chuỗi số lớn nó có thể chiếm lượng thời gian quá lớn (thời gian tỷ lệ với bình phương số điểm trong chuỗi)

Một thuật toán nhanh hơn đã được phát triển bởi Cooley và Tukey trong những năm 1965 gọi là FFT (phép biến đổi Fourier nhanh) yêu cầu duy nhất với các thuật toán là số điểm của chuỗi phải bằng 2^n . Thời gian tính toán tỷ lệ với ví dụ: biến đổi dùng 1024 điểm với DFT lâu hơn 10 phút so với dùng FFT, FFT làm tăng tốc độ đáng kể.

Tính trực tiếp giá trị của DFT bao gồm N phép nhân phức và $N - 1$ phép cộng phức cho mỗi giá trị của $F(n)$. Khi N giá trị được tính toán thì N^2 phép nhân và $N(N - 1)$ phép cộng được tính toán. Cũng như vậy, cho N có giá trị rất lớn, tính trực tiếp giá trị của DFT sẽ đòi hỏi một số phép tính lớn đến mức không thể chấp nhận được. Để ví dụ, cho $N = 1024 = 2^{10}$ ta sẽ phải tính $2^{20} = 1,048,576$ phép nhân số phức và một số gần bằng như vậy các phép cộng.

2. Phép biến đổi nhanh Fourier 2 chiều :

2.1 2-D FFT

Một DFT hai chiều của tín hiệu lấy mẫu hai chiều $h(k_1, k_2)$ cho bởi

$$\begin{aligned} H(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h(k_1, k_2) e^{-j2\pi / N \cdot (n_1 k_1 + n_2 k_2)} \\ &= DFT \{h(k_1, k_2)\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

ở đây
$$\begin{aligned} n_1 &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ n_2 &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Biểu thức $e^{-j2\pi / N \cdot (n_1 k_1 + n_2 k_2)}$ trong hai dấu tổng gọi là hạt nhân của phép biến đổi. $H(n_1, n_2)$, trong trường hợp tổng quát, đầy đủ có thể biểu diễn theo:

$$H(n_1, n_2) = A(n_1, n_2) e^{j\phi(n_1, n_2)}$$

Trong không gian ba chiều, $A(n_1, n_2)$ và $\phi(n_1, n_2)$ nằm tại vị trí của n_1 và n_2 và gọi là phổ tần số và phổ pha của $H(n_1, n_2)$.

2.2 Biến đổi ngược 2-D DFT

Hàm $h(k_1, k_2)$ là biến đổi ngược của 2-D DFT (IFFT) của $H(n_1, n_2)$ và được cho bởi biểu thức

$$h(k_1, k_2) = \frac{1}{N^2} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} H(n_1, n_2) e^{j2\pi / N \cdot (n_1 k_1 + n_2 k_2)} \quad (6.42)$$

2.3 Một số tính chất của 2-D DFT

- **Chuyển đổi.** Từ định nghĩa của 2-D DFT và IDFT cho thấy

$$h(k_1, k_2) e^{j2\pi / N \cdot (a k_1 + b k_2)} \Leftrightarrow H(n_1 - a, n_2 - b)$$

$$h(k_1 - a, k_2 - b) \Leftrightarrow H(n_1, n_2) e^{j2\pi / N \cdot (n_1 a + n_2 b)}$$

Điều đó có nghĩa là một dịch chuyển pha tuyến tính trong một miền biểu diễn bằng một dịch chuyển hằng số trong một miền khác. Xem xét biểu thức (6.43), trường hợp đặc biệt khi $a = b = N/2$.

$$h(k_1, k_2) e^{j\pi (k_1 + k_2)} = h(k_1, k_2) (e^{j\pi})^{k_1 + k_2} = h(k_1, k_2) (-1)^{k_1 + k_2}$$

Hay là

$$h(k_1, k_2) (-1)^{k_1 + k_2} \Leftrightarrow H(n_1 - \frac{N}{2}, n_2 - \frac{N}{2})$$

Nói cách khác, bằng cách nhân vào mỗi điểm $(-1)^{k_1 + k_2}$ trước khi lấy DFT, chúng ta sẽ rút ra được một phổ tần số mà điểm tần số $(0,0)$ của nó sẽ nằm giữa mảng 2-D. Biểu thức này rất hữu dụng trong hiển thị phổ tần số, phổ biên độ và lọc dùng DFT.

Chúng ta rút ra kết luận từ công thức trên rằng dịch chuyển một hằng số trong ảnh sẽ không tác động đến phổ biên độ.

$$\left| H(n_1 + n_2) e^{-j2\pi / N \cdot (n_1 a + n_2 b)} \right| = |H(n_1 + n_2)|$$

Biểu thức đó cũng quan hệ đến bộ lọc 2-D. Xem xét đặc tính của bộ lọc 2-D cho bởi

$$H(n_1, n_2) = A(n_1, n_2) e^{-j2\pi / N \cdot (n_1 a + n_2 b)}$$

Ở đây $A(n_1, n_2)$ là phổ biên độ. Nếu một ảnh với phổ tần số cho bởi $I(n_1, n_2)$ được lọc qua bộ lọc có đặc tuyến pha tuyến tính cho bởi biểu thức ở trên, kết quả sẽ là

$$\begin{aligned} [A(n_1, n_2) e^{-j2\pi / N \cdot (n_1 a + n_2 b)}] I(n_1, n_2) &= [I(n_1, n_2) A(n_1, n_2)] e^{-j2\pi / N \cdot (n_1 a + n_2 b)} \\ &\Leftrightarrow I_f(n_1 - a, n_2 - a) \end{aligned}$$

Ở đây $i_f(n_1, n_2)$ ký hiệu cho ảnh đã được lọc. Một bộ lọc với đặc tuyến pha tuyến tính có nghĩa là không dịch chuyển biên độ. Trong khi đó nếu bộ lọc có đặc tuyến pha không tuyến tính thì pha của ảnh cũng bị biến dạng. Lý do của sự biến dạng này là tất cả các điểm đều phải chịu một sự dịch chuyển vị trí khác nhau tùy theo vị trí của ảnh. Tổng quát, ảnh đã được lọc có thể cho bởi

$$i_f(n_1 - f(n_1, n_2), n_2 - f(n_1, n_2))$$

Ở đây f là hàm dịch chuyển vị trí. Chú ý rằng một ảnh biến dạng pha sẽ xuất hiện trên màn hình như một ảnh mờ.

- **Tính đối xứng liên hợp và tuần hoàn.** Biến đổi 2-D DFT và IDFT tuần hoàn với chu kỳ N có nghĩa là :

$$\begin{aligned} H(n_1, n_2) &= H(n_1 + N, n_2) = H(n_1, n_2 + N) \\ &= H(n_1 + N, n_2 + N) \end{aligned} \quad (6.48) \quad \text{và}$$

$$\begin{aligned} h(k_1, k_2) &= h(k_1 + N, k_2) = h(k_1, k_2 + N) \\ &= h(k_1 + N, k_2 + N) \end{aligned} \quad (6.49)$$

Biến đổi DFT đối xứng liên hợp khi

$$H(n_1, n_2) = H^*(-n_1, -n_2) \quad (6.50)$$

$$\text{hoặc} \quad H(n_1, n_2) = H(-n_1, -n_2) \quad (6.51)$$

- **Quay.** Nếu chúng ta đặt k_1 và k_2 dưới dạng

$$k_2 = r \cos \theta$$

$$k_1 = r \sin \theta$$

$$\text{thì} \quad h(k_1, k_2) = h(r \sin \theta, r \cos \theta) = h'(r, \theta)$$

Và tương tự cho n_1, n_2

$$n_2 = \omega \cos \phi$$

$$n_1 = \omega \sin \phi$$

$$\text{hoặc} \quad H(n_1, n_2) = H'(r, \phi)$$

từ định nghĩa của DFT chúng ta có thể có

$$h(r, \phi + \phi_0) \Leftrightarrow H(\omega, \phi + \phi_0) \quad (6.52)$$

Điều đó có nghĩa là nếu ảnh bị quay đi một góc ϕ_0 thì phổ của nó cũng bị quay đi một góc như vậy.

- **Phân phối và chia độ.** Từ biểu thức (6.1) chúng ta dễ thấy

$$a h_1(k_1, k_2) + b h_2(k_1, k_2) \Leftrightarrow a H_1(n_1, n_2) + b H_2(n_1, n_2) \quad (6.53)$$

ở đây a, b là những độ chia. Cũng như vậy

$$h(ak_1, bk_2) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} H\left(\frac{n_1}{a}, \frac{n_2}{b}\right) \quad (6.54)$$

2.4 Giá trị trung bình

Mức cường độ sáng trung bình trong một ảnh cho bởi :

$$\bar{h} = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h(k_1, k_2)$$

hoặc $\bar{h} = H(0,0)$

Điều này có nghĩa là $H(0,0)$ biểu diễn mức sáng của ảnh.

2.5 Tích chập và sự tương quan

Tích chập của tín hiệu 2-D $h_1(k_1, k_2)$ và $h_2(k_1, k_2)$ cho bởi

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_1(k_1, k_2) h_2(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

Nếu $h_1(k_1, k_2)$ được xác định trên miền

$$\{[k_1 \in [0, A-1]]\} \cap \{[k_1 \in [0, B-1]]\}$$

và nếu $h_2(k_1, k_2)$ được xác định trên miền

$$\{[k_1 \in [0, C-1]]\} \cap \{[k_1 \in [0, D-1]]\}$$

thì chúng ta có thể thấy rằng nếu hai tín hiệu có giá trị zero ngoài miền xác định của chúng thì $M = A + C - 1$ và $N = B + D - 1$.

Tích chập của hai tín hiệu 2-D được viết trong dạng ký hiệu như sau:

$$h_1(k_1, k_2) * h_2(k_1, k_2)$$

Có thể thấy rằng

$$h_1(k_1, k_2) * h_2(k_1, k_2) \Leftrightarrow H_1(n_1, n_2) H_2(n_1, n_2)$$

Điều này có nghĩa là, tích chập trong miền không gian biến thành phép nhân bình thường trong miền tần số. Tính chất này có thể dùng cho lọc 2-D qua DFT. Chúng ta cần nhớ lại rằng bạn đã dùng kỹ thuật lọc FIR trong các chương trước cho chức năng này. Khi áp dụng các bộ lọc FIR cho chức năng lọc bạn cần lấy tín hiệu khoảng cách 2-D đã được biến thành tín hiệu có chu kỳ trước khi tiến hành lấy DFT. Sự không đồng bộ của chu kỳ trong biến đổi này cũng gây ra lỗi như trong biến đổi 1-D. Vì vậy, để tránh trường hợp này ta cần thêm các số 0 vào cả hai các hàm không gian để cho chúng có kích thước $M \times N$ với $M \geq A + C - 1$ và $N \geq B + D - 1$.

Tương quan hoặc tương quan chéo của tín hiệu 2-D định nghĩa bởi

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} h_1(k_1, k_2) h_2(n_1 + k_1, n_2 + k_2)$$

Biểu thức này được viết dưới dạng ký hiệu

$$g(n_1, n_2) = h_1(k_1, k_2) \circ h_2(k_1, k_2)$$

Tương quan chéo thường được gọi là lọc kết hợp và dùng để phát hiện ra phần đầu dấu hiệu các vết sắc nổi trên ảnh. Nó có thể cho thấy rằng

$$h_1(k_1, k_2) \circ h_2(k_1, k_2) \Leftrightarrow H_1(n_1, n_2) \cdot H_2(n_1, n_2)$$

3. Hiện thị FFT

Nếu FFT của một ảnh trong trường hợp tổng quát là một mảng của các số phức đầy đủ, người ta thường biểu diễn biên độ và pha của tần số của ảnh. Hai yếu tố này biểu diễn tính chất của ảnh. Thông thường biên độ tần số được biểu diễn riêng lẻ và gọi là phổ biên độ. Mặc dù vậy, như chúng ta đã nghiên cứu, pha đóng vai trò quan trọng trong xử lý ảnh, và hợp không hợp lý khi chỉ biểu diễn phổ biên độ của ảnh. Để biểu diễn phổ dưới dạng ảnh, tất cả các việc chúng ta cần phải làm là chia biên độ của FFT thành các giá trị từ 0 đến 255 (cho ảnh 8 bit). Dù thế nào đi chăng nữa thì phổ của ảnh cũng bị suy giảm rất nhanh khi tần số tăng lên. Vì vậy mà vùng tần số cao sẽ trở nên lu mờ khi biểu diễn phổ dưới dạng ảnh. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cần xử lý biên độ phổ một chút bằng hàm log. Hàm logarit sẽ sửa độ khuếch đại, và thay thế cho hiện thị phổ $|H(u, v)|$ chúng ta hiện thị:

$$D(u, v) = \log_{10}(1 + |H(u, v)|)$$

Biểu thức này cho ta giá trị zero khi $D(u, v) = 0$ hay $|H(u, v)| = 0$ và như vậy $D(u, v)$ luôn luôn có giá trị dương. Điểm tần số $(0, 0)$ nằm ở trung tâm màn hình. Chú ý phổ ảnh giảm xuống rất nhanh chóng khi tần số tăng lên.

4. Bộ lọc hai chiều dùng FFT

Nếu dùng tích chập để chuyển hàng loạt các phần tử từ miền không gian sang miền tần số ta nên áp dụng FFT. Phép biến đổi này yêu cầu $2 \cdot (N^2/2) \cdot \log_2 N$ phép nhân phức và $2 \cdot N^2 \cdot \log_2 N$ phép cộng phức để thu được 2-D FFT, N^2 phép nhân phức trong miền tần số giữa FFT của điểm ảnh và các đáp ứng tần số của bộ lọc, $2 \cdot (N^2/2) \cdot \log_2 N$ phép nhân phức cho IFFT. Mặt khác, một bộ lọc 2-D FIR có kích thước $(2m + 1) \times (2m + 1)$ đòi hỏi $(2m + 1)^2 N^2$ phép nhân để thu được ảnh trực tiếp trong miền không gian. Xem xét một ảnh có kích thước 512×512 điểm. FFT yêu cầu:

$$4(4(N^2/2)\log_2 N) + 4N^2 = 4 \times 512^2 \times (2 \times 9 + 1)$$

≈ 20 triệu phép nhân.

Để đưa ra tính toán này chúng ta coi rằng một phép nhân phức thì bằng 4 phép nhân thông thường, và bộ lọc có pha zero. Phương pháp không gian áp dụng cho một bộ lọc có kích thước 7×7 yêu cầu $7 \times 7 \times 512^2 \approx 13$ triệu phép nhân. Nếu kích thước bộ lọc tăng lên thì phương pháp phân chia miền tần số có thể áp dụng. Một bộ lọc có kích thước 11×11 yêu cầu khoảng 30 triệu phép nhân sẽ chỉ cần khoảng 19 triệu phép nhân khi áp dụng phương pháp phân chia miền tần số. Hai phương pháp này sẽ có cùng một số phép nhân nếu

$$4N^2 (2\log_2 N + 1) = (2m + 1)^2 N^2$$

Cho một ảnh có kích thước 512×512 ($2m + 1$) ≈ 9 , để chứng minh là nếu kích thước bộ lọc nhỏ hơn 9 thì ta có thể phương pháp phân chia không gian. Tuy nhiên, cần chú ý phương pháp phân chia tần số cũng yêu cầu ít thời gian xử lý hơn do số lần truy nhập đĩa giảm xuống. Ưu điểm này được tăng lên khi kích thước của bộ lọc lớn hơn 9×9 . Ưu điểm này sẽ không còn nữa khi xét đến lỗi wraparound. Để tránh lỗi này ta phải tăng gấp bốn lần kích thước của ảnh. Cho một ảnh có kích thước 512×512 ta cần phải tăng lên 1024×1024 . Để tránh các phép tính toán quá lớn khi chú ý rằng $h(n_1, n_2)$ của một bộ lọc khi rút ra IFFT sẽ tăng lên rất nhanh khi n_1, n_2 tăng lên. Tính chất này càng nổi bật khi mở rộng Fourier chỉ chèn các giá trị zero vào các giá trị cuối của bộ lọc từ $c / \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Cần nhắc lại là cả đáp ứng tần số và đáp ứng xung được xem xét khi làm việc với DFT.

Thuộc tính là $h(n_1, n_2)$ tăng lên một cách nhanh chóng được xem xét khi lựa chọn phương án lọc. Không phụ thuộc vào kích thước của ảnh, đưa ra phép nhân giữa đáp ứng tần số của ảnh và đáp ứng tần số của bộ lọc, và chúng ta chú ý rằng lỗi wraparound chỉ xuất hiện ở miền nhỏ nằm ở đường bao của ảnh và trong phần lớn trường hợp lỗi này có thể bỏ qua.

Phương pháp tần số có thể thực hiện qua các bước sau:

1. Rút ra 2-D FFT của một ảnh

$$I(k_1, k_2) = FFT\{i(n_1, n_2)(-1)^{n_1+n_2}\}$$

2. Nhân $I(k_1, k_2)$ với đặc tuyến của bộ lọc, chú ý là đáp ứng tần số có gốc tọa độ nằm tại $(N/2, N/2)$. Cho ví dụ một bộ lọc thông cao Butterworth có đặc tuyến như sau:

$$H(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} + (\sqrt{2} - 1)D_0^2}$$

$$\text{Dùng} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{N}(k_1 - \frac{N}{2}) \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{N}(k_2 - \frac{N}{2})$$

Đáp ứng tần số của ảnh lọc có thể rút ra từ

$$G(k_1 + k_2) = I(k_1 + k_2) \times H\left(\frac{2}{N}\left(k_1 - \frac{N}{2}\right), \frac{2}{N}\left(k_2 - \frac{N}{2}\right)\right)$$

3. Ảnh đã lọc có thể rút ra từ :

$$i_f(n_1, n_2) = \Re\{IFFT\{G(k_1, k_2)\} \times (-1)^{n_1 + n_2}$$

ở đây \Re có nghĩa là phần thực của phần nằm trong hai dấu ngoặc.