

Análisis de los sistemas termodinámicos y estadísticos

Actividad AC.R2: Gráficas de Lorenz, el coeficiente de Gini y la distribución exponencial

Instrucciones: Esta actividad se realiza en clase, a través de equipos informales, es decir, equipos que se forman específicamente para la sesión. *Dinámica:* (1) Cada problema se resuelve de manera independiente, con intervenciones puntuales del profesor en cada equipo. (2) La solución de cada problema se discute en el pleno, antes de continuar con el siguiente problema. (3) Tiempo estimado: 15 mins de trabajo en equipo por problema, 5 minutos de revisión plenaria por problema, 10 minutos de revisión plenaria final. Tiempo total: 140 minutos.

Paso 1 Considerar las siguientes variables

$$x(r) = \int_0^r P(r') dr'$$

$$y(r) = \frac{\int_0^r r' P(r') dr'}{\int_0^\infty r' P(r') dr'}$$

Donde $P(r')$ es la **densidad de probabilidad** para encontrar la variable r' .

- (a) Explicar qué se entiende por “densidad de probabilidad” y cómo se puede interpretar
- (b) Interpretar $\int_0^r r' P(r') dr'$
- (c) Interpretar $x(r)$
- (d) Interpretar $y(r)$
- (e) Interpretar la curva y vs. x , también conocida como curva de Lorenz

Paso 2 Suponiendo $P(r')$ es diferente de cero sólo para $r' \geq 0$ mostrar que la curva de Lorenz

- (a) Siempre va de (0,0) a (1,1)
- (b) Está limitada hacia arriba por la línea $y = x$
- (c) Crece monótonicamente

Paso 3 Considerar ahora $P(r') = e^{-r'/R}/R$

- (a) Determinar R e interpretarlo
- (b) Calcular las variables x y y
- (c) Establecer una relación analítica entre y y x
- (d) Graficar la curva de Lorenz y vs. x

Paso 4 Continuando con el caso de la función de distribución exponencial calcular el coeficiente de Gini dado por

$$G = \int_0^1 (x - y) dx$$

Paso 5 $P(r')$ se puede interpretar (entre muchas otras cosas) como la densidad de probabilidad para que una persona tenga el ingreso r' . Partiendo de esta idea vamos a calcular ahora la densidad de probabilidad $P_2(r')$ para que dos personas de manera conjunta obtengan el ingreso r' . $P_2(r')$ está dada por

$$P_2(r') = \int_0^r P(r') P(r - r') dr'$$

- (a) Interpretar y explicar esta expresión
- (b) Calcular $P_2(r')$ para el caso $P(r') = e^{-r'/R}/R$
- (c) Graficar $P_2(r')$
- (d) Calcular las variables x y y
- (e) Calcular el coeficiente de Gini para $P_2(r')$, es decir, para hogares formados exclusivamente por dos contribuyentes
- (f) ¿Cómo se compara el coeficiente de Gini de hogares de dos personas con el de hogares de una persona? ¿Es más equitativo el mundo de hogares de dos contribuyentes? ¿Qué esperabas?

Paso 6 Repetir los pasos 3 y 4 para el caso de una distribución de potencia $P(r') \propto r'^k$ e interpretar los resultados