Розділ 1: Математична логіка

<u>Тема 1: Алгебра висловлень</u>

План

1. Логіка висловлень
2. Формули алгебри висловлень, види формул
3. Рівносильні формули алгебри висловлень
4. Нормальні форми алгебри висловлень

Логіку впродовж століть використовують як багато галузей, зокрема філософію та математику.

Логіка – наука про міркування, яка дає змогу визначити істинність або хибне математичного твердження, виходячи з первинних припущень, які називаються аксіомами.

(Використовують для побудови комп'ютерних програм)

1) <u>Логіка висловлень</u>

Способи формального представлення висловлень, побудова нових висловлень з вже існуючих за допомогою логічно витриманих перетворень, а також способи встановлення істини чи хибного висловлювань вивчає математична логіка. Сучасна математична логіка містить в собі 2 розділи:
-логіку висловлень;
-логіку предикатів.
Основним об'єктом даних розділів є висловлення.

Висловлення – це розповідне речення, про яке можна сказати, що воно є чи істинним, чи хибним, але не одне і інше одночасно.
<u>Приклад:</u> Сніг білий. Столиця України – Київ. Котра година? Будьте уважні. X+1=3
Символи, що використовують для позначення висловлень називають ***атомами*** або ***пропозиційними буквами***.
Об'єднання 1 або кількох висловлень називають складним висловленням. Складні висловлення утворюються за допомогою логічних операцій. Вони є наступними:

- Заперечення;
- Кон'юнкція;
- Диз'юнкція;
- Імплікація;
- Еквіваленція(еквівалентність).

Запереченням – називається унарна операція над висловленням, яка приймає значення хибного тоді, коли висловлення приймає значення істини.
a - $\neg a \equiv \bar{a}$ – заперечення.

Кон'юнкція – називається бінарна операція над висловленням, яка приймає значення істини тоді і тільки тоді, коли обидва елементи операції приймають значення істини.

a, b – a Λ b

Диз'юнкція – називається бінарна операція над висловленням, яка приймає значення істинного у всіх тих випадках, коли хоча б один із елементів приймає значення істини.

a, b – a v b

Імплікація – бінарна логічна операція над висловленням, яка приймає значення хибне тоді і тільки тоді, коли 1 елемент приймає значення істини, а 2 – хибне.

a, b – a → b

Еквівалентність – це бінарна операція над висловленням, яка приймає значення істини тоді і тільки тоді, коли обидва елементи приймають однакові значення істинності.

a, b – a ↔ b (a ~ b)

Загальна таблиця істинності

a	b	a Λ b	a v b	a →b	a ↔ b
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

2) Формули алгебри висловлень. Види формул

У логіці висловлень окрему пропозиційну букву a, або складне висловлення називають **правильно побудованою формулою** або просто **формулою.**

Формули означаються за такими правилами

1. Окремо взята пропозиційна буква – це формула.
2. Якщо a – формула, то заперечення a – також формула.
3. Якщо a та b формули, то a Λ b, a v b, a →b та a ↔ b також формули.
4. Формули можуть бути породжені лише з скінченною кількістю застосувань вказаних правил.

Формулу f називають виконаною, якщо існує принаймні 1 інтерпритація при якій f набуває значення істину.

$f \equiv a \wedge b$ – виконана.

Для спрощення формули при записі опускаються зовнішні дужки і встановлюється наступний порядок виконання операцій:

1. Заперечення;
2. Кон'юнкція;
3. Диз'юнкція;
4. Імплікація;
5. Еквіваленція(еквівалентність).

Для знаходження значення істинності складних висловлень потрібно надати значення істинності всім пропозиційним буквам, які містить дана формула.

Набір значень істинності всіх пропозиційних букв формули називають її **інтерпритацією.**

Для обчислення значення істинності формули при тому чи іншому наборі пропозиційних букв будують табличку істинності.

Приклад: Розглянемо формулу

$f \equiv (a \wedge b) \to (a \leftrightarrow \neg c)$

a	b	c	˥c	aΛb	a↔˥c	f ≡ (…)
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1

Формула f алгебри висловлень називається **логічно істинною або тавтологією**, якщо вона приймає значення істинно при всіх можливих наборах значень пропозиційних букв.

Приклад: $f \equiv ((p \to q) \wedge p) \to q$

P	q	p→q	(p→q)Λp	f ≡ (…)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Формула f алгебри висловлень називається **суперечністю**, якщо вона приймає значення хибне при всіх можливих наборах значень пропозиційних букв.

Приклад: $f \equiv a \wedge \neg a$

a	ā	aΛā
1	0	0
0	1	0

Формула f алгебри висловлень називається **нейтральною**, якщо існують такі набори значень пропозиційних букв при яких формула приймає значення істинну і також існують такі набори при яких формула приймає значення хибне.

Основною проблемою алгебри висловлень вважається проблема вирішень, яка полягає в тому, що за скінченну кількість кроків можна було визначити – буде чи ні деяка формула алгебри висловлень тавтологією. Очевидно, що дана проблема є розв'язуваною, оскільки завжди можна побудувати таблицю істинності і визначити чи є формула тавтологією.

Якщо деяка формула містить n-пропозиційних букв, то її таблиця істинності буде містити 2^n інтерпретацій. Існують також і інші способи розв'язання проблеми вирішень. Одним з них є метод контр прикладу, який полягає в аналізі логічних операцій методом від супротивного.

Приклад: Методом відшукання контр прикладу встановимо, що формула алгебри висловлень є логічно істинною.

$f \equiv (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$

посилка висновок

Нехай $U \equiv (a \to (b \to c)), V \equiv ((a \to b) \to (a \to c))$

$|f| \equiv |U \to V| \equiv 1$ припустимо $|U \to V| \equiv 0 \Rightarrow$ $|U| \equiv 1, |V| \equiv 0$

$|a \to (b \to c)| \equiv 1$ $|(a \to b) \to (a \to c)| \equiv 0$

$|1 \to (1 \to 0)| \equiv 1$ $|a \to b| \equiv 1, |a \to c| \equiv 0$ $|a| \equiv 1, |c| \equiv 0$

$|1 \to b| \equiv 1$

$|b| \equiv 1$

0≠1 , $|U \to V|$ - хибне, формула логічно істинна

3) <u>Рівносильні формули алгебри висловлень</u>

Формули f та g алгебри висловлень називають еквівалентними, рівносильними або тотожніми і позначаються f≡g, якщо їх значення істинності збігається в усіх інтерпретаціях цих формул.

<u>Приклад:</u> $f \equiv (a \wedge b \to c) \to (a \to c), g \equiv (\neg a \vee b \vee c)$

A	B	c	aΛb	ab→c	a→c	ā	f	g
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Рівносильні або тотожні - f≡g

<u>Приклад:</u> За допомогою таблиці істинності доведемо

1) $a \to b \equiv \neg a \vee b$

A	B	a→b	ā	āvb
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

2) $a \leftrightarrow b \equiv (a \to b)(b \to a)$

A	B	a→b	b→a	(a→b)(b→a)	a↔b
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

тотожні

Тема: Властивості рівносильних формул

1. Рефлексивність – формула рефлексивна сама собі (y≡y)
2. Симетричність – якщо y≡b , то і b≡y
3. Транзетивність – якщо y≡b і b≡w, то і y≡w

Операція рівносильності формул тісно пов'язана з еквівалентністю. Якщо U≡V, то U↔V називається тавтологією і навпаки. При проведенні рівносильних перетворень формул алгебри висловлень застосовують 2 основні операції:

- Операція заміни, яка полягає в тому, що якщо в деякій формулі замінити її частину, то значення істинності нової формули не зміниться;
- Операція підстановки: Нехай задана деяка формула, яка є логічно істинною або тавтологією. Якщо в цій формулі деяку пропозиційну букву замінити на довільну формулу алгебри висловлень, то ми отримаємо логічно істинну формулу при умові, що підстановка відбувається в усіх місцях входження даної про позиційної букви в формулу.

Розглянемо еквівалентні формули, які задають правила перетворення. Такі еквівалентності Називаються Законами алгебри висловлень. Перетворення виконуються заміною якоїсь формули в складі іншої формули на еквівалентну їй формулу.

Основні закони алгебри висловлень

№	Назва	Самі закони
1.	Закони комутативності	$a \wedge b \equiv b \wedge a$; $a \vee b \equiv b \vee a$
2.	Закони асоціативності	$a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$; $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$
3.	Дистрибутивні закони	$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
4.	Закони суперечності	$a \wedge \neg a \equiv 0$
5.	Закони виключеного третього	$a \vee \neg a \equiv 1$
6.	Закони подвійного заперечення	$a \equiv \overline{\overline{a}}$
7.	Закони ідемпотентності	$a \vee a \equiv a$; $a \wedge a \equiv a$
8.	Закони де Моргана	$\overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \wedge \overline{b}$; $\overline{a \wedge b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$
9.	Закони поглинання	$(a \vee b) \wedge a \equiv a$; $(a \wedge b) \vee a \equiv a$
10.	Закони сталих	$a \vee 1 \equiv 1$; $a \vee 0 \equiv a$ $a \wedge 1 \equiv a$; $a \wedge 0 \equiv 0$

Для того, щоб будь-яку формулу алгебри висловлень можна було перетворити в рівносильну їй, яка не буде містити операцій імплікація та еквівалентності, виконуються наступні рівносильності:

$a \to b \equiv \overline{a} \vee b$; $a \leftrightarrow b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$

4)Нормальні форми алгебри висловлень

Озн. Елементарною кон'юнкцією називається кон'юнкція пропозиційних букв та їх заперечень. Окремо взята пропозиційна буква або її заперечення, також є елементарною кон'юнкцією.

Озн. Елементарною диз'юнкцією називаєтьсяя диз'юнкція пропозиційних букв та їх заперечень. Окремо взята пропозиційна буква або її заперечення, також є елементарною диз'юнкцією.

Приклад: 1. а – елементарна кон'юнкція та елементарна диз'юнкція
2. $\neg a \vee b$ – елементарна диз.
3. $a \to b$ – не є ні елементарною кон. ні елементарною диз.
4. $a \wedge b \wedge c$ – елементарна кон.
5. $a \wedge (b \to c)$ – не є ні елементарною кон. ні елементарною диз.
6. ā – елементарна кон. і елементарна диз.

Озн. Кон'юнктивною нормальною формулою(КНФ) – називається кон'юнкція елементарних диз'юнкцій. Елементарна диз'юнкція називається кон'юнктивним членом.

Озн. Диз'юнктивною нормальною формулою(ДНФ) – називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій. Елементарна кон'юнкція називається диз'юнктивним членом.

КНФ і ДНФ може містити лише один диз'юнктивний або кон'юнктивний член.

Приклад: 1. $a \wedge b \wedge c$ – КНФ і ДНФ
2. $((a \vee b) \vee c)$ - КНФ і ДНФ
3. $\bar{a}$ - КНФ і ДНФ
4. $(c \to d) \wedge b$– ні те ні те
5. $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee \neg c$ - ДНФ
6. $a \wedge b \wedge \neg c$ - КНФ і ДНФ

Теорема: Будь-яку формулу алгебри висловлень можна звести до кон'юнктивної нормальної формули(КНФ)

Д-ня: 1. Виконуємо основні рівносильності, перетворюючи формулу таким чином, щоб вона не містила операцій «→» та «↔»
2. При потребі розкриваємо дужки за допомогою законів де Моргана.
3. на 3 кроці при потребі виконуєм дистрибутивні закони для того,щоб отримати потрібну нормальну форму.

Тема2: Застосування алгебри висловлень до розв'язання проблеми вирішень

Проблема вирішень полягає в тому, що ми за скінченну кількість кроків маємо визначити чи являється формула істинною чи ні.

Теорема1: Формула алгебри висловлень називається тавтологією або ж логічно істинною формулою тоді і тільки тоді, коли при зведенні її до КНФ в кожній елементарній диз'юнкції буде деяка пропозиційна буква разом із своїм запереченням.

Д-ня: Як було показано раніше, будь-яку формулу алгебри висловлень можна звести до формули, яка є КНФ або ДНФ.

$$f \equiv (b \vee c) \wedge (a \vee b) \equiv (\underbrace{a \vee \neg a}_{1} \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \underbrace{c \vee \neg c}_{1})$$

Якщо формулу можна звести до КНФ, то вона буде логічно істинною, якщо міститиме в кожному своєму елементі елемент та її заперечення.

Теорема2: Формула алгебри висловлення буде суперечністю тоді і тільки тоді, коли її ДНФ буде містити в своїй елементарній кон'юнкції пропозиційну букву разом із своїм запереченням.

$$f \equiv (a \wedge b \wedge c \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg b \wedge c) \equiv 0$$

$a \wedge \neg a \equiv 0$; $f \wedge 0 \equiv 0$

Досконалі КНФ і ДНФ

Нехай задана система пропозиційних букв a,b,c

Озн. Елементарна кон'юнкція(диз'юнкція) називається **повною**, якщо вона містить усі пропозиційні букви із заданої системи: aΛbΛc - повна; aΛc – не повна

Озн. Елементарна кон'юнкція(диз'юнкція) називається **правильною**, якщо вона містить усі пропозиційні букви із системи по одному разу: $a \wedge b \wedge c \wedge \neg c$ – повна, але не правильна

Теорема3: Будь-яку формулу алгебри висловлень можна звести до ДДНФ, при чому це зведення відбувається з точністю до порядку виконання операцій.

Д-ня: 1. Зводимо формулу алгебри висловлень до ДНФ, відповідно дана формула може не містити деякої про позиційної букви. $f \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b)$ – ДНФ

2. Домножимо існуючу формулу на одиницю

$$f \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b) \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \underbrace{c \wedge \neg c}_{1}) \equiv (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c).$$

Отже вона є ДДНФ.

Отже будь-яку формулу алгебри висловлень можна представити у вигляді ДНФ(досконалої диз'юнктивної формули).

$$f \equiv (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \equiv (a \vee c \vee (b \wedge \neg b) \wedge (a \vee b \vee \neg c)) \equiv (a \vee c \vee b) \wedge (a \vee c \vee \neg b) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$$

– ДКНФ

Теорема4: Будь-яку формулу алгебри висловлення, яка є суперечністю, можна представити у вигляді ДДНФ при чому це представлення єдине з точністю до перестановки диз'юнктивних членів.

Д-ня: 1. Спочатку зводимо алгебру висловлень до ДНФ, тобто: $V \equiv f_1 v f_2 v \ldots v f_k$ (f-елем. кон.)

2. Диз'юнктивні члени, які містять пропозиційну букву та її заперечення опускаємо, згідно закону сталих. Оскільки формула не є протиріччям, то обов'язково серед диз'юнктивних членів існує хоча б один такий, до складу якого не входить жодна пропозиційна буква із своїм запереченням.

3. Можливі два варіанти:

а) всі диз'юнктивні члени формули є повними і правильними, тоді Т. Доведена.

б) серед диз'юнктивних членів є неповні, тоді використовуючи формули алгебри висловлень, перетворюємо такий член в повний.

Зауваження:

Оскільки в кожній формулі алгебри висловлення кількість пропозиційних букв є скінченна, то і існує також тільки скінченна кількість повних і правильних елементарних кон'юнкцій, тому, якщо формула представлена у вигляді ДДНФ, то вона містить деяку кількість елементарних кон'юнкцій із скінченної мнозини елементарних кон'юнкцій. Об'єднання скінченної множини одних і тих же елементів можуть відрізнятися між собою тільки порядком слідовання цих елементів.

Приклад: Звести до ДДНФ формулу алгебри висловлень

$((a \to b) \wedge a) \to b$

1. $a \to b \equiv \neg a \vee b \Rightarrow ((\neg a \vee b) \wedge a) \to b$

2. $\neg((\neg a \vee b) \wedge a) \vee b$

3. $\neg(\neg a \vee b) \equiv \neg a \vee \neg b \Rightarrow \neg((\neg a \vee b) \vee \neg a) \vee b$

4. $((\neg\neg a \vee \neg b) \vee \neg a) \vee b$

5. $\neg\neg a \equiv a \Rightarrow (a \vee \neg b) \vee \neg a \vee b \quad - ДНФ$

$\neg a \equiv (\neg a \wedge (b \vee \neg b)) \equiv (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$

$\neg b \equiv b \wedge (a \vee \neg a) \equiv (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a)$

$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a)$

6. $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \quad - \quad ДДНФ$

Теорема5: Будь-яку формулу алгебри висловлень, яка не є тавтологією, можна представити у вигляді ДКНФ, при чому це представлення єдине з точністю до перестановки членів цієї форми.

Д-ня: 1. Зводимо формулу алгебри висловлень до КНФ

$V=g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_n$

2. Кон'юнктивні члени, які містять пропозиційну букву та її заперечення опускаються згідно закону сталих: av1≡1

Оскільки формула не є тавтологією, то серед кон'юнктивних членів є хоча б один, який не містить одночасно деяку пропозиційну букву та її заперечення.

3. Можливі 2 варіанта:

а) всі кон'юнктивні члени формули є повними і правильними, тоді теорему доведено.

б) серед кон'юнктивних членів є не повні, тоді використовуєм наступні формули алгебри висловлень: $V \vee 0 \equiv V$; $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b)(a \vee c)$

Зводимо такий член до повного та отримуємо ДКНФ. Теорема доведена.

Зауваження: Питання єдності зведення формули алгебри висловлень до ДКНФ вирішується аналогічно,як в попередній теоремі(теорема4).

Приклад: Звести формулу алгебри висловлень до ДКНФ – $(a \to b) \wedge (a \wedge \neg b)$

1.$(КНФ)\ a \to b \equiv \neg a \vee b, \Rightarrow (\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg b$

2. $a \equiv a \vee (b \wedge \neg b) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$

$\neg b \equiv \neg b \vee (a \wedge \neg a) \equiv (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg a) \Rightarrow (\neg a \vee b)(a \vee b)(a \vee \neg b)(\neg b \vee a)(\neg b \vee \neg a)$

3. $a \wedge a \equiv a$; $(\neg a \vee b)(a \vee b)(a \vee \neg b)(\neg b \vee \neg a)$

Теорема6: Будь-яка формула алгебри висловлень буде тавтологією тоді і тільки тоді, коли її ДДНФ містить 2^n різних елементів, де n-кількість пропозиційних букв.

Д-ня: Достатність:

Нехай ДДНФ алгебри висловлень містить 2^n елементів. Для того, щоб сказати, що дана формулатологією потрібно встановити, що для будь-якого рядка значень пропозиційних букв в таблиці істинності значення формули в цьому рядку істинне, тобто рівне **1.**

Нехай маємо рядок значень пропозиційних букв: 1 0 0 …0 1, покажемо, що йому відповідає елементарна повна і правильна кон'юнкція значення якої є істинною.

$$\underset{1}{a_1} \wedge \underset{0}{\neg a_2} \wedge \underset{0}{\neg a_3} \wedge \ldots \wedge \underset{0}{\neg a_{n-1}} \wedge \underset{1}{\neg a_n}$$

Оскільки правильних і повних елементарних кон'юнкцій для n-пропозиційних букв існує 2^n і якщо на якомусь наборі значень пропозиційних букв елементарна повна і правильна кон'юнкція приймає значення істини, то всі інші можливі повні елементарні кон'юнкції приймають значення при цьому наборі 0. З цього випливає, що для кожного рядка таблиці істинності у формулі знайдеться елементарна повна і правильна кон'юнкція значення якої на цьому рядку =1, а тому і значення формули =1. Отже вона є тавтологією.

Необхідність:

Нехай формула є тавтологією. Припустимо, що її ДДНФ містить менше ніж 2^n елементів, тоді існує хоча б одна повна і правильна елементарна кон'юнкція, яка не входить до цієї досконалої формули. Нехай, наприклад,буде така елементарна повна і правильна кон'юнкція:

$$a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3 \wedge \ldots \wedge \neg a_{n-1} \wedge \neg a_n$$

0 1 1 1 0

тоді для набору пропозиційних букв з таблиці істинності вона приймає значення істини. Так, як на цьому наборі значень пропозиційних букв всі решта повних і правильних елементарних кон'юнкцій приймають значення хибного, то формула при цьому наборі значень пропозиційних букв приймає значення хибне (0). Отримали протиріччя. Необхідність доведена.   Теорема доведена .

<u>Приклад:</u> Показати, що формула є тавтологією $((a \to b) \wedge a) \to b$

$$(a \to b) \equiv \neg((\neg a \vee b) \wedge a) \vee b \equiv \neg(\neg a \vee b) \vee \neg a \vee b \equiv (\neg\neg a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee b \equiv ((a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee b) - ДНФ \equiv$$

$$\equiv (a \wedge \neg b) \vee \neg a \wedge (b \vee \neg b) \vee b \wedge (a \vee \neg a) \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a) \vee (b \wedge \neg a) \equiv$$

$$\equiv ab \vee \neg ab \vee a\neg b \vee \neg a\neg b \quad - \quad ДДНФ$$

n=2, $2^n=2^2=4$ T – логічно істинна

Теорема8: Будь-яка формула алгебри висловлення є суперечністю тоді, коли її ДКНФ містить 2^n різних елементів.

Д-ня: Достатність:

Нехай ДКНФ містить 2^n елементів. Тоді для довільного набору пропозиційних букв із таблиці істинності завжди можна взяти або вказати повну і правильну елемементарну диз'юнкцію значення якої на цьому наборі буде=0. Наприклад, для набору 0 1 1 … 1 правильна і повна елементарна диз'юнкція: $a_1 \vee \neg a_2 \vee \neg a_3 \vee \ldots \vee \neg a_n$ приймає значення 0 – суперечність.

Необхідність:

Нехай формула є протиріччям. Припустимо, що її ДКНФ містить менше ніж 2^n членів. Наприклад: Нехай вона не містить повну і правильну елементарну диз'юнкцію виду

$a_1 \vee \neg a_2 \vee \neg a_3 \vee \ldots \vee \neg a_n$, тоді на наборі пропозиційних букв вона прийме значення 0.

1 0 0 0

а всі інші повні і правильні елементарні диз'юнкції на цьому наборі значень пропозиційних букв приймає значення 1. Тому формула є тавтологією. Прийшли до суперечності. Теорема доведена.

<u>Приклад:</u> Показати, що формула є протиріччям: $\neg(a \to (b \to a))$ – звести до ДКНФ

$$\neg(a \to (b \to a)) \equiv \neg(\neg a \vee (\neg b \vee a)) \equiv \neg\neg a \wedge \neg(\neg b \vee a) \equiv a \wedge \neg\neg b \wedge \neg a \equiv a \wedge b \wedge \neg a,$$

$$(a \vee (b \wedge \neg b)) \wedge (b \vee (a \wedge \neg a)) \wedge (\neg a \vee (b \wedge \neg b)) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge$$

$$\wedge (\neg a \vee \neg b) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$$

$n = 2$, $2^n = 2^2 = 4$ - 4 члени. Отже наша формула є суперечністю

Тема 3: Булеві функції

Озн. Булевою функцією називається функція виду: $f \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)$область значень якої складається з $\{0;1\}$ і яка залежить від змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$, які приймають також лише ці два значення.

Множина всіх булевих функцій позначається: P_2

Булеву функцію від n-змінних називають n-вмісною. Областю визначення n-вмісною булевою функцією є 2^n наборів значень змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$ при чому кожен набір значень змінних складається з n-чисел кожне з яких або 0, або 1.

Булеві функції задаються такими способами:

1. **Табличний:**

При цьому способі будують табличку значень змінних і відповідне їм значення функції.

x_1	x_2	…	x_n	$f \equiv (x_1..x_n)$
0	0	…	0	$f \equiv (0,0,...,0)$
0	1	…	0	$f \equiv (0,1,...,0)$
…	…	…	…	…
1	1	…	1	$f \equiv (1,1,...,1)$

2^n рядків

З табличного способу задання функцій випливає, що існує 2^n n-місних булевих функцій.

Змінну x_i функцій від $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$називається ***істотною,*** якщо існує такий набір значень змінних $(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$, для якого виконується нерівність: $f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n) \neq f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n)$. Змінна x_i функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ...x_n)$ називається фіктивною або ***не істотною,*** якщо для довільних значень змінних: $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_n)$ виконується рівність:

$f \equiv (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ...x_n) \neq f \equiv (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ...x_n)$

Недоліком задання булевих функцій табличним методом те, що із зростанням значення n, кількість рядків таблиці стає великим числом.

2. **Описовий, або словесний**

При ньому закон знаходження значення мулевих функцій задається описово.

<u>Приклад:</u> Задано 6-місну булеву функцію наступним чином: функція приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли будь-які її 3 змінні = 0.

$f(1,0,0,0,0,1)=0$

$f(1,0,1,0,0,1)=1$

Озн. Булева n-місна функція значення якої складається тільки з нулів називається **тотожним нулем**(тобто **суперечністю**) $f(x_1...x_n)=0$ для будь-якого набору $x_1, x_2, …, x_n$. В цій функції всі змінні є фіктивними або не істотними.

Озн. Булева n-місна функція називається **тотожньою одиницею**, якщо $f(x_1...x_n)=1$ для будь-якого набору значень $x_1, x_2, …, x_n$.

3. **За допомогою формул алгебри висловлень**

При цьому способі задається формула алгебри висловлення, в якій роль пропозиційних букв відіграють змінні мулевої функції $f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

При такому способу задання, значення мулевої функції – 0 у формулі алгебри висловлення набуває значення хибне, а значення змінної 1 набуває значення істини.

Проблема: Чи завжди існує формула алгебри висловлення, яка відповідає заданій булевій функції?

Будь-яку булеву функцію відмінну від тотожного нуля, можна задати у вигляді ДДНФ, при чому таке задання єдине з точністю до порядку розміщення змінних.

Приклад: Нехай маємо 3-місну булеву функцію:

X_1	X_2	X_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
1	1	1	1	- $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
1	1	0	1	- $x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
1	0	1	0	
0	1	1	1	- $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
1	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	0	0	0	

Вибираємо рядки в яких булева функція приймає значення 1. Для кожного з них будуємо повну і правильну елементарну кон'юнкцію за правилом: пропозиційна буква входить без заперечення, якщо відповідна змінна функції приймає значення 1, і входить із запереченням, якщо відповідна змінна функції приймає значення 0. Якщо змінна функції приймає значення 1, то входить в такому вигляді, як є. Після побудови повних і правильних кон'юнкцій, їх з'єднуємо між собою операцією диз'юнкцій і отримуємо ДДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \vee \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$. Кожна повна і правильна елементарна кон'юнкція приймає значення істино лише при 1 наборі значень пропозиційних букв, звідси випливає, що кожному значенню булевої функції відповідає лише одна повна і правильна елементарна кон'юнкція. Тому згідно проведеного алгоритму побудови ДДНФ для мулевої функції отримаємо, що така форма існує єдина з точністю до перестановки порядку слідування елементів.

Теорема: Булева функція, яка є тотожною 1 представлена у вигляді ДДНФ, яка містить 2^n елементарних повних і правильних кон'юнкцій. При чому таке представлення єдине з точністю до розміщення елементів.

Теорема: Будь-яку булеву функцію, яка не є тотожною 1 можна представити у вигляді ДКНФ. При чому таке представлення єдине з точністю до порядку слідування елементів.

Д-ня: Нехай маємо 3-місну булеву функцію

X_1	X_2	X_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1

1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

-˥x_1vx_2v˥x_3

-˥x_1vx_2vx_3

-x_1v˥x_2vx_3

-x_1vx_2v˥x_3

-x_1vx_2vx_3

Вибираємо рядки з таблиці задання функції, в … ція приймає значення 0. Для кожного з цих рядків будуємо повну і правиль … рну диз'юнкцію за правилом: пропозиційна буква входить без заперечення, якщо відповідна змінна функцій =0, і входить із запереченням, якщо вона =1. Після побудови вибраних повних і правильних елементарних диз'юнкцій, об'єднуємо їх між собою операцією кон'юнкцією.

$$f(x_1,x_2,x_3) \equiv (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Булева функція, яка є тотожнім 0 представлена у вигляді ДКНФ, яка містить 2^n елементарних повних і правильних диз'юнкцій.

Озн. Система операцій алгебри висловлення називається **функціонально системою операцій**, якщо за її допомогою можна представити будь-яку булеву функцію.

З даного твердження випливає, що функціонально повною системою операцій є система, яка складається з операцій ˥, Λ, v.

{ ˥, Λ, v} – кожна булева функція являє собою досконалу форму(КНФ, чи ДНФ).

Нехай задано 2 системи операцій алгебри висловлення – Q_1 і Q_2. При чому Q_1 функціонально повна система операцій.

Теорема: Якщо кожну операцію системи Q_2 можна виразити у вигляді формули через операції системи Q_1, тоді система операцій Q_2 є функціонально повною.

Д-ня: Нехай f-довільна булева функція. Оскільки система операції Q_1 функціонально повна, то функцію f можна задати у вигляді формули F_1, яка містить скінченну кількість операцій системи Q_1. Нехай це будуть операції: $g_1,g_2,g_3,\ldots,g_k$. Оскільки за умовою теореми Q_1 - функціонально повна система операцій і Q_2 – функціонально повна система операцій і Q_2 володіє властивостями, що кожна із операцій $g_1,g_2,g_3,\ldots,g_k$ системи операцій Q_1 можна виразити формулою через скінченну кількість операцій Q_2, то робимо заміну: із кожної з операцій $g_1,g_2,g_3,\ldots,g_k$, через операцію системи Q_2. Тоді отримаємо формулу F_2, в якій буде присутня скінченна кількість операцій із системи операцій Q_2: $h_1,h_2,\ldots,h_s$. Отже довільну функцію f, представлену у вигляді формули, яка містить скінченну кількість операцій із системи операцій Q_2. Звідси випливає, що Q_2 є функціонально повною системою операцій.

Приклад: Показати, що система операцій (˥) і (→) є функціонально повною.

Згідно попередньої теореми: $\{\neg,\to\}$; $\{\neg,\wedge,\vee\}$

$$a \to b \equiv \neg a \vee b$$

$$a \vee b \equiv \neg a \to b$$

$$a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b) \equiv \neg(a \to \neg b)$$

Оскільки система {˥;Λ;v} є функціонально повною системою і ми отримали представлення цих операцій через операції {˥;→} і навпаки, то ці системи є функціонально повними.

Проблема: Чи існує функціонально повна система операцій, яка складається з однієї операції?

Покажемо, що існують функціонально повні системи операцій, які складаються з однієї операції.

Розглянемо наступну операцію, яка називається штрих Шефера – { | } - (˥,Λ)

X_1	X_2	$X_1 \mid X_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

хПокажемо, що штрих Шефера є функціонально повною системою операцій

{˥;Λ;v} { | }

$\neg x_1 \equiv x_1 | x_1$

$x_1 \wedge x_2 \equiv \neg(x_1|x_2) \equiv (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$

$x_1 \vee x_2 \equiv \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \equiv \neg((x_1|x_1) \wedge (x_2|x_2)) \equiv \neg(((x_1|x_1)|(x_2|x_2))|((x_1|x_1)|(x_2|x_2))) \equiv$

$\equiv ((((x_1|x_1)|(x_2|x_2))|((x_1|x_1)|(x_2|x_2)))|(((x_1|x_1)|(x_2|x_2))|((x_1|x_1)|(x_2|x_2))))$

Отже система операцій, яка складається з операції { | } – є функціонально повною.

Розглянемо наступну операцію, яка називається стрілка Пірса – { ↓ } – {˥, v}

X_1	X_2	$X_1 \downarrow X_2$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Покажемо, що стрілка Пірса є функціонально повною системою операцій

$\{\neg,\wedge,\vee\};\{\downarrow\}$

$\neg x \equiv x \downarrow x$

$x_1 \wedge x_2 \equiv \neg(x_1 \downarrow x_2) \equiv (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$

$x_1 \vee x_2 \equiv \neg(\neg x_1 \downarrow \neg x_2)$

Зауваження: При представленні булевих функцій у вигляді формули алгебри висловлень з використанням тільки операцій {˥;Λ;v} говорить про алгебру Буля(містить в соді лише 3 операції).

Розглянемо операцію – додавання за модулем 2 – ⊕

X_1	X_2	$x_1 \oplus x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\{\neg,\wedge,\vee\};\quad\{\oplus\}$

$\neg x_1 \equiv x_1 \oplus x_2 \equiv (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$

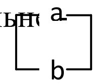
$x_1 \wedge x_2 \equiv \neg(x_1 \oplus x_2) \equiv \neg((\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_1)) \equiv \neg(\neg x_1 \wedge x_2) \wedge \neg(\neg x_2 \wedge x_1) \equiv (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_1)$

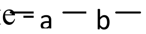
$x \oplus y \equiv (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$

$x \vee y \equiv \neg(\neg x \oplus \neg y) \equiv \neg((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)) \equiv \neg(\neg x \wedge y) \wedge \neg(x \wedge \neg y) \equiv (x \vee \neg y) \vee (\neg x \vee y)$

Якщо у формулі представлень Булевих функцій використовуються лише операції Λ і ⊕, то вважається, що мають алгебру Жигалкина булевих функцій.

Тема: Застосування алгебри висловлення до аналізу та синтезу контактних схем

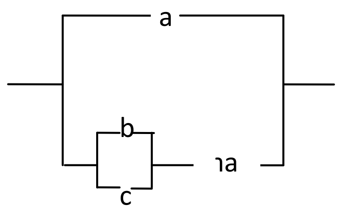
Озн. Під **контактом** будемо розуміти фізичне тіло довільної природи, яке може перебувати у двох станах: ввімкнуто -1, та вимкнуто -0.
Сигнал проходить через об'єкт, або не проходить. Контакти будемо позначати малими латинськими літерами. В кожен момент часу часу контакт перебуває в одному зі станів.
Приклад: Контакт - a в кожен момент часу перебуває в стані, який не співпадає зі станом -˥a: a-1, ˥a-0. Між контактами існує два типии з'єднання: послідовне і паралельне.
послідовне – (a+b), паралельне - (a*b)
Для позначення послідовного і параллельного з'єднань використовують наступні схеми:
Паралельне 

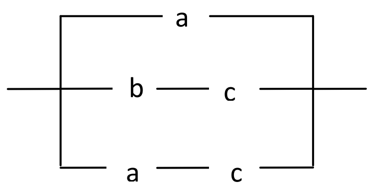
послідовне 

Зауваження: Існує і інший спосіб представлення послідовного і параллельного з'єднань, який від запропонованого способу відрізняється тим, що в ньому розглядають не один вхід в систему, а кількість входів відповідає кількості контактів.

Озн. Контактна схема – це схема, яка містить скінченну кількість контактів, що з'єднані між собою послідовно і параллельно.

1) $a + (b + c) * \neg a$ 2) $a + bc + ac$





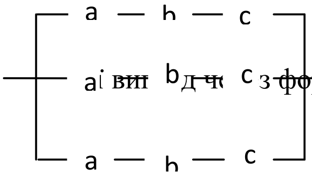
Для кожної контактної схеми можна записати формулу контакта. Кожній контактній формулі можна поставити у відповідність формулу алгебри висловлення за наступним правилом:

ā=˥a; a*b=aΛb; a+b=avb

Отже кожну контактну схему можна розглядати, як формулу алгебри висловлення або булеву функцію. Формули алгебри висловлень при розгляданні контактних схем застосовують для:

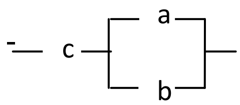
1. Спрощення контактних схем

При спрощенні формул алгебри висловлень використовують основні закони та формули алгебри висловлень, наприклад



з формули алгебри висловлень

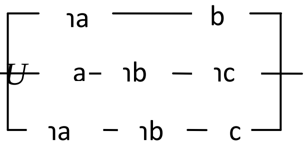
$$abc \vee a\neg bc \vee \neg abc \equiv ac(b \vee \neg b) \vee \neg abc \equiv ac \vee \neg abc \equiv$$
$$\equiv c(a \vee \neg ab) \equiv c((a \vee \neg a)(a \vee b)) \equiv c(a \vee b)$$



2. Для аналізу контактної схеми

Він полягає в тому, що алгебра висловлень застосовується для аналізу питання: при яких вхідних даних схема замкнута, а при яких розімкнута?

$\neg ab + a\neg b\neg c + \neg a\neg bc$ - $\neg a \wedge b \vee a \wedge \neg b \wedge \neg c \vee \neg a \wedge \neg b \wedge c \equiv U$



Будуємо табличку істинності для відповідної формули алгебри висловлення:

a	b	C	┐ab	a┐b┐c	┐a┐bc	U
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

Отже, контактна схема є такою, що коли відповідні букви таблички істинності приймають значення 0, то контакти розімкнуті, а коли 1, то контакти замкнуті. Відповідно, якщо результат U=1, то схема замкнута, а якщо U=0, то розімкнута.

3. Для синтезу контактних схем

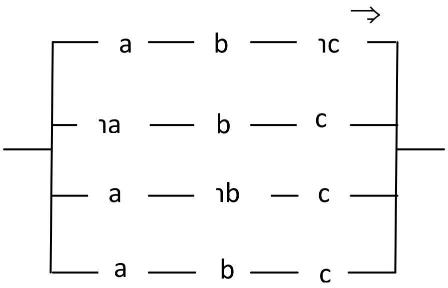
При побудові схеми із наперед заданими властивостями, тобто такої схеми, яка при заданих схемах контактів задавала б значення на виході.

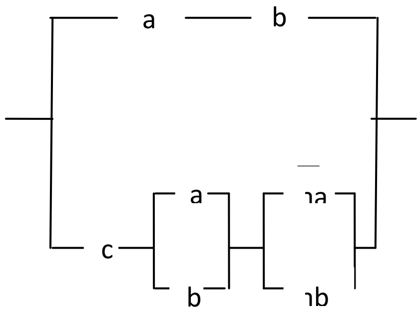
Алгоритм синтезу: 1. Будуємо відповідну формулу алгебри висловлення, або булеву функцію. 2. При неохідності спрощуємо дану формулу

Приклад: Побудувати контактну схему голосування з трьох членів, яка замикалася б тоді і тільки тоді, коли більшість членів голосує за.

Розв'язок: При побудові такої контактної схеми їй відповідає формула алгебри висловлення, яка має вигляд ДДНФ і приймає значення 1, тоді і тільки тоді, коли 2 або 3 пропозиційні букви приймають значення 1. Спочатку записуєм ДДНФ → спрощуємо → будуємо схему.

$$a,b,c \quad \Rightarrow \quad ab\neg c \vee \neg abc \vee a\neg bc \vee abc \equiv ab(\neg c \vee c) \vee c(a\neg b \vee b\neg a) \equiv$$
$$\equiv ab \vee c((\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee \neg b)) \equiv ab \vee c(a \vee b)(\neg a \vee \neg b)$$





Тема: Логічне слідування на базі алгебри висловлень

Говорять, що формула V логічного слідування з формул $U_1,U_2,\ldots,U_n$ на базі алгебри висловлень. Це означає, що формула Vприймає значення істини на тих наборах пропозиційних букв, на яких всі формули $U_1,U_2,\ldots,U_n$ приймають значення істинне. Сам факт наявності логічного слідування позначається: $U_1,U_2,\ldots,U_n \vdash V$, при цьому формула V називається висновком, а формули $U_1,U_2,\ldots,U_n$ називаються посилками або гіпотезами. Якщо потрібно перевірити наявність або відсутність логічного слідування, то можна використати метод побудови таблички істинності.

__*Приклад:*__ Перевірити, чи має місце логічне слідування: $a \wedge b,\ b \to c \ \vdash a \to c$

посилка висновок

c	a	b	a∧b	b→c	a→c
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1

Логічне слідування наявне лише в 1 випадку.

Теорема: Логічне слідування має місце тоді і тільки тоді , коли тавтологією буде формула:

$\vdash U_1,U_2,\ldots,U_n \to V$

Дана теорема дає змогу перевірить наявність, або відсутність логічного слідування за допомогою методу контр прикладу.

Озн. Говорять, що висловлення V логічно слідує з висловлень $U_1,U_2,\ldots,U_n$ на базі алгебри висловлень, якщо логічна структура, що формулою виражає висловлення V логічно слідує з формул, що виражають логічну структуру висловлень $U_1,U_2,\ldots,U_n$.

Приклад: Перевірити, чи має місце логічне слідування висловлень: 1. Якщо сума квадратів 2 менших сторін трикутника дорівнює квадрату його вільної сторони, то цей трикутник прямокутній. 2. Трикутник ABC – прямокутній. Висновок, отже сума квадратів його менших сторін дорівнює квадрату більшої сторони.

- Посилка a – сума квадратів;
- Посилка b - ΔABC – прямокутній

Перевірити, чи існує логічне слідування: $a \to b$, $b \vdash a$

a	b	a→b	b⊦a
1	1	1	1
1	0	0	
0	1	1	
0	0	1	

- Логічне слідування

Отже, лише в одному випадку присутнє логічне слідування, при тому, коли посилки приймають значення істинності в двох випадках.

Озн. Набір формул називається **суперечливим набором формул**, якщо не існує такого набору пропозиційних букв, при якому всі ці формули приймають значення істини.

Теорема: Набір формул є суперечливим тоді і тільки тоді, коли формула виду $U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n = 0$

Озн. Набір висловлювань $U_1, U_2, \ldots, U_n$ називається **суперечливим набором висловлювань**. Якщо набір формул, що виражають структуру даних висловлювань є суперечливим набором формул.

Основні властивості ⊦:

1. Якщо набір формул $U_1, U_2, \ldots, U_n$ є суперечливим набором формул, то з нього слідує будь-який висновок.
2. Якщо має місце логічне слідування $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash U$ і $U \vdash V$, то має місце логічне слідування $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$.
3. При логічному слідуванні з набору посилок можна вилучити ті, які є тавтологіями.
4. Якщо формула V є тавтологією, то вона ⊦ з будь-якого набору формул.
5. Якщо має місце логічне слідування $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash V$, то має місце логічне слідування $U_1, U_2, \ldots, U_n, U_{n+1} \vdash V$

Озн. Основні схеми логічного слідування називаються **вивідними правилами**

Основні вивідні правила:

1). $a \to b, a \vdash b$ - правило висновку (modus ponus (mp))

2). $a \to b, \neg b \vdash \neg a$ - правило композиції(modus tollens(mt))

3). $a \to b, b \to c \vdash a \to c$ - правило ланцюгового висновку(правило силогізму)

4). $a \to b, a \to c \vdash a \to b \wedge c$ - правило контра позиції

5). $a \vdash a \vee b$
$b \vdash a \vee b$ -правила введення диз'юнкції

6). Якщо має місце довільний набір формули γ,

для якого $\left.\begin{array}{l}\Gamma, a \vdash c \\ \Gamma, b \vdash c\end{array}\right\} \longrightarrow \Gamma, a \vee b \vdash c$ - правила вилучення диз'юнкції

7). $a \wedge b \vdash a$
$a \wedge b \vdash b$ -правило вилучення кон'юнкції

8). $a, b \vdash a \wedge b$ - правило введення кон'юнкції

9). $a \to ((b \to c)) \vdash (b \to (a \to c))$ - правило перестановки посилки

10). $(a \to (b \to c)) \vdash a \wedge b \to c$ - правило з'єднання посилки

11). $a \wedge b \to c \vdash a \to (b \to c)$ - правило роз'єднання посилки

Тема: Система числення

Озн. Під системою числення розуміють сукупність правил за допомогою яких називають і позначають числа.

Озн. В кожній системі числення для позначення чисел використовують певні символи, які називаються **цифрами.**

Приклад: 6 – VI; 9 – IX; 10 – X…

Розрізняють два типи системи чисел: 1. Позиційну систему чисел; 2. Не позиційну систему чисел.

В позиційній систеиі чисел значення кожної цифри залежить від місця її запису та від послідовності цифер запису числа. В не позиційній системі чисел, крім самих цифр, для позначення чисел використовують досить не прості правила для зображення чисел з використанням цифр системи. Крім того, в такій системі числення досить важко виконати операції над числами.

Приклад: Не позиційна система чисел – римські числа

в позиційній системі чисел основою є сама основа системи чисел(8-кова, або 2-кова с-ми). Основою позиційної системи чисел називають число, яке означає у скільки разів одиниця наступного розряду більша за одиницю попереднього розряду.

На практиці ми використовуєм систему чисел з основою 10, або десяткову систему чисел.

В позиційній системі чисел для запису чисел використовують кількість цифр,я кА співпадає з основою системи числення.

<u>*Приклад:*</u> 10: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

2: 0, 1

5: 0, 1, 2, 3, 4

8: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

16: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Табличка додавання для різних систем чисел:

	2	**5**	**8**	**16**
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	3	3	3
4	100	4	4	4
5	101	10	5	5
6	110	11	6	6
7	111	12	7	7
8	1000	13	10	8
9	1001	14	11	9
10	1010	20	12	A
11	1011	21	13	B
12	1100	22	14	C
13	1101	23	15	D
14	1110	24	16	E
15	1111	30	17	F
16	10000	31	20	10
17	10001	32	21	11

П'ятіркова система чисел:

5	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Вісімкова система чисел:

8	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	2	3	4	5	6	7	10
2	3	4	5	6	7	10	11
3	4	5	6	7	10	11	12
4	5	6	7	10	11	12	13

5	6	7	10	11	12	13	14
6	7	10	11	12	13	14	15
7	10	11	12	13	14	15	16

Зауваження: На практиці для зручності поряд із записом числа у вибраній системі числення за допомогою індекса вказують основу системи числення в десятковій системі числення.

Нехай маємо систему чисел з основою Р. тоді кожне число в цій системі записується у вигляді:

$$a_n * 10_p^{(n-1)*p} + a_{n-1} * 10_p^{(n-2)} + ... + a_1 * 10_p^0 + a_{-1} * 10_p^{(-1)*p} + a_{-k} * 10_p^{(-k)*p} =$$

$$= a_n * a_{n-1} * ... * a_1, a_{-1} * a_{-2} * ... * a_k$$

$a_n * ... * a_{-k}$ – *це цифри системи числення з основою Р.*

В такому представленні числа індекс в a_i вказує на місце розташування відповідної цифри в числі зліва від коми, якщо i>0 і справа від коми, якщо i<0.

Приклад:

$$10_4 = 1*4^1 + 0*4^0 = 4$$
$$123_4 = 1*4^2 + 2*4^1 + 3*4^0 = 16 + 8 + 3 = 27$$
$$237{,}46_8 = 2*8^2 + 3*8^1 + 7*8^0 + 4*8^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) + 6*8^{-2}\left(\frac{1}{64}\right) =$$
$$= 128 + 24 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{6}{64} = 159\frac{32+6}{64} = 159\frac{38}{64}$$

Нехай маємо систему числення з основою Р та Q, і крім того, $Q=P^S$(стара і нова системи чисел). Для переводу числа із Р(старої системи) в Q(нову систему) потрібно:

1. у записі числа в старій системі числення розбити цілу частину на розряди по S цифр кожен з права на ліво, а дробову частину розбити на такі ж розряди.ю але з ліва на право.

2. Кожен отриманий розряд із S цифер замінити відповідно цифрою нової системи числення, тобто кожен розряд числення із S цифр, що відповідає деякому числу.

Приклад: Нехай маємо число в 2-овій системі

110011_2=303

$1100110111{,}0111011_2$=30313,1311

Розглянемо перевід, якщо в системі числення не зв'язаних між собою співвідношень чисел $P = Q$, де Р – стара система числення, а Q – нова, тоді для переводу чисел з однієї системи в іншу використовують один з 2 алгоритмів: 1). Алгоритм з використанням арифметики нової системи числення; 2). Алгоритм використання старої системи чисел.

Алгоритм з використанням арифметики нової системи чисел:

Для переводу числа із системи числення з основою Р в систему числення з основою Q потрібно:

- Записати число в старій системі числення в розгорнутому вигляді;

- В цьому представленні кожну цифру, основу системи числення і показники степенів записати в новій системі числення;

- Виконати арифметичні дії в новій системі числення.

<u>*Приклад:*</u> нехай потрібно перевести число з 16-ої системи у 10-ву систему

$$92C8_{16} = 9*10_{16}^{3} + 2*10_{16}^{2} + C*10_{16}^{1} + 8*10_{16}^{0} = 9*16^{3} + 2*16^{2} + 12*16^{1} + 8*16^{0} =$$
$$= 9*4096 + 2*256 + 12*16 + 8 = 37576_{10}\ ;$$

$$735{,}21_{8} = 7*10_{8}^{2} + 3*10_{8}^{1} + 5*10_{8}^{0} + 2*8^{-1} + 1*8^{-2} = 7*8^{2} + 3*8^{1} + 5*8^{0} + 2\frac{1}{8} + 1*\frac{1}{64} =$$
$$= 7*64 + 24 + 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} = 474*\frac{17}{64}$$

$$110100101{,}011 = 1*10_{2}^{8} + 1*10_{2}^{7} + 0*10_{2}^{6} + 1*10_{2}^{5} + 0*10_{2}^{4} + 0*10_{2}^{3} + 1*10_{2}^{2} + 0*10_{2}^{1} + 1*10_{2}^{0} +$$
$$+ 0*10_{2}^{-1} + 1*10_{2}^{-2} + 1*10_{2}^{-3} = 1*2^{8} + 1*2^{7} + 1*2^{5} + 1*2^{2} + 1 + 1*2^{-2} + 1*2^{-3} =$$
$$= 256 + 128 + 32 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 421 + \frac{3}{8} = 421{,}375_{10}$$

<u>*Зауваження:*</u> Цей алгоритм використовують для переводу чисел в десяткову систему числення, оскільки в ній зручно проводити арифметичні операції.

Алгоритм з використанням арифметики старої системи чисел:

- Переводимо цілу частину числа за правилом: цілу частину числа в системі числення з основою P ділять на основу нової системи числення з основою Q, записану в старій системі числення P. В результаті отримаємо остачу від ділення. Отримані остачі переводять в нову систему числення і записують знизу до верху послідовно із таблиці ділення. В результаті отримують цілу частину в новій системі чисел.

- Дробову частину числа в старій системі числення множать на основу нової системи числення. На кожному кроці опускають цілі частини отриманих чисел. Потім отримані цілі частини переводять в нову систему числення і, записуючи їх по порядку, отримують дробову частину числа в новій системі числення.

<u>*Приклад:*</u>

16

_2348

16

74

64

108

96

12

$$
\begin{array}{r|l}
-37576_{10} & 16 \\
32 & \\
\hline
55 & \\
48 & \\
\hline
77 & \\
64 & \\
\hline
136 & \\
128 & \\
\hline
8 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-146 & 16 \\
144 & 9 \\
\hline
2 &
\end{array}
$$

$$37573_{10} = 92C8_{16}$$

$$
\begin{array}{l}
-421,3 \mid 2 \\
4 \quad -210687 \mid 2 \\
-2 \quad 2 \quad 105343 \mid 2 \\
2 \quad 10 \quad 5 \quad 52671 \mid 2 \\
-1 \quad 6 \quad 13 \quad 2 \\
1 \quad 8 \quad 14 \\
-1 \quad 7 \quad 3 \\
1 \quad 1 \quad 1 \\
-1 \\
14 \\
1
\end{array}
$$

$0{,}375_{10} = 0{,}375 * 2 = 0{,}75 * 2 = 1{,}5$

$0{,}5 * 2 = 1{,}0$

$0{,}375_{10} = 0{,}011_2$

$421{,}375_{10} = 110100101{,}011_2$

$0{,}32_{10} = 0{,}64 = 1{,}28 = 0{,}56 = 1{,}12 = 0{,}24 = 0{,}48 = 0{,}96 = 1{,}92 = 0{,}98 = 1{,}84 = \ldots$

Операції в різних системах числення:

$124_5 + 234_5 = 413_5$

$$
\begin{array}{r}
+124 \\
234 \\
\hline
413_5
\end{array}
$$

$747_8 + 537_8 = 1506_8$

$$
\begin{array}{r}
+747 \\
537 \\
\hline
1560_8
\end{array}
$$

$224_5 - 134_5 = 140_5$

$$
\begin{array}{r}
-224 \\
134 \\
\hline
140
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\times 345 \\
23 \\
\hline
+1257 \\
712 \\
\hline
10377
\end{array}
$$