Тема 8: Математичний аналіз в Maple.

1. **Обчислення сум і добутків послідовностей.**

Приклади використання функцій sum() і Sum():

```
> restart
> sum(k, k = 1 ..n)
```

$$\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

```
> Sum(1/i^2, i = 1 ..infinity) = sum(1/i^2, i = 1 ..infinity);
```

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
> Product(k^2, k = 1 ..5) = product(k^2, k = 1 ..5);
```

$$\prod_{k=1}^{5} k^2 = 14400$$

```
> f := [1, 2, 3, 4, 5] : product(f[k], k = 1 ..4)
```

$$24$$

2. **Диференціювання в Maple.**

Приклади використання функцій diff() і Diff():

```
> restart
> Diff([sin(x), x^n, exp(a*x)], x) = diff([sin(x), x^n, exp(a*x)], x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\sin(x), x^n, e^{a x}\right]\right) = \left[\cos(x), \frac{x^n n}{x}, a e^{a x}\right]$$

```
> Diff(a*x^n, x$3) = diff(a*x^n, x$3);
```

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(a x^n\right) = \frac{a x^n n^3}{x^3} - \frac{3 a x^n n^2}{x^3} + \frac{2 a x^n n}{x^3}$$

```
> f(x, y) := cos(x)*y^3;
```

$$f := (x, y) \mapsto \cos(x) y^3$$

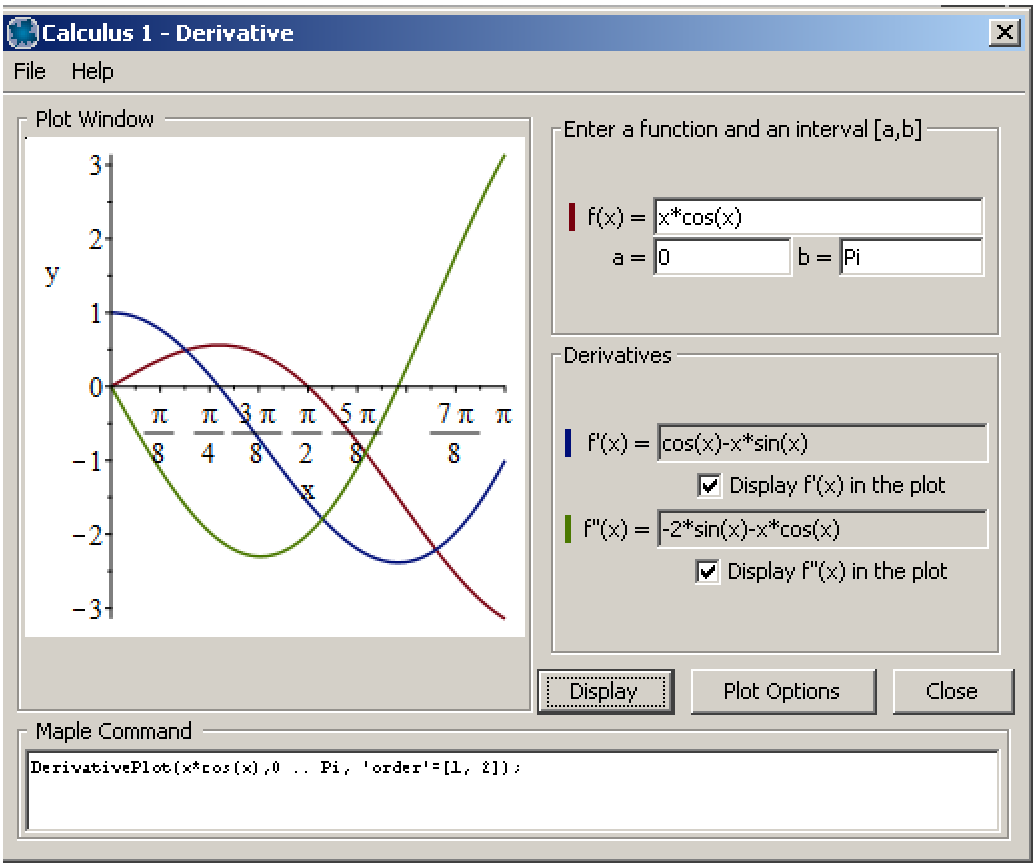
```
> Diff(f(x, y), x) = diff(f(x, y), x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x) y^3\right) = -\sin(x) y^3$$

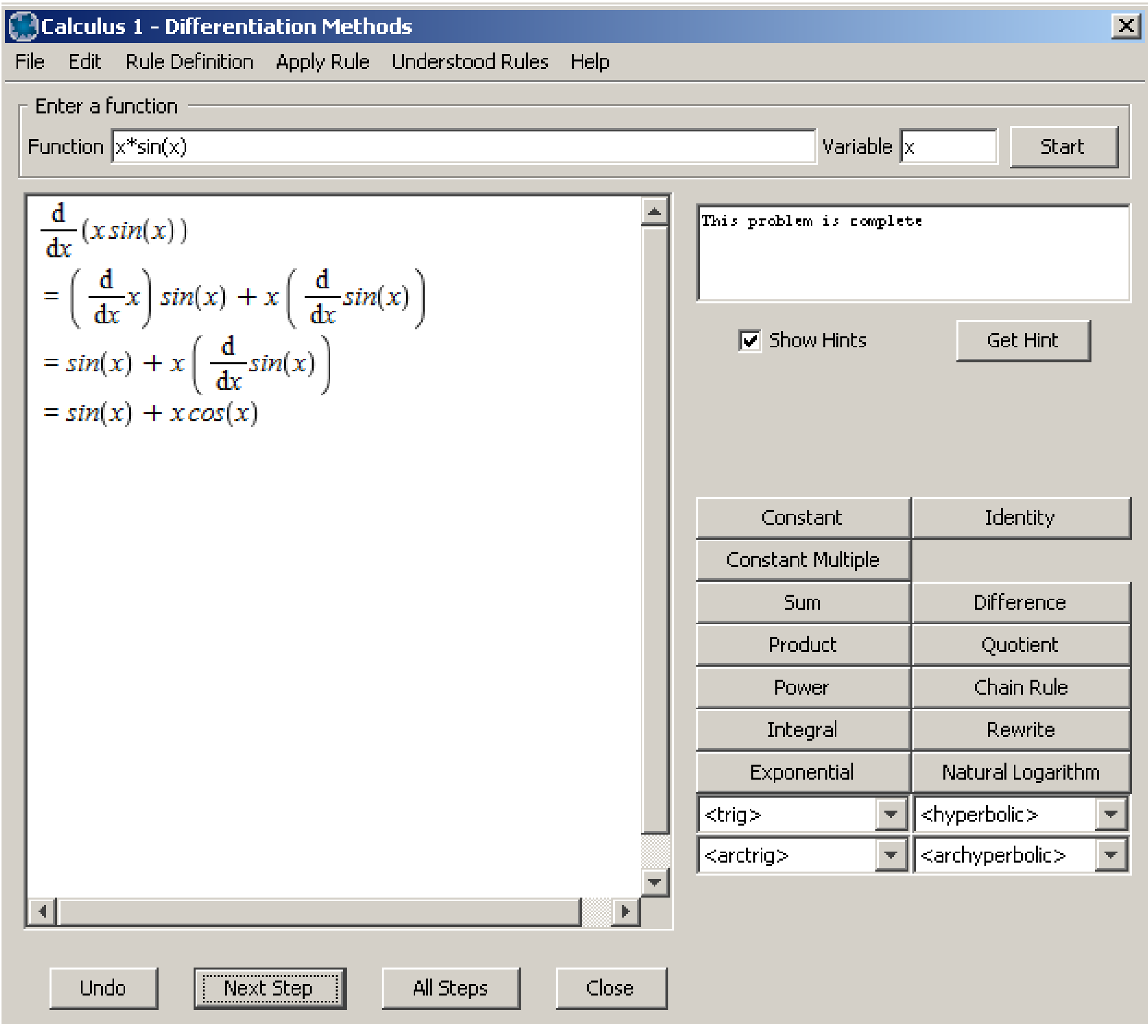
```
> Diff(f(x, y), x, y) = diff(f(x, y), x, y);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\cos(x) y^3\right) = -3 \sin(x) y^2$$

Для навчання диференціюванню рекомендується використовувати меню Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Derivatives… У вікні Calculus-Derivatives можна в інтерактивному режимі задати вираз для функції f(x), обчислити похідні f'(x) і f''(x), натиснувши кнопку Display, отримати графіки заданої функції і її похідних в заданих межах зміни x від a до b.



Виробити навики покрокового диференціювання виразів в аналітичному вигляді допомагає меню Tools, Tutors,□ Calculus-Single Variables, □Differentiation Methods…



3. Інтегрування в Maple.

<u>Приклади</u> використання функцій Int() і int():

> *restart*

> $Int(a*x\char`^n, x) = int(a*x\char`^n, x);$

$$\int a x^n \, dx = \frac{x^{n+1} a}{n+1}$$

> $Int(\exp(-x)*\sin(x)/x, x=0..\text{infinity}) = int(\exp(-x)*\sin(x)/x, x=0..\text{infinity});$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\sin(x)}{x} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

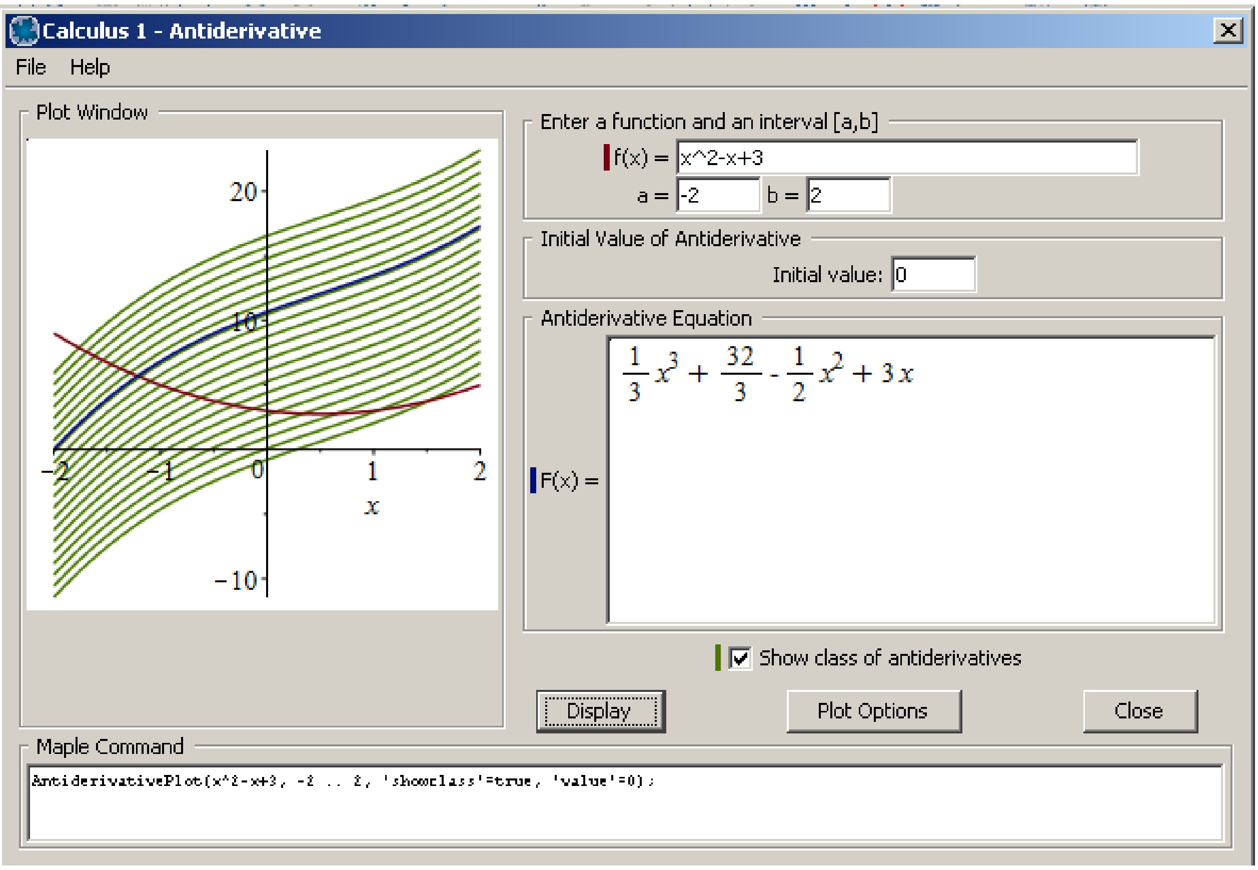
> $Int(Int(Int((x\char`^2 + y\char`^2)*z, x=0..a), y=0..a), z=0..a);$

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2)\, z \, dx \, dy \, dz$$

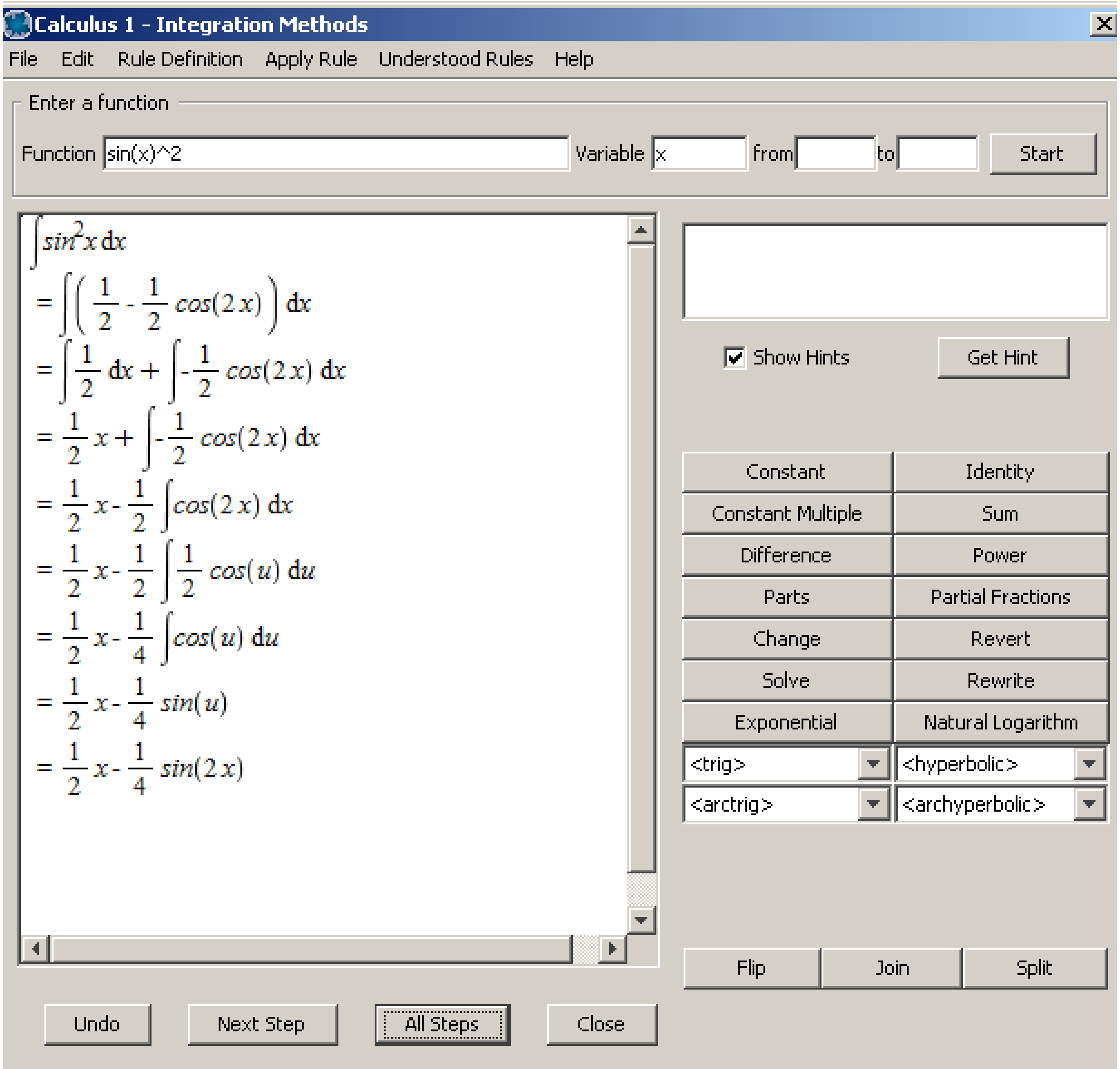
> *value*(%);

$$\frac{a^6}{3}$$

Для самонавчання відшуканню первісних використовують меню <u>Tools, □Tutors, Calculus-Single Variables, □ Antiderivative….</u>



Для демонстрації методів покрокового інтегрування служить Maplet-інструмент Step-by-step Integration Tutor, що викликається за допомогою меню <u>Tools,□ Tutors,□ CalculusSingle Variables, □Integration Methods.</u>



Приклади чисельного інтегрування (останній приклад – з підвищеною точністю):

> $Int(\sin(x)/x, x = 0..Pi) = evalf(int(\sin(x)/x, x = 0..Pi))$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = 1.851937052$$

> $expr := x^* \exp(-x) : Int(expr, x = 1..infinity) = evalf[40](Int(expr, x = 1..infinity, method = \_Gquad));$

$$\int_1^{\infty} x\,e^{-x}\,dx = 0.7357588823428846431910475403229217348916$$

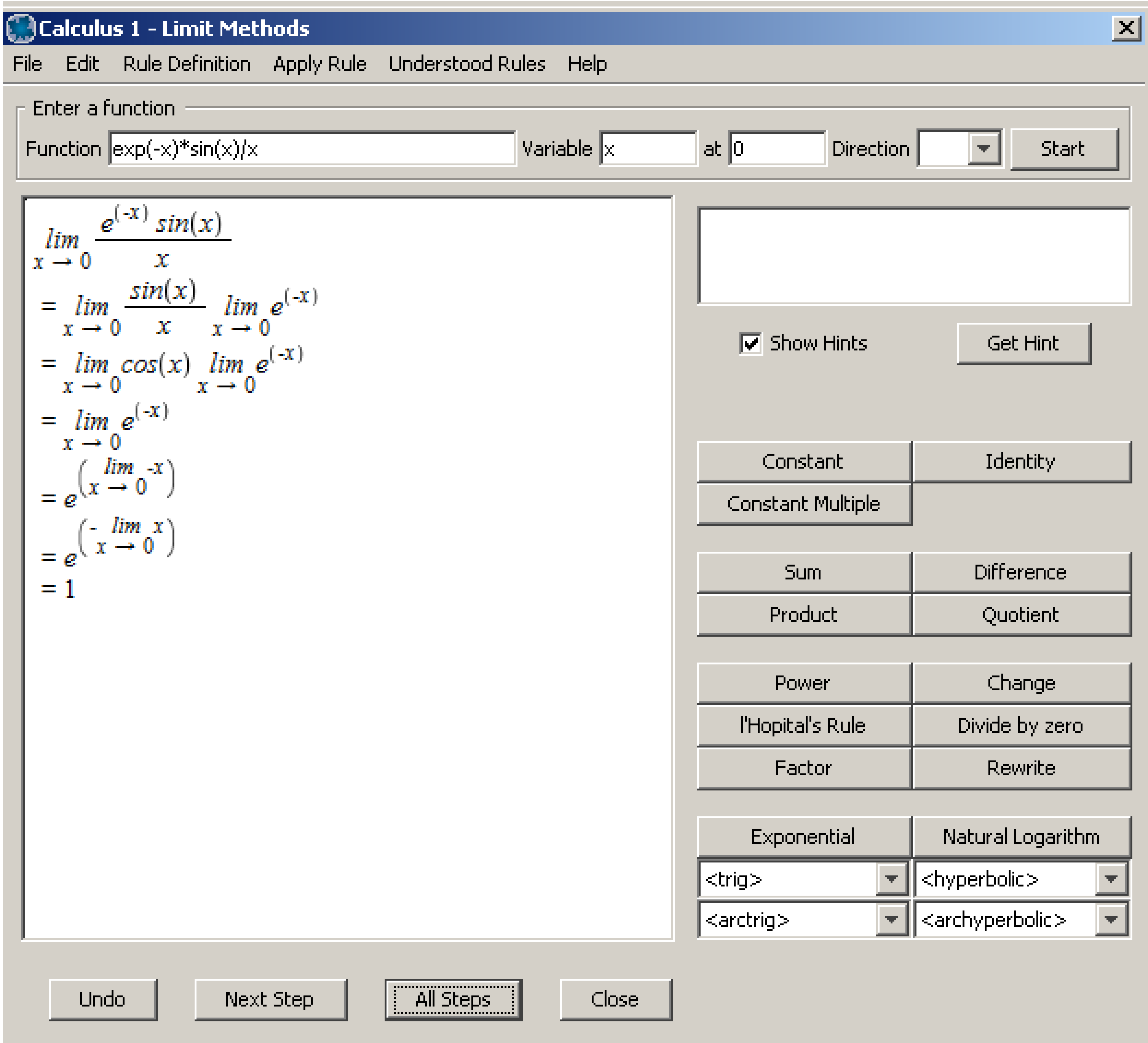
4. Обчислення границь.

Приклади обчислення границь:

> $Limit((x-\sin(x))/x^3, x = 0) = limit((x-\sin(x))/x^3, x = 0);$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Для демонстрації методів покрокового обчислення границь служить Maplet-інструмент Step-by-step Limit Tutor, що викликається за допомогою меню Tools, Tutors, CalculusSingle Variables, Limit Methods.



$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{(-x)} \sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x \to 0} e^{(-x)} = \lim_{x \to 0} \cos(x) \lim_{x \to 0} e^{(-x)} = \lim_{x \to 0} e^{(-x)} = e^{\left(\lim_{x \to 0} -x\right)} = e^{\left(-\lim_{x \to 0} x\right)} = 1$$

5. Розклад функцій в ряди.

Приклад розкладу функції в степеневий ряд:

$> f(x) := \sin(x)/x:\ series(f(x), x=0, 10);$

$$1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8 + O(x^{10})$$

Приклади розкладу функцій в ряди Тейлора і Маклорена:

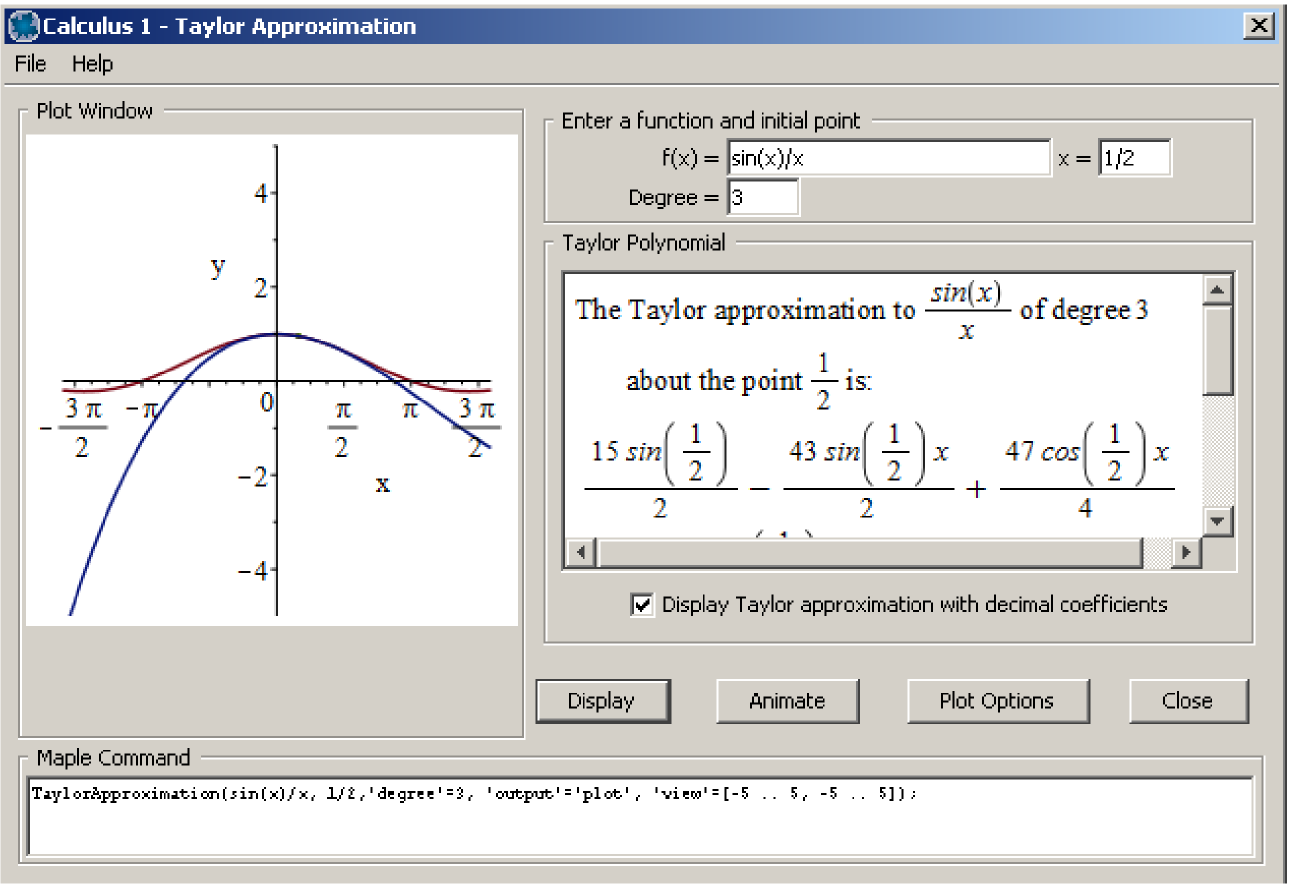
$> taylor(1-\exp(x), x=1, 4);$

$$1 - e - e(x-1) - \frac{1}{2}e(x-1)^2 - \frac{1}{6}e(x-1)^3 + O((x-1)^4)$$

$> taylor(\sinh(x), x, 10);$ *# розклад в ряд Маклорена (в околі 0)*

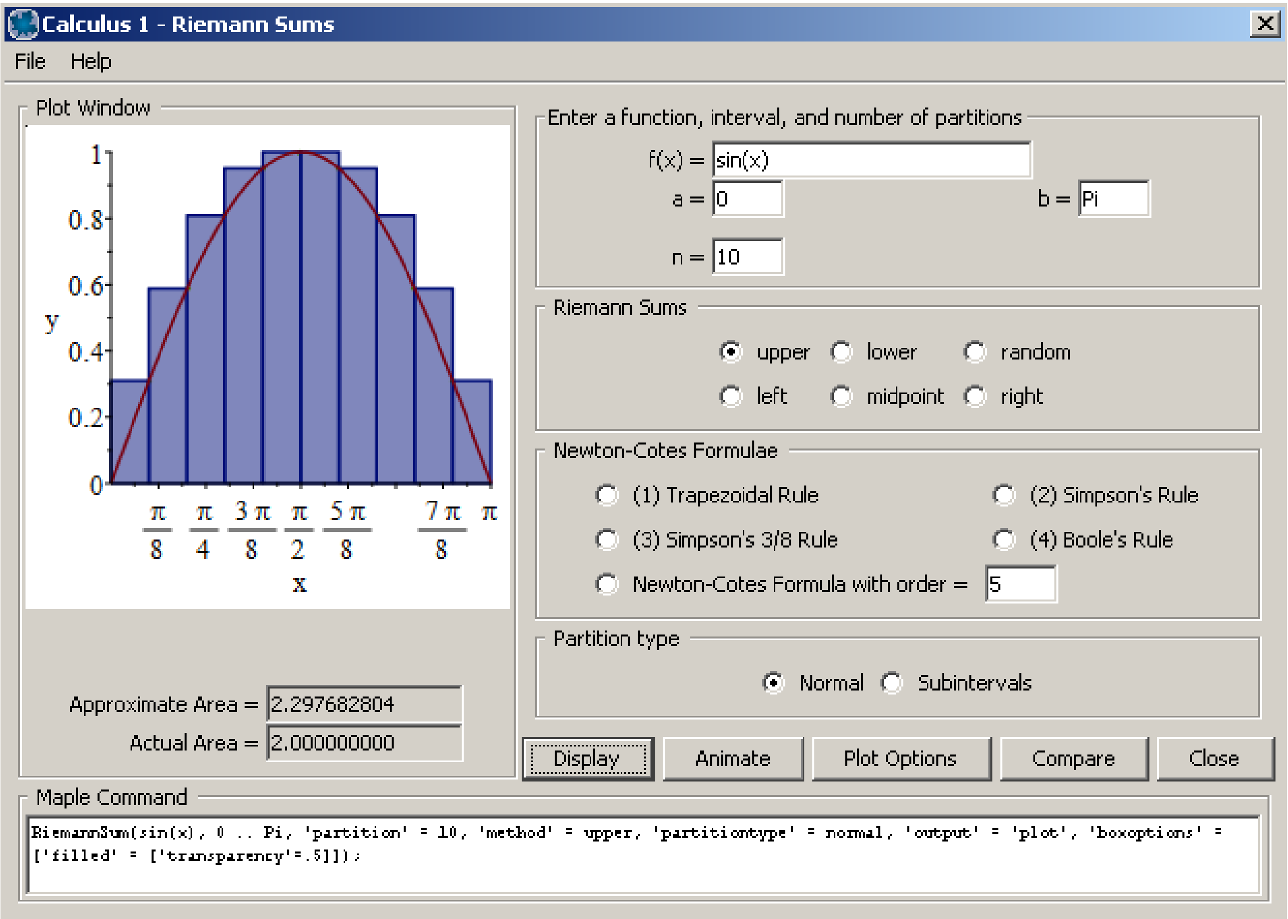
$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{11})$$

Для демонстрації розкладу аналітичної функції в ряд служить Maplet-інструмент Taylor Approximation, що викликається за допомогою меню Tools, Tutors, CalculusSingle Variables, Taylor Approximation...



6. Наближене обчислення інтегралів за допомогою сум Рімана.

Меню <u>Tools, Tutors, Calculus-Single Variables, Rieman summs…</u>

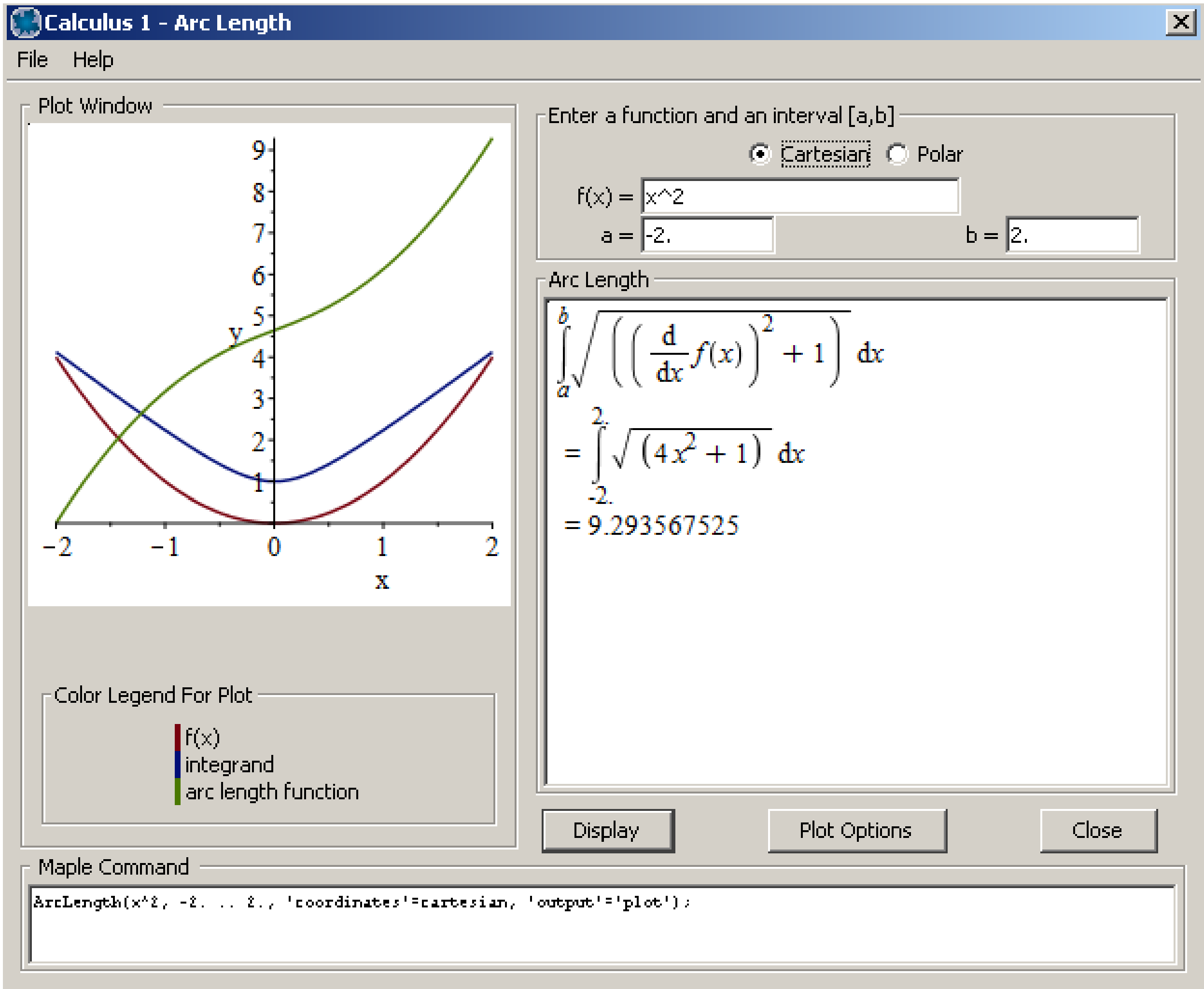


7. Обчислення довжини дуги.

Якщо f(x) – неперервна на відрізку від a до b функція, то довжина дуги цієї функції визначається відомим виразом:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Для демонстрації обчислення довжини дуги заданої аналітичною функцією служить Maplet-інструмент ArcLench, що викликається за допомогою меню Tools,□ Tutors,□ CalculusSingle Variables, □ArcLench...



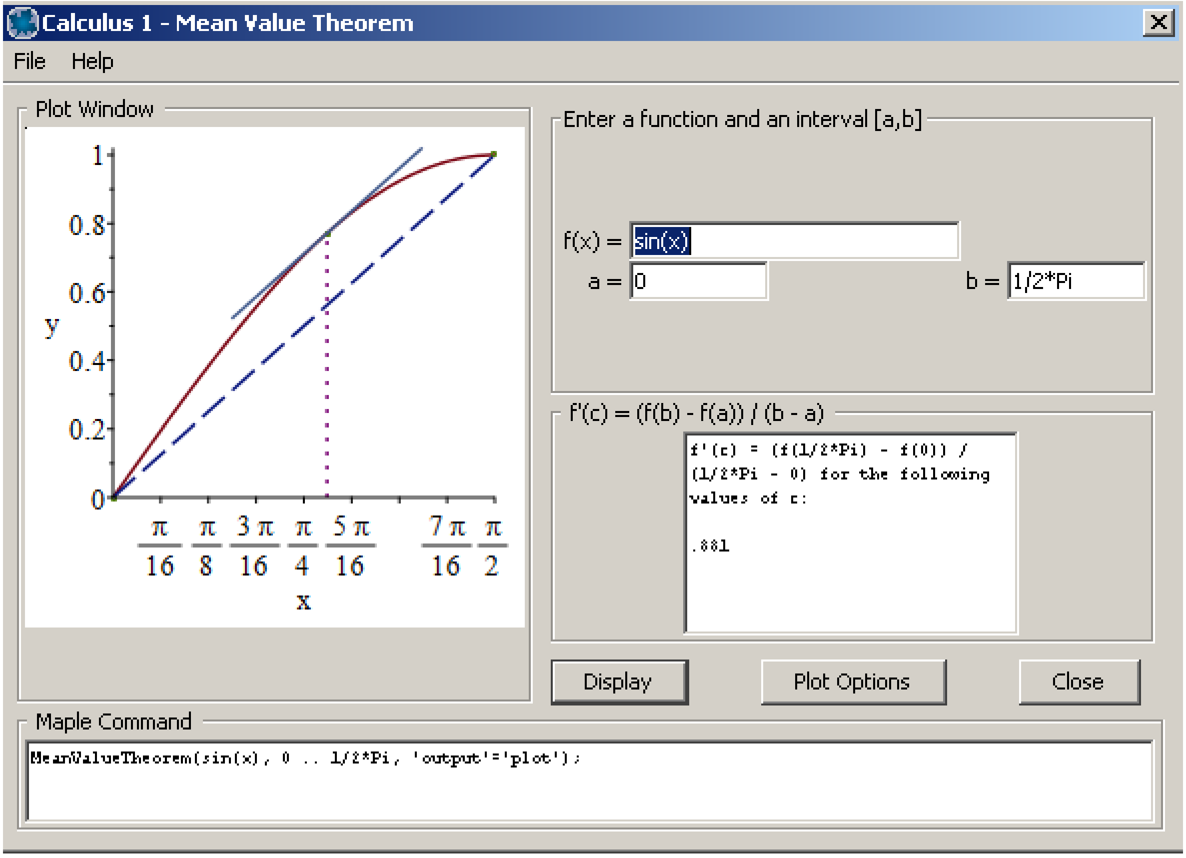
8. Ілюстрація теореми про середнє.

Перша теорема про середнє говорить, що якщо f(x) – функція, що інтегрується, неперервна на відрізку [a,b], то існує принаймні одне значення x = ξ в інтервалі [a,b], при якому:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Тобто площа, визначена інтегралом, може бути обчислена як площа прямокутника з основою – відрізком ab і висотою f(ξ).

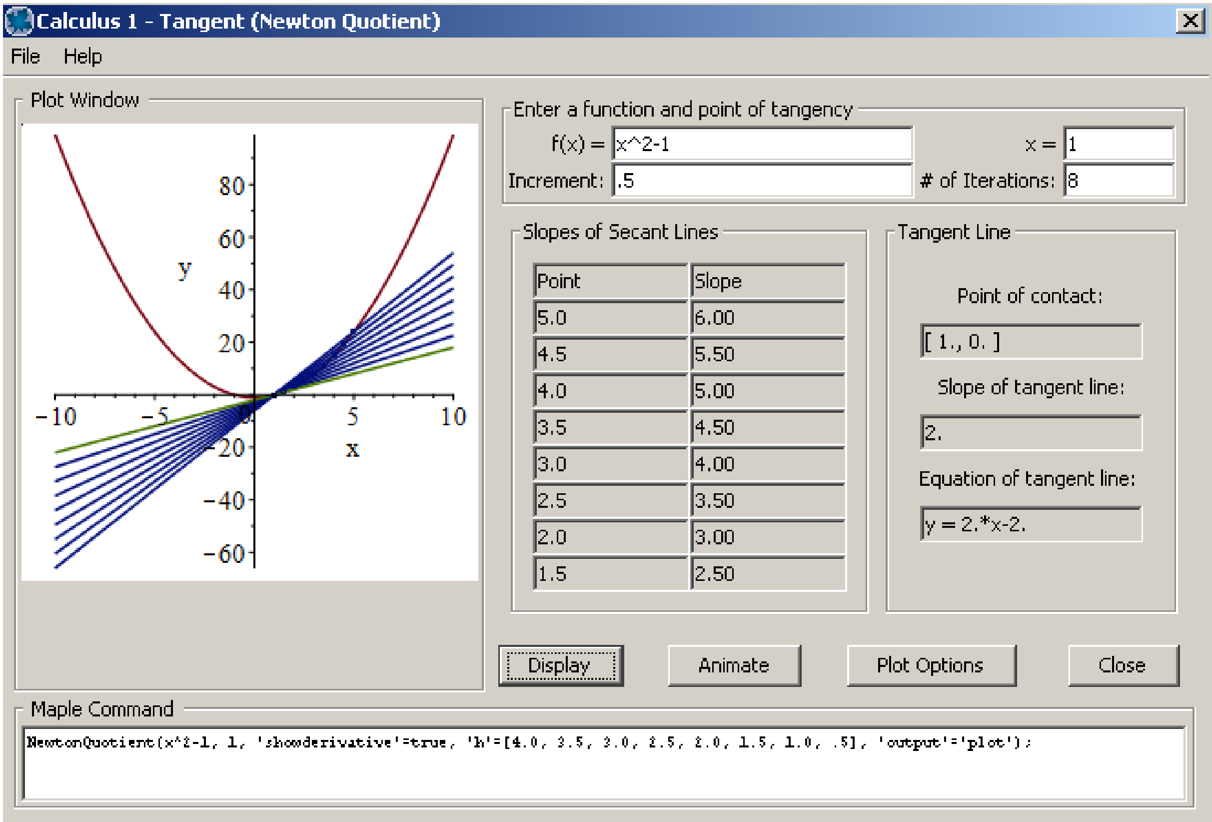
Для ілюстрації цього положення служить Maplet-інструмент, що викликається за допомогою меню Tools,□ Tutors,□ CalculusSingle Variables, Mean Value Theorem…



9. Побудова дотичної до заданої точки кривої і січних.

В деяких випадках, наприклад при реалізації метода Ньютона розв'язання нелінійних рівнянь, потрібно будувати дотичну до заданої точки кривої f(x), а також січні лінії і визначати їх точки перетину з f(x).

Для цього служить Maplet-інструмент Tangent and Secant, що викликається за допомогою меню <u>Tools, Tutors, CalculusSingle Variables, Secants...</u>



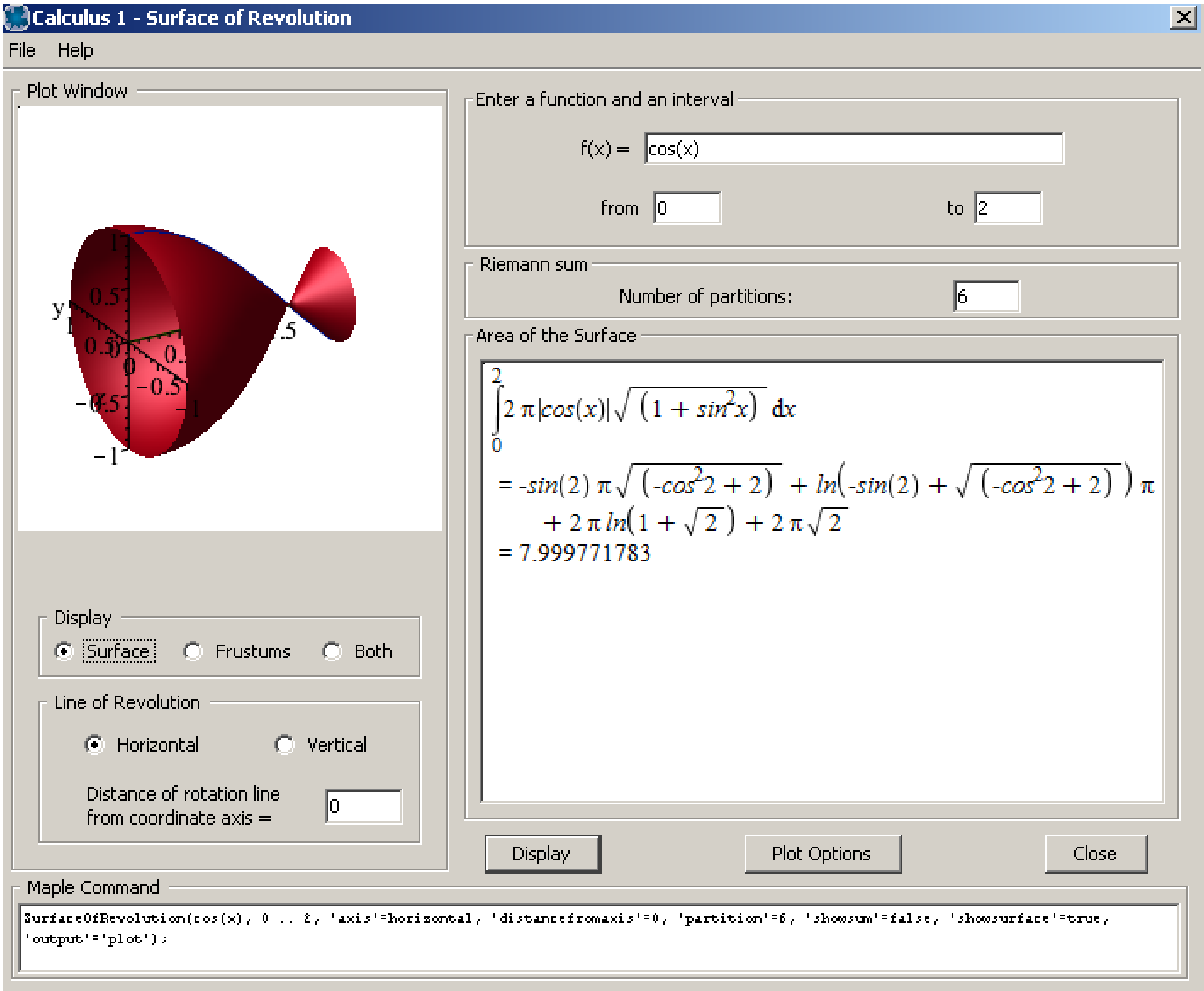
На графіку будуються крива функції і дотична до заданої точки x. Додатково будується ряд січних. Можлива побудова із застосуванням анімації.

10. Обчислення поверхні обертання кривої.

Нехай відрізок кривої f(x), при x в інтервалі [a,b], обертається навколо осі Ox. Тоді площа отриманої фігури обертання рівна:

$$P = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Для обчислення цієї площі служить Maplet-інструмент Surface of Revolution, що викликається за допомогою меню Tools,□ Tutors,□ CalculusSingle Variables, Surface of Revolution…



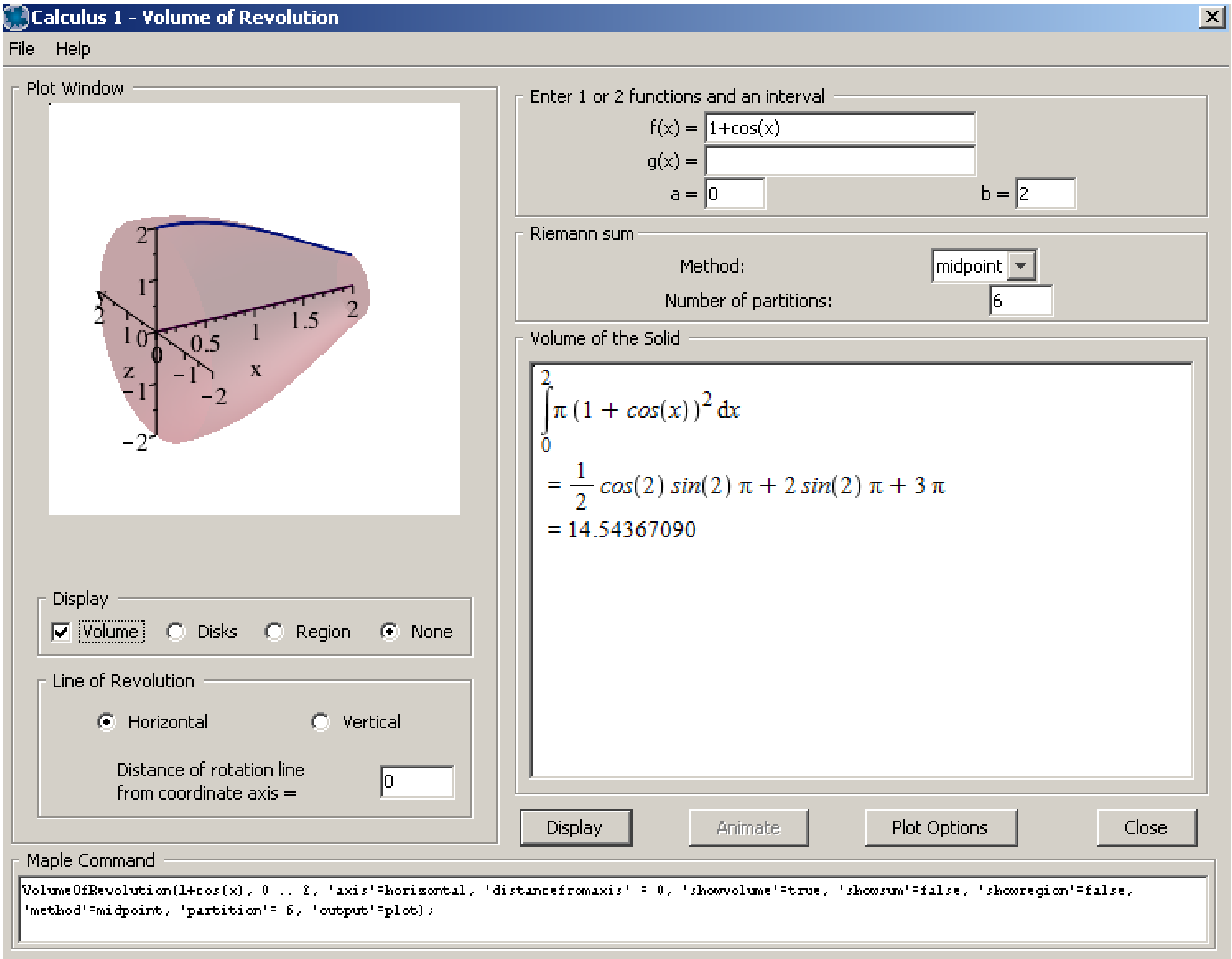
На графіку будується крива функції і поверхня обертання цієї кривої в 3Dпрямокутній системі координат. Обчислюється значення площі. Обчислення можливі і при обертанні відрізка кривої навколо осі Oy.

11. Обчислення об’єму фігури, отриманої обертанням відрізку кривої.

Нехай відрізок кривої f(x), при x в інтервалі [a,b], обертається навколо осі Ox. Тоді об’єм отриманої фігури обертання рівний:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

Для обчислення цього об’єму служить Maplet-інструмент Volume of Revolution, що викликається за допомогою меню Tools, Tutors, CalculusSingle Variables, Volume of Revolution…



На графіку будується крива функції і поверхня обертання цієї кривої в 3Dпрямокутній системі координат. Обчислюється значення об’єму отриманої фігури. Обчислення можливі і при обертанні відрізка кривої навколо осі Oy.