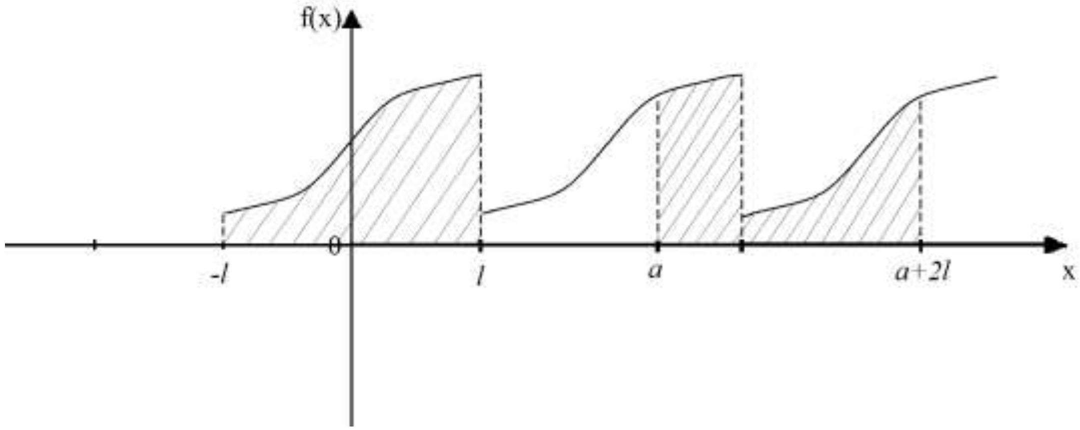
3. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СДВИГОМ

Используем известное свойство периодической функции $f(x)$ с периодом $T = 2l$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{a}^{a+2l} f(x)dx,$$

каково бы ни было число а.

Указанное свойство означает, что интеграл от периодической функции $f(x)$ по любому отрезку, длина которого равна периоду имеет всегда одно и то же значение. Этот факт легко иллюстрируется и геометрически: площади, заштрихованные на рисунке равны между собой.



Расчетные формулы для вычисления коэффициентов Фурье принимают вид

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx, \qquad (20)$$

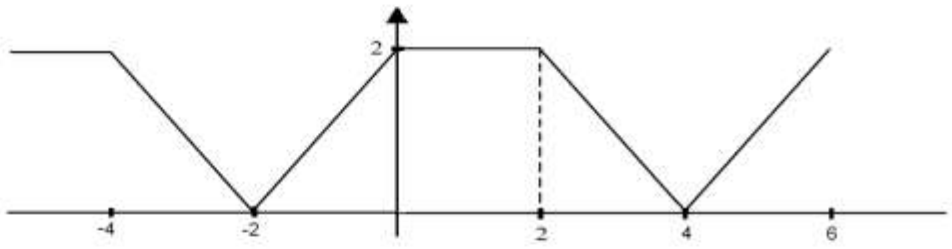
$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (21)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (22)$$

где a – любое число.

<u>Пример4.</u> Пусть требуется разложить в ряд Фурье функцию f(x) с периодом

$T=6, l=3$.



Найдем аналитическое выражение данной функции.

Для точек $M_1(-2;0)$ и $M_2(0;2)$ имеем $f(x) = x + 2$

Для точек $M_3(2;2)$ и $M_4(4;0)$ имеем $f(x) = -x + 4$

Тогда $f(x) = \begin{cases} x+2, -2 \le x < 0, \\ 2, 0 \le x < 2, \\ -x+4, 2 \le x < 4. \end{cases}$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье по формулам (20)-(22), где a=-2:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-2}^{0}(x+2)dx + \int_{0}^{2}2dx + \int_{2}^{4}(-x+4)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(x+2)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0} + 2x\Bigg|_{0}^{2} - \frac{(-x+4)^2}{2}\Bigg|_{2}^{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(2 - 0 + 4 - 0 - 0 + 2) = \frac{8}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-2}^{0}(x+2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx + 2\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{3}dx + \int_{2}^{4}(-x+4)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3).$$

Вычислим отдельно эти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

$$I_1=\int_{-2}^{0}(x+2)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left|\begin{matrix}u=x+2, & du=dx\\ d\upsilon=\cos\frac{n\pi x}{3}, & \upsilon=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=(x+2)\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=0+\frac{9}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{2n\pi}{3}\right),$$

$$I_2=2\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2\cdot 3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{6}{\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi n}{3},$$

$$I_3=\int_{2}^{4}(-x+4)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\left|\begin{matrix}u=-x+4, & du=-dx\\ d\upsilon=\cos\frac{n\pi x}{3}, & \upsilon=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=(-x+4)\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{2}^{4}+\int_{2}^{4}\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=-\frac{6}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{2}^{4}=-\frac{6}{\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi n}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{4\pi n}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{2\pi n}{3}=$$

$$=-\frac{6}{\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi n}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\left(-2\sin\frac{2\pi n}{2}\cdot\sin\left(-\frac{2\pi n}{6}\right)\right)=-\frac{6}{\pi n}\cdot\sin\frac{2\pi n}{3},$$

$$a_n = \left(\frac{9}{n^2\pi^2}(1-\cos\frac{2n\pi}{3})\right),$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-2}^{0}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_{0}^{2} 2\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_{2}^{4}(-x+4)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(I_1 + I_2 + I_3\right),$$

где

$$I_1 = \int_{-2}^{0}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+2, & du = dx \\ d\upsilon = \sin\frac{n\pi x}{3}dx, & \upsilon = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3} \end{array} \right| =$$

$$= (x+2)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0}\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$= -\frac{6}{n\pi} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{6}{n\pi} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3},$$

$$I_2 = \int_{0}^{2} 2\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{0}^{2} = -\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{6}{n\pi},$$

$$I_3=\int\limits_2^4(-x+4)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\left|\begin{matrix}u=-x+4, & du=-dx\\ d\upsilon=\sin\frac{n\pi x}{3}dx, & \upsilon=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=(-x+4)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^4-\int\limits_2^4\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}dx=$$

$$=\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^4=\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^4=\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{4n\pi}{3}+$$

$$+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}=\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\sin\left(-\frac{2n\pi}{3}\right)\cdot\cos n\pi=\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-(-1)^n\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{2n\pi}{3}$$

Тогда,

$$b_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{6}{n\pi}+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{6}{n\pi}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+(-1)^{n+1}\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

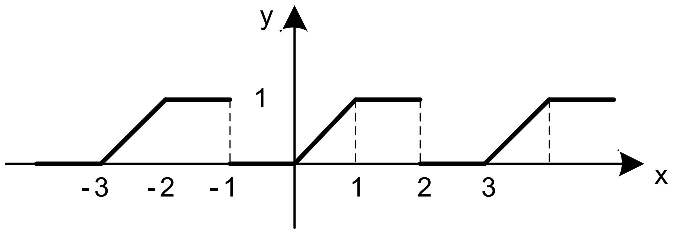
$$=\frac{1}{3}\left(\left(1+(-1)^{n+1}\right)\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд Фурье, получаем:

$$f(x)=\frac{4}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{3}{n^2\pi^2}\cdot\left(1+(-1)^n\right)\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}.$$

<u>Задание 3.</u> А) Найти разложение в ряд Фурье периодической функции f(x) с периодом 2π , заданной на сегменте [0; 2π] аналитически $f(x) = 2\pi - x$.

Б) Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически.



3. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПЕРИОДОМ

Теорию тригонометрических рядов Фурье 2π- периодических функций с помощью замены переменной по формуле

$t = \frac{n\pi x}{l}$, $-l \le x \le l \Rightarrow -\pi \le t \le \pi$, можно

перенести на случай произвольных $2l$ – периодических функций. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема. Если функция f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке $[-l, l]$ (l – произвольное положительное число) или же имеют на нем конечное число точек разрыва I рода, то во всех точках $x \in (-l, l)$, в которых $f(x)$ непрерывна, сумма ряда равна $f(x)$ и справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (11)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (14)$$

Если $f(x) = f(-x)$, т.е. $f(x)$ - четная функция, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (15)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \qquad (16)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (17)$$

$$b_n = 0 \quad .$$

Если $f(x) = -f(-x)$ т.е. $f(x)$ нечетная функция, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (18)$$

а коэффициенты находятся по формулам

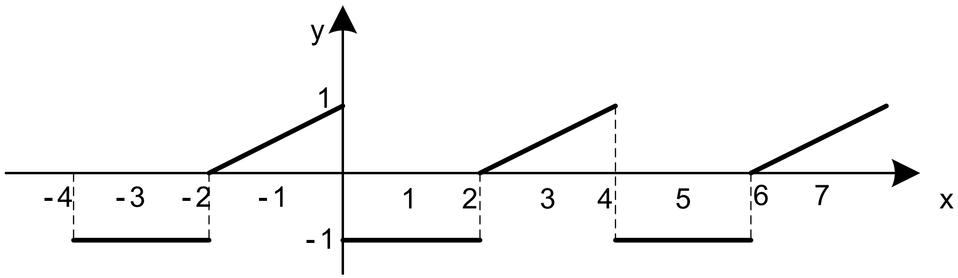
$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (19)$$

Рассмотрим решение типового примера.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графически.



Найдем аналитическое выражение данной функции. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки : $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Имеем т. M_1(-2,0) , т. M_2(0,1).

Тогда $\dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x+2}{0+2} \Rightarrow y = \dfrac{x}{2} + 1.$

Аналитическое выражение:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1, -2\le x<0,\\ -1, 0\le x<2.\end{cases}$$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье по формулам (12)-(14).

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(-1)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\frac{1}{2}x\Bigg|_{0}^{2}==0-\frac{1}{2}\left(\frac{(-2)^2}{4}-2\right)-\frac{1}{2}\cdot 2+0=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=I_1+I_2,$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\Rightarrow$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$u=\frac{x}{2}+1, du=\left(\frac{x}{2}+1\right)'dx=\frac{dx}{2}, dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx,$$

$$v=\int\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int\cos\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin 0-0-\frac{1}{n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{n^2\pi^2}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}=\frac{1}{n^2\pi^2}(1-\cos(-n\pi))=\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

Найдем I_2

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^2(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=-\frac{1}{n\pi}(\sin n\pi-\sin 0)=0\,.$$

Отсюда имеем

$$a_n=I_1+I_2=\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}.$$

Теперь найдем коэффициенты b_n:

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=I_1+I_2.$$

Для вычисления I_1 применим формулу интегрирования по частям:

$$u=\frac{x}{2}+1,du=\left(\frac{x}{2}+1\right)'dx=\frac{dx}{2},dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx,$$

$$v=\int\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\int\sin\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\cos 0-0+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}+\frac{2}{n^2\pi^2}\int\limits_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)=-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}=-\frac{1}{n\pi}.$$

$$I_2\Rightarrow\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{1}{n\pi}\int\limits_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}d\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n-1\right).$$

Отсюда имеем,

$$b_n=-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)=\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n-2\right).$$

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{(-1)^n-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Задание №4. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, заданной на отрезке *(3;5)*, доопределив её четным образом.

4.2 Разложить в ряд Фурье функцию, заданную графиком.