Marek Kolk, Hanna Britt Soots, Kaido Lätt, DVNL, Tartu Ülikool, 2025.

Arvestuslik ülesanne 1 (2025)

Tähtaeg: 07.03.2025, max 5p

Reeglid arvestuslike ülesannete kohta

- Arvestuslikud ülesanded on iseseisvaks lahendamiseks.
- Arvestusliku ülesande programmikoodi kirjutamisel võib kasutada abivahendeid (sh tekstiroboteid), kuid iga koodijupi puhul peab oskama täpselt selgitada, mida see teeb.
- Arvestusliku ülesande puhul tuleb:
    1) esitada kõik lahenduse failid Moodle'i kaudu,
    2) pärast failide esitamist suuliselt vastata küsimustele lahenduse ja koodi kohta.

NB! Tekstirobotite kasutamise ja viitamise kohta saab täpsemalt lugeda järgmiselt aadressilt. `https://sisu.ut.ee/ti/tekstiroboti-korrektne-kasutamine-ja-sellele-viitamine/`

1 SIR epideemia mudel

Keskajal laastas Euroopat Must Surm (katk). Üsna seletamatuks osutus katku järsk ilmumine ja hiljem niisama ootamatu kadumine. Üks matemaatilise epidemioloogia avastus oli, et teatud mudelid ennustavadki sellist epideemia käitumist ette (loomulikult tuleb selleks peale modelleerimise ka midagi päriselus ette võtta). Aastal 1927 esitleti W. O. Kermack'i ja A. G. McKendrick'i poolt SIR (*Susceptible, Infective, Removed*) mudelit, mida kasutatakse veel tänapäevalgi ja mille ühte lihtsamat alamjuhtu järgnevalt vaatame.

1.1 Modelleerimine I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiga

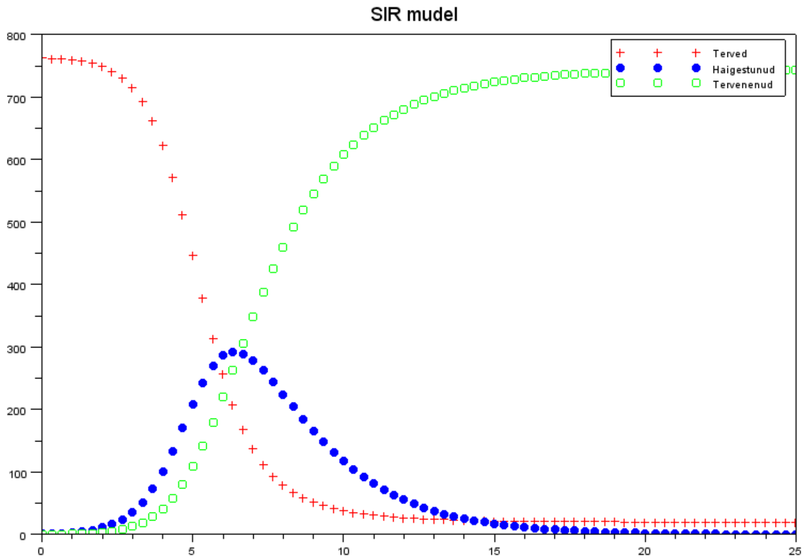
Üks võimalikke SIR mudeleid on algtingimustega ülesanne (vt. nt. [1, 3, 5]):

$$\left\{\begin{aligned} S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - r \cdot I(t) \\ R'(t) &= r \cdot I(t) \\ S(0) &= S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

- $S(t)$ on ajahetkel t tervete inimeste arv, nemad on altid haigestumise suhtes (*Susceptible*).
- $I(t)$ on nakatunud inimeste arv (*Infective*). Tervetega kohtumisel levib haigus edasi.

- $R(t)$ on haigusest tervenenud inimeste arv (*Removed, Recovered*).
- Kogu elanike arv $N = S(t) + I(t) + R(t)$ jääb ajas muutumatuks.
- Konstant β iseloomustab nakkuse levimise kiirust tervete ja nakatunud isikute kohtumisel.
- Konstant r iseloomustab haigusest tervenemise kiirust.

Märkus 1.1
Mudel eeldab lihtsustuseks, et kõikide inimeste nakatumise tõenäosus on võrdne ja haiguse läbipõdemisel muutub inimene haiguse vastu täielikult immuunseks. Mõne teist tüüpi haiguse korral selline mudel enam ei tööta.



2 Arvestuslik ülesanne

1. Kasutame mudelit (1) Põhja-Inglismaal 1978. a. ühes poiste internaatkoolis toimunud gripiepideemia kohta ([2, 3, 4]). Koolis õppis 763 poissi. Materjalid [2, 3] soovitavad järgmisi parameetreid:
$$\beta = 2.18 \cdot 10^{-3}, \quad r = 0.441.$$

2. Kirjutage funktsioonid trapetsmeetodi ja Runge-Kutta 4. järku (4-astmelise) meetodi jaoks. Sisendiks võiks saada lõigu $[a, b]$ otspunktid a ja b, alglähendi vektor $y0$ ning osalõikude arv N.

3. Lahendage ülesanne lõigul $[0, 25]$ (päevade arv) trapetsmeetodi ja Runge-Kutta 4. järku meetodiga, algtingimustega

$$S(0) = 763 - 1 = 762, \quad I(0) = 1, \quad R(0) = 0.$$

Osalõikude arvud olgu $N = 50, 100, 200$.

Tegelikud andmed															
päev	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
haigestunuid	1	3	7	25	72	222	282	256	233	189	123	70	25	11	4

4. Koostage kolm graafikut:
a) trapetsmeetodi ja Runge-Kutta 4. järku meetodiga leitud lähendid $N = 50$ korral ning tegelikud andmed;
b) trapetsmeetodi ja Runge-Kutta 4. järku meetodiga leitud lähendid $N = 100$ korral ning tegelikud andmed;
c) trapetsmeetodi ja Runge-Kutta 4. järku meetodiga leitud lähendid $N = 200$ korral ning tegelikud andmed.

5. Mis juhtub, kui $I(0)$ on ühe asemel mingi väike arv (10^{-5}) ja mida see reaalelus võiks tähendada?

6. Mis juhtub, kui sammupikkus on liiga suur (näiteks $N = 10$)? Umbes millise osalõikude arvu juures võib oma tulemust pidada kindlaks, s.t. et lahend N suurenedes enam palju ei muutu (vaadake eraldi trapetsmeetodit ja Runge-Kutta 4. järku meetodit). On selleks vaja 25, 50, 100, 200 (ehk $h = 1, 0.5, 0.25, 0.125$) või rohkemgi osalõiku.

Viited

[1] L. Berec. Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals. Lecture Notes. University of South Bohemia, Czech Republic.

[2] A. Clark Jr. SIR Model of Epidemics. Basic Model and Examples Revised, 2005.

[3] J.D. Murray. Mathematical Biology I, An Introduction. 325-326, Springer-Verlag, 2002.

[4] News and Notes. Infuenza in a boarding school. British Med. Jour., March 4, p. 587, 1978.

[5] J. Na, L. Tsui. Epidemic modelling using SARS as a case study. North American Actuarial Journal. 9(4): 28-42,