

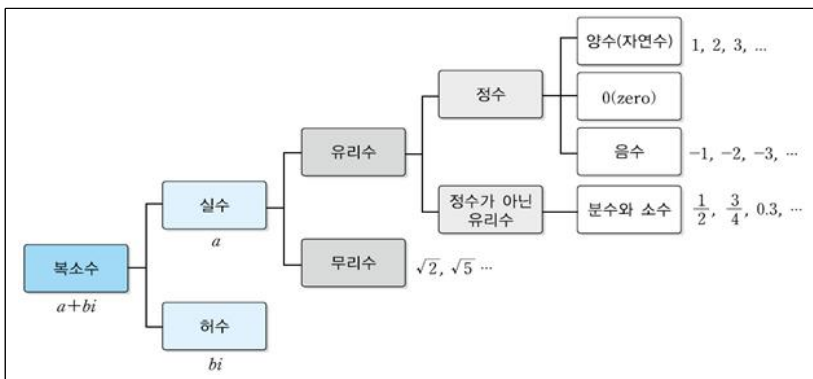
2주차 1차시 보수의 개념

【학습목표】

1. 수를 분류할 수 있으며, 자연수와 정수, 유리수, 무리수를 구분할 수 있다.
2. 부호가 없는 2진수의 연산을 예를 들어 설명할 수 있다.

학습내용1 : 수의 분류

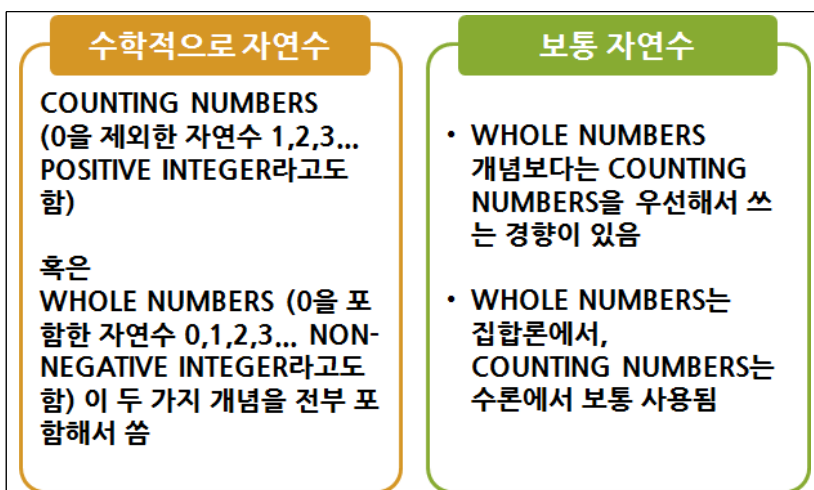
* 수(數)의 분류



1. 자연수와 정수

* 자연수(NATURAL NUMBER. 기호 N)

- 인류가 가장 먼저 발견한 수의 체계가 바로 자연수
- 일반적으로 수를 셀 때 사용하는 기본적 수 체계이며 양의 많고 적음과 순서를 표현할 수 있는 가장 기본적인 단위의 수체계



* 정수(INTEGER 기호 Z)

- 자연수에서 수의 개념이 확장된 수의 체계로 자연수에 0과 음수가 포함된 개념
- (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...) 음수와 0의 도입으로 인해 인류는 방정식의 해를 구할 수 있는 범위가 확장 되었으며 이는 곧 수학과 과학의 비약적 발전을 가져오게 됨
- 참고로 INTEGER를 나타내는 기호 Z는 독일어인 Zahl에서 따온 기호임 (Zahl은 영어로 number)

2. 유리수

* 유리수(RATIONAL 기호 Q)

- 분수로 나타낼 수 있는 수를 지칭함
- 단 조건이 있는데 분자와 분모는 모두 정수이며 분모는 0이 아니어야 함 (나눗셈에서 0을 나눌 수 없기 때문에)
- 쉽게 말해서 실수(REAL NUMBER)중 정수와 분수를 포함한 수를 유리수라고 생각하면 됨

* 이를 수치로 설명하면

$1/2$ = 유리수 (분수로 표현이 가능하니까)

0.5 = $1/2$ = 유리수

1 = $1/1$ = 유리수

-0.5 = $-1/2$ = 유리수

7771 = $7771/1$ = 유리수

0 = $0/1$ = 유리수

$0.3333...$ = $1/3$ = 유리수

<마지막의 순환하는 무한 소수까지 전부 분수로 표현이 가능함>

- 따라서 정수와 분수를 포함한 수를 유리수라고 하는 것이며, 우리가 일상적으로 사용하는 대부분의 수도 유리수인 것임
- 이를 집합개념으로 표현하면 $N \subset Z \subset Q$ 가 되는 것임 (Q는 QUOTIENT의 약자)

3. 무리수

* 무리수 (IRRATIONAL 기호 I)

- 실수이면서 정수, 분수로 나타낼 수 없는 수를 무리수라고 함
- 바로 순환하지 않는 무한소수들인데 이들은 분수로 표현할 수 없음

* 예시 : 무리수의 대표적인 예

$1.4142135....$ = $\sqrt{2}$

$3.1415926....$ = π

$2.7182818....$ = e

학습내용2 : 보수의 정의

1. 어원적 의미

<상호 보완하는 수로, 임의의 수를 보완해주는 다른 임의의 수>

2. r진법에서 정의되는 보수(complementary number)

<두 종류로 정의됨>

- (r-1)의 보수, 진보수라고 하는 r의 보수로 정의됨

* 예시

- 10진수에서는 9의 보수와 10의 보수가 존재

- 2진수에서는 1의 보수와 2의 보수가 존재

1) r진법에서 (r-1)의 보수

<A라는 수에 B라는 수를 더한 결과값의 각 자리가 (r-1)이 될 때, B를 A에 대한 (r-1)의 보수라고 정의함>

* 예시

- 10진수 (237)₁₀에 대한 9의 보수를 B라고 하면

$$237 + B = 999 \rightarrow 237 + B = (1000-1) \rightarrow B = (1000-1) - 237 = 762$$

2) r진법에서 r의 보수

<A라는 수에 B라는 수를 더해서 각 자리마다 자리올림이 발생하고 해당 자리는 0이 될 때, B를 A에 대한 r의 보수라고 정의함>

* 예시

- 10진수 (237)₁₀에 대한 10의 보수를 B라고 하면

$$237 + B = 1000 \rightarrow B = 1000 - 237 = 763$$

3. r진수에서 (r-1)의 보수

<r진법에서 임의의 정수 $(N)_r$ 이 자릿수가 n개로 구성될 때, (r-1)의 보수 정의를 수식으로 표현하면 다음과 같음>
 - $(r^n - 1) - N$

1) 10진수에서 9의 보수

<9의 보수는 각 자리의 숫자를 각각의 9에서 뺀 것과 같음>

* 예시

- (546700)₁₀에 대한 9의 보수를 구하여라

$$(r^n - 1) - N = (10^6 - 1) - 546700 = 999999 - 546700 = (453299)_{10}$$

2) 2진수에서 1의 보수

<2진수에 대한 1의 보수는 각 자리의 숫자를 각각의 1에서 뺀 것과 같음>

* 예시

- (1011001)₂에 대한 1의 보수를 구하여라

$$(r^n - 1) - N = (2^7 - 1) - 1011001 = 1111111 - 1011001 = (0100110)_2$$

4. r진수에서 r의 보수

<r진법에서 임의의 정수 $(N)_r$ 이 자릿수가 n개로 구성될 때, r의 보수 정의>
 - $r^n - N$ (N=0일 경우 0으로 정의)

1) r의 보수는 다음의 관계에 의해서 (r-1)보수로부터 쉽게 얻어짐

<r의 보수는 (r-1)의 보수에 1을 더하면 됨>

* 예시

- (101100)₂에 대한 2의 보수를 구하여라

$$\text{2진수에 대한 1의 보수 : } 111111 - 101100 = 010011$$

$$\text{2진수에 대한 2의 보수 : } 010011 + 1 = 010100$$

학습내용3 : 부호가 없는 2진수의 연산

1. 부호가 없는 2진수의 뺄셈 연산에서 보수의 활용

- 1) 컴퓨터에서 뺄셈 연산은 보수를 이용하는 것이 효율적
- 2) 부호를 표시하지 않는 10진수에서 보수를 이용한 뺄셈 연산

* 예시 : $8 - 6 = 2$

- 8은 빼어지는 수로 피감수라하며, 6은 빼는 수로 감수라고 함
- 감수를 10의 보수로 표현하게 된다면 뺄셈연산은 덧셈 연산으로 대체할 수 있음

3) 6일 때 9의 보수 : $(10 - 1) - 6 = 3$

4) 6일 때 10의 보수 : $3 + 1 = 4$

- 구해진 10의 보수를 피감수 8과 덧셈을 수행하면 " $8 + 4 = 12$ "
- 10의 자리는 버리고 1의 자리만 취하면 원하는 값 2를 얻을 수 있음

2. 부호가 없는 10진수에서 보수를 이용한 뺄셈 연산

* 예시 : $2 - 4 = 2(?)$

- 감수가 피감수보다 큰 값이므로 결과는 음의 값
- 부호를 표현할 수 없는 10진수이므로 결과 2는 음의 값으로 간주함
- 감수 7의 9의 보수를 구하고 그 결과로부터 10의 보수를 구하면, 4일 때,
9의 보수 : $(10 - 1) - 4 = 5$, 4일 때, 10의 보수 : $5 + 1 = 6$
- 구해진 10의 보수를 피감수와 덧셈을 수행 : $2 + 6 = 8$
- 얻어진 연산 결과의 10의 보수 8의 9의 보수 : $(10 - 1) - 8 = 1$, 8의 10의 보수 : $1 + 1 = 2$
- 얻어진 10의 보수 2는 실제적으로는 음수 -2라는 것을 고려하여야 함

3. 부호가 없는 2진수에서 보수를 이용한 뺄셈 연산

- * 예시 : 보수를 이용한 2진수 뺄셈 결과가 최상위 자리에서 자리 올림이 발생하는 경우 ($1011 - 0100 = 0111$)
- 감수 0100의 1의 보수를 구하고 그 결과에 0001을 더해서 2의 보수를 구하면
- 0100의 1의 보수 : $(10000 - 00001) - 0100 = 1111 - 0100 = 1011$
- 0100의 2의 보수 : $1011 + 0001 = 1100$
- 구해진 2의 보수를 피감수하고 덧셈하면 $1011 + 1100 = 10111$
- 자리올림으로 발생한 최상위 자리의 값을 버리고 나머지 값들을 취하면 원래의 뺄셈의 결과와 동일한 0111을 얻음

* 예시 : 보수를 이용한 2진수 뺄셈의 결과가 최상위 자리에서 자리올림이 발생하지 않는 경우
 [0111 - 1010 = 1100(?)]

- 0111보다 1010이 더 큰 수이므로 연산의 결과 값 1100은 맞지 않음
- 2의 보수를 구하면
 - 1010의 1의 보수 : $(10000 - 00001) - 1010 = 1111 - 1010 = 0101$
 - 1010의 2의 보수 : $0101 + 0001 = 0110$
- 구해진 2의 보수를 피감수하고 덧셈하면 : $0111 + 0110 = 1101$
- 얻어진 결과 1101의 2의 보수를 구하면
 - 1101의 1의 보수 : $(10000 - 00001) - 1101 = 1111 - 1101 = 0010$
 - 1101의 2의 보수 : $0010 + 0001 = 0011$
- 연산 결과는 음의 값이나 부호가 없는 2진수이므로 (-)0011의 의미를 가짐
- 10진수와 비교하면 : $(0111 - 1010 = -0011)_2 \Leftrightarrow (7 - 10 = -3)_{10}$

4. 부호가 없는 2진수의 뺄셈 연산

<2진수의 1의 보수는 각 자리마다 0→1 또는 1→0으로의 비트 반전으로 얻음>

- 1) 2진수의 뺄셈 연산 과정
 - ① 감수의 비트 반전을 통한 1의 보수를 구함
 - ② 1의 보수에 1을 더해서 2의 보수를 구함
 - ③ 피감수와 2의 보수를 더함
 - ④ 최상위 자리에서 자리올림이 발생하면 새로 생긴 최상위 자리를 버리고 나머지 자리의 값을 취함
 - ⑤ 최상위 자리에서 자리올림이 발생하지 않으면 덧셈 결과의 2의 보수를 구하고 음수의 값으로 간주함

* 2진법의 뺄셈과정에서 보수를 사용하면 : 덧셈 연산만으로 뺄셈 연산을 수행할 수 있음

【학습정리】

1. r 진법에서 정의 되는 보수에는 두 가지 종류가 있음을 알아야 한다.
2. 10진수 뺄셈과 2진수 뺄셈의 차이를 구분한다.