

## 3주차 2차시 논리식의 간략화

### 【학습목표】

1. 카노프 맵에서의 행과 열의 이웃관계를 설명할 수 있다.
2. 카노프 맵을 이용한 간략화 과정을 단계별로 정리할 수 있다.

### 학습내용1 : 카르노 맵

- 카르노 맵이라고도 함
- 조직적인 맵을 사용하여 부울 대수를 최적으로 간략화 할 수 있는 방법
- 카노프 맵은 부울 대수식을 간소화 하기 위한 가장 체계적이고 간단한 방법
- 최적의 간략화에 근거한 디지털 회로설계만이 게이트 수의 최소화할 수 있음
- 디지털 회로는 회로의 경제성, 소비전력의 효율성, 회로의 신뢰성, 제품의 소형화가 가능해짐

<변수 2개, 변수 3개, 변수 4개, 변수 5개, 변수 6개로 이루어진 입력변수에 적용할 수 있고 그 이상의 변수가 존재하는 경우에는 다른 방법을 사용>

#### 1) 변수가 2개인 카노프 맵

A \ B	0	1
	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
0	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
1	$A\overline{B}$	$AB$

#### 1. 변수가 2개인 카노프 맵

A \ B	0	1
	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
0	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
1	$A\overline{B}$	$AB$

1) 출력이 0인 경우에는 빈칸으로 표시하지 않고 1인 경우에만 표시하는 경우

A \ B	0	1
0	1	
1		1

B \ A	0	1
0	1	
1		1

## 2. 변수가 3개인 카노프 맵의 표현

A \ BC	00	01	11	10
0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
1	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$ABC$	$AB\overline{C}$

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\overline{C}$
1	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$ABC$	$A\overline{B}C$

- 카노프 맵을 가장 간단한 형태로 표현

1) 출력이 0인 경우에는 빈칸으로 표시하지 않고 1인 경우에만 표시

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1		1	1	

C \ AB	00	01	11	10
0	1			
1	1		1	1

## 3. 변수가 4개인 카노프 맵의 표현

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}C\overline{D}$
11	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$
10	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$A\overline{B}CD$	$AB\overline{C}\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$
10	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$A\overline{B}CD$	$AB\overline{C}\overline{D}$

- 카노프 맵을 가장 간단한 형태로 표현

1) 출력이 0인 경우에는 빈칸으로 표시하지 않고 1인 경우에만 표시

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11		1	1	
10				

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1		1	
11		1	1	
10				

#### 4. 부울 대수식을 이용한 카노프 맵의 작성

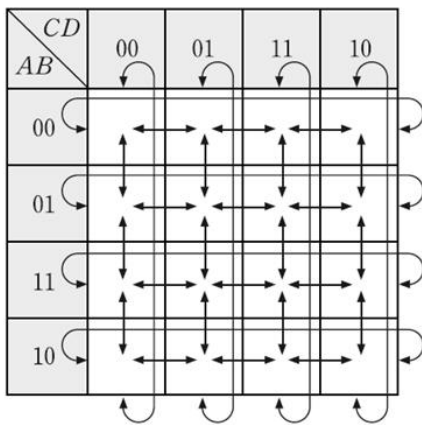
- 카노프 맵을 작성할 때, 진리표에 근거하여 작성
- 변수가 4개인 표준형의 부울 대수식에 대한 카노프 맵의 작성

$$\begin{aligned} X(A,B,C,D) &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D \\ &= m_0 + m_1 + m_7 + m_{13} + m_{15} \\ &= \sum m(0,1,7,13,15) \end{aligned}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01			1	
11		1	1	
10				

#### 5. 카노프 맵에서 행과 열의 이웃관계

- 이웃과의 그룹화는 부울 대수를 간략화하는 방법을 제시
- 카노프 맵은 평면 형태로 보여지나 이웃 관계는 상하좌우 모두를 포함하므로 실제로는 원통 형태나 구(球) 형태



## 학습내용2 : 카노프 맵의 간략화

### 1. 카노프 맵을 이용한 간략화 과정 단계별 정리

- ① 주어진 부울식이나 진리표에 근거하여 카노프 맵을 작성
- ② 그룹화를 수행
  - 카노프 맵에서 1로 표시된 이웃들을 1, 2, 4, 8, 16 개씩 그룹화
  - 가능하면 큰 개수로 그룹화하는 것이 간략화의 효과가 큼
  - 각각 다른 그룹에 여러 번 중복하여 그룹화 할 수 있음
  - 그룹화할 이웃이 없는 경우 단독으로 그룹화되고 이것은 간략화 되지는 않음
- ③ 각 그룹을 간략화
- ④ 각 간략화된 부울식들 끼리 OR 연산 수행

### 2. 2변수 카르노 맵 표현 방법

$A$	$B$	$\bar{B}$	$B$
	$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
$A$	$\bar{A}$	$A\bar{B}$	$AB$
	$A$	$m_0$	$m_1$
$A$	$\bar{A}$	$m_2$	$m_3$
	$A$		

$A$	$B$	0	1
	0	0	1
$A$	1	2	3

$A$	$B$	$\bar{A}$	$A$
	$\bar{B}$	$m_0$	$m_2$
$A$	$B$	$m_1$	$m_3$

### 3. 일반항과 무관항 표현

\* 무관항 (don't care) : 입력이 결과에 영향을 미치지 않는 민텀항

\* X로 표시하거나 d로 표시함

$A$	$B$	0	1
	0	1	
$A$	1		1

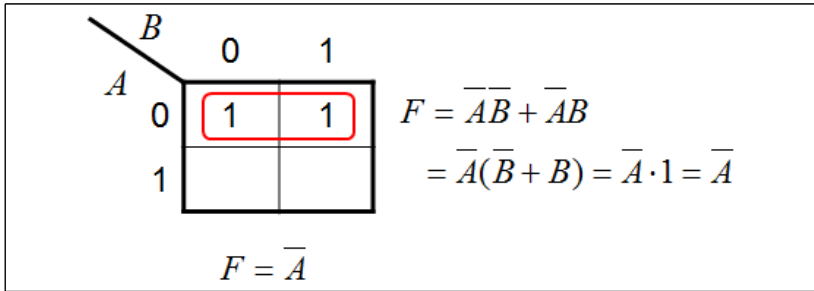
  

$A$	$B$	0	1
	0	1	X
$A$	1		1

$$F(A, B) = \sum m(0, 3) \qquad F(A, B) = \sum m(0, 3) + \sum d(1)$$

#### 4. 카르노맵을 이용한 간략화 방법

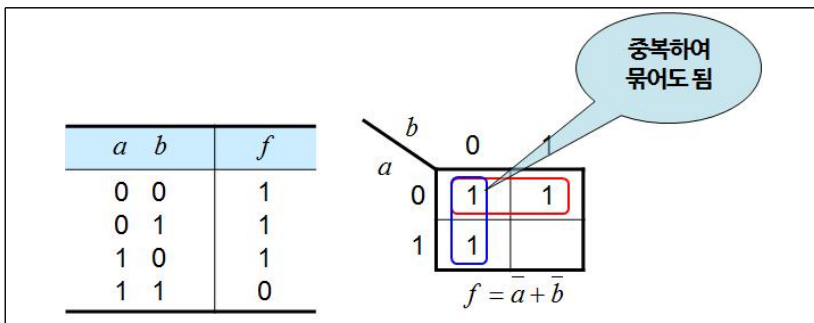
- ① 1, 2, 4, 8, 16개로 그룹을 지어 묶음
- ② 바로 이웃해 있는 항들끼리 묶음
- ③ 반드시 직사각형이나, 정사각형의 형태로 묶어야만 함



##### 1) 간략화 예

예 :

$$\begin{aligned}
 f &= \sum m(0,1,2) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}b + a\overline{b} \\
 &= \overline{a}(\overline{b} + b) + \overline{b}(\overline{a} + a) = \overline{a} \cdot 1 + \overline{b} \cdot 1 \\
 &= \overline{a} + \overline{b}
 \end{aligned}$$



### 5. 3변수 카르노 맵 표현 방법

$\backslash AB$	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$AB$
$\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$A\overline{B}\overline{C}$	$AB\overline{C}$
$C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}C$	$ABC$

$\backslash BC$	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	$B\overline{C}$	$BC$
$\overline{A}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
$A$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$AB\overline{C}$	$ABC$

$\backslash AB$	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

$\backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

$\backslash C$	$\overline{C}$	$C$
$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
$\overline{A}B$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
$AB$	$AB\overline{C}$	$ABC$
$A\overline{B}$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$

$\backslash C$	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

#### 1) 간략화 예

$\backslash BC$	00	01	11	10
0	1	1		
1			1	1

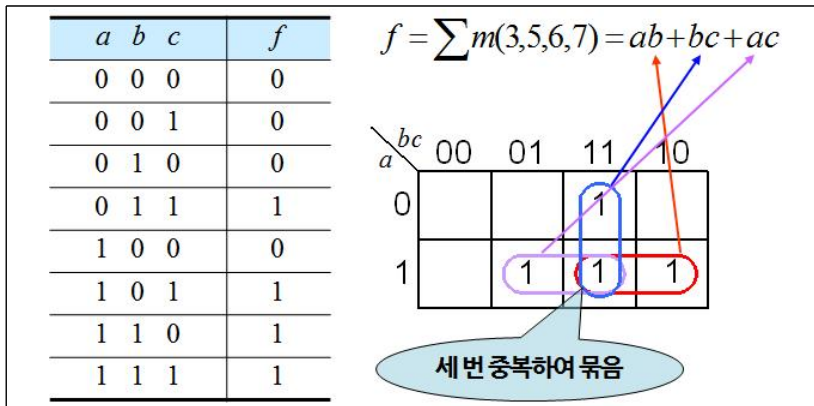
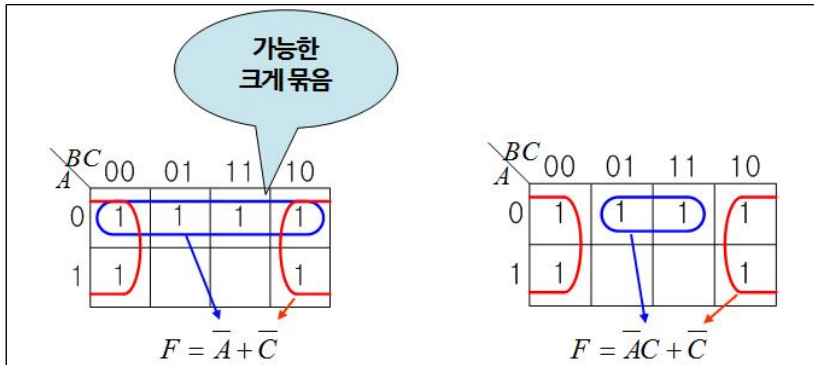
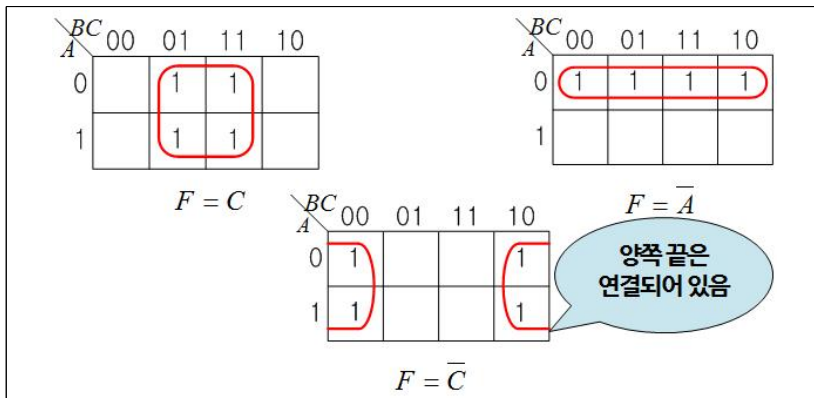
$F = \overline{A}\overline{B} + AB$

$\backslash BC$	00	01	11	10
0	1			1
1				

$F = \overline{A}C$

양쪽 끝은 연결되어 있음



## 6. 4변수 카르노 맵 표현 방법

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}CD$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\overline{A}BCD$
11	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABC\overline{D}$	$ABCD$
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}C\overline{D}$	$A\overline{B}CD$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

상하좌우는 연결되어 있음

### 1) 여러 가지 4변수 카르노 맵의 예제

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00				
01			1	1
11				
10				

$F = \overline{A}BC$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00				
01				
11	1			1
10				

$F = AB\overline{D}$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1			
01				
11				
10	1			

$F = \overline{B}C\overline{D}$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1			
01	1		1	1
11	1		1	1
10	1			

$F = \overline{C}\overline{D} + BC$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00				
01	1			1
11	1			1
10				

$F = B\overline{D}$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1			1
01			1	1
11			1	1
10	1			1

$F = BD + \overline{B}\overline{D}$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1	1		
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1		

$F = \overline{C}$

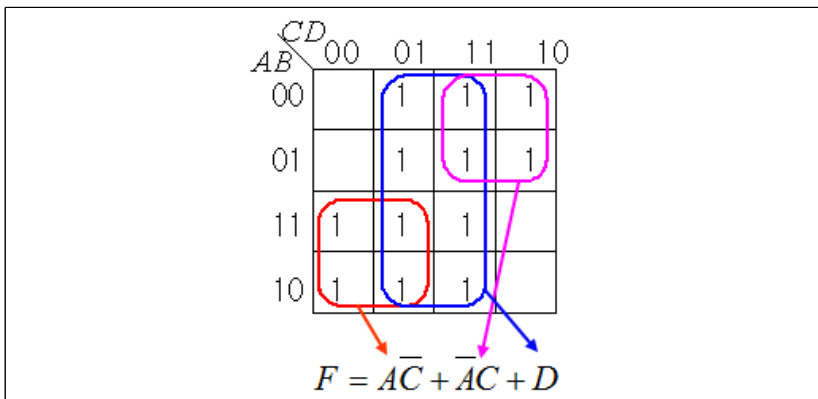
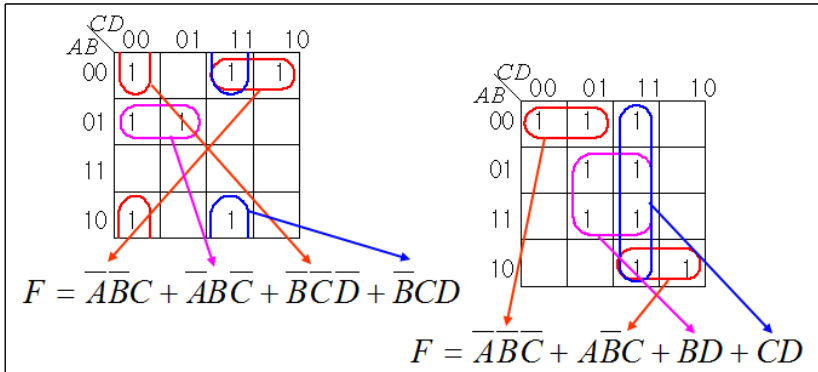
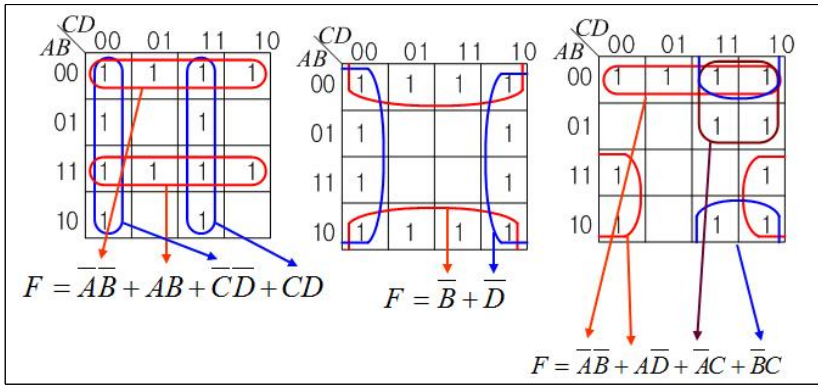
$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$F = \overline{B}$

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1		

$F = \overline{A} + \overline{C}$



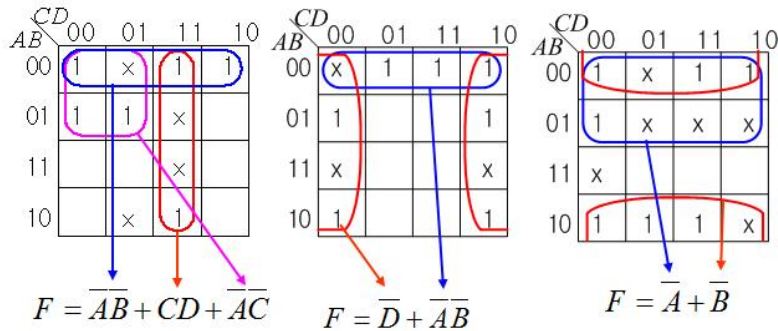


7. 무관항이 있을 경우 카르노 맵을 이용하여 간략화

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 4, 5, 11) + \sum d(1, 7, 9, 15)$$

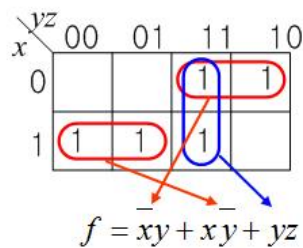
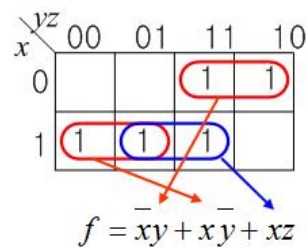
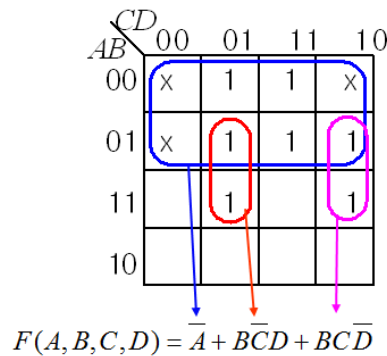
$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 2, 3, 4, 6, 8, 10) + \sum d(0, 12, 14)$$

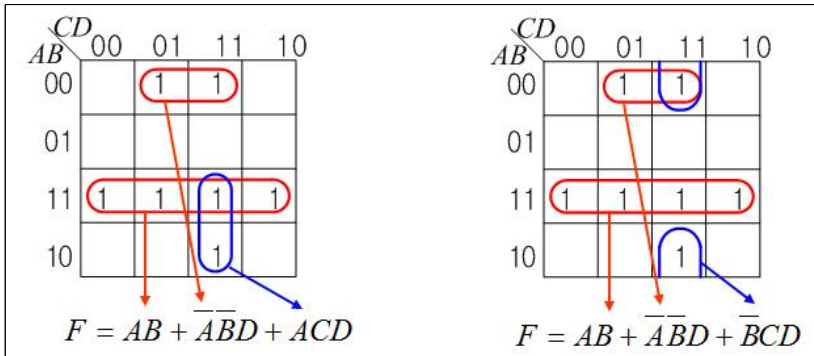
$$F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 3, 4, 8, 9, 11) + \sum d(1, 5, 6, 7, 10, 12)$$



8. 진리표로부터 카르노 맵을 작성하고 간략화

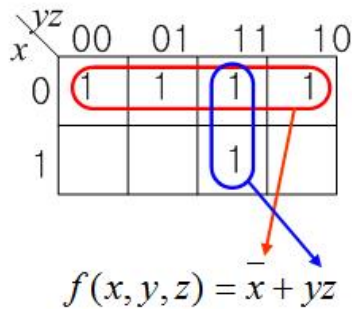
A	B	C	D	F
0	0	0	0	x
0	0	0	1	1
0	0	1	0	x
0	0	1	1	1
0	1	0	0	x
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



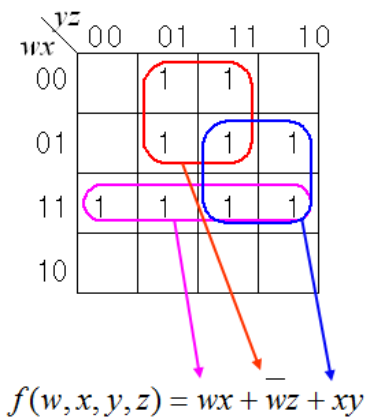


1) 논리식에서 생략된 부분을 찾아서 Minterm으로 변경

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= xyz + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} \\
 &= xyz + \bar{x}y(z + \bar{z}) + \bar{x}\bar{y}(z + \bar{z}) \\
 &= xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\
 &= \sum m(0, 1, 2, 3, 7)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 f(w, x, y, z) &= wx + wxy + \bar{w}yz + \bar{w}y\bar{z} + wxy\bar{z} \\
 &= wx(\bar{y} + y)(\bar{z} + z) + wxy(\bar{z} + z) + \bar{w}(\bar{x} + x)yz + \bar{w}(\bar{x} + x)y\bar{z} + wxy\bar{z} \\
 &= \sum m(1, 3, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15)
 \end{aligned}$$



9. 논리식을 카르노 맵으로 작성하고 간략화

$$F(A,B,C,D) = A + B + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$A$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$B$

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		
01				
11				
10				

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

최소항으로 바꾸지 않고 간략화의  
반대방법으로 카르노 맵 작성

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$F = A + B + \overline{C}\overline{D}$

$$F(A,B,C,D) = AB + \overline{B}C + ACD + AB\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10				

$AB$

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01				
11				
10			1	1

$\overline{B}C$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11			1	
10			1	

$ACD$

$$F(A,B,C,D) = AB + \overline{B}C + ACD + AB\overline{D} + A\overline{C}\overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11	1			1
10				

$AB\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				1
10				1

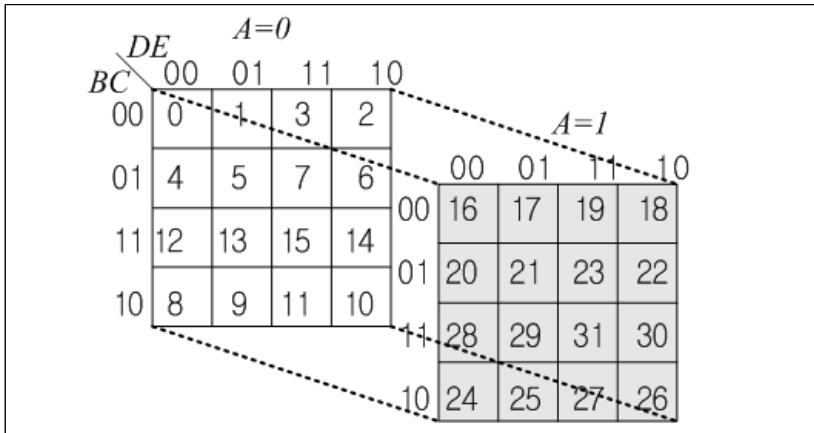
$A\overline{C}\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	1
01				
11	1	1	1	1
10			1	1

$F = AB + \overline{B}C$

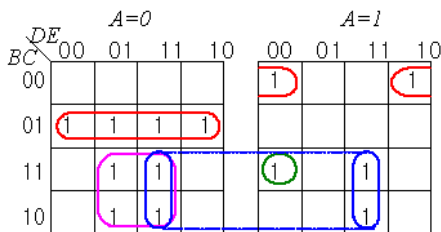
## 10. 5변수인 경우

### 1) 5변수 카르노 맵



### 2) 5변수 논리함수를 카르노 맵을 이용하여 간략화

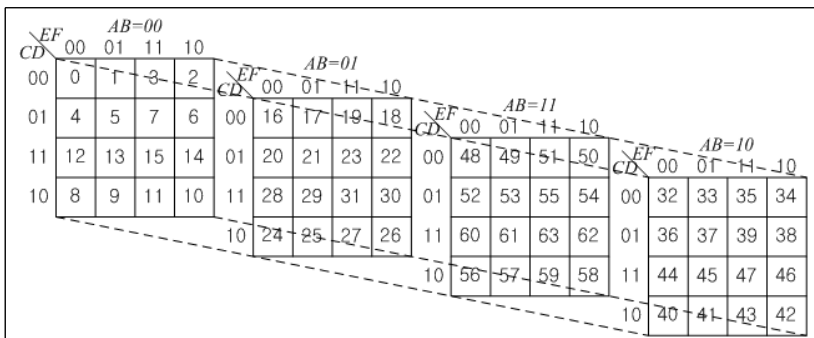
$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 27, 28, 31)$$



$$F(A, B, C, D, E) = \overline{A}BC + \overline{A}BE + \overline{A}BCE + ABCDE + BDE$$

## 11. 6변수인 경우

### 1) 6변수 카르노 맵



2) 6변수 논리함수를 카르노 맵을 이용하여 간략화

$$F(A, B, C, D, E, F) = \sum m(1, 3, 6, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 24, 25, 29, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 46, 49, 51, 53, 55, 56, 61, 63)$$

		AB=00				AB=01				AB=11				AB=10			
EF	CD	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
	00	1	1			1	1			1	1			1	1	1	1
	01				1					1	1						1
	11		1		1		1			1	1						1
	10	1	1			1	1			1	1			1	1		

$$F = ABDF + C\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{C}\overline{D}\overline{F}$$

$$F(A, B, C, D, E, F) = \sum m(1, 3, 6, 8, 9, 13, 14, 17, 19, 24, 25, 29, 32, 33, 34, 35, 38, 40, 46, 49, 51, 53, 55, 56, 61, 63)$$

		AB=00				AB=01				AB=11				AB=10			
EF	CD	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10	00	01	11	10
	00		x	x			x	x			x	x		1	x	x	1
	01				1						x	x					1
	11		1		1		1				x	x					1
	10	x	1			x	1			x				x			

$$F = \overline{A}\overline{C}\overline{E}\overline{F} + \overline{B}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

$$F = ABDF + C\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{C}\overline{D}\overline{F} + \overline{A}\overline{C}\overline{E}\overline{F} + \overline{B}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

## 학습내용3 : 카노프 맵의 응용

### 1. 무관 조건

- ① 출력에 관여하지 않는 입력이 존재할 수 있음
- ② 출력에 관여하지 않는 입력변수를 무관 조건(Don't Care)이라 함
- ③ 무관 조건은 이웃 영역을 그룹화할 때 가장 간단한 표현을 얻기 위해 임의로 채워질 수 있음
- ④ 간략화 과정에서 그룹화 할 수도 있고 그룹화 하지 않을 수도 있음

#### • 무관조건을 활용해서 그룹화하는 방법

#### • 무관조건은 카노프 맵에서 x로 표기

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1			
11	1			
10				

(a) 무관 조건을 사용하지 않은 경우

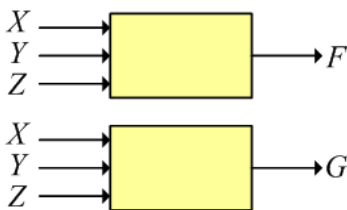
CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1	X		
11	1			
10	X			

X : 무관 조건

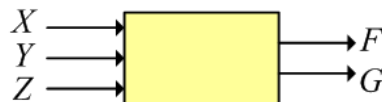
(b) 무관 조건을 사용한 경우

### 2. 2개의 논리함수를 하나의 시스템으로 통합

- 두 개의 시스템으로 분리되어 있는 것을 하나의 시스템으로 통합하는 것이 가능하고, 공유 가능한 게이트가 있을 때 공유하여 시스템을 구성하면 경제적으로 좋은 시스템이 될 수 있을 것임



2 개로 분리된 시스템

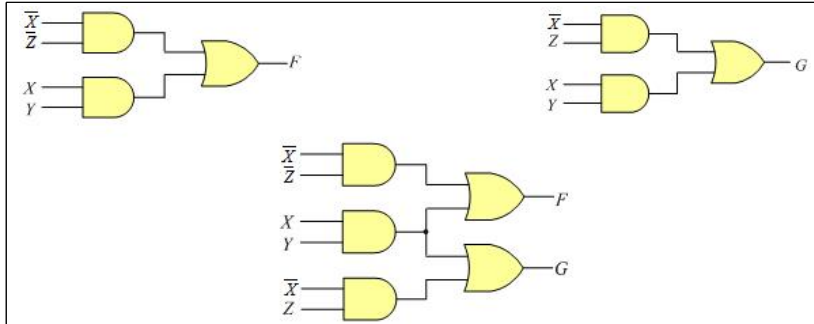


하나로 통합된 시스템

예 1 :

$$F(X,Y,Z) = \sum m(0, 2, 6, 7) \quad G(X,Y,Z) = \sum m(1, 3, 6, 7)$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0	1			1
1			1	1



예 2 :

$$F(X,Y,Z) = \sum m(0,1, 6) \quad G(X,Y,Z) = \sum m(2, 3, 6)$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0	1	1		
1				1

$$F = \bar{X}\bar{Y} + XY\bar{Z}$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0			1	1
1				1

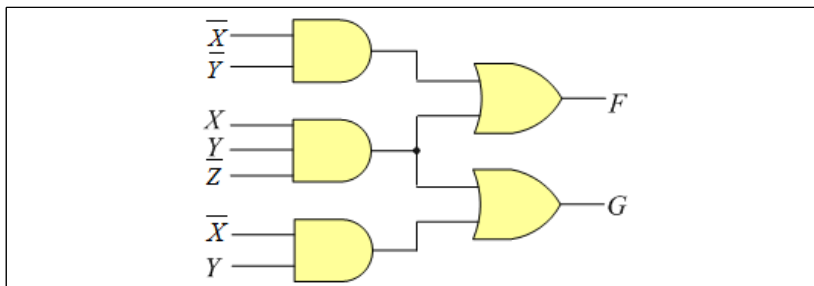
$$G = \bar{X}Y + Y\bar{Z}$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0	1	1		
1				1

$$F = \bar{X}\bar{Y} + XY\bar{Z}$$

$\backslash YZ$	00	01	11	10
$X$				
0			1	1
1				1

$$G = \bar{X}Y + XY\bar{Z}$$





예 3 :

$$F(W, X, Y, Z) = \sum m(4, 5, 6, 8, 12, 13)$$

$$G(W, X, Y, Z) = \sum m(0, 2, 5, 6, 7, 13, 14, 15)$$

YZ \ WX	00	01	11	10
00				
01	1	1		1
11	1	1		
10	1			

$F$

YZ \ WX	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11		1	1	1
10				

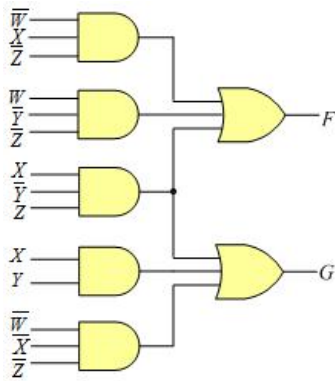
$G$

YZ \ WX	00	01	11	10
00				
01	1	1		1
11	1	1		
10	1			

$$F = \overline{W}X\overline{Z} + W\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z$$

YZ \ WX	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11		1	1	1
10				

$$G = \overline{W}X\overline{Z} + XY + X\overline{Y}Z$$



$$F = \overline{W}X\overline{Z} + W\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z$$

$$G = \overline{W}X\overline{Z} + XY + X\overline{Y}Z$$

## 2. 3개의 논리함수를 하나의 시스템으로 통합

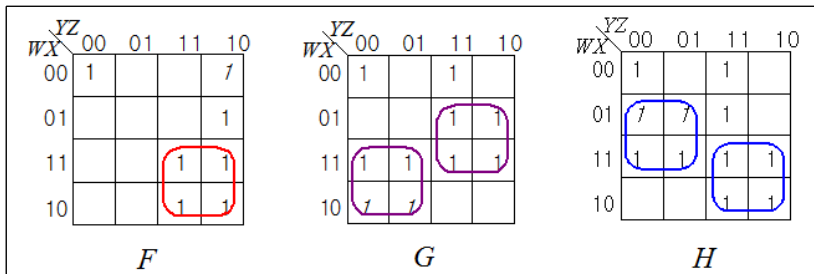
예 :

$$F(W, X, Y, Z) = \sum m(0, 2, 6, 10, 11, 14, 15)$$

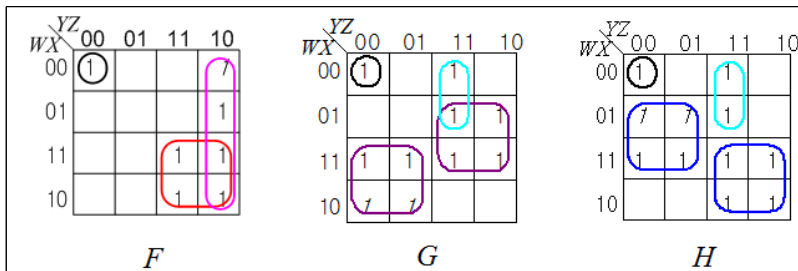
$$G(W, X, Y, Z) = \sum m(0, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15)$$

$$H(W, X, Y, Z) = \sum m(0, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

- 세 함수끼리 서로 독립된 부분과 두 개의 함수에서 같은 영역 중 크게 묶을 수 있는 영역을 먼저 찾음



- 나머지 중에서 공통된 부분과 독립된 부분을 찾음



$$F(W, X, Y, Z) = WY + YZ + \overline{W} \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}$$

$$G(W, X, Y, Z) = W \overline{Y} + XY + \overline{W} \overline{X} Y + \overline{W} \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}$$

$$H(W, X, Y, Z) = X \overline{Y} + WY + \overline{W} \overline{X} Y + \overline{W} \overline{X} \overline{Y} \overline{Z}$$

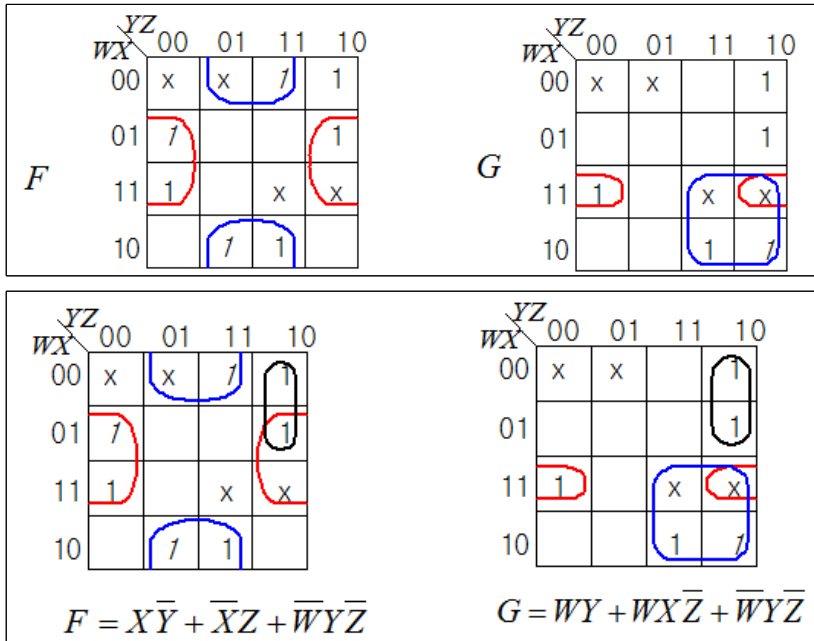
### 3. 무관항을 갖는 경우

예 :

$$F(W, X, Y, Z) = \sum m(2, 3, 4, 6, 9, 11, 12) + \sum d(0, 1, 14, 15)$$

$$G(W, X, Y, Z) = \sum m(2, 6, 10, 11, 12) + \sum d(0, 1, 14, 15)$$

- 서로 독립된 영역을 찾은 후, 선택되지 않는 부분을 찾아서 나머지를 묶음



### 【학습정리】

1. 카르노 맵을 이용하여 논리식을 간략화 할 수 있다.
2. 카르노 맵을 이용하여 간략화 할 경우에, 무관 조건등을 반영하여야 한다.