

## روش تولید کدهای همینگ

یک روش تولید کدهای همینگ به این شکل است که بیت‌های چک کننده در لابلای داده قرار می‌گیرند. در این روش اگر داده  $k$  بیت باشد کلمه کد تولید شده دارای  $n$  بیت است که  $n=k+m$  است،  $m$  تعداد بیت‌های چک کننده است و برابر است با کوچک‌ترین عددی که در نا مساوی  $2^m < n$  صدق کند. اگر بیت‌های کلمه کد تولید شده را بترتیب از  $b_1$  تا  $b_n$  بنامیم، روش تولید کلمه کد به صورت زیر است:

۱. بیت‌ها را به ترتیب از ۱ تا  $n$  شماره گذاری کنید (1, 2, 3, ...).
۲. شماره بیت‌ها را به صورت باینری در  $m$  بیت بنویسید (001, 010, 011, ...).
۳. بیت‌هایی که شماره آن‌ها توانی از ۲ است چک بیت هستند. (بیت‌هایی که شماره آن‌ها به باینری فقط یک بیت یک دارد).
۴. بقیه بیت‌ها با شماره به غیر از توان ۲ بترتیب بیت‌های داده‌ها هستند (بیت‌هایی که شماره آن‌ها به باینری ۲ یا بیشتر از ۲ بیت یک دارد).
۵. هر بیت داده با توجه به شماره آن بیت به باینری حداقل با ۲ یا بیشتر از ۲ چک بیت منحصر بفرد چک می‌شوند.

به عنوان نمونه:

- ا. چک بیت  $C_1$  بیت‌های ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ... را چک می‌کند.
- ب. چک بیت  $C_2$  بیت‌های ۳، ۶-۷، ۱۰-۱۱، ۱۴-۱۵، ... را چک می‌کند.
- ج. چک بیت  $C_4$  بیت‌های ۵-۷، ۱۲-۱۵، ۲۰-۲۳، ... را چک می‌کند.
- د. چک بیت  $C_8$  بیت‌های ۹-۱۵، ۲۴-۳۱، ... را چک می‌کند.

برای شرح بیشتر به شکل ۱ توجه کنید.

گیرنده با دریافت کلمه کد  $\underline{r}$  با استفاده از روابط نشان داده شده در شکل ۲ قسمت ب، نشانه تشخیص و تصحیح کلمه کد دریافتی را تولید می‌کند. اگر عدد  $s = (s_8 s_4 s_2 s_1)_2$  صفر بود آنگاه هیچ خطایی تشخیص داده نشده است. در غیر اینصورت کلمه کد دریافتی حتما دارای خطا می‌باشد. اگر  $s \leq n$  باشد یک خطا اتفاق افتاده و  $s$  شماره بیت دارای خطا است که  $\underline{e} = (e_n e_{n-1} \dots e_3 e_2 e_1) = \text{decode}(s)$  و  $\underline{b} = \underline{r} + \underline{e}$  است. اگر  $s > n$  باشد، آنگاه بیش از یک بیت خطا وجود دارد و کلمه کد دریافتی قابل تصحیح نیست.

موقعیت بیت		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
بیت‌های کد شده داده		$c_1$	$c_2$	$d_1$	$c_4$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$c_8$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$	$d_{11}$	$c_{16}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	
پوشش هر چک بیت	$c_1$	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		
	$c_2$		1	1			1	1			1	1			1	1			1	1		...
	$c_4$				1	1	1	1					1	1	1	1					1	
	$c_8$								1	1	1	1	1	1	1	1						
	$c_{16}$																1	1	1	1	1	

الف) محل قرارگیری چک بیت‌ها و پوشش هر چک بیت

$$b_i = \begin{cases} c_i, & \text{if } i = 2^j \\ d_{i - \lfloor \log_2 i \rfloor + 1}, & \text{if } i \neq 2^j \end{cases} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

ب) محل قرارگیری چک بیت‌ها در کلمه کد

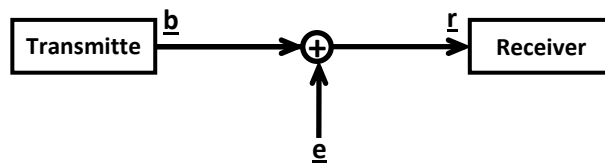
$$c_j = \left( \sum_{\substack{1 \leq i < \binom{n}{2} \\ \text{and} \\ j + 2i - (i \bmod j) \leq n}} b_{j+2i-(i \bmod j)} \right) \bmod 2, \quad j = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^m$$

ج) روش تولید چک بیت‌ها

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_1 = b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + b_9 + b_{11} + b_{13} + b_{15} + \dots \\ 0 &= c_2 + c_2 = b_2 + b_3 + b_6 + b_7 + b_{10} + b_{11} + b_{14} + b_{15} + \dots \\ 0 &= c_4 + c_4 = b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + \dots \\ 0 &= c_8 + c_8 = b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} + b_{15} + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

د) چک بیت‌ها بر اساس رابطه توازن زوج تولید می‌شوند.

شکل ۱. روش تولید کد همینگ.



الف) دریافت کلمه کد  $\underline{r} = \underline{b} + \underline{e}$  توسط گیرنده

$$\begin{aligned} s_1 &= r_1 + r_3 + r_5 + r_7 + r_9 + r_{11} + r_{13} + r_{15} + \dots \\ s_2 &= r_2 + r_3 + r_6 + r_7 + r_{10} + r_{11} + r_{14} + r_{15} + \dots \\ s_4 &= r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15} + \dots \\ s_8 &= r_8 + r_9 + r_{10} + r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{14} + r_{15} + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

ب) روابط تولید نشانه تشخیص و تصحیح خطا در گیرنده.

$$s = (\dots s_8 s_4 s_2 s_1)_2 = \begin{cases} = 0, & \text{no error detected,} \\ \leq n, & \text{one bit error is considered and } s \text{ is the position of errored bit,} \\ > n, & \text{more than one bit errors are detected and the code is uncorrectable.} \end{cases}$$

ج) روش تشخیص خطا.

if  $s \leq n$  then one bit error is considered and  $s$  is the position of errored bit, that is  $\underline{e} = (e_n e_{n-1} \dots e_3 e_2 e_1) = \text{decode}(s)$ , and  $\underline{b} = \underline{r} + \underline{e}$

د) روش تصحیح خطا.

شکل ۲. روش تشخیص و تصحیح خطا با استفاده از کد همینگ.