

(۱) ثابت کنید در هر بازه I یک عدد اعشاری به شکل $a_0.a_1a_2\cdots a_m\circ\circ\circ\circ$ وجود دارد. (یعنی

یک عدد اعشاری متناهی که ارقام بعد از ممیز از رقم m ام به بعد همگی صفر هستند.) (۱۰ نمره)

(۲) الف) مکان هندسی نقاط z را روی صفحه مختلط طوری تعیین کنید که $\operatorname{Re} z^2 < 0$. (یعنی قسمت حقیقی z^2 منفی باشد.)

ب) ریشه‌های سوم عدد مختلط $5i$ را به صورت $a + bi$ تعیین کنید.

(۱۵ نمره)

(۳) فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد؛ در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ بحث کنید. در

مورد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (۱۵ نمره)

(۴) تابع پیوسته $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $f(0) = f(1)$ ، ثابت کنید یک نقطه

$c \in [0, 1]$ وجود دارد که $f(c) = f(c + \frac{1}{4})$. (۲۰ نمره)

(۵) فرض کنید دنباله $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ اعداد صحیح و مثبتی باشند که در آنها رقم صفر ظاهر

نمی‌شود؛ پس $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_9 = 9, n_{10} = 11, \dots, n_{18} = 19, n_{19} = 21, \dots$ و به

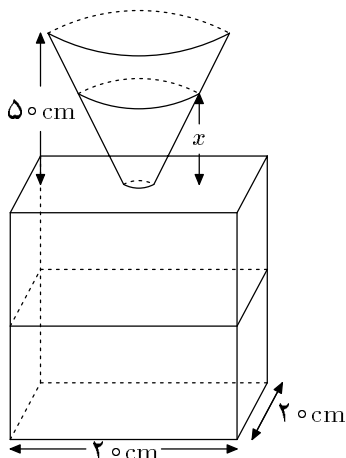
همین ترتیب.

به کمک مقایسه با سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^{n+1}}{10^n}$ ثابت کنید که سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ همگرا است و مقدار آن از ۹۰

کمتر است.

(۲۰ نمره)

(۶) شکل مقابل را در نظر بگیرید.



فرض کنید در لحظه شروع، مخزن مخروطی شکل پراز آب است و مخزن مکعب مستطیل شکل کاملاً خالی است. آب از مخزن مخروطی شکل خارج شده و به مخزن مکعب مستطیل شکل وارد می‌شود، به طوری که وقتی ارتفاع آب در مخزن مخروطی x است، ارتفاع آن با نرخ $50 - x$ در دقیقه کم می‌شود. وقتی آب در مخزن مخروطی به ارتفاع ۱۰ سانتیمتر می‌رسد، ارتفاع آب در مخزن مکعب مستطیل شکل با چه نرخ اضافه می‌شود؟ (۲۰ نمره)