بسمه تعالی

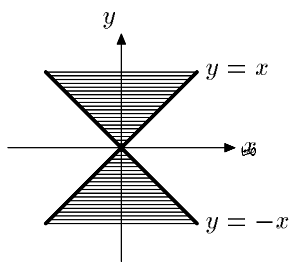
راهنمای حل سؤالات امتحان میان ترم اول ـ ریاضی عمومی ۱ (گروههای دکتر تابش، محمودیان، نجفی)

---

۱) عدد α را درون بازهٔ I درنظر می‌گیریم. (نقطهٔ داخلی بازه) آنگاه α به‌صورت $\alpha = c_۰/c_۱c_۲c_۳\cdots$ قابل نمایش است. اگر α به‌صورت عدد خواسته‌شده باشد که مسأله حل است و در غیراین‌صورت عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $(\alpha - ۱۰^{-n}) \in I$ (زیرا α نقطهٔ داخلی است). اکنون عدد $\beta = c_۰/c_۱\cdots c_n ۰۰\cdots$ را درنظر می‌گیریم اولاً این عدد از فرم موردنظر است و ثانیاً $\alpha - \beta < ۱۰^{-n}$ پس $\beta \in I$.

۲)

الف) اگر $z = x + iy$ فرض کنیم، خواهیم داشت: $\mathrm{Re}(z^۲) = x^۲ - y^۲$ (۳ نمره) مکان هندسی نقاط صفحه که در رابطهٔ $x^۲ - y^۲ < ۰$ صدق می‌کنند ناحیهٔ هاشور زده‌شده در شکل روبرو است. (۵ نمره)



ب) $۵i = ۵(\cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲})$ پس ریشه‌ها عبارت‌اند از: $\sqrt[۳]{۵}\left(\cos\frac{\pi}{۶} + i\sin\frac{\pi}{۶}\right)$ و $\sqrt[۳]{۵}\left(\cos(\frac{\pi}{۶} + \frac{۲\pi}{۳}) + i\sin(\frac{\pi}{۶} + \frac{۲\pi}{۳})\right)$ و $\sqrt[۳]{۵}\left(\cos(\frac{\pi}{۶} + \frac{۴\pi}{۳}) + i\sin(\frac{\pi}{۶} + \frac{۴\pi}{۳})\right)$ (۵ نمره)
بنابراین $\sqrt[۳]{۵}(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + i\frac{۱}{۲})$ و $\sqrt[۳]{۵}(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - i\frac{۱}{۲})$ و $-\sqrt[۳]{۵}i$. (۲ نمره)

۳) با تست نسبت همگرایی سری روشن می‌شود. چون سری همگراست پس جملهٔ عمومی آن به صفر میل می‌کند یعنی؛ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰$

۴) تابع $\Phi : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $\Phi(x) = f(x) - f(x + \frac{۱}{۳})$ تعریف می‌کنیم. (۵ نمره)
داریم:

$$\Phi(۰) = f(۰) - f(\tfrac{۱}{۳})$$
$$\Phi(\tfrac{۱}{۳}) = f(\tfrac{۱}{۳}) - f(\tfrac{۲}{۳})$$
$$\Phi(\tfrac{۲}{۳}) = f(\tfrac{۲}{۳}) - f(۱)$$

با جمع جملات بالا خواهیم داشت:

$$\Phi(۰) + \Phi(\tfrac{۱}{۳}) + \Phi(\tfrac{۲}{۳}) = ۰$$ (۵ نمره)

اگر یکی از اعداد $\Phi(۰)$، $\Phi(\frac{۱}{۳})$ و $\Phi(\frac{۲}{۳})$ صفر باشد، آنگاه مسأله حل است و در غیراین‌صورت باید لااقل یکی از آنها منفی و یکی مثبت باشد، مثلاً اگر $\Phi(\frac{۱}{۳})$ منفی و $\Phi(\frac{۲}{۳})$ مثبت باشد آنگاه $\frac{۱}{۳} < c < \frac{۲}{۳}$ موجود است که $\Phi(c) = ۰$ که جواب مسأله است. در سایر موارد نیز در هر حال c موجود خواهد بود که $\Phi(c) = ۰$ یعنی $f(c) = f(c + \frac{۱}{۳})$. (۱۰ نمره)

۵) برای جملات که n_k یک رقمی است:

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{9}<\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}}_{9}=9(1)$$

برای جملات که n_k دو رقمی است:

$$\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}+\cdots+\tfrac{1}{99}<\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}}_{9^2=81}=9^2(\tfrac{1}{10})$$

برای جملات که n_k سه رقمی است:

$$\tfrac{1}{111}+\tfrac{1}{112}+\cdots+\tfrac{1}{999}<\underbrace{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{100}}_{9^3=729}=9^3(\tfrac{1}{100})$$

بنابراین:

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n_k}<\sum_{i=0}^{m}9^{i+1}\frac{1}{10^i}<9\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right)=90$$

پس $\{\beta_m\}$ دنباله‌ای صعودی و کران‌دار است و درنتیجه سری موردنظر همگرا و ۹۰ یک کران بالای آن است.

٦) در هر لحظهٔ t، حجم آب خارج شده از مخروط با حجم آب در مکعب مستطیل برابر است. حجم آب خارج شده از مخروط در لحظهٔ دل‌خواه t برابراست با: $V=\frac{\pi}{3}(15)^2.50-\frac{\pi}{3}r^2x$ (۵ نمره)

اما از تشابه مثلث داریم: $\frac{r}{15}=\frac{x}{50}\implies r=\frac{3}{10}x$

بنابراین $V=\frac{\pi}{3}(15)^2.50-\frac{\pi}{3}\frac{9}{100}x^3$ (۵ نمره)

پس $\frac{dV}{dt}=-\frac{9\pi}{100}x^2\frac{dx}{dt}$

(توجه کنید که $\frac{dV}{dt}$ منفی‌است.)

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=-\frac{9\pi}{100}x^2(-(50-x))\\&=+\frac{9\pi}{100}x^2(50-x)\end{aligned}$$ (۵ نمره)

به‌ازای $x=10$ خواهیم داشت:

$$\frac{dV}{dt}=360\pi\quad \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}.$$

از طرفی $V=400h$، پس

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{400}\frac{dV}{dt}=\frac{9}{10}\pi\quad \mathrm{cm}/\mathrm{min}.$$ (۵ نمره)