کتابچه نمونه سوالات چیست:

سایت ما **افتخار** دارد برای اولین بار در ایران توانسته است کتابچه نمونه سوالات تمام دروس پیام نور که هر یک حاوی تمامی آزمون های برگزار شده پیام نور (تمامی نیمسالهای موجود حتی الامکان با جواب) را در یک فایل به نام کتابچه جمع آوری کند و هر ترم نیز آن را آپدیت نماید.

مراحل ساخت یک کتابچه نمونه سوال

(برای آشنایی با زحمت بسیار زیاد تولید آن در هر ترم) :

دسته بندی فایلها – سرچ بر اساس کد درس – چسباندن سوال و جواب – پیدا کردن یک درس در نیمسالهای مختلف و چسباندن به کتابچه همان درس – چسباندن نیمسالهای مختلف یک درس به یکدیگر – وارد کردن اطلاعات تک تک نیمسالها در سایت – آپلود کتابچه و خیلی موارد دیگر..

همچنین با توجه به تغییرات کدهای درسی دانشگاه استثنائات زیادی در ساخت کتابچه بوجود می آید که کار ساخت کتابچه را بسیار پیچیده می کند .

فهرست مطالب

فصل ۱

مسائل

بخش ۱-۳- یکاها

۱. چگالی آب تقریباً $1\,{gr}/{cm^3}$ است. این چگالی بر حسب یکاهای اصلی SI چقدر است؟

حل:

$$1Kg = 1000gr \quad , \quad 1m^3 = 10^6 cm^3$$

$$1\frac{gr}{cm^3} = 1\frac{gr}{cm^3} \times \frac{1Kg}{1000gr} \times \frac{10^6 cm^3}{1m^3} = 10^3 \frac{Kg}{m^3} = 1000\frac{Kg}{m^3}$$

۲. یک سال خورشیدی چند ثانیه است؟ (هر سال را برابر با ۳۶۵/۲۵ روز بگیرید.)

حل: سال را با y و روز را با d مشخص می کنیم:

$$1y = 365/25\mathrm{d} \quad , \quad 1d = 24\mathrm{h} \quad , \quad 1h = 3600s$$

$$1y = 1y \times \frac{365/25d}{1y} \times \frac{24h}{1d} \times \frac{3600s}{1h} = 31557600s$$

۳. الف) مسافتی که نور آن را در یک سال می پیماید، سال نوری نامیده می شود. با استفاده از سرعت نور که برابر با $3/00 \times 10^8\,{m}/{s}$ است، سال نوری را بر حسب کیلومتر بیان

کنید. ب) متوسط فاصله میان زمین و خورشید که در حدود $۱/۵\times ۱۰^{۱۱}\,m$ است، یکای نجومی (AU) نامیده می شود. سرعت نور را بر حسب AU/h حساب کنید.

حل: الف)

$$۱Km = ۱۰۰۰\text{m} \quad , \quad ۱y = ۳۶۵\text{d} \quad , \quad ۱d = ۲۴\text{h} \quad , \quad ۱h = ۳۶۰۰s$$

$$۱y = ۱y \times \frac{۳۶۵d}{۱y} \times \frac{۲۴h}{۱d} \times \frac{۳۶۰۰s}{۱h} = ۳۱۵۳۶۰۰۰\,s$$

$$۳\times ۱۰^{۸}\,\frac{m}{s} = ۳\times ۱۰^{۸}\,\frac{m}{s} \times \frac{۱Km}{۱۰۰۰m} = ۳\times ۱۰^{۵}\,\frac{Km}{s}$$

زمان × سرعت = مسافت

$$\text{مسافت} = ۳\times ۱۰^{۵}\,\frac{Km}{s} \times ۳۱۵۳۶۰۰۰\,s = ۹۴/۶۰۸\times ۱۰^{۱۱}\,Km$$

ب)

$$۱AU = ۱/۵\times ۱۰^{۱۱}\,m \quad , \quad ۱\text{h} = ۳۶۰۰s$$

$$۳\times ۱۰^{۸}\,\frac{m}{s} = ۳\times ۱۰^{۸}\,\frac{m}{s} \times \frac{۱AU}{۱/۵\times ۱۰^{۱۱}m} \times \frac{۳۶۰۰s}{۱h} = ۷/۲\,\frac{AU}{h}$$

۴. الف) جرم پروتون را که برابر با $۱/۶۷۲۶\times ۱۰^{-۲۷}\,Kg$ است بر حسب یکای جرم اتمی (u) حساب کنید. ب) جرم نوترون را که برابر با $۱/۰۰۸۶۷u$ است بر حسب Kg بیان کنید.

حل:

$$۱u = ۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}\,Kg$$

الف)

$$۱/۶۷۲۶\times ۱۰^{-۲۷}\,Kg = ۱/۶۷۲۶\times ۱۰^{-۲۷}\,Kg \times \frac{۱u}{۱/۶۶\times ۱۰^{-۲۷}\,Kg} = ۱/۰۰۷۵۹u$$

ب)

$$1/\cdot\cdot\text{۸۶۷}u = 1/\cdot\cdot\text{۸۶۷}u \times \frac{1/\text{۶۶}\times 1\cdot^{-\text{۲۷}}\,Kg}{1u} = 1/\text{۶۷۴۳۹۲۲}\times 1\cdot^{-\text{۲۷}}\,Kg$$

۵. اتومبیلی با مصرف یک گالن بنزین می تواند مسافتی برابر با ۳۰ مایل را طی کند. میزان مصرف این اتومبیل برحسب «لیتر در ۱۰۰ کیلومتر» (که یکای معمول برای مصرف اتومبیلهای سواری است.) چقدر است؟ هر گالن آمریکای برابر با ۳/۷۹ لیتر است.

حل:

$$\text{۱}gal = \text{۳/۷۹}\,\text{Litr} \quad , \quad \text{۱}mil = \text{۱/۶}\,\text{Km}$$

$$\text{۳۰}mil = \text{۳۰}mil \times \frac{\text{۱/۶}\,Km}{\text{۱}mil} = \text{۴۸}\,Km$$

$$\begin{cases} \text{۱۰۰}\,Km & \text{۳/۷۹}\,\text{Litr} \\ \text{۴۸}\,Km & x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\text{۴۸}\,Km \times \text{۳/۷۹}\,Litr}{\text{۱۰۰}\,Km} = \text{۱/۸۱۹۲}\,Litr$$

بخش ۱-٤- نمایش اعداد با توانهای ده و ارقام با معنی

۶. تعداد ارقام با معنی را در هر یک از کمیتهای زیر مشخص کنید:

الف) ۲۳/۰۰۱ s   ب) $\text{۰/۵۰۰}\times\text{۱۰}^{\text{۲}}$ m

ج) ۰/۰۰۲۰۳۰ Kg   د) $\text{۲۷۰۰}\ \frac{Kg}{s}$

حل: الف) ۵ رقم با معنی است.   ب) ۳ رقم با معنی است.

ج) ۴ رقم با معنی است.   د) ۲ تا ۴ رقم با معنی است.

۷. مقادیر زیر را برحسب یکاهای بدون پیشوندشان بنویسید:

الف) ۶/۲ ns   ب) ۱۲/۸ μm

ج) ۲۰۰۰۰ MW   د) ۰/۳ mA

حل:

الف) $۶/۲ ns = ۶/۲ \times ۱۰^{-۹} s$

ب) $۱۲/۸ \mu m = ۱۲/۸ \times ۱۰^{-۶} m$

ج) $۲۰۰۰۰ MW = ۲۰۰۰۰ \times ۱۰^{۶} W = ۲ \times ۱۰^{۱۰} W$

د) $۰/۳ mA = ۰/۳ \times ۱۰^{-۳} A = ۳ \times ۱۰^{-۴} A$

۸. عدد π را برابر با ۳/۱۴ بگیرید و هر یک از مقادیر زیر را حساب کنید:

الف) مساحت دایره ای به شعاع ۴/۲۰ m

ب) مساحت سطح کره ای به شعاع ۰/۴۶ m

ج) حجم کره ای به شعاع ۲/۳۱۸ m

حل:

الف)

$R = ۴/۲۰ \mathrm{m}$

$A = \pi R^{۲} = ۳/۱۴ \times (۴/۲۰)^{۲} = ۵۵/۴ m^{۲}$

ب)

$R = ۰/۴۶ \mathrm{m}$

$A = ۴\pi R^{۲} = ۴ \times ۳/۱۴ \times (۰/۴۶)^{۲} = ۲/۷ m^{۲}$

ج)

$R = ۲/۳۱۸ \mathrm{m}$

$V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times (۲/۳۱۸)^{۳} = ۵۲/۱۷ m^{۳}$

۹. اعداد زیر را بر حسب توانهای ده نمایش بدهید:

الف) $\frac{۱/۰۰۲}{۴/۰}$ ب) $(۸/۰۰ \times ۱۰^{۶})^{-\frac{۱}{۳}}$ ج) ۰/۰۰۰۷۶۳۰۰۰

حل: الف)

$$\frac{۱/۰۰۲}{۴/۰}=\frac{۱۰۰۲\times۱۰^{-۳}}{۴۰\times۱۰^{-۱}}=۲/۵۰۰۵\times۱۰^{-۱}$$

ب)

$$(۸/۰۰\times۱۰^{۶})^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸\times۱۰^{۶}}}=\frac{۱}{۲۰۰}=۵\times۱۰^{-۳}$$

ج)

$$۰/۰۰۰۷۶۳۰۰۰=۰/۰۰۰۷۶۳=۷/۶۳\times۱۰^{-۴}$$

۱۰. عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\left[\frac{(۳/۰۰\times۱۰^{۱۲})(۱/۲۰\times۱۰^{-۲۰})}{(۴/۰۰\times۱۰^{-۱})}\right]^{-\frac{۱}{۲}}$$

حل:

$$\left[\frac{(۳/۰۰\times۱۰^{۱۲})(۱/۲۰\times۱۰^{-۲۰})}{(۴/۰۰\times۱۰^{-۱})}\right]^{-\frac{۱}{۲}}=\left[\frac{(۴/۰۰\times۱۰^{-۱})}{(۳/۰۰\times۱۰^{۱۲})(۱/۲۰\times۱۰^{-۲۰})}\right]^{\frac{۱}{۲}}=\left[\frac{۴\times۱۰^{۸}}{۳\times۱۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۳}\times۱۰^{۴}=۳/۳۳\times۱۰^{۳}$$

۱۱. نتیجه اندازه گیری ابعاد مستطیلی به صورت $۱۷/۶\pm۰/۲cm$ و $۱۳/۸\pm۰/۱cm$ بیان شده است. مساحت این مستطیل چقدر است؟

حل:

$$\begin{cases} a=۱۷/۶\pm۰/۲\ cm \quad \rightarrow \quad ۱۷/۴\langle a\langle ۱۷/۸ \\ b=۱۳/۸\pm۰/۱\ cm \quad \rightarrow \quad ۱۳/۷\langle b\langle ۱۳/۹ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\times b = ۱۷/۶\times ۱۳/۸ = ۲۴۲/۸۸ \ cm^۲ \\ S_۱ = ۱۷/۴\times ۱۳/۷ = ۲۳۸/۳۸ \ cm^۲ \\ S_۲ = ۱۷/۸\times ۱۳/۹ = ۲۴۷/۴۲ \ cm^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_۱ < S < S_۲ \\ ۲۳۸/۳۸ < S < ۲۴۷/۴۲ \end{cases}$$

$$S = (a\times b) \pm ۴/۵۴ = ۲۴۲/۸۸ \pm ۴/۵۴ \ cm^۲$$

بخش ۱-۵- تحلیل ابعادی

۱۲. سرعت ذره ای با گذشت زمان به صورت $v = At - Bt^۳$ تغییر می کند. ابعاد A و B چیستند؟

حل: دو طرف تساوی باید سازگاری ابعادی داشته باشندیکای v (سرعت) $\frac{m}{s}$ است:

$$[v] = LT^{-۱} \quad , \quad [t] = T$$

$$[v] = [At] - [Bt^۳]$$

$$[At] = LT^{-۱} \quad \rightarrow \quad A = LT^{-۲}$$

$$[Bt^۳] = LT^{-۱} \quad \rightarrow \quad B = LT^{-۴}$$

بخش ۱-٦- دستگاه مختصات

۱۳. هر یک از مختصات قطبی زیر را به مختصات دکارتی (x , y) تبدیل کنید:

الف) (۴۰° و ۳/۵۰ m) ب) (۲۳۰° و ۱/۸۰ m)

حل: الف)

$$r = ۳/۵۰ \ m \quad , \quad \theta = ۴۰^\circ$$

$$\begin{cases} x = r\,Cos\,\theta = ۳/۵۰\times Cos(۴۰) = ۲/۶۸ \ m \\ y = r\,Sin\,\theta = ۳/۵۰\times Sin(۴۰) = ۲/۲۵ \ m \end{cases}$$

ب)

$r = ۱/۸۰ m \quad , \quad \theta = ۲۳۰^\circ$

$$\begin{cases} x = r\,Cos\,\theta = ۱/۸۰ \times Cos(۲۳۰) = -۱/۱۶\ m \\ y = r\,Sin\,\theta = ۱/۸۰ \times Sin(۲۳۰) = -۱/۳۸\ m \end{cases}$$

۱۴. هر یک از مختصات دکارتی زیر را به مختصات قطبی (Θ و r) تبدیل کنید:

الف) (۴m و ۳m) ب) (۲m- و ۳m)

حل: الف)

$x = ۴m \quad , \quad y = ۳m$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵m \\ \theta = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) = \tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}) = ۳۶/۸۶^\circ \approx ۳۷^\circ \end{cases}$$

ب)

$x = -۲m \quad , \quad y = ۳m$

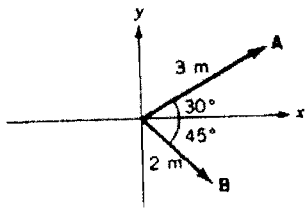
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{(-۲)^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳} \\ \theta = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) = \tan^{-۱}(\frac{۳}{-۲}) = -۵۶/۳۰^\circ = ۱۲۳/۷^\circ \end{cases}$$

فصل ۲

مسئله ها

بخش ۲-۲- جمع بردارها

۱. در شکل ۱۸، A = ۳ m و B = ۲ m است. با استفاده از روش نموداری، الف) $\vec{A}+\vec{B}$ و ب) $\vec{A}-\vec{B}$ را بدست آورید.



حل: الف)

$$C=\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}+۲AB\,Cos\theta}$$

$$\theta=۳۰+۴۵=۷۵ \quad , \quad Cos(۷۵)=۰/۳$$

$$C=\sqrt{(۳)^{۲}+(۲)^{۲}+۲(۲)(۳)Cos۷۵}=۴/۰۷\approx ۴/۱$$

در راستای محور x ها سمت مثبت

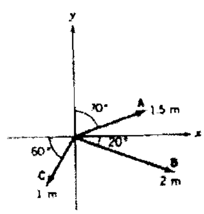
ب)

$$D=\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}-۲AB\,Cos\theta}$$

$$D=\sqrt{(۳)^{۲}+(۲)^{۲}-۲(۲)(۳)Cos۷۵}=۳/۰۶\approx ۳/۱$$

در راستای محور y ها سمت مثبت

۲. در شکل ۱۹، A = ۱/۵ m ، B = ۲ m و C = ۱ m است. با استفاده از روش نموداری، الف) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ و ب) $\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}$ را تعیین کنید.



حل: الف)

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

$$R=\left|(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}\right|=\sqrt{(\left|\vec{A}+\vec{B}\right|)^{۲}+C^{۲}+۲(\left|\vec{A}+\vec{B}\right|)(C)Cos\theta}$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}+۲AB\,Cos\alpha}$$

$$\alpha=۴۰ \quad , \quad Cos(۴۰)=+۰/۸$$

$$\theta=۱۲۰ \quad , \quad Cos(۱۲۰)=+۰/۵$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\sqrt{(۱/۵)^{۲}+(۲)^{۲}+۲(۱/۵)(۲)Cos(۴۰)}=\sqrt{۱۱/۰۵}=۳/۳۲$$

$$R=\sqrt{(۳/۳۲)^{۲}+(۱)^{۲}+۲(۳/۳۲)(۱)Cos(۱۲۰)}=\sqrt{۱۵/۳۴۲۴}=۳/۹۱$$

ب)

$$\vec{A}-\vec{B}-\vec{C}=\vec{A}-(\vec{B}+\vec{C})$$

$$R=\left|\vec{A}-(\vec{B}+\vec{C})\right|=\sqrt{(A)^{۲}+(\left|\vec{B}+\vec{C}\right|)^{۲}-۲(A)(\left|\vec{B}+\vec{C}\right|)Cos\theta}$$

$$\left|\vec{B}+\vec{C}\right|=\sqrt{B^{۲}+C^{۲}+۲BC\,Cos\alpha}$$

$$\alpha=۱۰۰ \quad , \quad Cos(۱۰۰)=-۰/۱۷$$

$$\theta=۹۰ \quad , \quad Cos(۹۰)=o$$

$$\left|\vec{B}+\vec{C}\right|=\sqrt{(۲)^{۲}+(۱)^{۲}+۲(۲)(۱)Cos(۱۰۰)}=\sqrt{۰/۸۳}=۰/۹$$

$$R=\sqrt{(۱/۵)^{۲}+(۰/۹)^{۲}-۲(۱/۵)(۰/۹)Cos(o)}=\sqrt{۳/۰۶}=۱/۷$$

۳. سه بردار داریم که اندازه هرسه اشان ۱۰m است. با رسم نمودار نشان دهید که اندازه بردار برآیند این بردارها در چه حالتهایی برابر با، الف) صفر ، ب) ۱۰m ، ج) ۲۰m و د) ۳۰m می شود؟

حل: الف) وقتی زاویه بین هر سه بردار برابر با ۱۲۰ درجه باشد.

ب) دو بردار در جهت +x و یک بردار در جهت −x

ج) زاویه بین دو بردار ۱۲۰ درجه و نیمساز این دو بردار همان بردار سوم باشد

د) هر سه بردار در جهت +x

۴. اندازه برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر با ۴۰m و جهت آن به طرف شمال است. اگر A=۳۰m و در جهت ۳۰ درجه جنوب غربی باشد، $\vec{B}$ را به روش نموداری تعیین کنید/

حل:

$$|\vec{C}| = ۴۰m \quad , \quad |\vec{A}| = ۳۰m$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$$

$$|\vec{B}| = |\vec{C} - \vec{A}| = \sqrt{C^۲ + A^۲ - ۲CA\,Cos\theta}$$

$$\theta = ۱۲۰^\circ \quad , \quad Cos(۱۲۰) = -۰/۵$$

$$B = \sqrt{(۴۰)^۲ + (۳۰)^۲ - ۲(۴۰)(۳۰)Cos(۱۲۰)} = ۶۰/۸۲$$

با استفاده از قانون سینوسها داریم:

$$\frac{Sin(۱۲۰)}{B} = \frac{Sin\alpha}{|-\vec{A}|} \rightarrow \qquad Sin\alpha = \frac{Sin(۱۲۰)\times(|-\vec{A}|)}{B} = \frac{۰/۹\times ۳۰}{۶۰/۸۲} = ۰/۴۴$$

$$\alpha = Sin^{-1}(۰/۴۴) \approx ۲۶/۷^\circ$$

بخش ۲-۳- مؤلفه های بردار و بردارهای یکه

در این مسائل محور x را به طرف شرق و محور y را به طرف شمال، و (در صورت لزوم) محور z را با طرف بالا بگیرید. در روش تحلیلی باید هر بردار مجهولی را به صورت $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$ بنویسیم و اندازه و جهت آنرا از مؤلفه هایش بدست بیاوریم.

۵. شخصی ۵m به طرف جنوب و بعد ۱۲m به طرف غرب قدم می زند. جابجایی خالص او را تعیین کنید.

حل:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} = ۵\hat{i} \quad , \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} = -۱۲\hat{j}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} = ۵\hat{i} - ۱۲\hat{j}$$

$$C = \sqrt{C_x^۲ + C_y^۲} = \sqrt{(۵)^۲ + (-۱۲)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳m$$

۶. حشره ای روی یک دیوار ۵۰cm را روی خط راست طی می کند. اگر جابجایی افقی اش ۲۵cm باشد، در راستای قائم چقدر جابجا شده است.

حل:

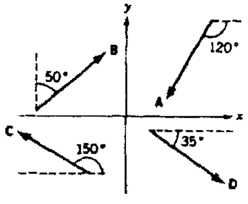
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} = ۲۵\hat{i} \quad , \quad \vec{B} = ? \quad , \quad |\vec{C}| = ۵۰cm$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$

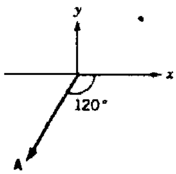
$$\begin{cases} C_x = A_x + B_x = ۲۵ + o = ۲۵ \\ C_y = A_y + B_y = o + B_y = B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \sqrt{C_x^۲ + C_y^۲} \\ ۵۰ = \sqrt{(۲۵)^۲ + B_y^۲} \end{cases}$$

$$(۵۰)^۲ = (۲۵)^۲ + B_y^۲ \quad \rightarrow \quad B_y^۲ = ۲۵۰۰ - ۶۲۵ = ۱۸۷۵ \quad \Rightarrow B_y = \sqrt{۱۸۷۵} = ۴۳/۳cm$$

۷. چهار بردار که اندازه همگی اشان ۴m است در شکل ۲۰ نشان داده شده اند. الف) هر یک از این بردارها را بر حسب بردارهای یکه بیان کنید ب) برآیند آنها را برحسب بردارهای یکه بنویسید. ج) اندازه و جهت بردار برآیند را پیدا کنید.



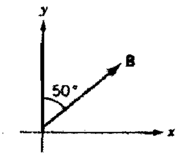
حل: الف) Θ (جهت اصلی) زاویه ای است که بردار با سمت مثبت محور x ها (+x) می سازد.



$$\theta = ۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰^\circ$$

$$\begin{cases} A_x = A\,Cos\theta = (۴)\,Cos(۲۴۰) = -۲m \\ A_y = A\,Sin\theta = (۴)\,Sin(۲۴۰) = -۳/۴۶m \end{cases}$$

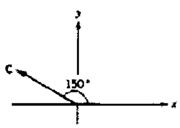
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} = -۲\hat{i} - ۳/۴۶\hat{j}$$



$$\theta = ۹۰ - ۵۰ = ۴۰^\circ$$

$$\begin{cases} B_x = B\,Cos\theta = (۴)\,Cos(۴۰) = ۳/۰۸m \\ B_y = B\,Sin\theta = (۴)\,Sin(۴۰) = ۲/۵۶m \end{cases}$$

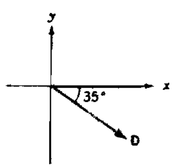
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} = ۳/۰۸\hat{i} + ۲/۵۶\hat{j}$$



$$\theta = ۱۵۰^\circ$$

$$\begin{cases} C_x = C\,Cos\theta = (۴)\,Cos(۱۵۰) = -۳/۴۶m \\ C_y = C\,Sin\theta = (۴)\,Sin(۱۵۰) = ۲m \end{cases}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} = -۳/۴۶\hat{i} + ۲\hat{j}$$



$$\theta = ۳۶۰ - ۳۵ = ۳۲۵^\circ$$

$$\begin{cases} D_x = D\,Cos\theta = (۴)\,Cos(۳۲۵) = ۳/۲۸m \\ D_y = D\,Sin\theta = (۴)\,Sin(۳۲۵) = -۲/۲۸m \end{cases}$$

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} = ۳/۲۸\hat{i} - ۲/۲۸\hat{j}$$

ب)

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} \\ &= (A_x + B_x + C_x + D_x)\hat{i} + (A_y + B_y + C_y + D_y)\hat{j} \\ &= (-۲ + ۳/۰۸ - ۳/۴۶ + ۳/۲۸)\hat{i} + (-۳/۴۶ + ۲/۵۶ + ۲ - ۲/۲۸)\hat{j} \\ &= ۰/۹\hat{i} - ۱/۱۸\hat{j} \end{aligned}$$

ج)

$$R=\sqrt{R_x^{۲}+R_y^{۲}}=\sqrt{(۰/۹)^{۲}+(-۱/۱۸)^{۲}}=۱/۴۸$$

$$\theta=\tan^{-۱}(\frac{R_y}{R_x})=\tan^{-۱}(\frac{-۱/۱۸}{۰/۹})=\tan^{-۱}(-۱/۳۱)=-۵۲/۶۴^{\circ}=۳۰۷/۳۶^{\circ}$$

۸. دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}-۳\hat{j}+\hat{k}$ و $\vec{B}=-\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}$ را در نظر بگیرید: الف) $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$ ، ب) R و ج) $\hat{R}$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}=(۲\hat{i}-۳\hat{j}+\hat{k})+(-\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k})$$
$$=(۲-۱)\hat{i}+((-۳)+۲)\hat{j}+(۱+(-۱))\hat{k}=\hat{i}-\hat{j}$$

ب)

$$R=\sqrt{R_x^{۲}+R_y^{۲}+R_z^{۲}}=\sqrt{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+o}=۱/۴۱$$

ج)

$$\hat{R}=\frac{\vec{R}}{R}=\frac{\hat{i}-\hat{j}}{۱/۴۱}=۰/۷۰۷\hat{i}-۰/۷۰۷\hat{j}$$

۹. دو بردار $\vec{C}=۴\hat{i}+\hat{j}-۳\hat{k}$ و $\vec{C}=۲\hat{i}-۳\hat{j}+۵\hat{k}$ را در نظر بگیرید: الف) $\vec{S}=\vec{C}-\vec{D}$ ، ب) S و ج) $\hat{S}$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$\vec{S}=\vec{C}+\vec{D}=(۴\hat{i}+\hat{j}-۳\hat{k})-(۲\hat{i}-۳\hat{j}+۵\hat{k})$$
$$=(۴-۲)\hat{i}+(۱+۳)\hat{j}+((-۳)-۵)\hat{k}=۲\hat{i}+۴\hat{j}-۸\hat{k}$$

ب)

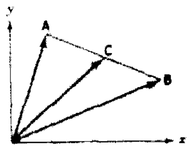
$$S=\sqrt{S_x^{۲}+S_y^{۲}+S_z^{۲}}=\sqrt{(۲)^{۲}+(۴)^{۲}+(-۸)^{۲}}=۹/۱$$

ج)

$$\hat{S}=\frac{\vec{S}}{S}=\frac{۲\hat{i}+۴\hat{j}-۸\hat{k}}{۹/۱}=۰/۲۳\hat{i}+۰/۴۴\hat{j}-۰/۸۸\hat{k}$$

۱۰. در شکل ۲۱، $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردارهای مکان اند. نشان بدهید که بردار مکان نقطه وسط خطی که نوک پیکان های $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به هم وصل می کند برابر با $\vec{C}=\frac{(\vec{A}+\vec{B})}{۲}$ است.

حل:



$\overline{AC}=\overline{BC}$ متوازی الاضلاعی مطابق شکل رسم می کنیم. با توجه به اینکه در متوازی-الاضلاع قطرها منصف هم هستند، آنگاه OC نیز امتداد قطر متوازی الاضلاع و نصف آن است و چون قطر متوازی الاضلاع برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است:

$$\vec{A}+\vec{B}=۲\vec{C}\qquad\Rightarrow\qquad\vec{C}=\frac{(\vec{A}+\vec{B})}{۲}$$

۱۱. دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ و $\vec{B}=-۳\hat{i}+۲\hat{j}+\hat{k}$ را در نظر بگیرید و بردار یکه هم جهت با بردار $\vec{S}=۲\vec{B}-۳\vec{A}$ را بدست آورید.

حل:

$$\vec{S}=۲\vec{B}-۳\vec{A}$$
$$=۲(-۳\hat{i}+۲\hat{j}+\hat{k})-۳(۲\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$$
$$=-۶\hat{i}+۴\hat{j}+۲\hat{k}-۶\hat{i}-۳\hat{j}+۳\hat{k}$$
$$=(-۶-۶)\hat{i}+(۴-۳)\hat{j}+(۲+۳)\hat{k}=-۱۲\hat{i}+\hat{j}+۵\hat{k}$$

$$S=\sqrt{(-۱۲)^۲+(۱)^۲+(۵)^۲}=\sqrt{۱۷۰}=۱۳/۰۳$$

$$\hat{S}=\frac{\vec{S}}{S}=\frac{-۱۲\hat{i}+\hat{j}+۵\hat{k}}{۱۳/۰۳}=-۰/۹۲\hat{i}+۰/۰۷۷\hat{j}+۰/۳۸۳\hat{k}$$

۱۲. بردار $\vec{A}=۶\hat{i}-۲\hat{j}+۳\hat{k}$ را در نظر بگیرید و مجهولات زیر را پیدا کنید: الف) برداری در جهت $\vec{A}$ که اندازه اش ۲A باشد. ب) بردار یکه ای در جهت $\vec{A}$ ج) برداری در خلاف جهت $\vec{A}$ که اندازه اش برابر با ۴m باشد.

حل: الف)

$$\vec{A}=۶\hat{i}-۲\hat{j}+۳\hat{k}$$
$$A=\sqrt{(۶)^۲+(-۲)^۲+(۳)^۲}=\sqrt{۳۶+۴+۹}=\sqrt{۴۹}=۷$$
$$۲\vec{A}=۱۲\hat{i}-۴\hat{j}+۶\hat{k}$$
$$۲A=\sqrt{(۱۲)^۲+(-۴)^۲+(۶)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۱۶+۳۶}=\sqrt{۱۹۶}=۱۴$$

ب)

$$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{A}=\frac{۶\hat{i}-۲\hat{j}+۳\hat{k}}{۷}=\frac{۶}{۷}\hat{i}-\frac{۲}{۷}\hat{j}+\frac{۳}{۷}\hat{k}$$

ج) بردار $\vec{A}$ در راستای بردار یکه $\hat{A}$ است. پس بردار $\vec{B}$ که در خلاف جهت $\vec{A}$ قرار دارد به صورت زیر بدست می آید:

$$\vec{B}=-۴\hat{A}=-۴(\frac{۶}{۷}\hat{i}-\frac{۲}{۷}\hat{j}+\frac{۳}{۷}\hat{k})=-\frac{۲۴}{۷}\hat{i}+\frac{۸}{۷}\hat{j}-\frac{۱۲}{۷}\hat{k}$$

$$B=\sqrt{(-\frac{۲۴}{۷})^۲+(\frac{۸}{۷})^۲+(-\frac{۱۲}{۷})^۲}=\sqrt{\frac{۵۷۶+۶۴+۱۴۴}{۴۹}}=\sqrt{۱۶}=۴$$

۱۳. دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}-۳\hat{j}+\hat{k}$ و $\vec{B}=-۴\hat{i}+\hat{j}-۵\hat{k}$ را در نظر بگیرید. بردار $\vec{C}$ را چنان تعیین کنید که $\vec{A}-۲\vec{B}+\frac{۱}{۳}\vec{C}=o$ باشد.

حل:

$$\vec{A}-۲\vec{B}+\frac{۱}{۳}\vec{C}=o$$

$$(۲\hat{i}-۳\hat{j}+\hat{k})-۲(-۴\hat{i}+\hat{j}-۵\hat{k})+\frac{۱}{۳}\vec{C}=o$$

$$۲\hat{i}-۳\hat{j}+\hat{k}+۸\hat{i}-۲\hat{j}+۱۰\hat{k}+\frac{۱}{۳}\vec{C}=o$$

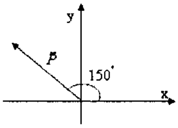
$$۱۰\hat{i}-۵\hat{j}+۱۱\hat{k}=-\frac{۱}{۳}\vec{C} \quad \rightarrow \quad \vec{C}=-۳(۱۰\hat{i}-۵\hat{j}+۱۱\hat{k})=-۳۰\hat{i}+۱۵\hat{j}-۳۳\hat{k}$$

۱۴. مؤلفه های بردارهای زیر را پیدا کنید:

الف) $\vec{P}$ به طول ۵m که با محور x+ زاویه ۱۵۰ درجه (در جهت مثلثاتی یا عکس حرکت عقربه های ساعت) می سازد.

ب) $\vec{Q}$ به طول ۳/۶m که با محور y+ زاویه ۱۲۰ درجه می سازد.

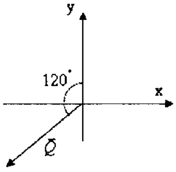
حل: الف)



$$\begin{cases} P_x = P\,Cos\,\theta = ۵\times Cos(۱۵۰) = -۴/۳۳ \\ P_y = P\,Sin\,\theta = ۵\times Sin(۱۵۰) = ۲/۵ \end{cases}$$

$$\vec{P}=P_x\hat{i}+P_y\hat{j}=-۴/۳۳\hat{i}+۲/۵\hat{j}$$

ب)



$$\theta=۱۲۰+۹۰=۲۱۰^\circ$$

$$\begin{cases} Q_x = Q\,Cos\,\theta = ۳/۶\times Cos(۲۱۰) = -۳/۱۲ \\ Q_y = Q\,Sin\,\theta = ۳/۶\times Sin(۲۱۰) = -۱/۸ \end{cases}$$

$$\vec{Q}=Q_x\hat{i}+Q_y\hat{j}=-۳/۱۲\hat{i}-۱/۸\hat{j}$$

۱۵. اگر $\vec{A}=۲\hat{i}+۳\hat{j}\ \ (\mathrm{m})$ باشد برداری پیدا کنید به طول ۵m و عمود بر $\vec{A}$ که الف) در صفحه x-z و ب) در صفحه x-y قرار داشته باشد.

حل: الف) در صفحه x-z است و به بردار $\vec{A}$ عمود است (بردار $\vec{A}$ در صفحه x-y است.)

$$B_x=B_y=o \qquad \rightarrow \qquad B_x^{۲}+B_y^{۲}+B_z^{۲}=۲۵ \qquad \Rightarrow \qquad B_z=۵$$

$$\vec{B}=\pm ۵\hat{k}$$

ب) در صفحه x-y پس $C_z=o$

$$\begin{cases}\vec{C}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}\\ \vec{A}=۲\hat{i}+۳\hat{j}\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}\vec{A}.\vec{C}=o\\ A_xC_x+A_yC_y=o\\ ۲C_x+۳C_y=o \quad \Rightarrow \quad C_x=-\frac{۳}{۲}C_y\end{cases}$$

$$۵=\sqrt{C_x^{۲}+C_y^{۲}}$$

$$۵=\sqrt{(-\frac{۳}{۲}C_y)^{۲}+C_y^{۲}}=\sqrt{(\frac{۱۳}{۴})C_y^{۲}}$$

$$۲۵=\frac{۱۳}{۴}C_y^{۲} \qquad \Rightarrow \qquad C_y=\pm\sqrt{\frac{۲۵\times ۴}{۱۳}}=\pm\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}$$

$$C_x=-\frac{۳}{۲}C_y=-\frac{۳}{۲}(\pm\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}})=\mp\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\vec{C}=\mp ۴/۱۶\hat{i}\mp ۲/۷۷\hat{j}$$

بخش ۲-٤- ضرب اسکالر

۱۶. زاویه میان $\vec{A}=\hat{i}-۲\hat{j}$ و $\vec{B}=۲\hat{i}+۳\hat{j}$ چقدر است؟

حل:

$$AB\,Cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$Cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

$$A = \sqrt{(۱)^۲ + (-۲)^۲} = \sqrt{۵} \qquad , \qquad B = \sqrt{(۲)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$Cos\theta = \frac{(۱\times ۲) + ((-۲)\times ۳)}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۱۳}} = \frac{-۴}{\sqrt{۶۵}} \qquad \rightarrow \qquad \theta = Cos^{-۱}(\frac{-۴}{\sqrt{۶۵}}) = ۱۲۰^\circ$$

۱۷. اگر $\vec{A} = -۲\hat{i} + \hat{j} - ۳\hat{k}$ و $\vec{B} = ۵\hat{i} + ۲\hat{j} - \hat{k}$ باشد. الف) $\vec{A}.\vec{B}$، ب) $(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$\vec{A}.\vec{B} = (-۲\hat{i} + \hat{j} - ۳\hat{k}).(۵\hat{i} + ۲\hat{j} - \hat{k})$$
$$= ((-۲)\times ۵) + (۱\times ۲) + ((-۳)\times(-۱)) = -۱۰ + ۲ + ۳ = -۵$$

ب)

$$\vec{A}+\vec{B} = (-۲\hat{i} + \hat{j} - ۳\hat{k}) + (۵\hat{i} + ۲\hat{j} - \hat{k}) = ۳\hat{i} + ۳\hat{j} - ۴\hat{k}$$
$$\vec{A}-\vec{B} = (-۲\hat{i} + \hat{j} - ۳\hat{k}) - (۵\hat{i} + ۲\hat{j} - \hat{k}) = -۷\hat{i} - \hat{j} - ۲\hat{k}$$
$$(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B}) = (۳\hat{i} + ۳\hat{j} - ۴\hat{k}).(-۷\hat{i} - \hat{j} - ۲\hat{k})$$
$$= (۳\times(-۷)) + (۳\times(-۱)) + ((-۴)\times(-۲))$$
$$= -۲۱ - ۳ + ۸ = -۱۶$$

۱۸. حاصلضرب اسکالر دو بردار به اندازه های $۳m$ و $۵m$ برابر است با $-۴m^۲$ است. زاویه میان این دو بردار چقدر است؟

حل:

$$C = AB\,Cos\theta$$

$$-۴ = (۳)(۵)Cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \theta = Cos^{-۱}(\frac{-۴}{۱۵}) = ۱۰۵/۴۷^\circ$$

۱۹. مؤلفه های دو بردار عبارتند از:

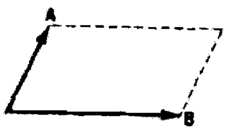
$$A_x = ۲/۴ \quad , \quad A_y = -۱/۲ \quad , \quad A_z = ۴/۰$$
$$B_x = -۳/۶ \quad , \quad B_y = ۱/۸ \quad , \quad B_z = -۲/۶$$

زاویه میان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را پیدا کنید.

حل:

$$A = \sqrt{(۲/۴)^۲ + (-۱/۲)^۲ + (۴/۰)^۲} = \sqrt{۵/۷۶ + ۱/۴۴ + ۱۶} = ۴/۸۱$$
$$B = \sqrt{(-۳/۶)^۲ + (۱/۸)^۲ + (-۲/۶)^۲} = \sqrt{۱۲/۹۶ + ۳/۲۴ + ۶/۷۶} = ۴/۷۹$$
$$AB\,Cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$Cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$
$$Cos\theta = \frac{(۲/۴ \times (-۳/۶)) + ((-۱/۲) \times ۱/۸) + (۴ \times (-۲/۶))}{۴/۸۱ \times ۴/۷۹}$$
$$= \frac{-۸/۶۴ - ۲/۱۶ - ۱۰/۴}{۲۳/۰۳۹۹} = -۰/۹۲$$
$$\theta = Cos^{-۱}(-۰/۹۲) = ۱۵۶/۹۳^{\circ}$$

۲۰. در شکل ۲۲، بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو ضلع متوازی الاضلاعی را تعریف می کنند. الف) قطرهای این متوازی الاضلاع را بر حسب $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بیان کنید. ب) نشان دهید که اگر A=B باشد قطرها بر هم عمودند.



حل: الف) با توجه به روش جمع متوازی الاضلاع

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad , \qquad \vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

ب)

$\vec{C}.\vec{D} = o \qquad (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B}) = o$

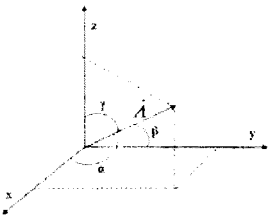
$A = B \quad \Rightarrow \quad (\vec{A}+\vec{A}).(\vec{A}-\vec{A}) = o$

۲۱. اگر زاویه میان بردار A و هر یک از محورهای x و y و z به ترتیب α و β و γ باشد، نشان دهید که این زاویه ها از روابط زیر بدست می آیند:

$$Cos\,\alpha = \frac{\vec{A}.\hat{i}}{A} \quad , \quad Cos\,\beta = \frac{\vec{A}.\hat{j}}{A} \quad , \quad Cos\,\gamma = \frac{\vec{A}.\hat{k}}{A}$$

اگر $\vec{A} = ۳\hat{i} + ۲\hat{j} + \hat{k}$ باشد، اندازه هر یک از این زوایا چقدر است؟

حل:



$$\vec{A} = ACos\,\alpha\,\hat{i} + ACos\,\beta\,\hat{j} + ACos\,\gamma\,\hat{k}$$

$\vec{A}.\hat{i} = ACos\,\alpha \quad \rightarrow \quad Cos\,\alpha = \frac{\vec{A}.\hat{i}}{A}$

$\vec{A}.\hat{j} = ACos\,\beta \quad \rightarrow \quad Cos\,\beta = \frac{\vec{A}.\hat{j}}{A}$

$\vec{A}.\hat{k} = ACos\,\gamma \quad \rightarrow \quad Cos\,\gamma = \frac{\vec{A}.\hat{k}}{A}$

$\vec{A} = ۳\hat{i} + ۲\hat{j} + \hat{k}$

$A = \sqrt{(۳)^۲ + (۲)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۹+۴+۱} = \sqrt{۱۴}$

$$Cos\,\alpha = \frac{\vec{A}.\hat{i}}{A} = \frac{۳}{\sqrt{۱۴}} \quad \rightarrow \quad \alpha = Cos^{-۱}(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}) = ۳۶/۷^{\circ}$$

$$Cos\,\beta = \frac{\vec{A}.\hat{j}}{A} = \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \quad \rightarrow \quad \beta = Cos^{-۱}(\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}) = ۵۷/۷^{\circ}$$

$$Cos\,\gamma = \frac{\vec{A}.\hat{k}}{A} = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \quad \rightarrow \quad \gamma = Cos^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}) = ۷۴/۵^{\circ}$$

بخش ۲-۵- ضرب برداری

۲۲. حاصلضرب برداری دو بردار $\vec{A} = \hat{i} + ۲\hat{j} - ۴\hat{k}$ و $\vec{B} = ۳\hat{i} - \hat{j} + ۵\hat{k}$ را پیدا کنید.

حل:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۱ & ۲ & -۴ \\ ۳ & -۱ & ۵ \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} ۲ & -۴ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} ۱ & -۴ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}((۲\times۵) - ((-۴)\times(-۱))) - \hat{j}((۱\times۵) - ((-۴)\times۳)) + \hat{k}((۱\times(-۱)) - (۲\times۳))$$

$$= ۶\hat{i} - ۱۷\hat{j} - ۷\hat{k}$$

۲۳. الف) نشان دهید که برای هر دو بردار دلخواه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ داریم؛ $\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B}) = o$ ب) بدون محاسبه (و فقط با توجه به تعریف حاصلضرب برداری) دلیل بیاورید که رابطه بالا درست است.

حل: الف)

$$\vec{A}.\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = A_x\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - A_y\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + A_z\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

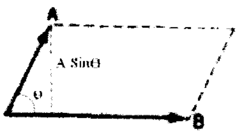
$$= A_x(A_yB_z - A_zB_y) - A_y(A_xB_z - A_zB_x) + A_z(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$= A_xA_yB_z - A_xA_zB_y - A_yA_xB_z + A_yA_zB_x + A_zA_xB_y - A_zA_yB_x = o$$

ب) بر اساس ضرب داخلی $\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=o$ است، یعنی بردار $\vec{A}$ بر بردار حاصلضرب $\vec{A}\times\vec{B}$ عمود است.

۲۴. نشان بدهید که مساحت متوازی الاضلاعی به اضلاع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (شکل ۲۲) برابر است با $|\vec{A}\times\vec{B}|$.

حل:



مساحت متوازی الاضلاع = قاعده × ارتفاع

ارتفاع = A SinΘ ، قاعده = $|\vec{B}|$

مساحت متوازی الاضلاع = (A SinΘ)($|\vec{B}|$) = AB SinΘ

که همان تعریف ضرب برداری است.

۲۵. برداری پیدا کنید به طول 5m که بر هر دو بردار $\vec{A}=۳\hat{i}-۲\hat{j}+۴\hat{k}\ (m)$ و $\vec{B}=۴\hat{i}-۳\hat{j}-\hat{k}\ (m)$ عمود باشد.

حل:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ ۳ & -۲ & ۴\\ ۴ & -۳ & -۱\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}-۲ & ۴\\ -۳ & -۱\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ ۴ & -۱\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}۳ & -۲\\ ۴ & -۳\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(۲+۱۲)-\hat{j}(-۳-۱۶)+\hat{k}(-۹+۸)=۱۴\hat{i}+۱۹\hat{j}-\hat{k}$$

بردار یکه ای پیدا می کنیم که عمود بر حاصلضرب خارجی دو بردار باشد:

$$\hat{n}=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\frac{۱۴\hat{i}+۱۹\hat{j}-\hat{k}}{۲۳/۶۲}=۰/۶\hat{i}+۰/۸\hat{j}-۰/۰۴\hat{k}$$

$$\vec{C}=۵\hat{n}=۵\times(۰/۶\hat{i}+۰/۸\hat{j}-۰/۰۴\hat{k})=۳\hat{i}+۴\hat{j}-۰/۲\hat{k}$$

مسائل تکمیلی

۲۶. برداری در صفحه xy پیدا کنید که طول آن ۵m و جهتش عمود بر $\vec{A}=۳\hat{i}+۶\hat{j}-۲\hat{k}\ (m)$ باشد. (راهنمایی: ضرب اسکالر را در نظر بگیرید.)

حل:

$$\vec{A}=۳\hat{i}+۶\hat{j}-۲\hat{k}\ (m)$$
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

B در صفحه xy است پس $B_z=o$ است.

$$|\vec{B}|=۵$$
$$\vec{A}.\vec{B}=o \rightarrow A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=o \rightarrow ۳B_x+۶B_y=o \Rightarrow B_x=-۲B_y$$
$$|\vec{B}|=\sqrt{B_x^۲+B_y^۲}$$
$$۵=\sqrt{(-۲B_y)^۲+B_y^۲} \rightarrow ۲۵=۴B_y^۲+B_y^۲=۵B_y^۲ \Rightarrow \begin{cases}B_y=\sqrt{۵}=۲/۲۳\\ B_x=-۲B_y=-۴/۴۶\end{cases}$$
$$\vec{B}=-۴/۴۶\hat{i}+۲/۲۳\hat{j}$$

۲۷. طول بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با هم مساوی و زاویه بین آنها Θ است. نشان بدهید که

الف) $|\vec{A}+\vec{B}|=۲ACos(\frac{\theta}{۲})$ ، ب) $|\vec{A}-\vec{B}|=۲ASin(\frac{\theta}{۲})$

حل: الف)

$$A=B\ ,\ ۱+Cos\theta=۲Cos^۲(\frac{\theta}{۲})\ ,\ ۱-Cos\theta=۲Sin^۲(\frac{\theta}{۲})$$
$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{A^۲+B^۲+۲ABCos\theta}=\sqrt{A^۲+A^۲+۲AACos\theta}$$

$$= \sqrt{2A^2 + 2A^2 \cos\theta} = A\sqrt{2(1+\cos\theta)} = A\sqrt{2(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))}$$
$$= 2A\cos(\frac{\theta}{2})$$
$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta} = \sqrt{A^2 + A^2 - 2AA\cos\theta}$$
$$= \sqrt{2A^2 - 2A^2\cos\theta} = A\sqrt{2(1-\cos\theta)} = A\sqrt{2(2\sin^2(\frac{\theta}{2}))}$$
$$= 2A\sin(\frac{\theta}{2})$$

۲۸. دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی با محورهای x و y را به اندازه زاویه Θ دوران می دهیم تا به وضعیت x' و y' برسد. (شکل ۲۳) الف) مؤلفه های بردار مکان $\vec{r}$ را در هر دو دستگاه بنویسید. ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید که مختصات نقطه ای مانند P در دو دستگاه به صورت زیر به هم مربوط می شوند:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

(راهنمایی: برای رسیدن به این نتایج باید $\cos(\varphi - \Theta)$ را بسط بدهید. این معادلات چگونگی تبدیل مختصات را تحت دوران دستگاه نشان می دهند. در واقع – به یک تعریف فنی تر– بردار کمیتی است که مؤلفه هایش طبق روابط بالا تبدیل می شوند.)

حل: الف) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = x'\hat{i} + y'\hat{j}$

ب)

$$\begin{cases} \cos(\varphi-\theta) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta \\ \cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \vec{r}\,.\,\hat{i} \\ y = \vec{r}\,.\,\hat{j} \end{cases} , \quad \begin{cases} x' = \vec{r}\,.\,\hat{i}' \\ y' = \vec{r}\,.\,\hat{j}' \end{cases}$$

$$\hat{i}.\hat{i}' = (1)(1)Cos\theta = Cos\theta$$

$$\hat{i}.\hat{j}' = (1)(1)Cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = Cos(\frac{\pi}{2})Cos\theta - Sin(\frac{\pi}{2})Sin\theta = -Sin\theta$$

$$\hat{j}.\hat{i}' = (1)(1)Cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = Cos(\frac{\pi}{2})Cos\theta + Sin(\frac{\pi}{2})Sin\theta = Sin\theta$$

$$\hat{j}.\hat{j}' = (1)(1)Cos\theta = Cos\theta$$

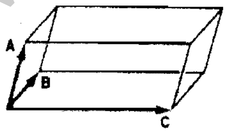
$$x' = \vec{r}.\hat{i}' = (x\hat{i}+y\hat{j}).\hat{i}' = x(\hat{i}.\hat{i}') + y(\hat{j}.\hat{i}') = xCos\theta + ySin\theta$$

$$y' = \vec{r}.\hat{j}' = (x\hat{i}+y\hat{j}).\hat{j}' = x(\hat{i}.\hat{j}') + y(\hat{j}.\hat{j}') = -xSin\theta + yCos\theta$$

برای مختصات نقطه ای مثل P (P_x, P_y) تحت دوران دستگاه مختصات (P'_x, P'_y) داریم:

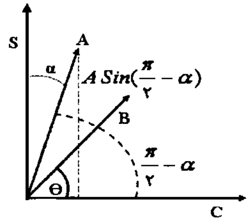
$$\begin{cases} P'_x = P_x Cos\theta + P_y Sin\theta \\ P'_y = -P_x Sin\theta + P_y Cos\theta \end{cases}$$

۲۹. نشان بدهید که حجم متوازی السطوحی که اضلاعش با بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ تعریف می شوند (شکل ۲۴) برابر است با $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$.



حل: حجم متوازی السطوح = مساحت قاعده × ارتفاع

مساحت قاعده $= \vec{S} = CB\,Sin\theta = |\vec{B}\times\vec{C}|$



بردار $\vec{B}\times\vec{C}$ برداری است که بر قاعده متوازی الاضلاع عمود است که بردار $\vec{A}$ زاویه α می سازد، پس ارتفاع که خط چین عمودی از بردار $\vec{A}$ به سطح قاعده متوازی السطوح است برابر است با

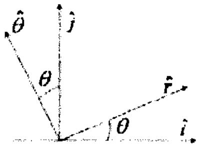
$$\text{ارتفاع} = A\,Sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = A\,Cos\theta$$

$$\text{حجم متوازی السطوح} = (A\,Cos\theta)(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

۳۰. در شکل ۲۵ بردارهای یکه دستگاه مختصات قطبی را با $\hat{r}$ (در جهت شعاع) و $\hat{\theta}$ (در جهت عمود بر شعاع) مشخص کرده ایم. نشان بدهید که این بردارها طبق روابط زیر به بردارهای یکه دکارتی مربوط می شوند:

$$\begin{cases}\hat{r} = Cos\theta\,\hat{i} + Sin\theta\,\hat{j}\\ \hat{\theta} = -Sin\theta\,\hat{i} + Cos\theta\,\hat{j}\end{cases}$$

حل: می توان دستگاه مختصات دکارتی و قطبی را از به صورت زیر رسم کرد:



تصویر بردار یکه $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ را روی بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ مشخص می کنیم. مقدار بردارهای یکه، یک است ($|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{r}|=|\hat{\theta}|=۱$) پس داریم:

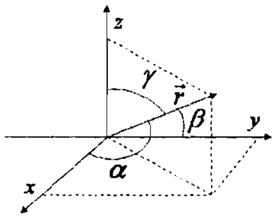
$$\begin{cases}\hat{r} = Cos\theta\,\hat{i} + Sin\theta\,\hat{j}\\ \hat{\theta} = -Sin\theta\,\hat{i} + Cos\theta\,\hat{j}\end{cases}$$

۳۱. بردار مکان ذره ای به صورت $\vec{r} = x\vec{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ است. اگر زاویه میان این بردار و هریک از محورهای x و y و z به ترتیب α و β و γ باشد، نشان بدهید که

$$Cos^۲\alpha + Cos^۲\beta + Cos^۲\gamma = ۱$$

است.

حل:



$$\begin{cases} x = r\,Cos\alpha \\ y = r\,Cos\beta \\ z = r\,Cos\gamma \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \qquad \Rightarrow \qquad r^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

$$r^۲ = (rCos\alpha)^۲ + (rCos\beta)^۲ + (rCos\gamma)^۲$$

$$r^۲ = r^۲(Cos^۲\alpha + Cos^۲\beta + Cos^۲\gamma)$$

$$Cos^۲\alpha + Cos^۲\beta + Cos^۲\gamma = ۱$$

فصل ۳

مسئله ها

بخش ۳-۲ و ۳-۳- جابجایی و سرعت

۱. در سال ۱۹۸۸ کارل لوئیس رکورد جدیدی برابر با 9/92S در دو صد متر به جا گذاشت. سرعت متوسط او چقدر بوده است؟

حل:

$$\Delta x = 100 m \quad , \quad \Delta t = 9/92 s$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100}{9/92} = 10/1 \frac{m}{s}$$

۲. دوچرخه سواری به مدت ۱ دقیقه با سرعت $12\frac{m}{s}$ و به مدت ۲ دقیقه دیگر با سرعت $16\frac{m}{s}$ حرکت می کند. سرعت متوسط او را در هر یک از حالتهای زیر تعیین کنید: الف) قسمت دوم حرکت در همان جهت قسمت اول است و ب) قسمت دوم در خلاف جهت قسمت اول است.

حل:

$$\begin{cases} t_1 = 1\min = 60 s \\ v_1 = 12\frac{m}{s} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} t_2 = 2\min = 120 s \\ v_2 = 16\frac{m}{s} \end{cases}$$

الف)

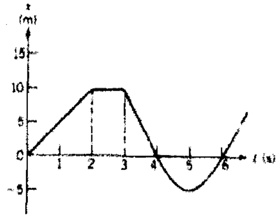
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{(12\times 60) + (16\times 120)}{60 + 120} = 14/67\frac{m}{s}$$

ب)

$$v_2 = -16\frac{m}{s}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{(12\times 60) + ((-16)\times 120)}{60 + 120} = 6/67\frac{m}{s}$$

۳. از منحنی x بر حسب t در شکل ۲۳، سرعت متوسط را در هر یک از بازه های زمانی زیر پیدا کنید: الف) o تا ۲s، ب) ۱ تا ۳s، ج) ۲ تا ۴s، د) ۴ تا ۶s



حل: الف)

$$x_1 = o \quad , \quad x_2 = 10m \quad , \quad t_1 = o \quad , \quad t_2 = 2s$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 0}{2 - 0} = 5\frac{m}{s}$$

ب)

$$x_1 = 5m \quad , \quad x_2 = 10m \quad , \quad t_1 = 1s \quad , \quad t_2 = 3s$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 5}{3 - 1} = 2/5\frac{m}{s}$$

ج)

$$x_1 = 10m \quad , \quad x_2 = o \quad , \quad t_1 = 2s \quad , \quad t_2 = 4s$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 10}{4 - 2} = -5\frac{m}{s}$$

د)

$$x_1 = o \quad , \quad x_2 = o \quad , \quad t_1 = 4s \quad , \quad t_2 = 6s$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{6 - 4} = 0$$

۴. یک مسابقه اتومبیل رانی به مسافت ۵۰۰Km در مسیر بسته ۱۰ کیلومتری انجام می شود. اتومبیل A مسافت تعیین شده را با رکورد ۴ ساعت طی می کند و در عین حال ۱/۵ دور از اتومبیل B جلوتر است. رکورد اتومبیل B چقدر است؟

حل:

$$\Delta x_A = \Delta x = ۵۰۰\,Km$$

$$\Delta t_A = ۴h$$

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_A} = \frac{۵۰۰}{۴} = ۱۲۵\frac{Km}{h}$$

$$\Delta x_B = \Delta x - (۱/۵ \times ۱۰) = ۵۰۰ - ۱۵ = ۴۸۵\,Km$$

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_A} = \frac{۴۸۵}{۴} = ۱۲۱/۲۵\,\frac{Km}{h}$$

$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} \quad \rightarrow \quad \Delta t_B = \frac{\Delta x}{v_B} = \frac{۵۰۰}{۱۲۱/۲۵} = ۴/۱۲۳۷h$$

$$۰/۱۲۳۷ \times ۶۰ = ۷/۴۲۲\min$$

$$۰/۴۲۲ \times ۶۰ = ۲۵/۳۲s$$

در این مسافت ۵۰۰Km، رکورد اتومبیل B، ۴ ساعت و ۷ دقیقه و ۲۵/۳۲ ثانیه است

۵. با استفاده از منحنی شکل ۲۳، سرعت لحظه ای متحرک را در هر یک از زمانهای زیر تخمین بزنید: الف) ۱s، ب) ۲/۵s، ج) ۳/۵s، د) ۴/۵s، ه) ۵s

حل: شیب خط مماس (m) بر منحنی مکان – زمان سرعت لحظه ای را نشان می دهد.

الف) در قسمت اول مسیر بین زمانهای صفر تا ۲s شیب خط $۵\frac{m}{s}$ است

$$m = \frac{۱۰ - ۰}{۲ - ۰} = ۵\frac{m}{s}$$

ب) در قسمت دوم مسیر بین زمانهای ۲s تا ۳s شیب خط صفر است چون مکانها با هم برابر است.

ج) در قسمت سوم مسیر بین زمانهای ۳s تا ۴s شیب خط $-۱۰\frac{m}{s}$ است

$$m=\frac{\circ-۱۰}{۴-۳}=-۱۰\frac{m}{s}$$

د) مطابق نمودار در ۴/۵s مکان متحرک در ۳m- از مبداء قرار دارد

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{\circ}t$$

$$-۳=\frac{۱}{۲}\times a\times(۴/۵)^{۲}+(-۱۰)\times(۴/۵) \quad \rightarrow \quad a=۴/۱۵\ \frac{m}{s^{۲}}$$

$$v=at+v_{\circ}=(۴/۱۵)\times(۴/۵)-۱۰=۸/۷\frac{m}{s}$$

ه) در ۵s شیب خط صفر است.

بخش ۳-٤- شتاب

۶. پرنده ای به مدت ۱۵s با سرعت $۲۰\ \frac{m}{s}$ به طرف شمال پرواز می کند و بعد از ۵s استراحت، به مدت ۱۰s با سرعت $۲۵\ \frac{m}{s}$ به طرف جنوب پرواز می کند. برای کل این مدت، کمیتهای زیر را پیدا کنید: الف) تندی متوسط، ب) سرعت متوسط و ج) شتاب متوسط پرنده.

حل:

$$\begin{cases}t_{۱}=۱۵s\\ v_{۱}=۲۰\frac{m}{s}\quad\uparrow\end{cases},\qquad \begin{cases}t_{۲}=۵s\\ v_{۲}=o\end{cases},\qquad \begin{cases}t_{۳}=۱۰s\\ v_{۳}=۲۵\frac{m}{s}\quad\downarrow\end{cases}$$

$$x_{۱}=v_{۱}t_{۱}=۲۰\times۱۵=۳۰۰m \qquad , \qquad x_{۲}=v_{۲}t_{۲}=o$$

$$x_{۳}=v_{۳}t_{۳}=۱۰\times۲۵=۲۵۰m$$

مسافت طی شده = L و جابجایی Δx

$$L = x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳۰۰ + ۰ + ۲۵۰ = ۵۵۰\ m$$
$$\Delta x = x_۳ - x_۱ = ۲۵۰ - ۳۰۰ = -۵۰\ m$$
$$\Delta t = t_۱ + t_۲ + t_۳ = ۱۵ + ۵ + ۱۰ = ۳۰\ s$$

الف)

$$\bar{u} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۵۵۰}{۳۰} = ۱۸/۳\ \frac{m}{s}$$

ب)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{۵۰}{۳۰} = -۱/۶۷\ \frac{m}{s}$$

ج)

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} = \frac{-۲۵ - ۲۰}{۳۰} = -۱/۵\ \frac{m}{s^۲}$$

۷. ذره ای در $t = ۳s$ و $x = ۷m$ است و سرعتی برابر با $v = ۴\frac{m}{s}$ دارد. در $t = ۷s$ این ذره در $x = -۵m$ واقع شده و سرعتش $v = -۲\frac{m}{s}$ است. الف) سرعت متوسط این ذره و ب) شتاب متوسطش بین این دو لحظه چقدر است؟

حل:

الف) $t_۱ = ۳s$, $x_۱ = ۷m$, $v_۱ = ۴\frac{m}{s}$, $t_۲ = ۷s$, $x_۲ = -۵m$, $v_۲ = -۲\frac{m}{s}$

$$\bar{v} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۵ - ۷}{۷ - ۳} = -۳\ \frac{m}{s}$$

ب)

$$\bar{a} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۲ - ۴}{۷ - ۳} = -۱/۵\ \frac{m}{s^۲}$$

۸ مکان ذره ای بر حسب زمان معادله $x = ۴ - ۵t + ۳t^۲$ بیان می شود که در آن x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. الف) سرعت لحظه ای و شتاب لحظه ای این ذره در $t = ۳s$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی این ذره ساکن است؟

حل: الف)

$$x = ۴ - ۵t + ۳t^۲$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -۵ + ۶t$$

$$t = ۳s \qquad \rightarrow \qquad v = -۵ + (۶ \times ۳) = ۱۳ \ \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = ۶$$

شتاب ثابت است

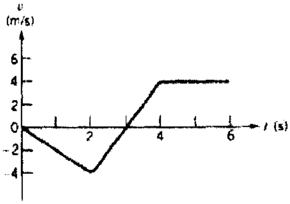
ب)

$$v = o$$

$$o = -۵ + ۶t \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{۵}{۶} = ۰/۸۳ s$$

۹. از منحنی v بر حسب t در شکل ۲۴، کمیتهای زیر را پیدا کنید: الف) زمان یا زمانهایی را که ذره ساکن است. ب) زمانی را که در آن جهت حرکت ذره معکوس می شود (اگر بشود).

ج) شتاب متوسط ذره بین $t = ۱s$ و $t = ۴s$، د) شتاب در لحظه $t = ۳s$.



حل: الف) در $t = o$ و در $t = ۳s$ ذره ساکن است چون سرعت صفر است.

ب) در $t = ۳s$ جهت حرکت ذره عکس می شود چون علامت سرعت از منفی به مثبت تغییر می کند.

ج)

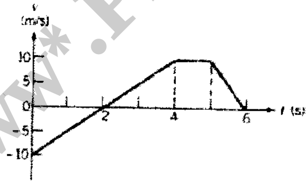
$$t_۱ = ۱s \quad , \quad v_۱ = -۲\frac{m}{s} \quad , \quad t_۲ = ۴s \quad , \quad v_۲ = ۴\frac{m}{s}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۴-(-۲)}{۴-۱} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

د) چون در $t = ۳s$ سرعت صفر است پس شتاب نیز صفر می شود.

بخش ۳-۵- استفاده از مساحتها

۱۰. با استفاده از نمودار v بر حسب t در شکل ۲۵، الف) سرعت متوسط و ب) تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیه اول حساب کنید.



حل: مساحت زیر نمودار سرعت زمان را بدست می آوریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۲\times(-۱۰)}{۲} = -۱۰$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(۱+۴)\times۱۰}{۲} = ۲۵$$

$$\Delta x = -۱۰ + ۲۵ = ۱۵m \qquad , \qquad L = |-۱۰| + ۲۵ = ۳۵m$$

الف)

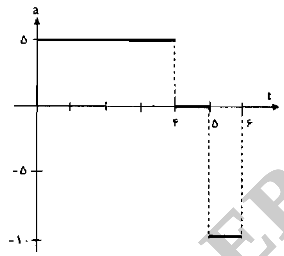
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۵}{۶} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

ب)

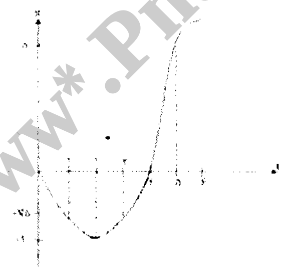
$$\bar{u} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۳۵}{۶} = ۵/۸۳\frac{m}{s}$$

۱۱. با استفاده از نمودار شکل ۲۵، الف) نمودار a بر حسب t، ب) نمودار x بر حسب t را رسم کنید. فرض کنید که در $t=o$ متحرک در مبداء بوده است. ج) شتاب متوسط در ۶ ثانیه اول چقدر است؟ د) شتاب در لحظه $t=۲s$ چقدر است؟

حل: الف)



ب)



ج)

$$\overline{a}=\frac{v-v_{\circ}}{t-t_{\circ}}=\frac{o-(-۱۰)}{۶-o}=۱/۶۷\ \frac{m}{s^{۲}}$$

د) مطابق نمودار در قسمت الف: $a=۵\ \frac{m}{s^{۲}}$

بخش ۳-۶- معادلات سینماتیک (شتاب ثابت)

۱۲. گلوله ای با سرعت $v = ۹۰۰ \frac{m}{s}$ از لوله ۶۰ سانتی متری یک تفنگ وینچستر خارج می شود. الف) شتاب گلوله چقدر بود است؟ ب) چقدر طول کشیده است تا گلوله این لوله را طی کند؟

حل: الف)

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$(۹۰۰)^۲ - o = ۲ \times a \times (۰/۶) \qquad \rightarrow \qquad a = ۶/۷۵ \times ۱۰^۵ \ \frac{m}{s^۲}$$

ب)

$$v = at + v_\circ$$

$$۹۰۰ = (۶/۷۵ \times ۱۰^۵) \times t + o \qquad \rightarrow \qquad t = ۰/۰۰۱۳ \ s$$

۱۳. خودرویی که با سرعت $۱۱۲ \frac{Km}{h}$ در حرکت است ترمز می کند و پس از طی 64m می ایستد. این خودرو با چه شتابی و در چه مدتی متوقف شده است؟ در یک آزمایش ایمنی (با راننده مصنوعی) همین خودرو با همان سرعت اولیه از جلو با دیوار بتونی برخورد می کند و 1m در خودش فرو می رود. در این صورت شتاب توقف چقدر بوده است؟ و چقدر طول کشیده تا خودرو کاملاً متوقف شود؟

حل:

$$v = o \qquad , \qquad \Delta x = ۶۴ m$$

$$v_\circ = ۱۱۲ \frac{Km}{h} = ۱۱۲ \frac{Km}{h} \times \frac{۱۰۰۰ m}{۱ Km} \times \frac{۱ h}{۳۶۰۰ s} = ۳۱/۱ \frac{m}{s}$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$o - (۳۱/۱)^۲ = ۲ \times a \times ۶۴ \qquad \rightarrow \qquad a = -۷/۵۶ \ \frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_\circ$$

$$o = (-۷/۶۵) \times t + ۳۱/۱ \qquad \rightarrow \qquad t = ۴/۱ s$$

$$v^{۲} - v_{\circ}^{۲} = ۲a(\Delta x)$$

$$o - (۳۱/۱)^{۲} = ۲ \times a \times ۱ \qquad \rightarrow \qquad a = -۴۸۳/۶ \ \frac{m}{s^{۲}}$$

$$v = at + v_{\circ}$$

$$o = (-۴۸۳/۶) \times t + ۳۱/۱ \qquad \rightarrow \qquad t = ۰/۰۰۶ \ s$$

۱۴. قطاری به طول ۴۴m در ایستگاه متوقف است و جلوی آن ۱۰۰m با چراغ راهنمایی ایستگاه فاصله دارد. اگر این قطار به حرکت در بیاید و با آهنگ ثابت $۰/۵\frac{m}{s^{۲}}$ شتاب بگیرد، الف) چقدر طول می کشد تا به تمامی از جلوی چراغ عبور کند؟ ب) سر و ته هر یک با چه سرعتی از جلوی چراغ می گذرند؟

حل: $\Delta x = ۱۰۰ \ m$, $a = ۰/۵ \ \frac{m}{s^{۲}}$, $v_{\circ} = o$, $L = ۴۴ m$

الف)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲} a t^{۲} + v_{\circ} t$$

$$۱۰۰ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۵ \times t^{۲} + o \qquad \rightarrow \qquad t_{۱} = ۲۰ \ s$$

$t_{۱} = ۲۰ \ s$ زمانی که ابتدای قطار به چراغ می رسد.

چون تمامی قطار باید از چراغ عبور کند پس زمان عبور انتهای قطار را از چراغ را بدست می آوریم:

$$\Delta x + L = \frac{۱}{۲} a t^{۲} + v_{\circ} t$$

$$۱۰۰ + ۴۴ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۵ \times t^{۲} + o \qquad \rightarrow \qquad t_{۲} = ۲۴ \ s$$

ب)

$t_1 = ۲۰\ s$

$v = at + v_\circ \qquad \rightarrow \qquad v_1 = ۰/۵ \times ۲۰ + o = ۲\ \frac{m}{s}$

$t_۲ = ۲۴\ s$

$v = at + v_\circ \qquad \rightarrow \qquad v_۲ = ۰/۵ \times ۲۴ + o = ۱۲\ \frac{m}{s}$

۱۵. کامیونی با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ در حرکت است. راننده ناگهان متوجه گوساله ای می شود که ۷۰ متر جلوتر در وسط جاده ایستاده است. اگر زمان واکنش راننده ۰/۵s و حداکثر شتاب کند کننده ترمز $۸\frac{m}{s^۲}$ باشد آیا راننده می تواند (بدون پیچیدن به چپ و راست) از زیر گرفتن گوساله جلوگیری کند؟

حل: زمان واکنش راننده ۰/۵s است یعنی مسافتی که قبل از ترمز کردن طی می کند.

$x_1 = vt = ۳۰ \times ۰/۵ = ۱۵\ m$

$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(\Delta x)$

$o - (۳۰)^۲ = ۲ \times (-۸) \times x_۲ \qquad \rightarrow \qquad x_۲ = ۵۶/۲۵\ \ m$

$x_1 + x_۲ = ۱۵ + ۵۶/۲۵ = ۷۱/۲۵\ \ m \approx ۷۱/۳\ m$

$\Delta x = ۷۱/۳ - ۷۰ = ۱/۳\, m$

خیر ۱/۳ متر کم می آورد

۱۶. دوچرخه سواری که با سرعت ثابت $۱۲\frac{m}{s}$ در حرکت است، طوری سرعتش را تغییر می دهد که در ۴ ثانیه بعدی مسافت ۳۲m را طی می کند. الف) شتاب متوسط او در این مدت و ب) سرعتش در پایان این مدت چقدر است؟

حل: الف)

$$v_0 = 12\frac{m}{s} \quad , \quad t = 4s \quad , \quad \Delta x = 32m$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$32 = \frac{1}{2} \times a \times (4)^2 + 12 \times 4 \quad \to \quad a = -2\frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0$$

$$v = (-2) \times 4 + 12 = 4\frac{m}{s}$$

بخش ۳-۷- سقوط آزاد در راستای قائم

۱۷. سنگی که از سطح زمین به بالا پرتاب شده است تا ارتفاع ۲۵m اوج می گیرد. اگر این سنگ با همین سرعت اولیه از سطح کره ماه به بالا پرتب شود چقدر اوج خواهد گرفت؟

(شتاب ثقل در کره ماه $\frac{1}{6}$ شتاب ثقل در زمین است.)

حل:

$$\Delta y_1 = 25m \quad , \quad g_e = 9/8\frac{m}{s^2} \quad , \quad g_m = \frac{1}{6}g_e = \frac{1}{6} \times 9/8 = 1/63\frac{m}{s^2} \quad , \quad v = o$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y_1)$$

$$o^2 - v_0^2 = -2 \times 9/8 \times 25 \quad \to \quad v_0 = 22/1\frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y_2)$$

$$o^2 - (22/1)^2 = -2 \times 1/63 \times \Delta y_2 \quad \to \quad \Delta y_2 = 150m$$

۱۸. سکه ای که از دهانه چاهی رها شده است بعد از ۱/۵s به سطح آب برخورد می کند.

الف) عمق چاه چقدر است؟ ب) سکه با چه سرعتی به آب می رسد؟

حل: الف)

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{\circ} t$$

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times (۱/۵)^{۲} + o = -۱۱/۰۲۵ \ m$$

ب)

$$v = -gt + v_{\circ}$$

$$v = -۹/۸ \times ۱/۵ + o = -۱۴/۷ \frac{m}{s}$$

۱۹. تیری در جهت قائم از کمان رها می شود و ۸S طول می کشد تا بـه سطح زمین برگـردد. این تیر تا چه ارتفاعی اوج گرفته است و سرعت اولیه آن چقدر بوده است؟

حل: چون در مسیر رفت و برگشت تیر هیچ تغییری ایجـاد نـشده پـس زمـان رفـت ($t_۱$) بـا زمان برگشت ($t_۲$) برابر است.

$$t = t_۱ + t_۲ = ۸ s \qquad \rightarrow \qquad t_۱ = t_۲ = ۴ \ s$$

$$v = -g t_۱ + v_{\circ}$$

$$o = -۹/۸ \times ۴ + v_{\circ} \qquad \rightarrow \qquad v_{\circ} = ۳۹/۲ \ \frac{m}{s}$$

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{\circ} t$$

$$\Delta y = -(\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times (۴)^{۲}) + (۳۹/۲ \times ۴) = ۷۸/۴ \, m$$

۲۰. یک موشک بازیچه ای با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در حال صعود است. وقتی این موشک بـه ارتفـاع ۲۴m از سطح زمین رسیده است، اتصال یکی از پیچهایش (کـه قـبلاً شـل بـوده اسـت) بـه کلی با آن قطع می شود. الف) این پیچ حداکثر تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا مـی رود؟ و ب) با چه سرعتی به زمین می خورد؟

حل: الف) فاصله از سطح زمین = Δy

$$\Delta y_1 = 24m \quad , \quad v_0 = 20\frac{m}{s}$$
$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y_2)$$
$$o-(20)^2 = -2\times 9/8 \times \Delta y_2 \quad \rightarrow \quad \Delta y_2 = 20/4m$$
$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = 24 + 20/4 = 44/4m$$

ب) در لحظه برگشت سرعت در نقطه اوج را به عنوان سرعت اولیه در نظر می گیریم و V سرعت بر خورد با زمین است و چون به سمت پایین حرکت می کنیم Δy منفی است.

$$\Delta y = 44/4m \quad , \quad v_0 = o$$
$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y_2)$$
$$v^2 - o = -2\times 9/8 \times (-44/4) \quad \rightarrow \quad v = -29/5\frac{m}{s}$$

۲۱. از سطح زمین در ارستای قائم به هوا پرتاب می شود. چقدر $20\frac{m}{s}$ تیله ای با سرعت اولیه طول می کشد تا این تیله الف) به نصف ارتفاع اوج خودش برسد. ب) سرعتی برابر با نصف سرعت اولیه اش داشته باشد.

الف)

$$v_0 = 20\frac{m}{s}$$
$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y)$$
$$o^2 - (20)^2 = -2\times 9/8 \times \Delta y \quad \rightarrow \quad \Delta y = 20/4m$$
$$\Delta y_1 = \frac{\Delta y}{2}$$
$$\Delta y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta y}{2} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$\frac{۲۰/۴}{۲}=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times t^{۲}+۲۰t$$

$$-۴/۹t^{۲}+۲۰t-۱۰/۲=o$$

$$t=\frac{-۲۰\pm\sqrt{(۲۰)^{۲}-(۴\times ۴/۹\times ۱۰/۲)}}{۲\times(-۴/۹)}=\begin{cases}t_{۱}=۰/۶s\\ t_{۲}=۳/۴۸s\end{cases}$$

$t_۱$ در مسیر رفت و $t_۲$ در مسیر برگشت است که تیله به این ارتفاع می رسد.

ب) $v_۱$ در مسیر رفت و $v_۲$ در مسیر برگشت است.

$$v_{۱}=\frac{v_{\circ}}{۲}$$

$$v=-gt+v_{\circ}$$

$$\frac{v_{\circ}}{۲}=-۹/۸t+v_{\circ}\quad\rightarrow\quad t=\frac{v_{\circ}}{۲g}=\frac{۲۰}{۲\times ۹/۸}=۱/۰۲s$$

$$v_{۲}=-\frac{v_{\circ}}{۲}$$

$$v=-gt+v_{\circ}$$

$$-\frac{v_{\circ}}{۲}=-۹/۸t+v_{\circ}\quad\rightarrow\quad t=\frac{۳v_{\circ}}{۲g}=\frac{۳\times ۲۰}{۲\times ۹/۸}=۳/۰۶s$$

۲۲. از لبه بام ساختمانی به ارتفاع ۵۰m گلوله ای را به بالا پرتاب می کنیم. اگر نقطه اوج این گلوله ۲۰m بالاتر از سطح بام باشد، الف) چقدر طول می کشد (از لحظه پرتاب) تا به سطح زمین برخورد کند. ب) با چه سرعتی به زمین می رسد؟ ج) در چه زمانی در ارتفاع ۲۰m پایین تر از سطح بام است؟

حل: $\Delta y_{۱}=۵۰m\quad,\quad\Delta y_{۲}=۲۰m\quad,\quad v=o$

الف)

$$v^{۲}-v_{\circ}^{۲}=-۲g(\Delta y_{۲})$$

$$o-v_{\circ}^{۲}=-۲\times ۹/۸\times ۲۰\quad\rightarrow\quad v_{\circ}=۱۹/۸\frac{m}{s}$$

$$\Delta y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

$$-50 = -\frac{1}{2} \times 9/8 \times t^2 + 19/8 t$$

$$4/9 t^2 - 19/8 t - 50 = 0$$

$$t = \frac{19/8 \pm \sqrt{(19/8)^2 - (4 \times 4/9 \times (-50))}}{2 \times 4/9} = \begin{cases} t_1 = 5/8 s \\ t_2 = -1/7 s \end{cases}$$

زمان t_1 زمان رسیدن به سطح زمین است.

ب) از نقطه اوج اگر حساب کنیم سرعت اولیه صفر می شود:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = 50 + 20 = 70 m$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y)$$

$$v^2 - 0 = -2 \times 9/8 \times (-70) \quad \rightarrow \quad v = -37/04 \ \frac{m}{s}$$

ج)

$$\Delta y = \Delta y_2 + 20 = 20 + 20 = 40 m$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(\Delta y)$$

$$v^2 - 0 = -2 \times 9/8 \times (-40) \quad \rightarrow \quad v = -28 \ \frac{m}{s}$$

۲۳. پرتابه ای که از سطح زمین در جهت قائم شلیک شده است وقتی به ارتفاع ۴/۲m می رسد ۶۰ درصد از سرعت اولیه اش را از دست داده است. این پرتابه تا چه ارتفاعی از زمین اوج می گیرد و زمان پرواز (یعنی رفت و برگشت) آن چقدر است؟

حل:

$$\Delta y = ۴/۲m \quad , \quad v = (۱ - \frac{۶۰}{۱۰۰})v_\circ = ۰/۴v_\circ \ \frac{m}{s}$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = -۲g(\Delta y)$$

$$(۰/۴v_\circ)^۲ - v_\circ^۲ = -۲\times۹/۸\times۴/۲ \quad \rightarrow \quad v_\circ = ۹/۹ \ \frac{m}{s}$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = -۲g(\Delta y)$$

$$o - (۹/۹)^۲ = -۲\times۹/۸\times\Delta y \quad \rightarrow \quad \Delta y = ۵m$$

$$v = -gt + v_\circ$$

$$o = -۹/۸t + ۹/۹ \quad \rightarrow \quad t = ۱/۰۱ \ s$$

T زمان در مسیر رفت است که با زمان برگشت برابر است (چون تغییری در مسیر نداریم)

$$t_۱ = t_۲ = ۱/۰۱s \quad \rightarrow \quad t = t_۱ + t_۲ = ۲/۰۲ \ s$$

مسائل تکمیلی

۲۴. قطار A به طول ۱Km با سرعت ثابت $۵۰\frac{m}{s}$ در حرکت است. قطار B به طول ۰/۵Km که روی ریل مجاور توقف کرده است، به محض آنکه تـه قطار A از سر آن عبـور کـرد شروع به حرکت می کند و با شتاب $۳\frac{m}{s^۲}$ سرعتش را زیاد می کند. سـرعت B حـداکثر می تواند به $۶۰\frac{m}{s}$ برسد. الف) چقدر طول می کشد تا قطار B از قطار A جلو بزند. (یعنی انتهای B از ابتدای A بگذرد) ب) در این مدت A چه مسافتی را طی کرده است؟

حل: الف)

$$L_A = ۱Km \quad , \quad L_B = ۰/۵Km \quad , \quad v_A = ۵۰\frac{m}{s} \quad , \quad v_{\circ B} = o$$

$$v_B = ۶۰\frac{m}{s} \quad , \quad a_B = ۳\frac{m}{s^۲}$$

$$v_B = a_B t_B + v_{\circ B}$$

$$۶۰ = ۳t_B + o \quad \rightarrow \quad t_B = ۲۰s$$

۲۰s طول می کشد تا قطار به سرعت ثابت $۶۰\frac{m}{s}$ برسد. در این مدت دو قطار بـه انـدازه ۴۰۰m از هم فاصله می گیرند

$$x_A = v_A t_B = ۵۰ \times ۲۰ = ۱۰۰۰m$$

$$x_B = \frac{۱}{۲} a_B t_B^{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times (۲۰)^{۲} = ۶۰۰m$$

$$\Delta x = x_A - x_B = ۱۰۰۰ - ۶۰۰ = ۴۰۰m$$

برای اینکه قطار B از قطار A جلو بزند باید عـلاوه بـر ۱/۵Km (مجمـوع طـول دو قطـار) باید ۴۰۰m را هـم طـی کنـد (۱۵۰۰+۴۰۰=۱۹۰۰m). سـرعت قطـار B بعـد از ۲۰s ثابـت است. چون دو قطار در یک جهت حرکت می کنند سرعت نـسبی آن دو را حـساب مـی کنیم.

$$v = v_B - v_A = ۶۰ - ۵۰ = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$x = vt$$

$$۱۹۰۰ = ۱۰t \qquad \rightarrow \qquad t = ۱۹۰s$$

۱۹۰s برای زمانی که از قطار سرعت قطار B ثابت است و ۲۰ ثانیه هم از قبل بـود کـه جمعـاً ۲۱۰ ثانیه طول می کشد تا انتهای قطار B از ابتدای قطار A عبور کند.

ب)

$$x_A = v_A t$$

$$x_A = ۵۰ \times ۲۱۰ = ۱۰۵۰۰m = ۱۰/۵\,Km$$

۲۵. گلوله A با سرعت اولیه $۵\frac{m}{s}$ از بالای برجی به ارتفاع ۱۰۰m در امتـداد قـائم بـه آسـمان پرتاب می شود. ۲۰ ثانیه بعد گلوله B از همان نقطه با سرعت اولیه $۲۰\frac{m}{s}$ بـه طـرف زمـین پرتاب می شود. الف) این گلوله ها در چه ارتفاعی و در چه زمانی به هـم مـی رسـند؟ ب) در این موقع سرعت هر یک از آنها چقدر است؟

حل: الف)

$$v_{\circ A} = ۵\frac{m}{s} \quad , \quad v_{\circ B} = -۲۰\frac{m}{s} \quad , \quad \Delta y = ۱۰۰m \quad , \quad t_A = t \quad , \quad t_B = t - ۲$$

$$y_A = y_B \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_A = -\frac{۱}{۲}g{t_A}^۲ + v_{\circ A}t_A = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + ۵t \\ y_B = -\frac{۱}{۲}g{t_B}^۲ + v_{\circ B}t_B = -\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ - ۲۰(t-۲) \end{cases}$$

$$-\frac{۱}{۲}gt^۲ + ۵t = -\frac{۱}{۲}g(t-۲)^۲ - ۲۰(t-۲)$$

$$-\frac{۱}{۲}gt^۲ + ۵t = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + ۲gt - ۲g - ۲۰t + ۴۰$$

$$(۵ - ۲g + ۲۰)t = ۴۰ - ۲g \quad \rightarrow \quad ۵/۴t = ۲۰/۴ \quad \rightarrow \quad t = ۳/۷۸s$$

$$y_A = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times (۳/۷۸)^۲ + (۵\times ۳/۷۸) = -۵۱/۱۱m$$

$$\Delta y = ۱۰۰ - ۵۱/۱۱ \approx ۴۸/۹m$$

ب) گلوله A در مسیر برگشت است.

$$v_A = -gt + v_{\circ A}$$

$$v_A = -۹/۸\times ۳/۷۸ + ۵ = -۳۲/۰۴\frac{m}{s}$$

$$v_B = -gt + v_{\circ B}$$

$$v_B = -۹/۸\times ۳/۷۸ - ۲۰ = -۵۷/۰۴\frac{m}{s}$$

۲۶. یوزپلنگ می تواند در مدت ۲S سرعت خودش را (از صفر) به $۱۰۵\frac{Km}{h}$ برساند و به مدت ۱۵S با همین سرعت بدود (بعد مجبور است استراحت کند.) آهو می تواند در مدت ۲S سرعت خودش را از صفر به $۹۰\frac{Km}{h}$ برساند و مدت نسبتاً زیادی با همین سرعت بدود. یوزپلنگ در فاصله ۱۰۰ متری خودش آهویی را می بیند و بلافاصله به طرف او هجوم می برد. اما ۰/۵S طول می کشد تا آهو واکنش نشان دهد و شروع به فرار کند.

(فرض کنید شکار و شکارچی هر دو از حالت سکون شروع به حرکت می کنند.) الف) آیا یوزپلنگ می تواند آهو را بگیرد؟ ب) اگر نمی تواند تا چه حدی می تواند به آهو نزدیک شود؟

حل: یوزپلنگ را با B و آهو را با A مشخص می کنیم:

$$\begin{cases} v_{\circ A} = o \\ v_A = ۹۰\dfrac{Km}{h} = ۲۵\dfrac{m}{s} \\ t_A = ۲s \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} v_{\circ B} = o \\ v_B = ۱۰۵\dfrac{Km}{h} = ۲۹/۱۳\dfrac{m}{s} \\ t_B = ۲s \end{cases}$$

$$v_A = a_A t_A + v_{\circ A}$$

$$۲۵ = ۲a + o \quad \rightarrow \quad a_A = ۱۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

$$v_B = a_B t_B + v_{\circ B}$$

$$۲۹/۱۳ = ۲a + o \quad \rightarrow \quad a_A = ۱۴/۶\frac{m}{s^۲}$$

الف) خیر

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t_B^۲ = \frac{۱}{۲}\times(۱۴/۶)\times(۲)^۲ = ۲۹/۲m$$

$$v_B = a_B t_B = (۱۴/۶)\times ۲ = ۲۹/۲\frac{m}{s}$$

$$x'_B = v_B t = (۲۹/۲)\times ۱۵ = ۴۳۸m$$

$$x = x'_B + x_B = ۴۳۸ + ۲۹/۲ = ۴۶۷/۲m$$

۴۶۷/۲m مسافتی است که یوزپلنگ قبل از استراحت می تواند طی کند.

$$x_A = \frac{۱}{۲}a_A t_A^۲ = \frac{۱}{۲}\times(۱۲/۵)\times(۲)^۲ = ۲۵m$$

۲۵m مسافتی است که آهو می تواند شتاب بگیرد.

چون زمان واکنش آهو ۰/۵s است پس مسافتی که تا قبل از استراحت یوزپلنگ طی می کند با سرعت ثابت $۲۵\frac{m}{s}$:

$$x_A = v_A t + x_{\circ A}$$
$$x_A = ۲۵ \times (۱۵ - ۰/۵) + ۲۵ = ۳۸۷/۵\,m$$

چون فاصله اولیه آهو و یوزپلنگ ۱۰۰m است پس فاصله آهو از مکان اولیه اش ۴۸۷/۵m=۱۰۰+۳۸۷/۵ است و یوز پلنگ مسافت ۲۰/۳m=۴۸۷/۵-۴۶۷/۲ را کم می آورد.

۲۷. کوهنوردی برای اینکه بتواند ارتفاع صخره ای را تخمین بزند سنگی را از بالای این صخره رها می کند و ۲/۵s بعد صدای برخورد آنرا با زمین (پای صخره) می شنود. الف) فرض کنید سرعت صوت (در مقایسه با سرعت سقوط سنگ) آنقدر زیاد است که می توانید زمان لازم برای رسیدن صدای برخورد سنگ به بالای صخره را ناچیز بگیرید. ب) سرعت صوت در هوا را $۳۳۰\frac{m}{s}$ بگرید و زمان مربوط به آن را هم به حساب آورید.

حل: الف)

$$v_\circ = o \quad , \quad t = ۲/۵\,s$$
$$\Delta y = -\frac{۱}{۲} g t^۲ + v_\circ t = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times (۲/۵)^۲ = -۳۰/۶۲۵\,m$$

ب) سرعت صوت مقداری ثابت است

$$v_s = ۳۳۰\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ \\ y = v_s t_۲ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} t_۱ + t_۲ = ۲/۵\,s \\ t_۲ = ۲/۵ - t_۱ \end{cases}$$

$$-\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ = v_s t_۲ \quad \rightarrow \quad -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ = v_s(۲/۵ - t_۱)$$

$$-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times t_۱^۲ = ۳۳۰ \times (۲/۵ - t_۱)$$

$$-۴/۹t_۱^۲ + ۳۳۰t_۱ - ۸۲۵ = ۰$$

$$t_۱ = \frac{-۳۳۰ \pm \sqrt{(۳۳۰)^۲ - (۴\times(-۴/۹)\times(-۸۲۵))}}{۲\times(-۴/۹)} = \begin{cases} t = ۲/۴۱s \\ t = ۰/۰۹s \end{cases}$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt_۱^۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times (۲/۴۱)^۲ = ۲۸/۵\ m$$

۲۸. گلوله ای که از سطح زمین به بالا پرتاب شده است در زمان $t = ۲s$ به ارتفاع ۳۰m می رسد. این گلوله در چه لحظه دیگری در همین ارتفاع واقع می شود؟

حل:

$$\Delta y = ۳۰m \quad , \quad t = ۲s$$

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t$$

$$۳۰ = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times (۲)^۲ + ۲v_\circ \quad \rightarrow \quad v_\circ = ۲۴/۸\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + v_\circ t$$

$$۳۰ = -\frac{۱}{۲}\times ۹/۸ \times t^۲ + ۲۴/۸t$$

$$-۴/۹t_۱^۲+۲۴/۸t-۳۰=۰$$

$$t_۱=\frac{-۲۴/۸\pm\sqrt{(۲۴/۸)^۲-(۴\times(-۴/۹)\times(-۳۰))}}{۲\times(-۴/۹)}=\begin{cases}t=۲s\\t=۳/۰۶s\end{cases}$$

۲۹. موشکی از زمین به حرکت در می آید و در راستای قائم با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ به هوا می رود تا آنکه پس از ۸S سوختش تمام می شود. این موشک تا چه ارتفاعی اوج می گیرد و کلاً چه مدتی در هوا است؟

حل: الف) در مدت ۸S با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ تا ارتفاع $\Delta y_۱$ بالا می آید. در لحظه پرتاب هم سرعت اولیه صفر است

$$a=۴\frac{m}{s^۲}\quad,\quad t_۱=۸s\quad,\quad v_\circ=o$$

$$v_۱=v_\circ+at_۱=o+۴\times۸=۳۲\frac{m}{s}$$

$$\Delta y_۱=\frac{۱}{۲}gt_۱^۲+v_\circ t_۱=\frac{۱}{۲}\times۹/۸\times(۸)^۲+o=۱۲۸m$$

بعد از اتمام سوخت حرکت سقوط آزاد است و تا ارتفاع $\Delta y_۲$ بالا می رود تا به نقطه اوج می رسد که سرعت در اوج صفر است ($v_۲=o$)

$$v_۲^۲-v_۱^۲=-۲g(\Delta y_۲)$$

$$o-(۳۲)^۲=-۲\times۹/۸\times\Delta y_۲\qquad\rightarrow\qquad\Delta y_۲=۵۲/۲۴m$$

$$\Delta y=\Delta y_۱+\Delta y_۲=۱۲۸+۵۲/۲۴=۱۸۰/۲۴m$$

$$v_۲=-gt_۲+v_۱$$

$$o=-۹/۸\times t_۲+۳۲\qquad\rightarrow\qquad t_۲=۳/۲۶s$$

$$t=t_۱+t_۲=۸+۳/۲۶=۱۱/۲۶s$$

۳۰. در یک جاده باریک و مستقیم، اتومبیل A با سرعت $16\frac{m}{s}$ و اتومبیل B با سرعت $8\frac{m}{s}$ رو در روی هم در حرکت اند، وقتی فاصله آنها به ۴۸m می رسد هر دو راننده ترمز می گیرند. آهنگ کاهش سرعت برای A برابر با $4/2\frac{m}{s^2}$ و برای B برابر با $4\frac{m}{s^2}$ است. آیا این اتومبیل ها به هم برخورد می کنند؟ اگر پاسختان مثبت است، این برخورد در چه مکان و چه زمانی اتفاق می افتد؟

حل:

$$v_{\circ A} = 16\frac{m}{s} \quad , \quad v_{\circ B} = 8\frac{m}{s} \quad , \quad a_A = 4/2\frac{m}{s^2} \quad , \quad a_B = 4\frac{m}{s^2} \quad , \quad \Delta x = 100m$$

$$v_A^2 - v_{\circ A}^2 = -2g(\Delta x_A)$$

$$o - (16)^2 = 2 \times 4/2 \times \Delta x_A \qquad \rightarrow \qquad \Delta x_A = 30/48m$$

$$v_B^2 - v_{\circ B}^2 = -2g(\Delta x_B)$$

$$o - (8)^2 = 2 \times 4 \times \Delta x_B \qquad \rightarrow \qquad \Delta x_B = 8m$$

$$\Delta x' = \Delta x_A + \Delta x_B = 30/48 + 8 = 38/48m$$

چون مسافت طی شده توسط دو اتومبیل ۳۸/۴۸m کمتر از فاصله بین آن دو ۴۸m است پس برخوردی صورت نمی گیرد.

فصل ۴

مسئله ها

بخش ٤-۳- حرکت دو بعدی

۱. مکان ذره ای با گذشت زمان به صورت $\vec{r}(t) = (۳t^۲ - ۲t)\hat{i} + t^۳\hat{j}$ تغییر می کند. (r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است). الف) سرعت ذره در $t = ۲s$ ب) شتاب آن در $t = ۴s$ ج) شتاب متوسطش بین لحظات $t = ۱s$ و $t = ۳s$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$\vec{r}(t) = (۳t^۲ - ۲t)\hat{i} + t^۳$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (۶t - ۲)\hat{i} + ۳t^۲\ \hat{j}$$

$$\vec{v}(t=۲s)=((۶\times ۲)-۲)\hat{i}+(۳\times(۲)^۲)\hat{j}=۱۰\,\hat{i}+۱۲\,\hat{j}\ (\frac{m}{s})$$

ب)

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=۶\hat{i}+۶t\,\hat{j}$$

$$\vec{a}(t=۴s)=۶\hat{i}+(۶\times ۴)\,\hat{j}=۶\hat{i}+۲۴\,\hat{j}\ (\frac{m}{s^۲})$$

ج)

$$\begin{cases}\vec{v}_۱(t=۱s)=((۶\times ۱)-۲)\hat{i}+(۳\times(۱)^۲)\,\hat{j}=۴\,\hat{i}+۳\,\hat{j}\ (\frac{m}{s})\\ \vec{v}_۲(t=۳s)=((۶\times ۳)-۲)\hat{i}+(۳\times(۳)^۲)\,\hat{j}=۱۶\,\hat{i}+۲۷\hat{j}\ (\frac{m}{s})\end{cases}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(۱۶\,\hat{i}+۲۷\hat{j})-(۴\,\hat{i}+۳\,\hat{j})}{۳-۱}=۶\,\hat{i}+۱۲\,\hat{j}\qquad(\frac{m}{s^۲})$$

۲. الف) مکان ذره ای در مدت ۲s از $\vec{r}_۱=۳\,\hat{i}+۲\,\hat{j}-\hat{k}\ (m)$ به $\vec{r}_۲=۴\,\hat{i}-\hat{j}+۳\hat{k}\ (m)$ تغییر می کند. سرعت متوسط آن در این مدت چیست؟ ب) ذره ای به مدت ۵s شتاب برابر با $\vec{a}=-۷\,\hat{i}+۲\,\hat{j}\ (\frac{m}{s^۲})$ دارد. بعد از این مدت سرعت آن به $\vec{v}=۵\,\hat{i}-۲\hat{k}\ (\frac{m}{s})$ می رسد. سرعت اولیه اش چه بوده است؟

حل: الف)

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\vec{r}_۲-\vec{r}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(۳\,\hat{i}+۲\,\hat{j}-\hat{k})-(۴\,\hat{i}-\hat{j}+۳\hat{k})}{۲}=\frac{۱}{۲}\,\hat{i}-\frac{۳}{۲}\,\hat{j}+۲\hat{k}\qquad(\frac{m}{s})$$

ب)

$$\vec{v} = ۵\,\hat{i} - ۲\hat{k}\ \left(\frac{m}{s}\right) \qquad , \qquad \vec{a} = -۷\,\hat{i} + ۲\,\hat{j}\ \left(\frac{m}{s^۲}\right)$$

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_\circ$$

$$۵\,\hat{i} - ۲\hat{k} = (۷\,\hat{i} + ۲\,\hat{j}) \times ۵ + \vec{v}_\circ$$

$$\vec{v}_\circ = (۳۵\,\hat{i} + ۱۰\,\hat{j}) - (۵\,\hat{i} - ۲\hat{k}) = ۴۰\,\hat{i} - ۱۰\,\hat{j} + ۲\hat{k}$$

۳. ذره ای در $t = ۳s$ در مبداء واقع شده و سرعت آن $۱۵\frac{m}{s}$ در جهت ۳۷° بالای محور x است. در لحظه $t = ۵s$ این ذره به $x = ۲۰m$ و $y = ۳۵m$ می رسد. در حالیکه سرعت آن برابر $۳۰\frac{m}{s}$ در جهت ۵۳° بالای افق است. در این مدت الف) سرعت متوسط و ب) شتاب متوسط ذره چه بوده است؟

حل:

$$t_۱ = ۳s \quad , \quad x_۱ = o \quad , \quad y_۱ = o \quad , \quad v_۱ = ۱۵\frac{m}{s} \quad , \quad \theta = ۳۷^\circ \quad , \quad \vec{r}_۱ = o$$

$$\vec{v}_۱ = v_۱ \, Cos\theta\,\hat{i} + v_۱ \, Sin\theta\,\hat{j}$$

$$= ۱۵ \times Cos(۳۷)\,\hat{i} + ۱۵ \times Sin(۳۷)\,\hat{j} = ۱۲\hat{i} + ۹\hat{j}$$

$$t_۲ = ۳s \quad , \quad x_۲ = ۲۰m \quad , \quad y_۲ = ۳۵m \quad , \quad v_۲ = ۳۰\frac{m}{s}$$

$$\theta = ۵۳^\circ \quad , \quad \vec{r}_۲ = ۲۰\hat{i} + ۳۵\hat{j}$$

$$\vec{v}_۲ = v_۲ \, Cos\theta\,\hat{i} + v_۲ \, Sin\theta\,\hat{j}$$

$$= ۳۰ \times Cos(۵۳)\,\hat{i} + ۳۰ \times Sin(۵۳)\,\hat{j} = ۱۸\hat{i} + ۲۴\hat{j}$$

الف)

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{(۲۰\hat{i} + ۳۵\hat{j}) - o}{۵ - o} = ۴\hat{i} + ۷\hat{j} \qquad \left(\frac{m}{s}\right)$$

ب)

$$\vec{a}(t)=\frac{\vec{v}_۲-\vec{v}_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{(۱۸\hat{i}+۲۴\hat{j})-(۱۲\hat{i}+۹\hat{j})}{۵-o}=۱/۲\,\hat{i}+۳\,\hat{j}\qquad(\frac{m}{s^۲})$$

بخش ٤-٤- حرکت پرتابه

۴. از بالای صخره ای به ارتفاع ۱۰۰m سنگی در جهت °۵۳ بالای افق با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ به هوا پرتاب می شود. کمیتهای زیر را پیدا کنید: الف) زمان پرواز، ب) ارتفاع اوج (از زمین) ج) برد افقی و د) سرعت سنگ هنگام برخورد به زمین.

حل: الف)

$$v_\circ=۲۵\frac{m}{s}\qquad,\qquad y_\circ=۱۰۰m\qquad,\qquad \theta=۵۳^\circ$$

$$y=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ Sin\theta\, t+y_\circ$$

$$o=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times t^۲+۲۵\times Sin(۵۳)t+۱۰۰$$

$$-۴/۹t^۲+۲۰t+۱۰۰=o$$

$$t=\frac{-۲۰\pm\sqrt{(۲۰)^۲-(۴\times(-۴/۹)\times ۱۵)}}{۲\times(-۴/۹)}=\begin{cases}t_۱=-۳s\\ t_۲=۷s\end{cases}$$

ب)

$$H=\frac{v_\circ^۲ Sin^۲\theta}{۲g}=\frac{(۲۵)^۲\times(Sin(۵۳))^۲}{۲\times ۹/۸}=۲۰/۳m$$

H ارتفاع از لبه صخره است و ارتفاع اوج از زمین

$$y=H+۱۰۰=۲۰/۳+۱۰۰=۱۲۰/۳m$$

ج)

$$x=v_{\circ x}t=v_\circ Cos\theta\, t=۲۵\times Cos(۵۳)\times ۷=۱۰۵m$$

د)

$$\begin{cases} v_x = v_{\circ x} = v_\circ Cos\theta = ۲۵ \times Cos(۵۳) = ۱۵\ (\frac{m}{s}) \\ v_y = v_{\circ y} - gt = v_\circ Sin\theta - gt = ۲۵ \times Sin(۵۳) - (۹/۸ \times ۷) = -۴۸/۶\ (\frac{m}{s}) \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = ۱۵\hat{i} - ۴۸/۶\hat{j}$$

۵. توپی از زمین با سرعت اولیه $۱۴/۱\frac{m}{s}$ با زاویه ۴۵° نسبت به افق پرتاب می شود. شخصی در فاصله ۳۰m از محل پرتاب در امتداد صفحه پرتاب ایستاده است. این شخص (با شروع در لحظه پرتاب) باید با چه سرعتی و در کدام جهت بدود تا بتواند توپ را درست در لحظه ای که می خواهد به زمین بخورد، بگیرد؟

حل:

$$v_\circ = ۱۴/۱\frac{m}{s} \quad , \quad x = ۳۰\ m \quad , \quad \theta = ۴۵^\circ$$

$$R = \frac{v_\circ^۲ Sin(۲\theta)}{g} = \frac{(۱۴/۱)^۲ \times Sin(۲ \times ۴۵)}{۹/۸} = ۲۰/۳\ m$$

برد توپ کمتر از فاصله شخص تا نقطه پرتاب است پس شخص باید به طرف محل پرتاب بدود. برای بدست آوردن سرعت اولیه شخص باید زمان پرواز توپ را داشته باشیم.

$$T = \frac{۲v_\circ Sin\theta}{g} = \frac{۲ \times ۱۴/۱ \times Sin(۴۵)}{۹/۸} = ۲/۰۱\ s$$

فاصله شخص تا نقطه برخورد توپ به زمین $۳۰ - ۲۰/۳ = ۹/۷\ m$ است. پس شخص باید ۹/۷m را در مدت ۲/۰۱ ثانیه بدود تا به توپ برسد.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۹/۷}{۲/۰۱} = ۴/۷۷\ \frac{m}{s}$$

۶. اگر بازیکنی بتواند یک توپ بیسبال را در جهت 45° نسبت به سطح افق با چنان سرعتی پرتاب کند که برد افقی توپ ۱۰۰m باشد همین توپ را تا چه ارتفاعی می تواند در جهت قائم به بالا پرتاب کند؟

حل:

$$\theta = 45^\circ \quad , \quad R = 100m$$

$$R = \frac{v_0^2 \, Sin(2\theta)}{g}$$

$$100 = \frac{v_0^2 \times Sin(2\times 45)}{9/8} \quad \rightarrow \quad v_0^2 = 980 \, (\frac{m}{s})^2$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0)$$

$$o - 980 = -2\times 9/8 \times (y - y_0) \quad \rightarrow \quad (y - y_0) = 50m$$

۷. هواپیما در جهت 37° زیر افق به طرف زمین شیرجه می رود و وقتی ارتفاع آن از سطح زمین به ۲۰۰m می رسد، بسته ای را رها می کند. اگر این بسته ۴s در هوا باشد، الف) سرعت هواپیما و ب) برد افقی بسته را پیدا کنید.

حل: الف)

$$y = -200m \quad , \quad \theta = -37^\circ \quad , \quad t = 4s$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 Sin\theta \, t$$

$$-200 = -\frac{1}{2} \times 9/8 \times (4)^2 + v_0 \times Sin(-37) \times 4$$

$$-200 = -78/4 - 2/4 \times v_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{200 - 78/4}{2/4} = 50/7 \ \frac{m}{s}$$

ب)

$$R = \frac{v_0^2 \, Sin(2\theta)}{g} = \frac{(56/7)^2 \times Sin(2\times 37)}{9/8} = 315/34 \ m$$

۸. یک بسکتبالیست توپ را با زاویه 45° به طرف حلقه ای که در فاصله افقی ۴m و به ارتفاع ۰/۸m بالاتر از نقطه پرتاب قرار گرفته است پرتاب می کند. توپ باید چه سرعت اولیه ای داشته باشد تا به داخل حلقه بیفتد؟

حل:

$$y = 0/8m \quad , \quad R = 4m \quad , \quad \theta = 45^\circ$$

$$y = R\tan\theta - \frac{gR^2}{2v_0^2 Cos^2\theta}$$

$$0/8 = 4 \times \tan(45) - \frac{9/8 \times (4)^2}{2 \times v_0^2 \times Cos^2(45)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9/8 \times 16}{3/2}} = 7\,\frac{m}{s}$$

۹. توپی روی میزی به ارتفاع ۲m می غلتد و در فاصله افقی ۱/۶m از لبه میز به زمین می خورد. الف) سرعت اولیه توپ و ب) زمان پرواز آن چقدر بوده است؟

حل: الف)

$$y = -2m \quad , \quad x = 1/6m \quad , \quad \theta = 0$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 Cos^2\theta}$$

$$-2 = 1/6 \times \tan(0) - \frac{9/8 \times (1/6)^2}{2 \times v_0^2 \times Cos^2(0)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9/8 \times (1/6)^2}{2 \times 2}} = 2/5\,\frac{m}{s}$$

ب)

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{\circ} Sin\theta t$$

$$-۲ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^{۲} + ۲/۵ \times Sin(o) \times t$$

$$-۲ = -۴/۹ \times t^{۲} \qquad \rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{۲}{۴/۹}} = ۰/۶۳۲\ s$$

۱۰. سرعت گلوله ای که از سطح زمین به هوا پرتاب شده در ارتفاع ۹/۸m به $\vec{v} = ۲۴\,\hat{i} - ۸\,\hat{j}\ (\frac{m}{s})$ رسیده است. الف) سرعت اولیه گلوله و ب) ارتفاع اوج آنرا پیدا کنید.

حل:

$$y = ۹/۸ m \quad , \quad \vec{v} = ۲۴\,\hat{i} - ۸\,\hat{j}\ (\frac{m}{s}) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_x = ۲۴ \\ v_y = -۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{\circ} Cos\theta \\ v_y = v_{\circ} Sin\theta - gt \\ y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{\circ} Sin\theta t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲۴ = v_{\circ} Cos\theta & (۱) \\ -۸ = v_{\circ} Sin\theta - ۹/۸ t & (۲) \\ ۹/۸ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^{۲} + v_{\circ} Sin\theta t & (۳) \end{cases}$$

$$(۲) \rightarrow v_{\circ} Sin\theta = -۸ + ۹/۸ t$$

$$(۳) \rightarrow ۹/۸ = -\frac{۱}{۲} \times ۹/۸ \times t^{۲} + (-۸ + ۹/۸ t) t$$

$$۴/۹ t^{۲} - ۸t - ۹/۸ = o$$

$$t = \frac{۸ \pm \sqrt{(۸)^{۲} - (۴ \times ۴/۹ \times (-۹/۸))}}{۲ \times ۴/۹} = \begin{cases} t_۱ = ۲/۴۵\ s & \times \\ t_۲ = ۰/۸۲\ s \end{cases}$$

$$(۱) \rightarrow \quad v_\circ = \frac{۲۴}{Cos\theta}$$

$$(۲) \rightarrow \quad -۸ = (\frac{۲۴}{Cos\theta})Sin\theta - (۹/۸\times ۲/۴۵)$$

$$\theta = \tan^{-۱}(\frac{-۸-(۹/۸\times ۲/۴۵)}{۲۴}) = \tan^{-۱}(۰/۶۷) = ۳۳/۸۲^\circ$$

الف)

$$(۱) \rightarrow \quad ۲۴ = v_\circ Cos\theta$$

$$v_\circ = \frac{۲۴}{Cos(۳۳/۸۲)} = ۲۸/۹۱ \ \frac{m}{s}$$

ب)

$$H = \frac{v_\circ^۲ Sin^۲\theta}{۲g} = \frac{(۲۸/۹۱)^۲ \times (Sin(۳۳/۸۲))^۲}{۲\times ۹/۸} = ۱۳/۳۷ \ m$$

۱۱. پسر بچه ای از بالکونی به ارتفاع ۱۰m توپ تنیسی را با سرعت اولیه $۲۰ \frac{m}{s}$ مستقیما به طرف گربه ای که در فاصله افقی ۴۰m از پای ساختمان نشسته است پرتاب می کند. توپ در چه فاصله ای از گربه به زمین می خورد؟

حل:

$$v_\circ = ۲۰ \frac{m}{s}$$

$$\theta = \tan^{-۱}(\frac{۱۰}{۴۰}) = ۱۴/۰۳^\circ$$

$$R = \frac{v_\circ^۲ Sin(۲\theta)}{g} = \frac{(۲۰)^۲ \times Sin(۲\times ۱۴/۰۳)}{۹/۸} = ۱۹/۲۸m$$

$$x = ۴۰ - ۱۹/۲۸ = ۲۰/۸ \ m$$

۱۲. آب با سرعت $\frac{m}{s}$ ۱۸ از دهانه یک لوله آتش نشانی خارج می شود. مأموری که روی نردبانی به فاصله افقی ۳۰m از ساختمان محل حریق ایستاده است باید لوله را با چه زاویه هایی نسبت به افق بگیرد تا آب به پنجره ای که در همان ارتفاع سر لوله واقع شده است، برسد؟

حل:

$$v_0 = ۱۸\,\frac{m}{s} \quad , \quad R = ۳۰m$$

$$R = \frac{v_0^۲\, Sin(۲\theta)}{g}$$

$$۳۰ = \frac{(۱۸)^۲ \times Sin(۲\theta)}{۹/۸} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{۱}{۲} \times Sin^{-۱}\left(\frac{۳۰ \times ۹/۸}{(۱۸)^۲}\right) = ۳۲/۰۸^\circ$$

۱۳. گلوله ای از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 با زاویه θ نسبت به افق به هوا پرتاب می شود. نشان بدهید که ارتفاع اوج آن از رابطه $H = \frac{v_0^۲\, Sin^۲\theta}{۲g}$ بدست می آید.

حل: گلوله از سطح زمین پرتاب شده $y_0 = o$ و ارتفاع را برابر با H می گیریم. ابتدا زمان کل پرتابه را بدست می آوریم:

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^۲ + v_0 Sin\theta\, t + y_0$$

$$o = -\frac{۱}{۲} g t^۲ + v_0 Sin\theta\, t + o \quad \rightarrow \quad T = \frac{۲ v_0\, Sin\theta}{g}$$

زمان رسیدن به اوج نصف این زمان است. پس ارتفاع اوج بدست می آید:

$$t = \frac{T}{۲} = \frac{v_{\circ} Sin\theta}{g}$$

$$y = -\frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{\circ} Sin\theta\, t + y_{\circ}$$

$$H = -\frac{۱}{۲} g \left(\frac{v_{\circ} Sin\theta}{g}\right)^{۲} + v_{\circ} Sin\theta \left(\frac{v_{\circ} Sin\theta}{g}\right) + o \qquad \rightarrow \qquad H = \frac{v_{\circ}^{۲} Sin^{۲}\theta}{۲g}$$

بخش ٤-٥- حرکت دایره ای یکنواخت

۱۴. شتاب مرکزگرای هر یک از اشیای زیر را پیدا کنید: الف) ذره ای روی استوای زمین (فقط دز اثر حرکت وضعی زمین)، ب) زمین در مدارش به دور خورشید، ج) خورشید در گردش به دور کهکشان با دوره تناوب $T = ۱۰^{۷}\ y$ و شعاع گردش $r = ۳ \times ۱۰^{۲۰}\ m$. (y نماد سال است.)

حل: الف) شعاع زمین R_e و دوره تناوب T_e

$$T_e = ۲۴ \times ۳۶۰۰ = ۸۶۴۰۰ s$$

$$R_e = ۶۳۷۸ \times ۱۰^{۳}\ m$$

$$a = \frac{v^{۲}}{r} = \frac{۴\pi^{۲} R_e}{T_e^{۲}} = \frac{۴ \times (۳/۱۴)^{۲} \times ۶۳۷۸ \times ۱۰^{۳}}{(۸۶۴۰۰)^{۲}} = ۳/۳۷ \times ۱۰^{-۲}\ \frac{m}{s^{۲}}$$

ب) یک سال (y) را برابر ۳۶۵ روز می گیریم:

$$T = ۳۶۵ \times ۸۶۴۰۰ = ۳۱۵۳۶۰۰۰ s$$

$$R = ۱/۴۸ \times ۱۰^{۱۱}\ m$$

$$a = \frac{v^{۲}}{r} = \frac{۴\pi^{۲} R}{T^{۲}} = \frac{۴ \times (۳/۱۴)^{۲} \times ۱/۴۸ \times ۱۰^{۱۱}}{(۳۱۵۳۶۰۰۰)^{۲}} = ۵/۹ \times ۱۰^{-۳}\ \frac{m}{s^{۲}}$$

ج)

$T = ۱۰^۸ y = ۱۰^۸ \times ۳۱۵۳۶۰۰۰ = ۳۱۵۳۶ \times ۱۰^{۱۱} s$

$R = ۳ \times ۱۰^{۲۰}\ m$

$$a = \frac{v^۲}{r} = \frac{۴\pi^۲ R}{T^۲} = \frac{۴ \times (۳/۱۴)^۲ \times ۳ \times ۱۰^{۲۰}}{(۳۱۵۳۶ \times ۱۰^{۱۱})^۲} = ۱/۱۹ \times ۱۰^{-۹} \frac{m}{s^۲}$$

۱۵. شتاب مرکزگرای هر یک از اشیای زیر را بر حسب g ($۹/۸ \frac{m}{s^۲}$) محاسبه کنید. الف) خودرویی که با سرعت $۱۰۰ \frac{Km}{h}$ در مسیری به شعاع انحنای ۵۰m در حرکت است. ب) هواپیمایی که با سرعت $۱۵۰۰ \frac{Km}{h}$ در دایره ای به شعاع ۵Km دور می زند. ج) سنگی که به نخی به طول ۱m بسته شده است و در هر ۰/۵s یک دور می زند. د) ذره غباری در یک صفحه گرامافون به قطر ۳۰cm که با سرعت $۳۳\frac{۱}{۳}$ دور در دقیقه می چرخد. ه) ملکولی که در فاصله ۱۵cm از مرکز یک دستگاه مرکز گریز با سرعت ۳۰۰۰rpm دور بر دقیقه می چرخد.

حل: الف)

$$v = ۱۰۰ \frac{Km}{h} = ۲۷/۸ \frac{m}{s} \quad , \quad r = ۵۰ m$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۲۷/۸)^۲}{۵۰} = ۱۵/۴۵۶۸ \frac{m}{s^۲} = ۱/۵۸ g$$

ب)

$$v = ۱۵۰۰ \frac{Km}{h} = ۴۱۶/۷ \frac{m}{s} \quad , \quad r = ۵ Km = ۵۰۰۰ m$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۴۱۶/۷)^۲}{۵۰۰۰} = ۳۴/۷۳ \frac{m}{s^۲} = ۳/۵۴ g$$

ج)

$$r = ۱m \quad , \quad T = ۰/۵s \quad , \quad \Delta x = ۱\times ۲\pi r = ۲\pi r$$

$$v = \frac{۲\pi r}{T} = \frac{۲\times ۳/۱۴\times ۱}{۰/۵} = ۱۲/۵۶\,\frac{m}{s}$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۱۲/۵۶)^۲}{۱} = ۱۵۷/۷۵۳۶\,\frac{m}{s^۲} = ۱۶/۱\,g$$

د)

$$f = ۳۳\frac{۱}{۳}\,\frac{rev}{\min} = \frac{۱۰۰}{۳}\,\frac{rev}{\min} \quad , \quad r = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵cm = ۰/۱۵m \quad , \quad T = \frac{۱}{f}$$

$$v = \frac{۲\pi r}{T} = ۲\pi r f = ۲\times ۳/۱۴\times ۰/۱۵\times (\frac{۱۰۰}{۳}\times \frac{۱}{۶۰}) = ۰/۵۲\,\frac{m}{s}$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۰/۵۲)^۲}{۰/۱۵} = ۱/۸\,\frac{m}{s^۲} = ۰/۱۸۴\,g$$

ه)

$$f = ۳۰۰۰۰\,\frac{rev}{\min} \quad , \quad r = ۱۵cm = ۰/۱۵m \quad , \quad T = \frac{۱}{f}$$

$$v = \frac{۲\pi r}{T} = ۲\pi r f = ۲\times ۳/۱۴\times ۰/۱۵\times (۳۰۰۰۰\times \frac{۱}{۶۰}) = ۴۷۱\,\frac{m}{s}$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۴۷۱)^۲}{۰/۱۵} = ۱۴۷۸۹۴۰\,\frac{m}{s^۲} \approx ۱/۵۱\times ۱۰^۵\,g$$

۱۶. فرض کنید سرعت چرخش زمین به دور خودش آنقدر زیاد شود که شتاب نقطه ای واقع بر استوای آن به مقدار g برسد. در این صورت مدت یک روز چقدر خواهد بود؟

حل:

$$a_r = g = ۹/۸\frac{m}{s^۲} \quad , \quad R_e = ۶۳۷۸\times ۱۰^۳\, m$$

$$a_r = \frac{v^۲}{R_e} = \frac{(\frac{۲\pi R_e}{T})^۲}{R_e} = \frac{۴\pi^۲ R_e}{T^۲}$$

$$T = \sqrt{\frac{۴\pi^۲ R_e}{a_r}} = \sqrt{\frac{۴\times(۳/۱۴)^۲\times ۶۳۷۸\times ۱۰^۳}{۹/۸}} = ۵۰۶۶/۲۷s\times\frac{۱h}{۳۶۰۰s} = ۱/۴۱h$$

۱۷. ذره ای در هر ثانیه ۵ بار یک مسیر دایره ای با محیط ۸m را به طور یکنواخت طی می کند. شتاب مرکزگرای آن چقدر است؟

حل:

$$\Delta t = ۱s \quad , \quad m = ۲\pi r = ۸\, m \quad \to \quad r = \frac{۸}{۲\pi} = \frac{۸}{۲\times ۳/۱۴} = ۱/۲۷m$$

$$\Delta x = ۵\times(۲\pi r) = ۵\times ۸ = ۴۰m$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۰}{۱} = ۴۰\frac{m}{s}$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۴۰)^۲}{۱/۲۷} \approx ۱۲۶۰\ \frac{m}{s^۲}$$

بخش ٤-۷- سرعت نسبی

۱۸. الف) جسم A با سرعت $(\frac{m}{s})\ ۲\hat{i} + \hat{j}$ و جسم B با سرعت $(\frac{m}{s})\ -\hat{i} + ۵\hat{j}$ در حرکت اند. سرعت B نسبت به A چقدر و در کدام جهت است؟ ب) جسم A با سرعت $۳\ \frac{m}{s}$ به طرف شرق و جسم B با سرعت $۴\ \frac{m}{s}$ به طرف شمال در حرکت اند. سرعت A را نسبت به B پیدا کنید.

حل: الف) به سمت جنوب شرقی

$$\vec{v}_A = 2\,\hat{i} + \hat{j}\ (\frac{m}{s}) \qquad , \qquad \vec{v}_B = -\,\hat{i} + 5\hat{j}\ (\frac{m}{s})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (-\,\hat{i} + 5\,\hat{j}) - (2\,\hat{i} + \hat{j}) = -3\hat{i} + 4\,\hat{j}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{-3}) \approx -53^\circ$$

ب) به سمت جنوب شرقی

$$v_A = ۳\,\frac{m}{s}\ \rightarrow \qquad , \qquad v_B = ۴\,\frac{m}{s}\ \uparrow$$

$$\vec{v} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = ۳\,\hat{i} - ۴\hat{j}$$

$$\theta = \tan^{-۱}(\frac{-۴}{۳}) \approx -۵۳^\circ$$

۱۹. در رودخانه ای به پهنای ۱۰۰m که با سرعت $۵\,\frac{m}{s}$ جریان دارد، دو ملوان، هر کدام با یک قایق موتوری که می تواند با سرعت $۱۰\,\frac{m}{s}$ نسبت به آب حرکت کند تصمیم می گیرند یک مسابقه غیر عادی ترتیب بدهند. قرار می شود ملوان A از یک ساحل درست به نقطه روبه رو در ساحل دیگر برود و به همان نقطه برگردد و ملوان B ابتدا ۱۰۰m در جهت جریان برود و بعد همین مسافت را در خلاف جهت جریان طی کند و به نقطه شروع برگردد. کدامیک برنده می شود؟

حل: سرعت آب v_w و سرعت قایق نسبت به آب v_b و سرعت نسبی ملوان A:

$$v_w = ۵\,\frac{m}{s} \qquad , \qquad v_b = ۱۰\,\frac{m}{s} \qquad , \qquad d = ۱۰۰\,m$$

$$\vec{v} = ۵\hat{i} - ۱۰\,\hat{j}$$

$$v = \sqrt{۵^۲ + (-۱۰)^۲} = ۱۱/۱۸\,\frac{m}{s}$$

کل مسافتی که ملوان A طی می کند ۲۰۰m است. پس کل زمان طی شده (Δt) برای ملوان A

$$\Delta t = \frac{۲۰۰}{۱۱/۱۸} = ۱۷/۸۹\ s$$

ملوان B با سرعت $\vec{v}_۱$ در ۱۰۰m اول را در جهت جریان آب طی می کند

$$\vec{v}_۱ = ۵\hat{i} + ۱۰\hat{i} = ۱۵\hat{i} \quad \rightarrow \quad v_۱ = ۱۵\frac{m}{s}$$

زمان لازم برای طی ۱۰۰m اول: $t_۱ = \frac{۱۰۰}{۱۵} = ۶/۷ s$

سرعت در ۱۰۰m دوم در خلاف جهت جریان آب است:

$$\vec{v}_۲ = ۵\hat{i} - ۱۰\hat{i} = -۵\hat{i} \quad \rightarrow \quad v_۲ = ۵\frac{m}{s}$$

زمان لازم برای طی ۱۰۰m دوم: $t_۲ = \frac{۱۰۰}{۵} = ۲۰ s$

کل زمان طی شده توسط ملوان B

$$\Delta t = t_۱ + t_۲ = ۲۰ + ۶/۷ = ۲۶/۷\ s$$

ملوان A نسبت به ملوان B برای طی مسافت ۲۰۰m زمان کمتری مصرف می کند. پس ملوان A برنده است.

۲۰. باران با سرعت ثابت $۱۰\frac{m}{s}$ در جهت قائم می بارد. اتوبوسی با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در حرکت است. قطره های باران با چه سرعتی و با چه زاویه ای (نسبت به افق) به شیشه جلوی اتوبوس می خورند؟

حل: سرعت اتوبوس v_b و سرعت باران v_r

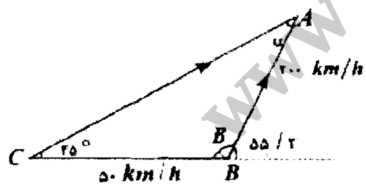
$$v_b = ۲۰\frac{m}{s} \quad , \quad v_r = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$\theta = \tan^{-۱}(\frac{v_r}{v_b}) = \tan^{-۱}(\frac{۱۰}{۲۰}) = ۲۶/۵۶^\circ$$

$$v = \sqrt{v_b^۲ + v_r^۲} = \sqrt{۲۰^۲ + ۱۰^۲} = ۲۲/۳۶\frac{m}{s}$$

۲۱. هواپیمایی که سرعت آن نسبت به هوای آرام $۲۰۰\frac{Km}{h}$ است، می خواهد به مقصدی به فاصله ۶۰۰Km در شمال شرقی برود. باد با سرعت $۵۰\frac{Km}{h}$ از سمت غرب می وزد. الف) خلبان باید هواپیما را در چه جهتی هدایت کند. ب) این سفر چقدر طول می کشد. (راهنمایی: از قانون سینوسها استفاده کنید.)

حل: الف) $v_۱$ سرعت هواپیما نسبت به هوا و $v_۲$ سرعت باد نسبت به هوا



$$v_۱ = ۲۰۰\frac{Km}{h} \quad , \quad v_۲ = ۵۰\frac{Km}{h}$$

$$\frac{Sin۴۵}{۲۰۰} = \frac{Sin\alpha}{۵۰} \quad \rightarrow \quad \alpha = Sin^{-۱}(\frac{۵۰ \times Sin۴۵}{۲۰۰}) \approx ۱۰/۲^\circ$$

$$\beta = ۱۸۰ - (۱۰/۲ + ۴۵) = ۱۲۴/۸^\circ$$

$$\frac{Sin\beta}{b} = \frac{Sin۴۵}{۲۰۰} \quad \rightarrow \quad b = \frac{۲۰۰ \times Sin(۱۲۴/۸)}{Sin۴۵} = ۲۳۲\frac{Km}{h}$$

ب)

$$t = \frac{x}{v} = \frac{۶۰۰}{۲۳۲} = ۲/۵۸\ h$$

بخش ٤-۹- حرکت دایره ای غیر یکنواخت

۲۲. اتومبیلی در مسیری به شعاع انحنای ۴۰m در حرکت است. در لحظه ای که اتومبیل رو به شمال واقع می شود، آهنگ تغییر مقدار سرعتش $۲\,\frac{m}{s^۲}$ و شتاب کل آن در جهت ۳۰° شمال غرب است. الف) آیا در این لحظه سرعت اتومبیل در حال افزایش است یا کاهش؟ ب) مقدار سرعت اتومبیل در این لحظه چقدر است؟

حل: الف) سرعت اتومبیل در حال افزایش است.

ب)

$$tan(۳۰) = \frac{a_t}{a_r} \quad \rightarrow \quad a_r = \frac{a_t}{tan(۳۰)} = \frac{۲}{tan(۳۰)} = ۳/۵\,\frac{m}{s^۲}$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{a_r r} = \sqrt{۳/۵ \times ۴۰} = ۱۱/۸\,\frac{m}{s}$$

۲۳. ذره ای در محیط دایره ای به شعاع ۴m حرکت می کند. در نقطه ای که شتاب مماسی این ذره $۲\,\frac{m}{s^۲}$ و شتاب مرکزگرای آن $۶\,\frac{m}{s^۲}$ باشد، الف) اندازه شتاب خطی کل و ب) مقدار سرعت آن چقدر است؟

حل: الف)

$$r = ۴m \quad , \quad a_t = ۲\,\frac{m}{s^۲} \quad , \quad a_r = ۶\,\frac{m}{s^۲}$$

$$a = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۶^۲} = ۶/۳۲۴\,\frac{m}{s^۲}$$

ب)

$$a_r = \frac{v^۲}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{ar} = \sqrt{۴ \times ۶} \approx ۴/۹\,\frac{m}{s^۲}$$

مسائل تکمیلی

۲۴. از بالای صخره ای دو گلوله را با سرعتهای اولیه مساوی به ترتیب در جهتهای θ بالای افق و θ درجه پایین افق پرتاب می کنیم. نشان بدهید که اختلاف برد افقی آنها برابر با $\frac{v_\circ^۲ Sin(۲\theta)}{g}$ است.

حل: $v_{\circ A} = v_{\circ B} = v_\circ$ وقتی که گلوله A پرتاب می شود در مسیر سهمی تا جایی که با سطح پرتاب در یک امتداد قرار بگیرد (نقطه A) برد افقی $x = \frac{v_\circ^۲ Sin۲\theta}{g}$ را طی می کند. سپس در نقطه A مانند گلوله B تحت زاویه θ پایین افق با همان سرعت اولیه پرتاب می شود. در این حالت برد افقی گلوله A ($x_۱$) با برد افقی گلوله B ($x_۲$) برابر می شود:

$$R_A = x + x_۱ \qquad , \qquad R_B = x_۲ \qquad , \qquad x_۱ = x_۲$$

$$R_A - R_B = x + x_۱ - x_۲ = x = \frac{v_\circ^۲ Sin۲\theta}{g}$$

۲۵. الف) به ازای چه زاویه پرتابی برد گلوله ای که از سطح زمین پرتاب می شود با ارتفاع اوج آن برابر خواهد شد؟ ب) به ازای چه زاویه ای برد با نصف ارتفاع اوج برابر خواهد شد؟

حل: الف)

$$R = \frac{v_\circ^۲ Sin(۲\theta)}{g} \qquad , \qquad H = \frac{v_\circ^۲ Sin^۲\theta}{۲g}$$

$$R = H \qquad \to \qquad \frac{v_\circ^۲ Sin(۲\theta)}{g} = \frac{v_\circ^۲ Sin^۲\theta}{۲g}$$

$$\frac{۲v_\circ^۲ Sin\theta\, Cos\theta}{g} = \frac{v_\circ^۲ Sin\theta\, Sin\theta}{۲g}$$

$$۴ \times Cos\theta = Sin\theta \qquad \to \qquad tan\theta = ۴ \qquad \Rightarrow \qquad \theta = tan^{-۱}(۴) = ۷۵/۹۶^\circ$$

ب)

$$R=\frac{v_{\circ}^{۲}\,Sin(۲\theta)}{g} \quad , \quad H=\frac{v_{\circ}^{۲}\,Sin^{۲}\theta}{۲g}$$

$$R=\frac{H}{۲}$$

$$\frac{v_{\circ}^{۲}\,Sin(۲\theta)}{g}=\frac{۱}{۲}\times\frac{v_{\circ}^{۲}\,Sin^{۲}\theta}{۲g}$$

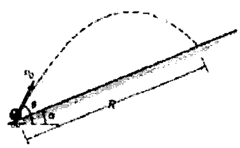
$$\frac{۲v_{\circ}^{۲}\,Sin\theta\,Cos\theta}{g}=\frac{۱}{۲}\times\frac{v_{\circ}^{۲}\,Sin\theta\,Sin\theta}{۲g}$$

$$۸\times Cos\theta=Sin\theta \quad \rightarrow \quad \tan\theta=۸$$

$$\theta=\tan^{-۱}(۸)=۸۲/۸۷^{\circ}$$

۲۶. پرتابه ای با سرعت اولیه $v_{\circ}$ که با افق زاویه θ می سازد روی سطح شیبداری به زاویه شیب α پرتاب می شود (شکل ۱۹) نشان بدهید که برد پرتابه روی این سطح برابر است با

$$R=\frac{۲v_{\circ}^{۲}\,Sin(\theta-\alpha)Cos\theta}{gCos^{۲}\alpha}$$



حل:

$$\begin{cases} x=RCos\alpha \\ y=RSin\alpha \end{cases}$$

$$y=-\frac{۱}{۲}g\frac{x^{۲}}{v_{\circ}^{۲}\,Cos^{۲}\theta}+x\tan\theta$$

$$RSin\alpha=-\frac{۱}{۲}g\frac{(RCos\alpha)^{۲}}{v_{\circ}^{۲}\,Cos^{۲}\theta}+RCos\alpha\tan\theta$$

$$Sin\alpha = -\frac{1}{2} g \frac{R(Cos\alpha)^2}{v_0^2\, Cos^2\theta} + Cos\alpha \frac{Sin\theta}{Cos\theta}$$

$$2v_0^2\, Cos^2\theta\, Sin\alpha = -gR\, Cos^2\alpha + 2v_0^2\, Cos\alpha\, Cos\theta\, Sin\theta$$

$$2v_0^2\, Cos^2\theta\, Sin\alpha - 2v_0^2\, Cos\alpha\, Cos\theta\, Sin\theta = -gR\, Cos^2\alpha$$

$$2v_0^2\, Cos\theta (Cos\theta\, Sin\alpha - Cos\alpha\, Sin\theta) = -gR\, Cos^2\alpha$$

$$** \; Sin(\theta - \alpha) = Cos\alpha\, Sin\theta - Sin\alpha\, Cos\theta \; **$$

$$2v_0^2\, Cos\theta\, Sin(\theta - \alpha) = gR\, Cos^2\alpha$$

$$R = \frac{2v_0^2\, Cos\theta\, Sin(\theta - \alpha)}{g\, Cos^2\alpha}$$

۲۷. سنگی از بالای صخره ای به ارتفاع H پرتاب می شود. نشان بدهید که مقدار سرعت این سنگ موقع برخورد به زمین مستقل از زاویه پرتاب آن است.

حل:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(v_0\, Cos\theta)^2 + (v_0\, Sin\theta - gt)^2}$$
$$= \sqrt{v_0^2\, Cos^2\theta + v_0^2\, Sin^2\theta + g^2t^2 - v_0 gt\, Sin\theta}$$
$$= \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - v_0 gt\, Sin\theta}$$
$$= \sqrt{v_0^2 + 2g(\frac{1}{2}gt^2 - v_0\, Sin\theta\, t)}$$
$$= \sqrt{v_0^2 - 2gy} = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$$

۲۸. توپی که لوله آن با افق زاویه 53° می سازد گلوله هایی با سرعت $50\ \frac{m}{s}$ شلیک می کند. هدف $60m$ بالاتر از سطح زمین قرار دارد. فاصله افقی توپ از هدف چقدر باشد تا گلوله ها به آن اصابت کنند؟

\IV

;J=--

$v_0 = tJ \cdot \frac{m}{s}$

$Y = x\tan e - \frac{gx^T}{Yv_0 \cos Te}$

$= x\tan(tJ'f) - \frac{'''1\ AXT}{YX(tJ\cdot)'\ xCoS\backslash tJi)}$

'f 'f/'" T

i .....

$-'f/"'X' + \backslash Y .. x - tJ'f"\cdot = o$

$X = \frac{-\backslash Y" - +\sqrt{(-\backslash Y")' - ('fx(-'f/",)x(-tJ'f..'}}{Yx(-'f/"')} = \{ X_1 = tJ'''l\ 'f\ s ;\ X_2 = \backslash M/tJ\ s$

:.:."";' l..S'0l:!.r.j o).J4' 0l.Aj '-;-->"..r. ($1 c)') 0tS::.. .yo,

$r = ACos(mt)f + ASin(mt))$

O .f.ri.:r..1 ('-;-' r-" (..j.JI ....L.,;1 m J A 01).:.0

(C:: ..t;S' I) c)') '-;-'\::.;J r' $m = '/\Jr\ \frac{rad}{s}$ J $A = \backslash m'$

$a = -m\ 'r = -\frac{v'}{r}$ -.;> 0L.:..; --.-' "-:-6.....1) c)':'

($ I•r.,1.:. ..r.::--' ($J) r. .::.5. r .:r..1,0L.j 0L.5:... "-: Y (.....:JI ;J=--

$r = A\ Cos(mt)\ i + A\ Sin($

ج)

$$\vec{v} = -(0/1\pi)\,Sin(0/1\pi t)\,\hat{i} + (0/1\pi)\,Cos(0/1\pi t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = -A(0/1\pi)^2\,Cos(0/1\pi t)\,\hat{i} - A(0/1\pi)^2\,Sin(0/1\pi t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = -A\omega^2\vec{r} = -(0/1\pi)^2\,\vec{r}$$

$$\vec{r} = r\,\hat{r} \quad , \quad \begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ v = \dfrac{2\pi r}{T} \end{cases} \quad \rightarrow \quad v = r\omega$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} = -\left(\frac{v}{r}\right)^2(r\,\hat{r}) = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

۳۰. صحت این گفته گالیله را که برد افقی به ازای زوایای پرتاب $\theta_1 = 45^\circ - \alpha$ و $\theta_2 = 45^\circ + \alpha$ یکی است اثبات کنید.

حل:

$$R = \frac{v_0^2\,Sin(2\theta)}{g}$$

$$\theta_1 = 45^\circ - \alpha$$

$$R_1 = \frac{v_0^2\,Sin(2\theta_1)}{g} = \frac{v_0^2\,Sin(2(45^\circ - \alpha))}{g} = \frac{v_0^2\,Sin(90^\circ - 2\alpha)}{g}$$

$$\theta_2 = 45^\circ + \alpha$$

$$R_2 = \frac{v_0^2\,Sin(2\theta_2)}{g} = \frac{v_0^2\,Sin(2(45^\circ + \alpha))}{g} = \frac{v_0^2\,Sin(90^\circ + 2\alpha)}{g}$$

$$** \quad Sin(90^\circ - 2\alpha) = Cos2\alpha\,Sin(90) - Sin2\alpha\,Cos(90) = Cos2\alpha$$

$$** \quad Sin(90^\circ + 2\alpha) = Cos2\alpha\,Sin(90) + Sin2\alpha\,Cos(90) = Cos2\alpha$$

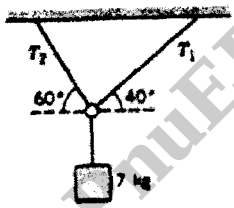
$$R_1 = R_2$$

فصل ۵

مسئله ها

بخش های ۵-۲- و ۵-۳- قانون دوم نیوتن و وزن

۱. جسم به جرم ۷Kg توسط دو رشته نخ مطابق شکل ۱۷ آویزان است. نیروی کشش نخ در هر رشته نخ چقدر است؟



حل: چون سیستم ثابت است پس شتاب صفر است.

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}T_1 Cos(40) - T_2 Cos(60) = 0 \\ T_1 Sin(40) + T_2 Sin(60) - mg = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}T_1 = T_2(\frac{Cos(60)}{Cos(40)}) \\ T_1 Sin(40) + T_2 Sin(60) = mg\end{cases}$$

$$T_۲(\frac{Cos(۶۰)}{Cos(۴۰)})Sin(۴۰) + T_۲ Sin(۶۰) = mg$$

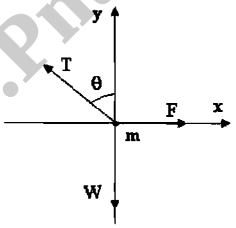
$$T_۲ \tan(۴۰) Cos(۶۰) + T_۲ Sin(۶۰) = mg$$

$$T_۲ = \frac{mg}{\tan(۴۰)Cos(۶۰) + Sin(۶۰)} = \frac{۷\times ۱۰}{(۰/۸۴\times ۰/۵) + ۰/۸۷} = ۵۴/۳\,N$$

$$T_۱ = T_۲(\frac{Cos(۶۰)}{Cos(۴۰)}) = ۵۴/۳\times(\frac{۰/۵}{۰/۷۷}) = ۳۵/۳\,N$$

۲. جسمی به جرم ۲Kg با نخی از سقفی آویزان است. وقتی نیروی افقی F به جسم اثر می کند نخ با امتداد قائم زاویه °۳۷ می سازد. الف) نیروی F و ب) کشش نخ چقدر است؟

حل:



$$m = ۲\,Kg \qquad , \qquad \theta = ۳۷^\circ \qquad , \qquad g = ۹/۸\,\frac{m}{s^۲}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F - TSin\,\theta = o \\ TCos\,\theta - mg = o \end{cases}$$

الف) و ب)

$$\begin{cases} T = \frac{mg}{Cos(۳۷)} = \frac{۲\times ۹/۸}{۰/۸} = ۲۴/۵\,N \\ F = TSin\theta = ۲۴/۵\times Sin(۳۷) = ۲۴/۵\times ۰/۶ = ۱۴/۷\,N \end{cases}$$

۳. ذره ای به جرم ۲Kg تحت تأثیر برآیند دو نیرو شتاب برابر با $\vec{a} = ۴\hat{i} - ۳\hat{j}\ (\frac{m}{s^۲})$ می گیرد. اگر $\vec{F}_۱ = -\hat{i} + ۲\hat{j} + ۳\hat{k}\ (N)$ باشد، $\vec{F}_۲$ چیست؟

حل:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ = m\vec{a}$$
$$(-\hat{i} + ۲\hat{j} + ۳\hat{k}) + \vec{F}_۲ = ۲ \times (۴\hat{i} - ۳\hat{j})$$
$$\vec{F}_۲ = (۸\hat{i} - ۶\hat{j}) - (-\hat{i} + ۲\hat{j} + ۳\hat{k}) = ۹\hat{i} - ۸\hat{j} - ۳\hat{k}\ \ N$$

۴. سرعت اولیه ذره ای به جرم ۱/۵Kg برابر با $۲\hat{i} - ۳\hat{j}\ (\frac{m}{s})$ است. اگر نیروی $۴\hat{i} - ۲\hat{j}\ (N)$ به مدت ۲s به این ذره اثر کند، سرعت نهایی آن چقدر می شود؟

حل:

$$\vec{v}_\circ = ۲\hat{i} - ۳\hat{j}\ (\frac{m}{s}) \quad , \quad m = ۱/۵\ Kg \quad , \quad \vec{F} = ۴\hat{i} - ۲\hat{j}\ (N) \quad , \quad t = ۲s$$
$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = (\frac{۱}{۱/۵}) \times (۴\hat{i} - ۲\hat{j}) = ۲/۶۷\hat{i} - ۰/۶۷\hat{j} \quad (\frac{m}{s^۲})$$
$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_\circ = (۲/۶۷\hat{i} - ۰/۶۷\hat{j}) \times ۲ + (۲\hat{i} - ۳\hat{j}) = ۷/۳۴\hat{i} - ۱/۶۶\hat{j} \quad (\frac{m}{s})$$

۵. کودکی به جرم ۲۰Kg از سرسره ای به طول ۳m که زاویه شیب آن ۳۵° است به پایین می لغزد. اگر این کودک با سرعت $۱(\frac{m}{s})$ به انتهای مسیر برسد، نیروی اصطکاک او با سطح سرسره چقدر بوده است؟

حل:

$$v=۱(\frac{m}{s}) \quad , \quad L=۳m \quad , \quad m=۲۰Kg \quad , \quad \theta=۳۵^\circ \quad , \quad v_\circ=o$$

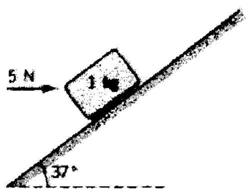
$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad mgSin\theta - f_k = ma \quad (۱)$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲aL$$

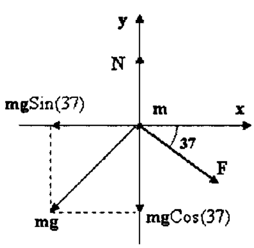
$$(۱)^۲ - o = ۲\times a\times ۳ \quad \rightarrow \quad a=\frac{۱}{۶}\frac{m}{s^۲} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad f_k = mgSin\theta - ma = ۲۰\times ۹/۸\times Sin(۳۵) - ۲۰\times\frac{۱}{۶} = ۱۰۸/۴N$$

۶. قالبی به جرم ۱Kg را روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که زاویه شیب آن ۳۷° است قرار می دهیم و یک نیروی افقی برابر با ۵N به آن وارد می کنیم. (شکل ۱۸) الف) این قالب چه شتابی می گیرد؟ ب) اگر قالب قبل از اعمال نیرو با سرعت $۴(\frac{m}{s})$ به طرف بالای شیب در حرکت بوده باشد، جابجایی آن در مدت ۲S پس از اعمال نیرو چقدر است؟



حل: الف)



$F = ۵N \quad , \quad m = ۱Kg \quad , \quad \theta = ۳۷^\circ$

$\sum F_x = ma_x$

$mgSin\theta - FCos\theta = ma$

$۱\times ۹/۸ \times ۰/۶ - ۵ \times ۰/۸ = ۱ \times a \quad \rightarrow \quad a = ۱/۸۸ \frac{m}{s^۲}$

جسم به سمت پایین سطح شیبدار حرکت می کند.

ب)

$v_\circ = ۴\frac{m}{s} \quad , \quad t = ۲s$

$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t = \frac{۱}{۲} \times ۱/۸۸ \times (۲)^۲ + ۴ \times ۲ = ۱۱/۷۶\ m$

۷. کودکی به جرم ۳۰Kg که اسکیت به پا کرده و با سرعت $۱۵\frac{Km}{h}$ در حرکت است به یک سربالایی با شیب ۱۰° می رسد. اگر این کودک از این لحظه به بعد هیچ تلاشی برای جلوراندن خودش نکن، حداکثر چه مسافتی را روی این شیب طی خواهد کرد؟ (اصطکاک ناچیز است.)

حل:

$v_\circ = ۱۵\frac{Km}{h} = ۴/۱۷\frac{m}{s} \quad , \quad m = ۳۰Kg \quad , \quad \theta = ۱۰^\circ$

$\sum F_x = ma_x$

$-mgSin\theta = ma \quad \rightarrow \quad a = -gSin\theta = -۹/۸ \times Sin(۱۰) = -۱/۶۷ \frac{m}{s^۲}$

$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(\Delta x)$

$o - (۴/۱۷)^۲ = ۲ \times (-۱/۶۷) \times \Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta x = ۵/۱m$

۸. خودرویی با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ در حرکت است. راننده که جرمش ۷۰Kg است خودش را با کمربند ایمنی محکم به صندلی بسته است. خودرو با همین سرعت به یک دیوار بتونی برخورد می کند. در هر یک از شرایط زیر چه نیرویی (که فرض می کنیم ثابت باشد.) به راننده وارد می شود: الف) اگر خودرو ۷۵cm در خودش فرو برود و ب) اگر فقط ۲۵cm فرو برود.

حل: الف)

$$v_{\circ} = ۲۵\frac{m}{s} \quad , \quad m = ۷۰ Kg \quad , \quad \Delta x = ۷۵\,cm = ۰/۷۵\,m$$

$$v^۲ - v_{\circ}^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$o - (۲۵)^۲ = ۲ \times a \times ۰/۷۵ \quad \rightarrow \quad a = -۴۱۶/۶۷\ \frac{m}{s^۲}$$

$$F = |ma| = |۷۰ \times (-۴۱۶/۶۷)| = ۲۹۱۶۶/۹\,N$$

ب)

$$v_{\circ} = ۲۵\frac{m}{s} \quad , \quad m = ۷۰ Kg \quad , \quad \Delta x = ۲۵\,cm = ۰/۲۵\,m$$

$$v^۲ - v_{\circ}^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$o - (۲۵)^۲ = ۲ \times a \times ۰/۲۵ \quad \rightarrow \quad a = -۱۲۵۰\ \frac{m}{s^۲}$$

$$F = |ma| = |۷۰ \times (-۱۲۵۰)| = ۸۷۵۰۰\,N$$

۹. جرم موشک پولاریس $۱/۴ \times ۱۰^۴\ Kg$ نیروی پیشران موتورهای آن $۲ \times ۱۰^۵\ N$ است. اگر این موشک تا یک دقیقه بعد از بلند شدن از زمین موتورهایش روشن باشد و در طی این مدت در راستای قائم هدایت شود، حداکثر تا چه ارتفاعی از زمین اوج خواهد گرفت؟ (فرض کنید مقاومت هوا ناچیز است.)

حل:

$m = ۱/۴ \times ۱۰^۴\ Kg \quad , \quad F = ۲ \times ۱۰^۵\ N \quad , \quad v_\circ = o \quad , \quad t = ۱min = ۶۰s$

$$\sum F_y = ma_y$$
$$F - mg = ma$$
$$۲ \times ۱۰^۵ - (۱/۴ \times ۱۰^۴ \times ۹/۸) = ۱/۴ \times ۱۰^۴ \times a \quad \rightarrow \quad a = ۴/۴۸ \frac{m}{s^۲}$$

در مدتی که موتور روشن است موشک تا ارتفاع ۸۰۶۴m بالا می رود

$$\Delta y_۱ = \frac{۱}{۲} at^۲ + v_\circ t = \frac{۱}{۲} \times ۴/۴۸ \times (۶۰)^۲ = ۸۰۶۴m$$

و سرعت در مدت ۱min

$$v = at + v_\circ = ۴/۴۸ \times ۶۰ + o = ۲۶۸/۸ \frac{m}{s}$$

بعد از اینکه موتور خاموش می شود موشک دارای حرکت سقوط آزاد است و سرعت در مدت ۱min به عنوان سرعت اولیه حساب می شود:

$$v_\circ = v = ۲۶۸/۸ \frac{m}{s}$$
$$v^۲ - v_\circ^۲ = -۲g(\Delta y_۲)$$
$$o - (۲۶۸/۸)^۲ = -۲ \times ۹/۸ \times \Delta y_۲ \quad \rightarrow \quad \Delta y_۲ = ۳۶۸۶/۴m$$
$$\Delta y = \Delta y_۱ + \Delta y_۲ = ۸۰۶۴ + ۳۶۸۵/۴ = ۱۱۷۵۰/۴m \approx ۱۱/۸Km$$

۱۰. کودکی به جرم ۴۰Kg از سکویی به ارتفاع ۱m به زمین می پرد. حساب کنید که در هریک از حالتهای زیر چه نیرویی (که ثابت فرض می کنیم.) به پاهای او وارد می شود: الف) در حین برخورد زانوهایش را خم می کندطوری که تنه اش (مرکز جرمش) قبل از توقف کامل ۳۰cm پایین می آید. ب) بدون انعطاف (یعنی سیخکی) به زمین می خورد، طوری که تنه اش از لحظه تماس پاها با زمین تا توقف کامل فقط ۴cm جابجا می شود؟

حل:

$$m = ۴۰ Kg \quad , \quad \Delta y = ۱m \quad , \quad v_{\circ} = o$$

$$v^{۲} - v_{\circ}^{۲} = -۲g(\Delta y)$$

$$v^{۲} - o = -۲ \times ۹/۸ \times (-۱) \quad \rightarrow \quad v = ۴/۴۲ \frac{m}{s}$$

الف)

$$\Delta y_{۱} = ۳۰ cm = ۰/۳ m$$

$$v^{۲} - v_{\circ}^{۲} = ۲a(\Delta y_{۱})$$

$$(۴/۴۲)^{۲} - o = ۲ \times a \times (۰/۳) \quad \rightarrow \quad a = ۳۲/۵۶ \frac{m}{s^{۲}}$$

$$F = ma = ۴۰ \times ۳۲/۵۶ = ۱۳۰۲/۴ N$$

ب)

$$\Delta y_{۲} = ۴ cm = ۰/۰۴ m$$

$$v^{۲} - v_{\circ}^{۲} = ۲a(\Delta y_{۲})$$

$$(۴/۴۲)^{۲} - o = ۲ \times a \times (۰/۰۴) \quad \rightarrow \quad a = ۲۴۴/۲ \frac{m}{s^{۲}}$$

$$F = ma = ۴۰ \times ۲۴۴/۲ = ۹۷۶۸/۲ N$$

۱۱. یک طناب نازک حداکثر می تواند ۶۰۰N کشش را تحمل کند. کارگری می خواهد سطلی به جرم ۷۵Kg را با استفاده از این طناب از بام ساختمان به زمین بفرستد. شتاب سطل حداقل باید چقدر باشد تا طناب پاره نشود؟

حل:

$$T = ۶۰۰ N \quad , \quad m = ۷۵ Kg$$

$$\sum F_y = ma_y$$

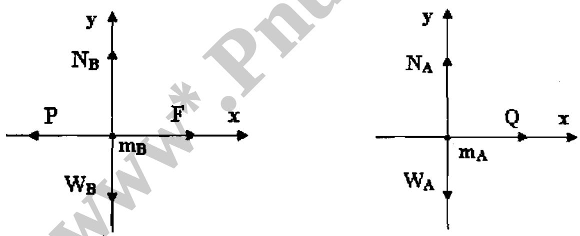
$$mg - T = ma$$

$$۷۵ \times ۹/۸ - ۶۰۰ = ۷۵ \times a \quad \rightarrow \quad a = ۱/۸ \frac{m}{s^{۲}}$$

بخش ۵-٤- قانون سوم نیوتن

۱۲. در شکل ۱۹، دو جسم A و B روی سطح افقی بدون اصطکاکی با هم در تماس اند و یک نیروی افقی برابر با ۲۰N به جسم B اثر می کند. اگر $m_A = ۲\,Kg$ و $m_B = ۳\,Kg$ باشد. کمیتهای زیر را تعیین کنید: الف) شتاب دو جسم ب) نیرویی که A به B وارد می کند. ج) نیروی خالص (برآیند) وارد بر B د) اگر جای دو جسم را با هم عوض کنیم نیرویی که از A به B وارد می شود چقدر است؟

حل: P نیرویی که m_A به m_B وارد می کند و Q نیرویی که m_B به m_A وارد می کند



$$m_A \quad \rightarrow \quad \sum F_x = m_A a_x$$

$$Q = m_A a \qquad (۱)$$

$$m_B \quad \rightarrow \quad \sum F_{2y} = m_2 a_y$$

$$F - P = m_B a \qquad (۲)$$

الف) از آنجایی که P و Q به عنوان نیروهای عمل و عکس العمل هستند، طبق قانون سوم نیوتن این دو نیرو تز لحاظ مقداری با هم برابرند. (P=Q)

$$F - m_A a = m_B a \quad \rightarrow \quad F = a(m_A + m_B)$$

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{۲۰}{۲+۳} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

ب)

$$F - P = m_B a$$
$$P = F - m_B a = ۲۰ - (۳ \times ۴) = ۸N$$

ج)

$$F = m_B a = ۳ \times ۴ = ۱۲N$$

د)

$$m_A \quad \rightarrow \quad \sum F_x = m_A a_x$$
$$F - P = m_A a \qquad (۱)$$
$$m_B \quad \rightarrow \quad \sum F_{۲y} = m_۲ a_y$$
$$Q = m_B a \qquad (۲)$$
$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{۲۵}{۲+۳} = ۴\frac{m}{s^۲}$$
$$Q = m_B a = ۳ \times ۴ = ۱۲N$$

۱۳. چتر بازی به جرم ۶۰Kg چترش را که ۷Kg جرم دارد باز کرده و با سرعت ثابت $۶\frac{m}{s}$ در حال سقوط در هوا است. الف) چه نیرویی از چتر به چتـر بـاز وارد مـی شـود؟ ب) چـه نیرویی از هوا به چتر وارد می شود؟ (نیروی وارد از هوا به خود چتـر بـاز را قابـل اغمـاض فرض کنید.)

حل: الف) اگر F نیرو از چتر به چترباز باشد:

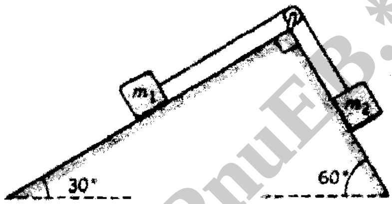
$$m_۱ = ۶۰\,Kg \quad , \quad m_۲ = ۷\,Kg \quad , \quad v = ۶\frac{m}{s}$$
$$F - m_۱ g = m_۱ a$$
$$a = o \quad \rightarrow \quad F = m_۱ g = ۶۰ \times ۹/۸ = ۵۸۸N$$

ب)

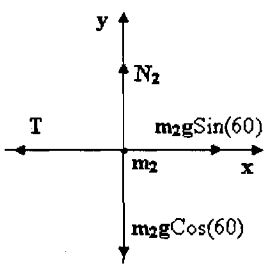
$$F - m_{۱}g - m_{۲}g = (m_{۱} + m_{۲})a$$
$$F = (m_{۱} + m_{۲})g = (۶۰ + ۷) \times ۹/۸ = ۶۵۶/۶\,N$$

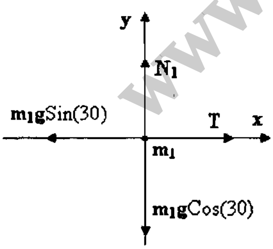
بخش ۵-۵- کاربردهای قوانین نیوتن

۱۴. دو قالب چوبی به جرمهای $m_{۱} = ۵\,Kg$ و $m_{۲} = ۶\,Kg$ که توسط نخی به هم وصل شده اند در دو طرف گوه ثابتی که در شکل ۲۰ می بینید، قرار داده می شوند. شتاب حرکت سیستم و کشش نخ چقدر است؟ (اصطکاک سطوح و جرم قرقره ناچیز است.)



حل:





$$m_۱ \quad \rightarrow \quad \sum F_{۱x} = m_۱ a_x$$

$$T - m_۱ g Sin(۳۰) = m_۱ a \qquad (۱)$$

$$m_۲ \quad \rightarrow \quad \sum F_{۲y} = m_۲ a_y$$

$$m_۲ g Sin(۶۰) - T = m_۲ a \qquad (۲)$$

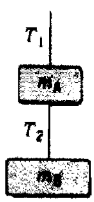
$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad m_۲ g Sin(۶۰) - m_۱ g Sin(۳۰) - m_۱ a = m_۲ a$$

$$a = \frac{m_۲ Sin(۶۰) - m_۱ Sin(۳۰)}{m_۱ + m_۲} g$$

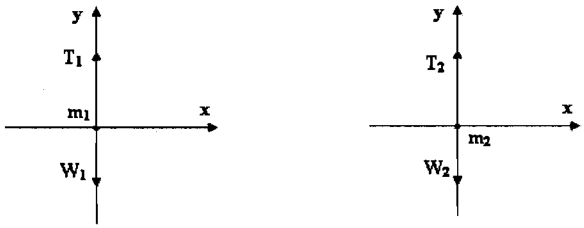
$$= \frac{(۶ \times ۰/۸۷) - (۵ \times ۰/۵)}{۶ + ۵} = ۲/۴ \frac{m}{s^۲}$$

$$T = m_۱ (g Sin(۳۰) + a) = ۵ \times (۹/۸ \times ۰/۵ + ۲/۴) = ۳۶/۵ N$$

۱۵. دو جسم به جرمهای $m_A = ۰/۲ Kg$ و $m_B = ۰/۳ Kg$ مطابق شکل ۲۱ زیر هم آویزان اند. کشش هریک از نخها را در وضعیت های زیر پیدا کنید: الف) سیستم در حال سکون است. ب) سیستم با شتاب $۵ \frac{m}{s^۲}$ به طرف بالا می رود. ج) سیستم با شتاب $۲ \frac{m}{s^۲}$ بالا می رود. د) سیستم با شتاب $۲ \frac{m}{s^۲}$ پایین می آید. ه) اگر حداکثر کشش مجاز برای این نخها ۱۰N باشد سیستم را حداکثر با چه شتابی می شود به بالا کشید؟



حل:



$m_A = ۰/۲Kg \quad , \quad m_B = ۰/۳Kg \quad , \quad a = o$

$m_A \rightarrow \quad \sum F_{Ax} = m_A a_x$

$T_۱ - T_۲ - m_A g = m_A a \qquad (۱)$

$m_B \rightarrow \quad \sum F_{By} = m_B a_y$

$T_۲ - m_B g = m_B a \qquad (۲)$

الف)

$$(۱),(۲) \rightarrow \begin{cases} T_۱ - T_۲ - m_A g = o \\ T_۲ - m_B g = o \end{cases}$$

$T_۲ = m_B g = ۰/۳ \times ۹/۸ = ۲/۹۴ N$

$T_۱ - m_B g - m_A g = o$

$T_۱ = (m_A + m_B) g = (۰/۲ + ۰/۳) \times ۹/۸ = ۴/۹ N$

ب)

$a = ۵ \dfrac{m}{s^۲} \uparrow$

$$\begin{cases} T_۱ - T_۲ - m_A g = m_A a \\ T_۲ - m_B g = m_B a \end{cases}$$

$T_۲ = m_B (g + a) = ۰/۳ \times (۹/۸ + ۵) = ۴/۴۴ N$

$T_۱ = T_۲ + m_A (g + a) = ۴/۴۴ + ۰/۲ \times (۹/۸ + ۵) = ۷/۴ N$

ج)

$$a = ۲\ \frac{m}{s^۲} \quad \uparrow$$

$$\begin{cases} T_۱ - T_۲ - m_A g = m_A a \\ T_۲ - m_B g = m_B a \end{cases}$$

$$T_۲ = m_B(g+a) = ۰/۳ \times (۹/۸+۲) = ۳/۵۴N$$

$$T_۱ = T_۲ + m_A(g+a) = ۳/۵۴ + ۰/۲ \times (۹/۸+۵) = ۵/۹N$$

د)

$$a = ۲\ \frac{m}{s^۲} \quad \downarrow$$

$$m_A \quad \rightarrow \quad \sum F_{Ax} = m_A a_x$$

$$T_۲ + m_A g - T_۱ = m_A a \qquad (۱)$$

$$m_B \quad \rightarrow \quad \sum F_{By} = m_B a_y$$

$$m_B g - T_۲ = m_B a \qquad (۲)$$

$$\begin{cases} T_۲ + m_A g - T_۱ = m_A a \\ m_B g - T_۲ = m_B a \end{cases}$$

$$T_۲ = m_B(g-a) = ۰/۳ \times (۹/۸-۲) = ۲/۳۴N$$

$$T_۱ = T_۲ + m_A(g-a) = ۳/۵۴ + ۰/۲ \times (۹/۸-۵) = ۳/۹N$$

ه)

$$T_۱ = T_۲ = ۱۰N$$

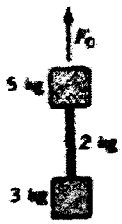
$$\begin{cases} T_۱ - T_۲ - m_A g = m_A a \\ T_۲ - m_B g = m_B a \end{cases}$$

$$T_۱ - (m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$a = \frac{T_۱ - (m_A + m_B)g}{m_A + m_B} = \frac{۱۰ - (۰/۲ + ۰/۳) \times ۹/۸}{۰/۲ + ۰/۳} = ۱۰/۲\frac{m}{s^۲}$$

۱۶. یک وزنه ۵ کیلوگرمی به وسیله قطعه طنابی به جرم ۲Kg به یک وزنه ۳ کیلوگرمی متصل شده است. نیروی خارجی $F_۰$ مطابق شکل ۲۲ وارد می شود و کل سیستم را با شتاب

$۲\frac{m}{s^۲}$ به بالا می کشد. الف) $F_۰$ چقدر است؟ ب) چه نیروی خالصی به طناب اثر می کند؟ ج) کشش طناب در وسط آن چقدر است؟



حل: الف) هر سه جسم را مثل جرم واحد درنظر می گیریم:

$$M = m_۱ + m_۲ + m_۳ = ۵ + ۲ + ۳ = ۱۰ Kg$$
$$F_۰ - Mg = Ma$$
$$F_۰ = M(g + a) = ۱۰ \times (۹/۸ + ۲) = ۱۱۸ N$$

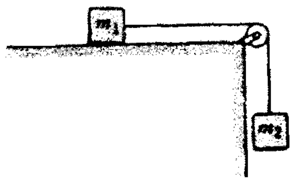
ب)

$$F = m_۲ a = ۲ \times ۲ = ۴ N$$

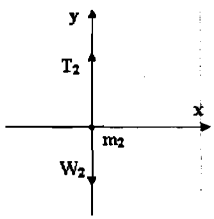
ج)

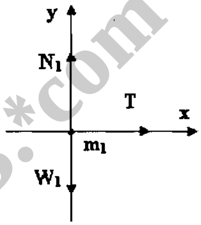
$$F_۰ - m_۱ g - \frac{m_۲ g}{۲} - T = (m_۱ + \frac{m_۲}{۲})a$$
$$T = F_۰ - (m_۱ - \frac{m_۲}{۲})g - (m_۱ + \frac{m_۲}{۲})a$$
$$= ۱۱۸ - (۵ + \frac{۲}{۲}) \times ۹/۸ + (۵ + \frac{۲}{۲}) \times ۲ = ۴۷/۲ N$$

۱۷. در سیستم شکل ۲۳، سطح افقی اصطکاک ندارد و جرم نخ ناچیز است. اگر $m_۱ = ۲ Kg$ باشد به ازای چه مقداری برای $m_۲$، الف) شتاب سیستم $۴\frac{m}{s^۲}$ خواهد بود؟ ب) کشش نخ برابر ۸N خواهد بود؟



حل: الف)





$$m_۱ \quad \rightarrow \quad \sum F_{۱x} = m_۱ a_x$$

$$T = m_۱ a \qquad (۱)$$

$$m_۲ \quad \rightarrow \quad \sum F_{۲y} = m_۲ a_y$$

$$m_۲ g - T = m_۲ a \qquad (۲)$$

$$a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

$$\begin{cases} T = m_۱ a \\ m_۲ g - T = m_۲ a \end{cases}$$

$$m_۲ g - m_۱ a = m_۲ a \quad \rightarrow \quad m_۲(g-a) = m_۱ a$$

$$m_۲ = \frac{m_۱ a}{g-a} = \frac{۲\times۴}{۹/۸-۴} = ۱/۳۸\,Kg$$

ب)

$$T = ۸N$$

$$T = m_۱ a \quad \rightarrow \quad a = \frac{T}{m_۱} = \frac{۸}{۲} = ۴\frac{m}{s^۲}$$

$$m_۲ g - T = m_۲ a \quad \rightarrow \quad m_۲ = \frac{T}{g-a} = \frac{۸}{۹/۸-۴} = ۱/۳۸\,Kg$$

بخش ۵-٦- وزن ظاهری

۱۸. شخصی به جرم ۷۵Kg در یک آسانسور روی ترازویی ایستاده است. وقتی عقربه ترازو هر یک از درجات زیر را نشان می دهد، در باره نحوه حرکت آسانسور چه نتیجه ای می شود گرفت: الف) ۷۳۵N، ب) ۶۰۰N، ج) ۹۰۰N

حل: الف) از آنجایی که وزن شخص ($W = mg = ۷۵ \times ۹/۸ = ۷۳۵\,N$) و عددی که ترازو نشان می دهد یکی است یعنی آسانسور ساکن است.

ب) عددی که ترازو نشان می دهد کمتر از وزن شخص است پس آسانسور با شتاب ثابت به طرف پایین حرکت می کند ($g = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$)

$$W - N = ma$$

$$a = \frac{W - N}{m} = \frac{۷۳۵ - ۶۰۰}{۷۵} = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$$

ج) مقداری که ترازو نشان می دهد بیشتر از وزن شخص است پس آسانسور با شتاب ثابت به سمت بالا حرکت می کند.

$$N - W = ma$$

$$a = \frac{N - W}{m} = \frac{۹۰۰ - ۷۳۵}{۷۵} = ۲/۲\frac{m}{s^۲}$$

۱۹. گلوله ای به جرم ۳Kg با یک قطعه یخ بسیار سبک از سقف آسانسور آوزان است. کشش نخ در هریک از حالتهای زیر چقدر است: الف) وقتی آسانسور که با سرعت $۵\frac{m}{s}$ در حال بالا رفتن است، حرکتش را با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ کند می کند. ب) وقتی آسانسور که با سرعت $۳\frac{m}{s}$ در حال پایین آمدن است، حرکتش را با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ تند می کند.

حل: الف)

$$v_\circ = ۵\frac{m}{s} \quad , \quad a = -۴\frac{m}{s^۲} \uparrow$$

$$T - W = ma$$

$$T = m(g + a) = ۳ \times (۹/۸ + ۴) = ۴۱/۴ \ N$$

ب)

$$v_\circ = ۳\frac{m}{s} \quad , \quad a = ۲\frac{m}{s^۲} \downarrow$$

$$W - T = ma$$

$$T = m(g - a) = ۳ \times (۹/۸ - ۲) = ۲۳/۴ \ N$$

۲۰. شتاب خالص موشکی برابر $۲/۴\frac{m}{s^۲}$ در جهت ۶۰° بالای افق است. وقتی موشک هنوز از زمین زیاد دور نشده باشد، وزن ظاهری شخصی به جرم ۸۰Kg در آن چقدر و در چه جهتی است؟

حل:

$$a = ۲/۴\frac{m}{s^۲} \quad , \quad m = ۸۰Kg \quad , \quad \theta = ۶۰^\circ$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$a_x = aCos\theta = ۲/۴ \times Cos(۶۰) = ۱/۲ \ \frac{m}{s^۲}$$

$$a_y = aSin\theta = ۲/۴ \times Sin(۶۰) = ۲/۱ \ \frac{m}{s^۲}$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N - mg = ma_y \quad \rightarrow \quad N = m(g + a_y) = ۸۰ \times (۹/۸ + ۲/۱) = ۹۵۲ N$$

مسائل تکمیلی

۲۱. یک کارگر ساختمان که جرمش ۷۵Kg است روی تخته ای به جرم $m = ۱۵\,Kg$ قرار گرفته و دارد با استفاده از یک سیستم طناب و قرقره مطابق شکل ۲۴ خودش را بالا می کشد. کشش طناب را در هر ک از حالتهای زیر پیدا کنید: الف) سیستم (در هوا) ساکن است. ب) کارگر با شتاب $۴\frac{m}{s^۲}$ به طرف بالا حرکت می کند. ج) اگر حداکثر کششی که طناب می تواند تحمل کند ۷۰۰N باشد و کارگر در وسط راه سر طناب را به قلابی در روی دیوار ببندد، چه اتفاقی می افتد؟

حل: الف) شتاب صفر است پس باید وزن هر دو طرف یکی باشد.

$$W = W_۱ + W_۲ = (m_۱ + m_۲)g = (۱۵ + ۷۵) \times ۹/۸ = ۸۸۲N$$

$$T = \frac{W}{۲} = \frac{۸۸۲}{۲} = ۴۴۱N$$

ب)

$$۲T - (m_۱ + m_۲)g = (m_۱ + m_۲)a$$

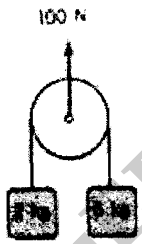
$$T = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)(g + a) = \frac{۱}{۲} \times (۱۵ + ۷۵) \times (۹/۸ + ۰/۴) = ۴۵۹N$$

ج) وقتی طناب را به سر قلاب می بندد نیروی کشش طناب برابر وزن شخص + وزن تخته است.

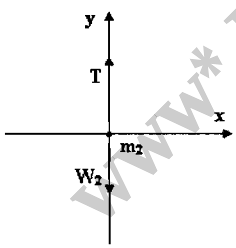
$$T = (m_۱ + m_۲)g = (۱۵ + ۷۵) \times ۹/۸ = ۸۸۲N$$

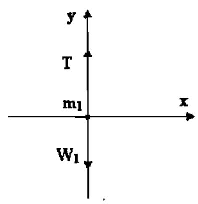
چون بیشتر از ۷۰۰N است طناب پاره می شود.

۲۲. در شکل ۲۵ ، دو جرم $m_1 = 2\,Kg$ و $m_1 = 5\,Kg$ توسط طناب از قرقره ای (بی جرم) آویزان اند. نیروی $F_0 = 100\,N$ که مطابق شکل به محور قرقره وارد می شود، این سیستم را با شتاب بالا می کشد. الف) شتاب هر یک از اجسام را (نسبت به زمین) پیدا کنید. ب) کشش طناب چقدر است؟



حل: الف و ب)





$m_1 = 2\,Kg \quad , \quad m_2 = 5\,Kg \quad , \quad F_0 = 100\,N$

$m_1 \quad \rightarrow \quad \sum F_{1y} = m_1 a_y$

$T - m_1 g = m_1 a \qquad (1)$

$m_2 \quad \rightarrow \quad \sum F_{2y} = m_2 a_y$

$m_2 g - T = m_2 a \qquad (2)$

$$F_{\circ}=۲T \qquad \rightarrow \qquad T=\frac{F_{\circ}}{۲}=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰N$$

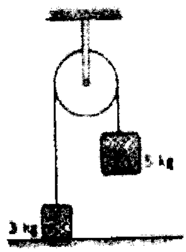
$$(۱) \qquad \rightarrow \qquad T-m_{۱}g=m_{۱}a$$

$$a=\frac{۱}{m_{۱}}(T-m_{۱}g)=\frac{۵۰-۲\times ۹/۸}{۲}=۱۵/۲\,\frac{m}{s^{۲}}$$

$$(۲) \qquad \rightarrow \qquad m_{۲}g-T=m_{۲}a$$

$$a=\frac{۱}{m_{۲}}(m_{۲}g-T)=\frac{۵\times ۹/۸-۵۰}{۵}=-۰/۲\,\frac{m}{s^{۲}}$$

۲۳. دو وزنه به جرمهای ۳Kg و ۵Kg مطابق شکل ۲۶، از دو طرف ریسمان سبکی که از قرقره ثابت کوچک و روانی گذشته است آویزان اند. وزنه ۵ کیلوگرمی را ابتدا ۴m بالاتر از کف زمین نگه می داریم و بعد رها می کنیم. وزنه ۳ کیلوگرمی (که در ابتدا روی زمین بوده است) حداکثر تا چه ارتفاعی از سطح زمن بالا می رود؟



حل:

$$m_{۱}=۲Kg \quad , \quad m_{۲}=۵Kg \quad , \quad h_{۲}=۵m \quad , \quad g=۹/۸\frac{m}{s^{۲}}$$

$$m_{۱} \qquad \rightarrow \qquad \sum F_{۱y}=m_{۱}a_{y}$$

$$T-m_{۱}g=m_{۱}a \qquad (۱)$$

$$m_{۲} \qquad \rightarrow \qquad \sum F_{۲y}=m_{۲}a_{y}$$

$$m_{۲}g-T=m_{۲}a \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad m_۲ g - m_۱ g - m_۱ a = m_۲ a$$

$$(m_۲ - m_۱) g = (m_۱ + m_۲) a$$

$$a = \frac{(m_۲ - m_۱) g}{m_۱ + m_۲} = \frac{(۵-۲)\times ۹/۸}{۵+۲} = ۲/۴۵ \frac{m}{s^۲}$$

چون $m_۲$ رها شده است ($v_۰ = o$) و $m_۲ > m_۱$ است پس جسم $m_۲$ به زمین می رسد:

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲ g h_۲$$

$$v^۲ - o = -۲ \times ۹/۸ \times (-۲) \quad \rightarrow \quad v = ۴/۴۲ \frac{m}{s}$$

که این سرعت به عنوان سرعت اولیه برای $m_۱$ است و زمانیکه جسم $m_۲$ به زمین می رسد متوقف می شود.

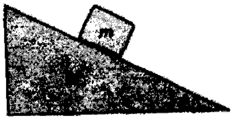
$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲ g h_۱$$

$$o - (۴/۴۲)^۲ = -۲ \times ۹/۸ \times h_۱ \quad \rightarrow \quad h_۱ = ۱m$$

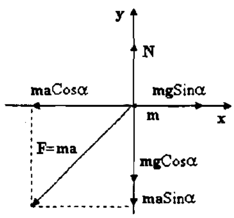
$$\Delta y = h_۱ + h_۲ = ۴ + ۱ = ۵m$$

Δy ارتفاعی است که $m_۱$ بالا می رود.

۲۴. در شکل ۲۷، جسمی به جرم m را روی گوه ای به جرم M می گذاریم. سطح ها بی اصطکاک فرض می شوند. همزمان، گوه در اثر یک نیروی خارجی با شتاب $۵ \frac{m}{s^۲}$ به طرف راست حرکت می کند. شتاب جرم m نسبت به گوه چقدر است؟ α (زاویه شیب گوه) را برابر با ۳۷° بگیرید. (در انتخاب دستگاه مختصات دقت کنید.)



حل: برای جرم m نیرو در خلاف جهت حساب می شود و با پایین آمدن جرم مخالفت می کند.



$$a = 5\frac{m}{s^2} \qquad , \qquad \alpha = 37^\circ$$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$maCos(37) - mgSin(37) = ma'$$

$$a' = aCos(37) - gSin(37) = (5 \times 0/8) - (9/8 \times 0/6) = -1/88\frac{m}{s^2}$$

منفی یعنی جهت شتاب خلاف جهت دستگاه مختصاتی است که ما انتخاب کردیم.

۲۵. در یک تمرین پرتاب وزنه، وزنه ای به جرم ۷/۲۵Kg در جهت °۴۵ بالای افق پرتاب می شود و در فاصله ۱۶m دورتر از نقطه پرتاب، روی سکویی که هم ارتفاع با نقطه پرتاب است فرود می آید. اگر پرتاب کننده قبل از رها کردن وزنه دستش را ۱/۵m به جلو حرکت داده باشد چه نیروی متوسطی به وزنه وارد کرده است؟

حل:

$$m = 7/25\,Kg \qquad , \qquad \theta = 45^\circ \qquad , \qquad x = 16\,m$$

$$\begin{cases} a_x = a\,Cos(45) = 0/7a \\ a_y = a\,Sin(45) = 0/7a \end{cases}$$

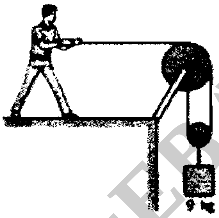
$$R = \frac{v_0^2 Sin(2\theta)}{g} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{Sin(2\theta)}} = \sqrt{9/8 \times 16} = 11/9\frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a_x(\Delta x)$$

$$o - (11/9)^2 = 2 \times 0/7a \times (16 - 1/5) \quad \rightarrow \quad a = 7\frac{m}{s^2}$$

$$F = ma = 7/25 \times 7 = 50/75\,N$$

۲۶. در سیستم قرقره و طناب در شکل ۲۸، که وزنه ۹ کیلوگرمی از آن آویزان است شخصی که سر آزاد طناب را گرفته است باید به هریک از منظورهای زیر چه نیرویی به آن اعمال کند: الف) برای بی حرکت نگه داشتن وزنه، ب) برای پایین فرستادن وزنه با سرعت ثابت $۲\frac{m}{s}$ و ج) برای بالا کشیدن وزنه با شتاب $۰/۵\frac{m}{s^۲}$.



حل: الف) برای اینکه وزنه بی حرکت باشد

$$\sum F_y = ma_y$$
$$۲T - mg = o$$
$$T = \frac{mg}{۲} = \frac{۹\times۹/۸}{۲} = ۴۴/۱\ N$$

ب) سرعت ثابت است پس شتاب صفر می شود و نیروی کشش طناب مثل قسمت الف بدست می آید.

ج)

$$a = ۰/۵\frac{m}{s^۲} \qquad \uparrow$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$۲T - mg = ma$$
$$T = \frac{mg+ma}{۲} = \frac{(۹\times۹/۸)+(۹\times۰/۵)}{۲} = ۴۶/۳۵\ N \approx ۴۶/۴\ N$$

فصل ۶

مسئله ها

بخش ٦-۱- اصطکاک

۱. در اتومبیل های معمولی (دیفرانسیل عقب) فقط چرخهای عقب توسط نیروی موتور چرخانده می شوند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی چرخها و جاده ۰/۸ باشد بیشترین شتابی که اتومبیل می تواند با آن الف) به حرکت در بیاید و ب) متوقف شود، چقدر است؟

حل: الف) زمانی که اتومبیل حرکت می کند ضریب اصطکاکم جنبشی داریم ma بیشترین نیرویی است که باعث می شود جسم شروع به حرکت کند.

$$\mu_s = ۰/۸$$

$$f_{s(\max)} = ma_{(\max)}$$

اما از آنجایی که چرخهای عقب نصف وزن اتومبیل را تحمل می کنند

$$\mu_s N = \mu_s \left(\frac{mg}{۲}\right) = ma$$

$$a = \frac{\mu_s g}{۲} = \frac{۰/۸ \times ۹/۸}{۲} = ۳/۹۲ \frac{m}{s^۲}$$

ب) زمانیکه متوقف می شود

$$-\mu_s mg = ma$$

$$a = -\mu_s g = -۰/۸ \times ۹/۸ = -۷/۸۴ \frac{m}{s^۲}$$

۲. در شکل ۱۷ دو جسم با سرعتهای ثابت حرکت می کنند (جسم ۵ کیلوگرمی از شیب به پایین می لغزد) الف) ضریب اصطکاک جنبشی (یکسان برای هر دو جسم) چقدر است؟

ب) کشش نخ چقدر است؟

حل: الف) سرعت ثابت پس شتاب صفر است.

$$m_۱ = ۵Kg \quad , \quad m_۲ = ۲Kg \quad , \quad g = ۹/۸ \frac{m}{s^۲} \quad , \quad \theta = ۳۰^\circ$$

$$m_۱ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Sigma F_x = m_۱ a_x \\ \Sigma F_y = m_۱ a_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_۱ g\, Sin\theta - f_{۱k} - T = o \\ N_۱ - m_۱ g\, Cos\theta = o \end{cases}$$

$$f_{۱k} = \mu_k N_۱ = \mu_k m_۱ g Cos\theta$$

$$m_۱ g\, Sin\theta - \mu_k m_۱ g Cos\theta - T = o \quad (۱)$$

$$m_۲ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Sigma F_x = m_۲ a_x \\ \Sigma F_y = m_۲ a_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} T - F_{۲k} = o \\ N_۲ - W_۲ = o \end{cases}$$

$$f_{۱k} = \mu_k N_۲ = \mu_k\, m_۲ g$$

$$T - \mu_k\, m_۲ g = o \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad m_۱ g\, Sin\theta - \mu_k m_۱ g\, Cos\theta - \mu_k\, m_۲ g = o$$

$$m_۱ g\, Sin\theta = \mu_k g(m_۱\, Cos\theta + m_۲)$$

$$\mu_k = \frac{m_۱\, Sin\theta}{m_۱\, Cos\theta + m_۲} = \frac{۵ \times Sin(۳۰)}{۵ \times Cos(۳۰) + ۲} = \frac{۵ \times \frac{۱}{۲}}{(۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}) + ۲}$$

$$= \frac{۲/۵}{(۲/۵ \times ۱/۷۳) + ۲} = ۰/۳۹۵$$

$$(\sqrt{۳} = ۱/۷۳)$$

ب)

$$T = \mu_k m_۲ g = ۰/۳۹۵ \times ۲ \times ۹/۸ = ۷/۷۴۲ N$$

۳. شخصی به جرم ۸۰Kg می خواهد جعبه ای به جرم ۲۰Kg را روی سطح ناهمواری هل بدهد. فرض کنید برای شخص $\mu_s = ۰/۸$ و برای جعبه $\mu_s = ۰/۴$ است. الف) بیشترین شتاب ممکن برای جعبه چقدر است؟ ب) در حرکت با این شتاب چه نیرویی از جعبه به شخص وارد می شود؟

حل: الف) اگر $f_۱$ نیروی اصطکاک ایستایی شخص و $f_۲$ نیروی اصطکاک جنبشی جعبه باشد زمانی که شخص جسم را با نیروی F هل می دهد نیروی $f_۱$ در راستای نیروی F به شخص وارد می شود و نیروی $f_۲$ خلاف جهت نیروی F است. نیروی F با نیروی $f_۱$ برابر است چون بیشترین نیروی وارد شده به جعبه با ماکزیمم اصطکاک ایستایی برابر است پس:

$$f_۲ = \mu_k m_۲ g$$

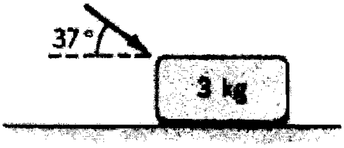
$$\begin{cases} F - \mu_k m_۲ g = m_۲ a \\ F = f_۱ = \mu_s m_۱ g \end{cases} \rightarrow \qquad \mu_s m_۱ g - \mu_k m_۲ g = m_۲ a$$

$$a = \frac{(\mu_s m_۱ - \mu_k m_۲)}{m_۲} g = \frac{(۰/۸ \times ۸۰ - ۰/۴ \times ۲۰)}{۲۰} \times ۹/۸ = ۲۶/۴۶ \frac{m}{s^۲}$$

ب) نیرویی که از جعبه به شخص (F') وارد می شود. طبق قانون سوم نیوتن با مقدار نیروی F مساوی در خلاف جهت و در یک راستا است.

$$F' = F = f_۱ = \mu_s m_۱ g = ۰/۸ \times ۸۰ \times ۹/۸ = ۶۲۷/۲ N$$

۴. در شکل ۱۸ نیروی وارد بر جسم، ۲۵N است. فرض کنید $\mu_k = ۰/۲$ و $\mu_s = ۰/۵$ است. الف) اگر جسم در ابتدا ساکن باشد آیا در اثر این نیرو به حرکت در می آید؟ ب) اگر جسم به طرف راست حرکت کند شتاب آن چقدر است؟



حل:

$F = ۲۵N \quad , \quad \mu_k = ۰/۲ \quad , \quad \mu_s = ۰/۵$

$m = ۳Kg \quad , \quad g = ۹/۸\frac{m}{s^۲} \quad , \quad \theta = ۳۷^\circ$

الف)

$$\begin{cases} v_o = o \\ a = o \end{cases}$$

$$F_x = F\,Cos(۳۷) = ۲۵ \times ۰/۸ = ۲۰N$$

$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N - mg - F\,Sin(۳۷) = o \\ N = mg + F\,Sin(۳۷) \end{cases}$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s(mg + F\,Sin(۳۷)) = ۰/۵ \times ((۳\times ۹/۸) + (۲۵ \times ۰/۶)) = ۲۲/۲N$$

چون نیروی اصطکاک ایستایی بیشتر از نیروی وارد بر جسم در راستای محور X است پس جسم حرکت نمی کند.

ب) اگر جسم شروع به حرکت کند نیروی اصطکاک جنبشی داریم:

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad F\,Cos(۳۷) - f_k = ma \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad N - mg - F\,Sin(۳۷) = o$$

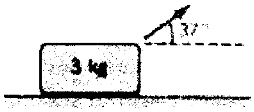
$$f_k = \mu_k N = \mu_k(mg + F\,Sin(۳۷)) \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad F\,Cos(۳۷) - \mu_k(mg + F\,Sin(۳۷)) = ma$$

$$a = \frac{۱}{m}(F\,Cos(۳۷) - \mu_k(mg + F\,Sin(۳۷)))$$

$$= \frac{۱}{۳}(۲۵ \times ۰/۸ - ۰/۲ \times (۳ \times ۹/۸ + ۲۵ \times ۰/۶)) = ۳/۷۱\frac{m}{s^۲}$$

۵. مسئله ۴ را برای حالتی که در آن جهت نیرو مطابق شکل ۱۹ باشد، حل کنید.



حل: الف)

$$\begin{cases} v_o = o \\ a = o \end{cases}$$

$$F_x = F\,Cos(۳۷) = ۲۵ \times ۰/۸ = ۲۰ N$$

$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N + F\,Sin(۳۷) - mg = o \\ N = mg - F\,Sin(۳۷) \end{cases}$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s (mg - F\,Sin(۳۷)) = ۰/۵ \times ((۳ \times ۹/۸) - (۲۵ \times ۰/۶)) = ۷/۲ N$$

ب)

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad F\,Cos(۳۷) - f_k = ma \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad N + F\,Sin(۳۷) - mg = o$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F\,Sin(۳۷)) \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad F\,Cos(۳۷) - \mu_k (mg - F\,Sin(۳۷)) = ma$$

$$a = \frac{۱}{m}(F\,Cos(۳۷) - \mu_k (mg - F\,Sin(۳۷)))$$

$$= \frac{۱}{۳}(۲۵ \times ۰/۸ - ۰/۲ \times (۳ \times ۹/۸ - ۲۵ \times ۰/۶))$$

$$= ۵/۷۱ \frac{m}{s^۲}$$

۶. جسمی به جرم ۲/۵Kg روی سطح شیبداری با زاویه شیب ۵۳ درجه که برای آن $\mu_k = ۰/۲۵$ و $\mu_s = ۰/۵$ است قرار داده می شود. شتاب جسم در هریک از حالتهای

زیر چقدر است؟ الف) اگر بدون سرعت اولیه روی سطح قرار داده شود. ب) اگر به طرف بالا در حرکت باشد و ج) اگر به طرف پایین در حرکت باشد.

حل: $\mu_s = ۰/۵ \quad , \quad \mu_k = ۰/۲ \quad , \quad \theta = ۵۳^\circ \quad , \quad g = ۹/۸\dfrac{m}{s^۲} \quad , \quad m = ۲/۵Kg$

الف) جسم به سمت پایین می لغزد چون هیچ سرعت اولیه ای ندارد:

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad mg\,Sin\alpha - f_k = ma \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad N - mg\,Cos\alpha = o$$
$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,Cos\alpha \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad mg\,Sin\alpha - \mu_k mg\,Cos\alpha = ma$$
$$a = g\,(Sin\alpha - \mu_k\,Cos\alpha)$$
$$= ۹/۸ \times (Sin(۵۳) - ۰/۲۵ \times Cos(۵۳))$$
$$= ۹/۸ \times (۰/۸ - ۰/۲۵ \times ۰/۶) = ۶/۳۷\,\frac{m}{s^۲}$$

ب)

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad -mg\,Sin\alpha - f_k = ma \qquad (۱)$$
$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad N - mg\,Cos\alpha = o$$
$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,Cos\alpha \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad -mg\,Sin\alpha - \mu_k mg\,Cos\alpha = ma$$
$$a = g\,(-Sin\alpha - \mu_k\,Cos\alpha)$$
$$= ۹/۸ \times (-Sin(۵۳) - ۰/۲۵ \times Cos(۵۳))$$
$$= ۹/۸ \times (-۰/۸ - ۰/۲۵ \times ۰/۶) = -۹/۳۱\,\frac{m}{s^۲}$$

جهت شتاب به سمت پایین است چون منفی است.

ج)

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad mg\,Sin\alpha - f_k = ma \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad N - mg\,Cos\alpha = o$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,Cos\alpha \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad mg\,Sin\alpha - \mu_k mg\,Cos\alpha = ma$$

$$a = g(Sin\alpha - \mu_k\,Cos\alpha)$$

$$= ۹/۸ \times (Sin(۵۳) - ۰/۲۵ \times Cos(۵۳))$$

$$= ۹/۸ \times (۰/۸ - ۰/۲۵ \times ۰/۶) = ۶/۳۷\,\frac{m}{s^۲}$$

۷. یک تریلی که صندوقی را حمل می کند با شتاب $۶\frac{m}{s^۲}$ در جاده افقی سرعتش را زیاد می کند. حداقل ضریب اصطکاک میان جعبه و کف تریلی چقدر باشدتا جعبه در حین این حرکت از جای خودش تکان نخورد؟

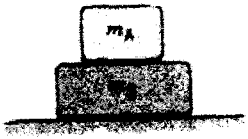
حل:

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f_k = ma & (۱) \\ N - W = o\end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad \mu_k mg = ma \quad \Rightarrow \quad \mu_k = \frac{a}{g} = \frac{۶}{۹/۸} = ۰/۶۱۲$$

۸. در شکل ۲۰، $m_A = ۲Kg$ و $m_B = ۵Kg$ است. جسم B با سطحی که در روی آن واقع شده است اصطکاکی ندارد ولی بین اجسام A و B اصطکاکی با ضریب $\mu_s = ۰/۲۵$ وجود دارد. الف) اگر هر دو جسم با سرعت ثابت در حرکت باشند نیروی اصطکاک میان آنها چقدر است؟ ب) حداکثر چه نیروی افقی ای می شود به B وارد کرد بی آنکه A روی آن بلغزد؟



حل: الف) چون سرعت ثابت است (شتاب صفر) هیچ نیروی اصطکاکی بین دو جسم وجود ندارد.

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad f_s = ma = o$$

ب)

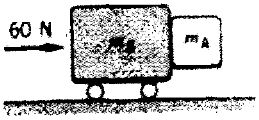
$$f_s = \mu_s N = \mu_s\, m_A g = ۰/۲۵ \times ۲ \times ۹/۸ = ۴/۹\,N$$

$$f_{s(\max)} = m_A a \quad \rightarrow \quad a = \frac{f_{s(\max)}}{m_A} = \frac{۴/۹}{۲} = ۲/۴۵\frac{m}{s^۲}$$

$$\sum F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad F = (m_A + m_B)a$$

$$F = (۲+۵) \times ۲/۴۵ = ۱۷/۱۵\,N$$

۹. در شکل ۲۱ ، $m_A = ۲Kg$ و $m_B = ۳Kg$ است. نیرویی برابر با ۶۰N مطابق شکل به B وارد می شود.ضریب اصطکاک میان دو جسم حداقل باید چقدر باشد تا A به پایین نلغزد؟



حل:

$$F = ۶۰\,N \quad , \quad m_A = ۲Kg \quad , \quad m_B = ۳Kg$$

$$M = m_A + m_B = ۲ + ۳ = ۵Kg$$

$$F = Ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{F}{M} = \frac{۶۰}{۵} = ۱۲\frac{m}{s^۲}$$

F_{AB} نیرویی که جسم A به جسم B وارد می کند

F_{BA} نیرویی که جسم B به جسم A وارد می کند.

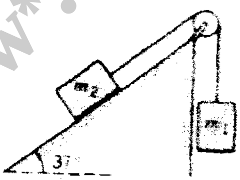
$F_{BA} = m_A a = ۲\times۱۲ = ۲۴N$

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}F_{BA} - N = o \\ f_s - m_A g = o\end{cases}$$

$f_s = \mu_s N$

$$m_A g = \mu_s F_{BA} \rightarrow \mu_s = \frac{m_A g}{F_{BA}} = \frac{۲\times۹/۸}{۲۴} = ۰/۸۲$$

۱۰. در شکل ۲۲، $m_۱ = m_۲ = ۵Kg$ است. اگر $\mu_k = ۰/۲۵$ باشد، شتاب حرکت مستقیم در هر یک از حالتهای زیر چقدر است؟ الف) وقتی $m_۱$ به طرف پایین در حرکت است. ب) وقتی $m_۱$ به طرف بالا در حرکت است. ج) اگر $m_۲ = ۶Kg$ باشد به ازای چه مقادیری از $m_۱$ سیستم با سرعت ثابت حرکت خواهد کرد؟



حل: $g = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$, $\mu_k = ۰/۲۵$, $m_۱ = m_۲ = ۵Kg$

الف)

$$m_۲ \rightarrow \begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}T - f_k - m_۲ g\,Sin\theta = m_۲ a \\ N - m_۲ g\,Cos\theta = o\end{cases}$$

$f_k = \mu_k N = \mu_k m_۲ g\,Cos\theta$

$T - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta - m_۲ g\,Sin\theta = m_۲ a \qquad (۱)$

$$m_۱ \rightarrow \sum F_y = ma_y \rightarrow m_۱ g - T = m_۱ a$$

$T = m_۱(g-a) \qquad (۲)$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad m_۱g - m_۱a - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta - m_۲ g\,Sin\theta = m_۲ a$$

$$a = \frac{m_۱ - \mu_k m_۲\,Cos\theta - m_۲\,Sin\theta}{m_۱ + m_۲} g$$

$$= \frac{۵ - (۰/۲۵ \times ۵ \times ۰/۸) - (۵ \times ۰/۶)}{۵+۵} \times ۹/۸$$

$$= ۰/۹۸\ \frac{m}{s^۲}$$

ب)

$$m_۱ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_۲ g\,Sin\theta - T - f_k = m_۲ a \\ N - m_۲ g\,Cos\theta = o \end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k m_۲ g\,Cos\theta$$

$$m_۲ g\,Sin\theta - T - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta = m_۲ a \qquad (۱)$$

$$m_۱ \quad \rightarrow \quad \sum F_y = ma_y \quad \rightarrow \quad T + m_۱ g = m_۱ a$$

$$T = m_۱(g+a) \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad m_۲ g\,Sin\theta - m_۱ g - m_۱ a - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta = m_۲ a$$

$$a = \frac{m_۲\,Sin\theta - m_۱ - \mu_k m_۲\,Cos\theta}{m_۱ + m_۲} g$$

$$= \frac{(۵ \times ۰/۶) - (۰/۲۵ \times ۵ \times ۰/۸) - ۵}{۵+۵} \times ۹/۸ = -۲/۹۴ \frac{m}{s^۲}$$

ج) سرعت ثابت پس شتاب صفر، فرض می کنیم $m_۲ = ۶Kg$ به سمت پایین حرکت می کند.

$$\begin{cases} T - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta - m_۲ g\,Sin\theta = o \\ m_۱ g - T = o \end{cases}$$

$$m_۱ g - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta - m_۲ g\,Sin\theta = o$$

$$m_۱ = m_۲(\mu_k\,Cos\theta + Sin\theta) = ۶ \times (۰/۲۵ \times ۰/۸ + ۰/۶) = ۴/۸\,Kg$$

اگر $m_۲$ به سمت بالا حرکت کند:

$$\begin{cases} m_۲ g\,Sin\theta - T - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta = o \\ T + m_۱ g = o \end{cases}$$

$$m_۲ g\,Sin\theta - m_۱ g - \mu_k m_۲ g\,Cos\theta = o$$

$$m_۱ = m_۲(Sin\theta - \mu_k Cos\theta) = ۶\times(۰/۶ - ۰/۲۵\times۰/۸) = ۲/۴\,Kg$$

۱۱. گلوله ای به جرم ۵۸۰gr توسط نخی از سقف قطاری آویزان است. وقتی قطار با شتاب ثابت روی ریل های مستقیم و افقی حرکت می کند کشش نخ برابر با ۶N است. شتاب قطار را حساب کنید.

حل:

$$m = ۵۸۰\,gr = ۰/۵۸\,Kg \qquad , \qquad T = ۶N$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T\,Sin\theta = ma \\ T\,Cos\theta - mg = o \end{cases}$$

$$T\,Cos\theta = mg \qquad \rightarrow \qquad Cos\theta = \frac{mg}{T}$$

$$\theta = Cos^{-۱}(\frac{mg}{T}) = Cos^{-۱}(\frac{۰/۵۸\times۹/۸}{۶}) = ۱۸/۶۸^\circ$$

$$T\,Sin\theta = ma \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{T\,Sin\theta}{m} = \frac{۶\times Sin(۱۸/۶۸)}{۰/۵۸} = ۳/۳۱\,\frac{m}{s^۲}$$

بخش ٦-۲- دینامیک حرکت دایره ای

۱۲. سطل پر از آبی را در دایره قائمی به شعاع ۸۰cm می چرخانیم. سرعت سطل در بالاترین نقطه مسیر حداقل باید چقدر باشد تا آب از آن بیرون نریزد؟

حل:

$$r = ۸۰\,cm = ۰/۸\,m$$

در بالاترین نقطه از مسیر کشش طناب صفر است:

$$T + mg = \frac{mv^۲}{r} \qquad , \qquad T = o$$

$$mg = \frac{mv^۲}{r} \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{rg} = \sqrt{۰/۸ \times ۹/۸} = ۲/۸\frac{m}{s}$$

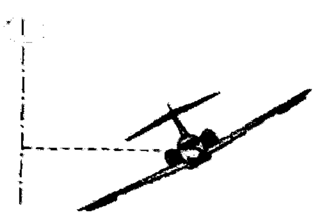
۱۳. در یک جاده افقی، اتومبیلی می خواهد با سرعت v از پیچی به شعاع r عبور کند. نشان بدهید که زاویه مناسب برای شیب عرضی جاده در این پیچ از رابطه $\tan\theta = \frac{v^۲}{rg}$ بدست می آید. (فرض کنید اصطکاک آنقدر کم است که برای عبور بی خطر فقط باید به شیب عرضی جاده متکی بود.)

حل:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} N\,Sin\theta = \frac{mv^۲}{r} \\ N\,Cos\theta - mg = o \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \frac{\frac{mv^۲}{r}}{mg} = \frac{v^۲}{rg}$$

۱۴. هواپیمایی با سرعت $۴۰۰\frac{Km}{h}$ در مسیری به شعاع $۲Km$ در حال دور زدن است .(شکل ۲۳) زاویه بالها نسبت به افق چقدر است؟ توجه کنید که نیروی بالا برند آئرودینامیکی عمود بر سطح بالها است.



حل:

$$v = ۴۰۰\frac{Km}{h} = ۱۱۱/۱۱\frac{m}{s} \quad , \quad r = ۲\,Km = ۲۰۰۰\,m$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F\,Sin\theta = \dfrac{mv^۲}{r} \\ F\,Cos\theta - mg = o \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \frac{\frac{mv^۲}{r}}{mg} = \frac{v^۲}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-۱}(\frac{v^۲}{rg}) = \tan^{-۱}(\frac{(۱۱۱/۱۱)^۲}{۲۰۰۰ \times ۹/۸}) = ۳۲/۲^\circ$$

۱۵. خودرویی در یک جاده تخت، پیچی به شعاع ۴۰m را با سرعت $۱۵\frac{m}{s}$ طی می کند. اندازه وزن ظاهری راننده این خودرو در حین این حرکت چقدر است؟ جرم راننده $۷۰\,Kg$ است.

حل:

$$v = ۱۵\frac{m}{s} \quad , \quad r = ۴۰\,m \quad , \quad m = ۷۰\,Kg$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N\,Sin\theta = \dfrac{mv^۲}{r} \\ N\,Cos\theta - mg = o \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \frac{\frac{mv^۲}{r}}{mg} = \frac{v^۲}{rg}$$

$$\theta = \tan^{-۱}(\frac{v^۲}{rg}) = \tan^{-۱}(\frac{(۱۵)^۲}{۴۰ \times ۹/۸}) = ۲۹/۹^\circ$$

$$N = \frac{mg}{Cos\theta} = \frac{۷۰ \times ۹/۸}{Cos(۲۹/۹)} = ۷۹۱N$$

۱۶. اگر زمین با سرعتی می چرخید که وزن ظاهری ساکنان استوا صفر می شد، هر شبانه روز چقدر طول می کشید؟

حل:

$$mg = \frac{mv^۲}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{rg}$$

$$v = r\omega = r(\frac{۲\pi}{T})$$

$$\sqrt{rg} = r(\frac{۲\pi}{T}) \quad \rightarrow \quad T = ۲\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$T = ۲\times ۳/۱۴ \times \sqrt{\frac{۶۴۰۰\times ۱۰^۳}{۹/۸}} = ۵۰۷۷/۵۸s = ۵۰۷۷/۵۸\cancel{s} \times \frac{۱h}{۳۶۰۰\cancel{s}} = ۱/۴۱h$$

۱۷. اتومبیلی که با سرعت v در حرکت است، ناگهان با تنه درختی که بر مسیر در جاده افتاده و آنرا بسته است مواجه می شود. ضریب اصطکاک ایستایی چرخها با جاده μ_s است. برای اجتناب از برخورد، راننده در هر یک از شرایط زیر باید حداقل در چه فاصله ای از مانع دست به کار شود: الف) اگر بخواهد در خط مستقیم ترمز کند، و ب) اگر بخواهد (بدون ترمز کردن) فرمان را به یک طرف بپیچاندو در یک مسیر دایره ای دور بزند؟

حل: الف)

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}-f_s = ma \\ N - mg = o\end{cases}$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg \quad \rightarrow \quad -\mu_s mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\mu_s g$$

$$v^۲ - v_o^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$(o)^۲ - v_o^۲ = ۲(-\mu_s g)(\Delta x) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{v_o^۲}{۲\mu_s g}$$

ب)

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_s = \frac{mv^۲}{r} \\ N - mg = o\end{cases}$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow \mu_s mg = \frac{mv^۲}{r} \Rightarrow r = \frac{v^۲}{\mu_s g}$$

بخش ٦-٣- مدارهای سیاره ای و قانون سوم کپلر

۱۸. دوره تناوب گردش ماه به دور زمین ۲۷/۳d و شعاع مدار آن $۳/۸۴\times۱۰^۵\ Km$ است. مقادیر متناظر برای یکی از قمرهای سیاره مشتری به ترتیب برابر با ۳/۵d و $۶/۷\times۱۰^۵\ Km$ است. نسبت جرم مشتری به جرم زمین چقدر است؟

حل:

$$M_۲ = \text{جرم مشتري} \quad , \quad M_۱ = \text{جرم زمین}$$

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM} r^۳$$

$$T_۱^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM_۱} r_۱^۳ \rightarrow M_۱ = (\frac{۴\pi^۲}{G})(\frac{r_۱^۳}{T_۱^۲})$$

$$T_۲^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM_۲} r_۲^۳ \rightarrow M_۲ = (\frac{۴\pi^۲}{G})(\frac{r_۲^۳}{T_۲^۲})$$

$$\frac{M_۲}{M_۱} = \frac{\frac{r_۲^۳}{T_۲^۲}}{\frac{r_۱^۳}{T_۱^۲}} = (\frac{r_۲}{r_۱})^۳(\frac{T_۱}{T_۲})^۲ = (\frac{۶/۷\times۱۰^۵\ Km}{۳/۸۴\times۱۰^۵\ Km})^۳\times(\frac{۲۷/۳\ d}{۳/۵\ d})^۲ = ۳۲۳/۱۶$$

۱۹. یک ستاره نوترونی به شعاع ۲۰Km، در رهر ثانیه یکبار دور خودش می چرخد. جرم این ستاره باید چقدر باشدتا اشیایی که در استوای آن واقع شده اند از سطح ستاره جدا نشوند؟

حل:

$$f = ۱ \ \frac{۱}{s} \quad , \quad T = ۱s \quad , \quad r = ۲۰ Km$$

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM} r^۳$$

$$M = (\frac{۴\pi^۲}{G})(\frac{r^۳}{T^۲}) = (\frac{۴\times(۳/۱۴)^۲}{۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}})\times(\frac{(۲۰\times۱۰^۳)^۳}{(۱)^۲}) = ۴/۷۴\times۱۰^{۲۴} \ Kg$$

بخش ٦-٤- چارچوب نالخت

۲۰. اتوبوسی در جاده مستقیم حرکت می کند. نخ آونگی که از سقف اتوبوس آویزان استبا امتداد قائم زاویه ۸ درجه می سازد. شتاب اتوبوس چقدر است؟

حل:

$$\theta = ۸^\circ$$

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}T \, Sin\theta = ma \\ T \, Cos\theta - mg = o\end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \rightarrow \qquad a = g\tan\theta = ۹/۸\times\tan(۸) = ۱/۳۷۷ \ \frac{m}{s^۲}$$

۲۱. اتومبیلی در یک جاده تخت با سرعت ثابت در حال عبور از پیچی به شعاع ۴۰m است. مسافری که لیوانی به قطر ۳cm را به طور قائم در دست نگه داشته است مشاهده می کند که سطح آب در یک طرف لیوان به اندازه ۰/۵cm بالا می رود. سرعت اتومبیل چقدر است؟

حل: شعاع لیوان $r = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ cm$

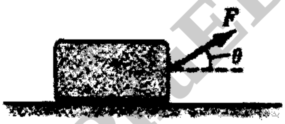
ارتفاعی که آب در لیوان بالا رفته = y

$$\tan\theta = \frac{y}{r} = \frac{۰/۵}{۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$\tan\theta = \frac{v^۲}{rg} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{۴۰\times ۹/۸ \times \frac{۱}{۳}} = ۱۱/۴\,\frac{m}{s}$$

مسائل تکمیلی

۲۲. در شکل ۲۴، ضریب اصطکاک ایستایی μ_s است. الف) نشان بدهید که نیروی (F) لازم برای به حرکت درآوردن جسم به ازای $\tan\theta = \mu_s$ به حداقل می رسد. ب) نشان دهید که مقدار این نیروی حداقل برابر با $mg\,Sin\theta$ است.



حل: الف)

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}F\,Cos\theta - f_s = o \\ F\,Sin\theta + N - mg = o\end{cases}$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s(mg - F\,Sin\theta)$$

$$F\,Cos\theta = f_s = \mu_s(mg - F\,Sin\theta) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mu_s mg}{Cos\theta + \mu_s\,Sin\theta}$$

برای اینکه نیروی F حداقل باشد باید $\frac{dF}{d\theta} = o$

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{-(-Sin\theta + \mu_s Cos\theta)\mu_s mg}{(Cos\theta + \mu_s\,Sin\theta)^۲} = o$$

$$-(-Sin\theta + \mu_s Cos\theta)\mu_s mg = o$$

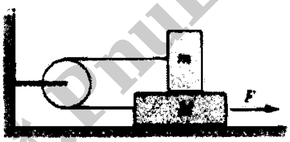
$$Sin\theta = \mu_s Cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \tan\theta$$

ب)

$$F = \frac{\mu_s mg}{Cos\theta + \mu_s Sin\theta} = \frac{mg\tan\theta}{Cos\theta + \tan\theta\, Sin\theta} = \frac{mg(\frac{Sin\theta}{Cos\theta})}{Cos\theta + (\frac{Sin\theta}{Cos\theta})Sin\theta}$$

$$= \frac{mg\, Sin\theta}{Cos^{۲}\theta + Sin^{۲}\theta} = mg\, Sin\theta$$

۲۳. در سیستم شکل ۲۵، $m = ۲\,Kg$ و $M = ۴\,Kg$ است. ضریب اصطکاک لغزشی برای همه سطوح $\mu_k = ۰/۲$ است. (جرم قرقره و نخ ناچیز فرض کنید.) این دو جسم به ازای چه مقداری از نیروی افقی F، الف) با سرعت ثابت حرکت خواهد کرد. ب) با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^{۲}}$ حرکت خواهند کرد؟



حل: الف) سرعت ثابت پس شتاب صفر است.

$$M \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = Ma_x \\ \sum F_y = Ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F - f_{k۱} - T = o \\ N - (M+m)g = o \end{cases}$$

$$f_{k۱} = \mu_k N = \mu_k (M+m)g$$

$$F - \mu_k (M+m)g - T = o \qquad (۱)$$

$$m \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = Ma_x \\ \sum F_y = Ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -f_{k۲} + T = o \\ N - mg = o \end{cases}$$

$$f_{k۲} = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$-\mu_k mg + T = o \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow F - \mu_k (M+m)g - \mu_k mg = o$$

$$F = \mu_k (M+m)g + \mu_k mg = \mu_k (M + ۲m)g$$

$$= ۰/۲ \times ۹/۸ \times (۴ + (۲\times۲)) = ۱۵/۶۸\,N$$

ب)

$$a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

$$M \quad \rightarrow \quad F - \mu_k(M+m)g - T = (M+m)a \qquad (۱)$$

$$m \quad \rightarrow \quad -\mu_k mg + T = ma \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad F - \mu_k(M+m)g - \mu_k mg - ma = (M+m)a$$

$$F = \mu_k(M+m)g + \mu_k mg + ma + (M+m)a$$

$$= \mu_k(M+۲m)g + (M+۲m)a$$

$$= (M+۲m)(\mu_k g + a)$$

$$= (۴+(۲\times۲))\times(۰/۲\times۹/۸+۲) = ۳۱/۶۸\,N$$

۲۴. اتومبیلی در جاده ای با شیب عرضی ۳۵ درجه مسیری منحنی به شعاع ۴۰m را طی می کند، اگر ضریب اصطکاک ایستایی ۰/۴ باشد، کمترین و بیشترین سرعت مطمئن برای این اتومبیل چقدر است؟

حل: $\theta = ۳۵^\circ \quad , \quad r = ۴۰m \quad , \quad \mu_s = ۰/۴$

کمترین سرعت $(v_۱)$ باعث سرخوردن ماشین به سمت پایین می شود که نیروی اصطکاک ایستایی به سمت بالای سطح شیبدار به جسم وارد می شود و بیشترین سرعت $(v_۲)$ زمانی است که ماشین به سمت بالای سطح شیبدار کشیده می شود و نیروی اصطکاک ایستایی به سمت پایین سطح شیبدار به جسم وارد می شود

$$\begin{cases} \sum F_x = Ma_x \\ \sum F_y = Ma_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N\,Sin\theta - f_s Cos\theta = \dfrac{mv^۲}{r} \\ f_s Sin\theta + N\,Cos\theta - mg = o \end{cases}$$

$$f_s = \mu_s N \quad \rightarrow \quad \begin{cases} N\,Sin\theta - \mu_s N Cos\theta = \dfrac{mv^۲}{r} \\ \mu_s N Sin\theta + N\,Cos\theta - mg = o \end{cases}$$

$$N=\frac{mv^{۲}}{r(Sin\theta-\mu_s Cos\theta)}=\frac{mv^{۲}}{۴۰\times(Sin(۳۵)-۰/۴\times Cos(۳۵))}\qquad (۱)$$

$$N=\frac{mg}{\mu_s Sin\theta+Cos\theta}=\frac{۹/۸\times m}{۰/۴\times Sin(۳۵)+Cos(۳۵)}\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\quad\rightarrow\quad \frac{mv^{۲}}{۴۰\times(Sin(۳۵)-۰/۴\times Cos(۳۵))}=\frac{۹/۸\times m}{۰/۴\times Sin(۳۵)+Cos(۳۵)}$$

$$v_{۱}=\sqrt{\frac{۹/۸\times ۴۰\times(Sin(۳۵)-۰/۴\times Cos(۳۵))}{۰/۴\times Sin(۳۵)+Cos(۳۵)}}=۹/۵۲\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases}\sum F_x=Ma_x\\ \sum F_y=Ma_y\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}N\,Sin\theta+f_s Cos\theta=\dfrac{mv^{۲}}{r}\\ N\,Cos\theta-f_s Sin\theta-mg=o\end{cases}$$

$$f_s=\mu_s N\quad\rightarrow\quad\begin{cases}N\,Sin\theta+\mu_s N Cos\theta=\dfrac{mv^{۲}}{r}\\ N\,Cos\theta-\mu_s N Sin\theta-mg=o\end{cases}$$

$$N=\frac{mv^{۲}}{r(Sin\theta+\mu_s Cos\theta)}=\frac{mv^{۲}}{۴۰\times(Sin(۳۵)+۰/۴\times Cos(۳۵))}\qquad (۱)$$

$$N=\frac{mg}{Cos\theta-\mu_s Sin\theta}=\frac{۹/۸\times m}{Cos(۳۵)-۰/۴\times Sin(۳۵)}\qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\quad\rightarrow\quad \frac{mv^{۲}}{۴۰\times(Sin(۳۵)+۰/۴\times Cos(۳۵))}=\frac{۹/۸\times m}{Cos(۳۵)-۰/۴\times Sin(۳۵)}$$

$$v_{۲}=\sqrt{\frac{۹/۸\times ۴۰\times(Sin(۳۵)+۰/۴\times Cos(۳۵))}{Cos(۳۵)-۰/۴\times Sin(۳۵)}}=۲۴/۳۸\frac{m}{s}$$

۲۵. مهره ای در لبه صفحه افقی چرخانی به شعاع ۱۵cm قرار دارد. اگر این صفحه با سرعت ۴۵ دور در دقیقه بچرخد، حداقل ضریب اصطکاک لازم برای آنکه مهره از صفحه بیرون نیفتد چقدر است؟

حل:

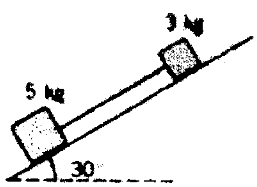
$$r = ۱۵\,cm = ۰/۱۵\,m$$

$$\omega = ۴۵\frac{rev}{\min} = ۴۵\frac{rev}{\min}\times\frac{۲\pi\,rad}{۱rev}\times\frac{۱\min}{۶۰s} = \frac{۴۵\times۲\pi}{۶۰}\frac{rad}{s} = ۴/۷۱\frac{rad}{s}$$

$$v = r\omega = ۰/۱۵\times۴/۷۱ = ۰/۷۱\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} f_k = \dfrac{mv^۲}{r} \\ f_k = \mu_k mg \end{cases} \rightarrow \quad \frac{mv^۲}{r} = \mu_k mg \Rightarrow \quad \mu_k = \frac{v^۲}{rg} = \frac{(۴/۷۱)^۲}{۰/۱۵\times۹/۸} = ۰/۳۴$$

۲۶. در شکل ۲۶، دو جسم که توسط سیمی با جرم ناچیز به هم متصل اند از سطح شیبدار ۳۰ درجه پایین می آیند. ضریب اصطکاک لغزشی برای جسم ۳ کیلوگرمی برابر با ۰/۴ و برای جم ۵ کیلوگرمی برابر با ۰/۳ است. شتاب این جسم و کشش سیم را محاسبه کنید.



حل: $\mu_۲ = ۰/۴$ ، $\mu_۱ = ۰/۳$ ، $\theta = ۳۰^\circ$ ، $m_۲ = ۳\,Kg$ ، $m_۱ = ۵\,Kg$

$$m_۱ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} m_۱ g\,Sin\theta - T - f_۱ = m_۱ a \\ N - m_۱ g\,Cos\theta = o \end{cases}$$

$$f_۱ = \mu_۱ N = \mu_۱ m_۱ g\,Cos\theta$$

$$m_۱ g\,Sin\theta - T - \mu_۱ m_۱ g\,Cos\theta = m_۱ a \quad (۱)$$

$$m_۲ \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_۲ g\, Sin\theta + T - f_۲ = m_۲ a \\ N - m_۲ g\, Cos\theta = o \end{cases}$$

$$f_۲ = \mu_۲ N = \mu_۲ m_۲ g\, Cos\theta$$

$$m_۲ g\, Sin\theta + T - \mu_۲ m_۲ g\, Cos\theta = m_۲ a \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \; m_۱ g\, Sin\theta - (m_۲ a + \mu_۲ m_۲ g\, Cos\theta - m_۲ g\, Sin\theta) - \mu_۱ m_۱ g\, Cos\theta = m_۱ a$$

$$(m_۱ + m_۲) g\, Sin\theta - (\mu_۲ m_۲ - \mu_۱ m_۱) g Cos\theta = (m_۱ + m_۲) a$$

$$a = \frac{(m_۱ + m_۲) Sin\theta - (\mu_۲ m_۲ - \mu_۱ m_۱) Cos\theta}{m_۱ + m_۲} g$$

$$= \frac{(۵+۳)\, Sin(۳۰) - ((۰/۳ \times ۵) + (۰/۴ \times ۳))\, Cos(۳۰)}{۵+۳} \times ۹/۸$$

$$= ۲/۰۸ \frac{m}{s^۲}$$

$$(۲) \rightarrow \quad T = m_۲ a + \mu_۲ m_۲ g\, Cos\theta - m_۲ g\, Sin\theta$$

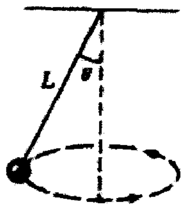
$$= m_۲ a + m_۲ g(\mu_۲\, Cos\theta - Sin\theta)$$

$$= (۳ \times ۲/۰۸) + (۳ \times ۹/۸) \times ((۰/۴ \times Cos(۳۰)) - Sin(۳۰))$$

$$= ۱/۷۱ N$$

۲۷. نشان بدهید که دوره تناوب یک آونگ مخروطی، که وزنه اش روی دایره ای افقی در حرکت است (شکل ۲۷) از رابطه زیر بدست می آید:

$$T = ۲\pi \sqrt{\frac{L Cos\theta}{g}}$$



حل:

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases} L\,Sin\theta = \dfrac{mv^۲}{r} \\ L\,Cos\theta - mg = o\end{cases}$$

$$v^۲ = (r\omega)^۲ = r^۲(\frac{۲\pi}{T})^۲ = \frac{۴\pi^۲ r^۲}{T^۲}$$

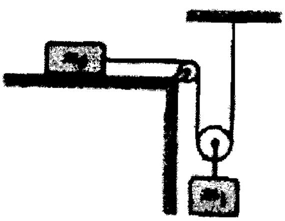
$$L\,Sin\theta = \frac{m}{r}(\frac{۴\pi^۲ r^۲}{T^۲})$$

$$L\,Cos\theta = mg \quad \rightarrow \quad m = \frac{L\,Cos\theta}{g}$$

$$r = L\,Sin\theta$$

$$T^۲ = \frac{۴\pi^۲(L\,Sin\theta)}{L\,Sin\theta}(\frac{L\,Cos\theta}{g}) = \frac{۴\pi^۲ L\,Cos\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad T = ۲\pi\sqrt{\frac{L\,Cos\theta}{g}}$$

۲۸. در سیستم شکل ۲۸، اگر $m_۱ = ۳\,Kg$ باشد، شتابش $۰/۶\frac{m}{s^۲}$ است و اگر $m_۱ = ۴\,Kg$ باشد ، شتابش $۱/۶\frac{m}{s^۲}$ است. $m_۲$ و نیروی اصطکاک مؤثر بر آن را پیدا کنید. (توجه کنید که $m_۱$ و $m_۲$ شتابهایشان با هم یک نیست.)



حل: فرض می کنیم در هر دو حالت $m_۱$ به سمت پایین حرکت می کند، جابجایی وزنه $m_۲$ دو برابر جابجایی وزنه $m_۱$ است پس شتاب $m_۲$ دو برابر $m_۱$ می شود.

$$x_{۲} = ۲x_{۱} \quad \Rightarrow \quad a_{۲} = ۲a_{۱}$$

$$A \begin{cases} m_{۱} = ۳\,Kg \\ a_{۱} = ۰/۶\dfrac{m}{s^{۲}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad a_{۲} = ۲\times ۰/۶ = ۱/۲\dfrac{m}{s^{۲}}$$

$$B \begin{cases} m_{۱} = ۴\,Kg \\ a_{۱} = ۱/۶\dfrac{m}{s^{۲}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad a_{۲} = ۲\times ۱/۶ = ۳/۲\dfrac{m}{s^{۲}}$$

$$\begin{cases} m_{۱} \quad \rightarrow \quad \sum F_x = ma_x \\ \qquad\qquad W_{۱} - ۲T = m_{۱}a_{۱} \quad \rightarrow \quad T = \dfrac{m_{۱}}{۲}(g - a_{۱}) \\ m_{۲} \quad \rightarrow \quad \sum F_x = ma_x \\ \qquad\qquad T - f_k = m_{۲}a_{۲} \quad \rightarrow \quad T = f_k + m_{۲}a_{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A \begin{cases} \dfrac{m_{۱}}{۲}(g - a_{۱}) = f_k + m_{۲}a_{۲} \\ \dfrac{۳}{۲}\times(۹/۸ - ۰/۶) = f_k + (۱/۲)m_{۲} \\ ۱۳/۸ = f_k + (۱/۲)m_{۲} \qquad (۱) \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \dfrac{m_{۱}}{۲}(g - a_{۱}) = f_k + m_{۲}a_{۲} \\ ۴\times(۹/۸ - ۱/۶) = f_k + (۳/۲)m_{۲} \\ ۱۶/۴ = f_k + (۳/۲)m_{۲} \qquad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\,,\,(۲) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} ۱۳/۸ = f_k + (۱/۲)m_{۲} \\ ۱۶/۴ = f_k + (۳/۲)m_{۲} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_{۲} = ۱/۳\,Kg \\ f_k = ۱۲/۲۴\,N \end{cases}$$

۲۹. حداقل مسافت لازم برای توقف اتومبیلی که با سرعت $100\frac{Km}{h}$ در جاده تخت حرکت می کند برابر با ۶۰m است. مسافت توقف همین اتومبیل وقتی با همین سرعت روی شیب ۱۰ درجه؛ الف) در سر پایینی و ب) در سر بالایی حرکت می کند، چقدر است؟

حل: $v_\circ = 100\frac{Km}{h} = 27/8\frac{m}{s} \quad , \quad \Delta x_1 = 60m \quad , \quad \theta = 10^\circ \quad , \quad v = o$

$$v^2 - v_\circ^2 = 2a(\Delta x_1)$$

$$o-(27/8)^2 = 2\times a\times 60 \qquad a = \frac{-(27/8)^2}{2\times 60} = -6/4\frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f_k = ma \\ N - mg = o\end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$ma = \mu_k mg \Rightarrow \mu_k = \frac{a}{g} = \frac{6/4}{9/8} = 0/65$$

الف)

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}mg\,Sin\theta - f_k = ma \\ N - mg\,Cos\theta = o\end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,Cos\theta$$

$$mg\,Sin\theta - \mu_k mg\,Cos\theta = ma$$

$$a = g(Sin\theta - \mu_k\,Cos\theta) = 9/8\times(Sin(10) - 0/65\times Cos(10)) = -4/58\,\frac{m}{s^2}$$

$$v^2 - v_\circ^2 = 2a(\Delta x_1)$$

$$o-(27/8)^2 = 2\times(-4/58)\times(\Delta x) \rightarrow \Delta x = \frac{(27/8)^2}{2\times 4/58} = 84/3\,m$$

ب)

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_k + mg\,Sin\theta = ma \\ N - mg\,Cos\theta = o \end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,Cos\theta$$

$$mg\,Sin\theta + \mu_k mg\,Cos\theta = ma$$

$$a = g\,(Sin\theta + \mu_k\,Cos\theta) = ۹/۸ \times (Sin(۱۰) + ۰/۶۵ \times Cos(۱۰)) = ۷/۹۱\ \frac{m}{s^۲}$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(\Delta x_۱)$$

$$o - (۲۷/۸)^۲ = ۲ \times (۷/۹۱) \times (\Delta x) \quad \rightarrow \quad |\Delta x| = \left| -\frac{(۲۷/۸)^۲}{۲ \times ۷/۹۱} \right| = ۴۸/۸۵\ m$$

فصل ۷

مسئله ها

بخش ۷-۱- کار نیروی ثابت

۱. جعبه به جرم ۲Kg را با اعمال نیرویی که اندازه آن ۱۰N و جهت آن ۳۷ درجه بالای افق است روی سطح افقی بدون اصطکاکی به اندازه ۳m حرکت می دهیم. چقدر کار روی جعبه انجام داده ایم؟

حل:

$$m = ۲\,Kg \quad , \quad F = ۱۰\,N \quad , \quad \theta = ۳۷^\circ \quad , \quad d = ۳\,m$$
$$W = Fd\,Cos\theta = Fd\,Cos(۳۷) = ۱۰ \times ۳ \times ۰/۸ = ۲۴\,J$$

۲. ذره ای به جرم ۰/۳Kg در اثر نیروی $\vec{F} = ۲\hat{i} - ۳\hat{j} + \hat{k}$ از مکان $\vec{r}_۱ = ۲\hat{i} - \hat{j} + ۳\hat{k}$ به مکان $\vec{r}_۲ = ۴\hat{i} - ۳\hat{j} - \hat{k}$ برده می شود. این نیرو چقدر کار روی ذره انجام داده است؟

حل:

$$m = ۰/۳\,Kg$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ = (۴\hat{i} - ۳\hat{j} - \hat{k}) - (۲\hat{i} - \hat{j} + ۳\hat{k}) = ۲\hat{i} - ۲\hat{j} - ۴\hat{k}$$
$$W = \vec{F}.\Delta\vec{r} = (۲\hat{i} - ۳\hat{j} + \hat{k}).(۲\hat{i} - ۲\hat{j} - ۴\hat{k}) = ۴ + ۶ - ۴ = ۶\,J$$

۳. در یک سربالایی به شیب ۳۰ درجه شخصی صندوقی به جرم ۱۰Kg را با نیروی ۸۰N که در جهت سر بالایی اعمال می شودبه اندازه ۳m روی شیب بالا می برد. نیروی اصطکاک ۲۲N است. الف) شخص، ب) نیروی ثقل و ج) نیروی اصطکاک روی این صندوق چقدر کار انجام داده است؟

حل: الف) نیرو در راستایی است که جسم جابجا می شود.

$f_k = ۲۲N \quad , \quad d = ۳m \quad , \quad m = ۱۰Kg \quad , \quad \theta = ۳۰^\circ \quad , \quad F = ۸۰N$

$W = Fd\,Cos\theta = ۸۰ \times ۳ \times Cos(o) = ۲۴۰J$

ب) زاویه ای که نیروی وزن با جابجایی می سازد

$\theta = ۹۰ + ۳۰ = ۱۲۰^\circ$

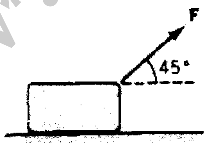
$W = mgd\,Cos\theta = ۱۰ \times ۹/۸ \times ۳ \times Cos(۱۲۰) = ۱۴۷J$

ج)

$\theta = ۱۸۰^\circ$

$W = f_k d\,Cos\theta = ۲۲ \times ۳ \times Cos(۱۸۰) = -۶۶J$

۴. نیروی F طبق شکل ۱۷، در جهت ۴۵ درجه بالای افق به جسمی به جرم ۱/۸Kg وارد می شود و آن را ۲m روی سطح افقی ای که ضریب اصطکاکش $\mu = ۰/۲۵$ است جابجا می کند. هر یک از نیروهای الف) F، ب) اصطکاک و ج) ثقل چقدر کار روی جسم انجام می دهند؟



حل:

$m = ۱/۸Kg \quad , \quad d = ۲m \quad , \quad \mu = ۰/۲۵ \quad , \quad Cos(۴۵) = ۰/۷۰۷ \quad , \quad a = o$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F\,Cos(۴۵) - f_k = ma \\ N + F\,Sin(۴۵) - mg = o \end{cases}$$

$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F\,Sin(۴۵))$

$F\,Cos(۴۵) - \mu_k (mg - F\,Sin(۴۵)) = ma = o$

$$F = \frac{\mu_k mg}{Cos(۴۵) + \mu_k Sin(۴۵)} = \frac{۰/۲۵ \times ۱/۸ \times ۹/۸}{۰/۷۰۷ + ۰/۲۵ \times ۰/۷۰۷} \approx ۵N$$

$f_k = \mu_k (mg - F\,Sin(۴۵)) = ۰/۲۵ \times (۱/۸ \times ۹/۸ - ۵ \times ۰/۷۰۷) = ۳/۵۳N$

الف)

$$W = Fd\,Cos(۴۵) = ۵\times۲\times۰/۷۰۷ = ۷/۰۷J$$

ب)

$$W = f_k d\,Cos(۱۸۰) = -۳/۵۳\times۲ = -۷/۰۶J$$

ج)

$$W = mgd\,Cos(o) = o$$

۵. مسئله قبلی را برای حالتی که در آن نیرو در جهت ۴۵ درجه زیر افق وارد می شود (شکل ۱۸) حل کنید؟

حل:

$$m = ۱/۸Kg \quad , \quad d = ۲m \quad , \quad \mu = ۰/۲۵ \quad , \quad Cos(۴۵) = ۰/۷۰۷ \quad , \quad a = o$$

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x\\ \sum F_y = ma_y\end{cases} \rightarrow \begin{cases}F\,Cos(۴۵) - f_k = ma\\ N - F\,Sin(۴۵) - mg = o\end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k(mg + F\,Sin(۴۵))$$

$$F\,Cos(۴۵) - \mu_k(mg + F\,Sin(۴۵)) = ma = o$$

$$F = \frac{\mu_k mg}{Cos(۴۵) - \mu_k Sin(۴۵)} = \frac{۰/۲۵\times۱/۸\times۹/۸}{۰/۷۰۷ - ۰/۲۵\times۰/۷۰۷} = ۸/۳۲N$$

$$f_k = \mu_k(mg + F\,Sin(۴۵)) = ۰/۲۵\times(۱/۸\times۹/۸ + ۵\times۰/۷۰۷) = ۵/۸۸N$$

الف)

$$W = Fd\,Cos(۴۵) = ۸/۳۲\times۲\times۰/۷۰۷ = ۱۱/۷۶J$$

ب)

$$W = f_k d\,Cos(۱۸۰) = -۵/۸۸ \times ۲ = -۱۱/\dot{۸}J$$

ج)

$$W = mgd\,Cos(o) = o$$

۶. شخصی به جرم ۶۰Kg با اسکی از تپه ای به شیب ۲۵ درجه به اندازه ۲۰۰m به پایین می لغزد. نیروی اصطکاک برابر با ۲۰N است. الف)نیروی ثقل و ب) نیروی اصطکاک چقدر کار روی اسکی باز انجام می دهند؟

حل: الف)

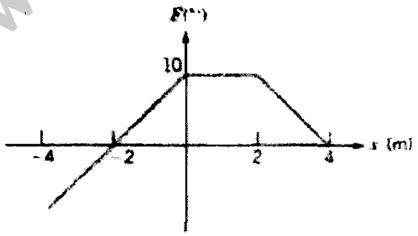
$$W = mgd\,Sin(۲۵) = ۶۰ \times ۹/۸ \times ۲۰۰ \times ۰/۴۲ = ۴۹/۷\,KJ$$

ب)

$$W = f_k d\,Cos(۱۸۰) = -۲۰ \times ۲۰۰ = -۴J$$

بخش ۷-۲- کار نیروی متغیر در یک بعد

۷. نیرویی طبق نمودار شکل ۱۹، با مکان تغییر می کند. کاری که این نیرو الف) از x=-۴m تا x=+۴m و ب) از x=o تا x=-۲m انجام می دهد چقدر است؟



حل: الف) مطابق شکل مساحت سه مثلث و یک مربع را با هم جمع می کنیم:

$$W = \left[\frac{((-۲)-(-۴))\times(-۱۰)}{۲}\right] + \left[\frac{(o-(-۲))\times ۱۰}{۲}\right] + \left[\frac{(۴-۲)\times ۱۰}{۲}\right] + (۲\times ۱۰)$$
$$= -۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۲۰ = ۳۰J$$

ب)

$$W = \left[\frac{((-۲)-o)\times ۱۰}{۲}\right] = -۱۰J$$

۸. فنری را با ثابت $۴۰\dfrac{N}{m}$ در نظر بگیرید. چقدر کار لازم است تا الف) این فنر از x=0 (حالت تعادل) تا x=۰/۱m منبسط کند. ب) تراکم فنر از x=۰/۱m به x=۰/۲m تغییر کند؟

حل: الف)

$$k = ۴۰\frac{N}{m} \quad , \quad F = -kx$$

$$W = \int F\,dx = \int_0^{/۱}(-kx)\,dx = -\frac{۱}{۲}kx^۲)_0^{۰/۱} = -۰/۲J$$

ب)

$$W = \int F\,dx = \int_{/۱}^{/۲}(-kx)\,dx = -\frac{۱}{۲}kx^۲)_{۰/۱}^{۰/۲} = -۰/۶J$$

۹. نیروی خارجی لازم برای آنکه فنری را به اندازه x منبسط کند به صورت $F(x) = ۱۶x + ۰/۵x^۳ \ (N)$ است. برای انبساط این فنر از x=۱m تا x=۲m چقدر کار لازم است؟

حل:

$$W = \int F\,dx = \int_{/۱}^{/۲}(۱۶x + ۰/۵x^۳)\,dx = (۸x^۲ + \frac{۰/۵}{۴}x^۴)_۱^۲ = ۲۵/۸۷۵J$$

بخش ۷-۳- قضیه کار – انرژی

۱۰. حساب کنید که انرژی جنبشی کره زمین در حرکت انتقالی اش (گردش به دور خورشید) چقدر است؟ (جواب را بر حسب مگا تن بیان کنید. یک تن انرژی طبق تعریف برابر است با انرژی ای که در انفجار $۱۰^۳$ Kg ماده TNT آزاد می شود و برابر با $۴/۲×۱۰^۹$J است.)

حل:

$1 \text{ تن} = 10^3\ Kg \quad , \quad r = 1/5\times10^{11}\ m \quad , \quad U = 4/2\times10^{9}\ J$

$m = 5/98\times10^{24}\ Kg \quad , \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = 1\ \text{سال} = 365\times24\times3600 = 3/15\times10^{7}\ s$

$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\times3/14\times1/5\times10^{11}}{3/15\times10^{7}} = 2/9\times10^{4}\ \frac{m}{s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = K = \frac{1}{2}\times5/98\times10^{24}\times(2/9\times10^{4})^2 = 2/5\times10^{33}\ J$$

۱۱. گلوله ای به جرم ۲۰۰g که با سرعت اولیه $20\frac{m}{s}$ در راستای قائم به هوا پرتاب شده است تا ارتفاع ۱۸m اوج می گیرد. الف) تغییر انرژی جنبشی گلوله، ب) کار نیروی ثقل روی گلوله چقدر است؟ ج) دو مقداری را که برای قسمتهای الف و ب حساب کرده اید با هم مقایسه کنید و توضیح بدهید که چرا باید با هم مساوی یا متفاوت باشند؟

حل:

$v_0 = 20\frac{m}{s} \quad , \quad y = 18m \quad , \quad g = 9/8\frac{m}{s^2} \quad , \quad m = 200\,gr = 0/2\,Kg$

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}\times(o-(20)^2) = -40\,J$$

ب)

$$W = mgh\,Cos(180) = -mgh = -0/2\times9/8\times18 = -35/3\,J$$

ج) مقدار دو انرژی با هم متفاوت است به دلیل مقاومت هوا

۱۲. انرژی لازم برای حرکت دادن یا ادامه حرکت اتومبیلی به جرم 10^3Kg که یک نیروی مقاوم ثابت ۲۵ نیوتنی به آن اثر می کند در هر یک از موارد زیر چقدر است؟ الف) با سرعت ثابت $20\frac{m}{s}$ به مدت ۱۰s ب) با شتاب ثابت از حالت سکون تا سرعت $20\frac{m}{s}$ در مدت ۱۰s ج) با شتاب ثابت از سرعت $20\frac{m}{s}$ تا سرعت $40\frac{m}{s}$ در مدت ۱۰s.

حل: الف)

$m=۱۰۰۰Kg \quad , \quad f_k=۲۵۰N \quad , \quad v=۲۰\frac{m}{s} \quad , \quad t=۱۰s \quad , \quad a=o$

$d=vt=۲۰\times۱۰=۲۰۰m$

$W=f_k d\,Cos(۱۸۰)=-۲۵۰\times۲۰۰=-۵۰۰۰۰J$

ب)

$m=۱۰۰۰Kg \quad , \quad f_k=۲۵۰N \quad , \quad v=۲۰\frac{m}{s} \quad , \quad t=۱۰s \quad , \quad v_\circ=o$

$d=\frac{۱}{۲}(v+v_\circ)t=\frac{۱}{۲}\times(۲۰+o)\times۱۰=۱۰۰m$

$W=f_k d\,Cos(۱۸۰)=-۲۵۰\times۱۰۰=-۲۵۰۰۰J$

ج)

$m=۱۰۰۰Kg \quad , \quad f_k=۲۵۰N \quad , \quad v=۴۰\frac{m}{s} \quad , \quad t=۱۰s \quad , \quad v_\circ=۲۰\frac{m}{s}$

$d=\frac{۱}{۲}(v+v_\circ)t=\frac{۱}{۲}\times(۲۰+۴۰)\times۱۰=۳۰۰m$

$W=f_k d\,Cos(۱۸۰)=-۲۵۰\times۳۰۰=-۷۵۰۰۰J$

۱۳. گلوله ای به جرم ۱۰gr با سرعت $۴۰۰\frac{m}{s}$ به تنه درختی برخورد می کند، به اندازه ۲/۵cm در آن وارد می شود، چقدر است؟ (این دو نیرو را با وزن خود مقایسه کنید)

حل:

$m=۱۰gr=۰/۰۱\,Kg \quad , \quad v=o \quad , \quad d=۲/۵cm=۲/۵\times۱۰^{-۲}\,m \quad , \quad v_\circ=۴۰۰\frac{m}{s}$

$v^۲-v_\circ^۲=۲ad$

$o-(۴۰۰)^۲=۲\times a\times(۲/۵\times۱۰^{-۲}) \qquad \rightarrow \qquad a=۳/۲\times۱۰^۶\ \frac{m}{s^۲}$

$F=ma=۰/۰۱\times۳/۲\times۱۰^۶=۳/۲\times۱۰^۴\ N$

۱۴. قالبی به جرم Kg را روی سطح شیبداری با زاویه شیب ۱۵ درجه و ضریب اصطکاک $\mu_k = ۰/۲$ با سرعت $۳\ \frac{m}{s}$ به طرف بالای شیب پرتاب می کنیم. با استفاده از قضیه کار – انرژی، حساب کنید که این قالب قبل از توقف چه مسافتی راروی سطح طی می کند.

حل:

$$m = ۲Kg \quad , \quad \theta = ۱۵^\circ \quad , \quad \mu_k = ۰/۲ \quad , \quad v = ۳\ \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -mg\ Sin(۱۵) - f_k = ma \\ N - mg\ Cos(۱۵) = o \end{cases}$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\ Cos(۱۵)$$

$$-mg\ Sin(۱۵) - \mu_k mg\ Cos(۱۵) = ma$$

$$a = -g(Sin(۱۵) - \mu_k\ Cos(۱۵)) = -۹/۸ \times (۰/۲۶ + ۰/۲ \times ۰/۹۷) = -۴/۴۱ \frac{m}{s^۲}$$

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$o - (۳)^۲ = ۲ \times (-۴/۴۱) \times \Delta x \qquad \rightarrow \qquad \Delta x = ۱/۰۲m$$

۱۵. با استفاده از قضیه کار – انرژی نشان بدهید که کمترین مسافت توقف (از ترمز تا ایست کامل) برای اتومبیلی که با سرعت v در حرکت است از رابطه $d = \frac{v^۲}{۲\mu g}$ بدست می آید. که در آن μ ضریب اصطکاک ایستایی چرخها با جاده است.

حل:

$$\Delta x = d \quad , \quad v_۱ = v \quad , \quad v_۲ = o$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -f_k = ma \\ N - mg = o \end{cases}$$

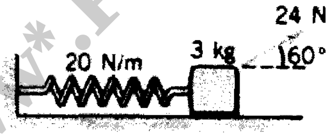
$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$-\mu_k mg = ma \qquad a = -\mu_k g$$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a(\Delta x)$$

$$o - v^۲ = ۲ \times (-\mu_k g) \times d \qquad \rightarrow \qquad d = \frac{v^۲}{۲\mu_k g}$$

۱۶. در شکل ۲۰، مکعبی به جرم ۳Kg به فنری با ثابت $۲۰\frac{N}{m}$ متصل است. نیروی F=۲۴N در جهت ۶۰ درجه بالای افق به مکعب وارد می شود و آنرا روی سطح افقی ۴۰cm جلو می برد. فرض کنید ضریب اصطکاک سطح $\mu_k = ۰/۱$ است. الف) کار نیروی F، ب) کار اصطکاک، ج) کار فنر چقدر است؟ د) سرعت نهایی جسم چقدر است؟



حل: الف)

$$m = ۳\,Kg \quad , \quad F = ۲۴\,N \quad , \quad \theta = ۶۰^\circ \quad , \quad k = ۲۰\frac{N}{m}$$

$$d = ۴۰\,cm = ۰/۴\,m \quad , \quad \mu_k = ۰/۱$$

$$W_۱ = Fd\,Cos(۶۰) = ۲۴ \times ۰/۴ \times ۰/۵ = ۴/۸\,J$$

ب)

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N + F\,Sin(۶۰) - mg = o$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F\,Sin(۶۰))$$

$$= ۰/۱ \times (۳ \times ۹/۸ - ۲۴ \times ۰/۸۷) = ۰/۸۵\,N$$

$$W_۲ = f_k d\,Cos(۱۸۰) = -f_k d = ۰/۸۵ \times ۰/۴ = -۰/۳۴\,J$$

ج)

$$W_۳ = -\frac{۱}{۲}kd^۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۲۰\times(۰/۴)^۲ = -۱/۶\,J$$

د)

$$\sum W = \Delta K$$

$$W_۱ + W_۲ + W_۳ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

$$۴/۸ - ۰/۳۴ - ۱/۶ = \frac{۱}{۲}\times ۳\times(v^۲ - o)$$

$$v = \sqrt{\frac{۲\times ۲/۸۶}{۳}} = ۱/۸۳\frac{m}{s}$$

بخش ۷-۴- توان

۱۷. آسانسوری به جرم ۲۰۰۰Kg به وزنه تعادلی به جرم ۱۸۰۰Kg متصل است. موتور این آسانسور برای بالا بردن آن با سرعت $۰/۴\ \frac{m}{s}$ چه توانی باید تولید کند؟

حل:

$$m_۱ = ۲۰۰۰\,Kg \quad , \quad m_۲ = ۱۸۰۰\,Kg \quad , \quad v = ۰/۴\frac{m}{s} \quad , \quad g = ۹/۸\frac{m}{s^۲}$$

$$F = m_۱ g = ۲۰۰۰\times ۹/۸ = ۱۹۶۰۰\,N$$

$$P = Fv = ۱۹۶۰۰\times ۰/۴ = ۷۸۴۰\,w$$

۱۸. اگر قیمت هر کیلو وات – ساعت برق ۲۰۰ ریال باشد، هزینه ۲ ساعت برق مصرفی موتوری با توان ۰/۲۵ اسب بخار چقدر است؟

حل:

$۱hp = ۷۴۶w$

$P = ۰/۲۵\,hp = ۰/۲۵ \times ۷۶۴ = ۱۸۶/۵\,w = ۰/۱۸۶۵\,Kw$

$W = Pt = ۰/۱۸۶۵\,Kw \times ۲h = ۰/۳۷۳\,Kwh$

$۱Kwh$ ۲۰۰ ریال

$۰/۷۳۷\,Kwh$ x $x = ۰/۷۳۷ \times ۲۰۰ = ۷۴/۶$ ریال

۱۹. چتر بازی به جرم ۶۰Kg (که هنوز چترش را باز نکرده) با سرعت حدی ۵۵ $\frac{m}{s}$ در حال سقوط به زمین است. توانی که در این حرکت به خاطر مقاومت هوا تلف می شود، چند اسب بخار است؟

حل:

$m = ۶۰Kg \quad , \quad v = ۵۵\frac{m}{s} \quad , \quad g = ۹/۸\frac{m}{s^۲} \quad , \quad ۱hp = ۷۴۶w$

$f_k = mg$

$P = f_k v = mgv = ۶۰ \times ۹/۸ \times ۵۵ = ۳۲۳۴۰\,w$

$$P = ۳۲۳۴۰\,w \times \frac{۱hp}{۷۴۶w} = ۴۳/۴\,hp$$

۲۰. یک دوچرخه سواری می تواند به مدت ۱۰ دقیقه با توان ثابت ۰/۵hp رکاب بزند. اگر مجموع نیروهای مقاوم ۱۸/۵N باشد، این شخص در این مدت چه مسافتی را با سرعت ثابت طی خواهد کرد؟

حل:

$t = ۱۰min = ۶۰۰s \quad , \quad P = ۰/۵\,hp = ۰/۵ \times ۷۴۶ = ۳۷۳w \quad , \quad f_k = ۱۸/۵N$

$a = o \quad , \quad g = ۹/۸\frac{m}{s^۲} \quad , \quad ۱hp = ۷۴۶w$

$$P = f_k v \quad \rightarrow \quad v = \frac{P}{f_k} = \frac{۳۷۳}{۱۸/۵} = ۲۰/۱۶\frac{m}{s}$$

$\Delta x = vt = ۲۰/۱۶ \times ۶۰۰ = ۱۲۰۹۶m \approx ۱۲\,Km$

۲۱.اتومبیلی به جرم ۱۰۵۰Kg برای حرکت با سرعت ثابت $۸۰\dfrac{Km}{h}$ به توانی برابر با ۱۲hp نیاز دارد. الف) کل نیرویی که در مقابل حرکت اتومبیل مقاومت می کند چقدر است؟ ب) توانی که موتور باید به چرخها (ی عقب) بدهد تا اتومبیل بتواند با همین سرعت از شیب ۱۵ درجه بالا برود چقدر است؟

حل:

$$m = ۱۰۵۰\,Kg \quad , \quad v = ۸۰\frac{Km}{h} = ۲۲/۲\frac{m}{s} \quad , \quad P = ۱۲\,hp = ۱۲\times ۷۴۶ = ۸۹۵۲\,w$$

$$P = Fv \qquad \rightarrow \qquad F = \frac{P}{v} = \frac{۸۹۵۲}{۲۲/۲} = ۴۰۳/۲۴\,N$$

$$\theta = ۱۵^\circ \qquad , \qquad a = o$$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$F - mgSin(۱۵) = ma$$

$$F = mgSin(۱۵۱۰۵۰\times ۹/۸\times ۰/۲۶ = ۲۶۷۵/۴\,N$$

$$P = Fv = ۲۶۷۵\times ۲۲/۲ = ۵۹/۳۹۳\,Kw$$

مسائل تکمیلی

۲۲.جسمی به جرم ۰/۲Kg روی سطح میزی در محیط دایره ای به شعاع ۱/۲m حرکت می کند. سرعت جسم پس از طی یک دور $۸\dfrac{m}{s}$ به $۶\dfrac{m}{s}$ کاهش پیدا می کند. این جسم قبل از آنکه متوقف شود چند دور دیگر حرکت می کند؟

حل:

$$m = ۲\,Kg \quad , \quad v_۱ = ۸\frac{m}{s} \quad , \quad v_۱ = ۸\frac{m}{s} \quad , \quad r = ۱/۲\,m$$

$$\Delta\theta = ۲\pi \ rad$$

$$v = r\omega \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \omega_۱ = \dfrac{v_۱}{r} = \dfrac{۸}{۱/۲} = ۶/۷ \ \dfrac{rad}{s} \\ \omega_۲ = \dfrac{v_۲}{r} = \dfrac{۶}{۱/۲} = ۵ \ \dfrac{rad}{s} \end{cases}$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\alpha(\Delta\theta)$$

$$(5)^2 - (6/7)^2 = 2 \times \alpha \times 2\pi \qquad \rightarrow \qquad \alpha = -1/58 \frac{rad}{s^2}$$

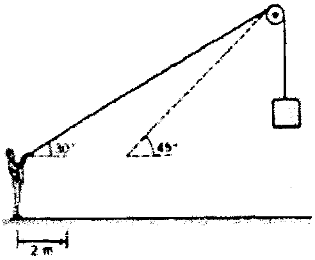
$$v = r\omega \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{v_1}{r} = \dfrac{6}{1/2} = 5 \ \dfrac{rad}{s} \\ \omega_2 = o \end{cases}$$

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\alpha(\Delta\theta)$$

$$(5)^2 - (6/7)^2 = 2 \times (-1/58) \times \Delta\theta \qquad \rightarrow \qquad \Delta\theta = 7/9 \ rad$$

$$\Delta\theta = 2\pi n \qquad \rightarrow \qquad n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{7/9}{2 \times 3/14} = 1/26 \text{ دور}$$

۲۳. شخصی می خواهد به کمک یک سیستم قرقره و طناب جعبه ای به جرم ۱/۵Kg با راه رفتن روی سطح افقی بالا ببرد (شکل ۲۱). وقتی این شخص به اندازه ۲m عقب می رود، زاویه طناب با افق از ۴۵ به ۳۰ درجه تغییر می کند. اگر جعبه با سرعت ثابت بالا برود شخص در این جابجایی چقدر کار روی آن انجام می دهد؟

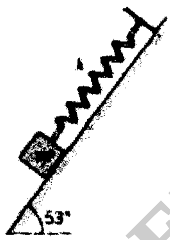


حل:

$$W = mgd[Cos(45-30) - Cos(30) + Cos(45)]$$
$$= 25 \times 9/8 \times 2 \times [0/96 - 0/86 + 0/7] = 392J$$

۲۴. در شکل ۲۲، قالبی به جرم ۲Kg روی سطحی به شیب ۵۳ درجه به سر آزاد فنری متصل شده است. ثابت سفتی فنر $k = 20 \dfrac{N}{m}$ و ضریب اصطکاک لغزشی میان قالب و

سطح $\mu_k = \frac{۱}{۶}$ است. قالب از حالتی که فنر طول طبیعی اش را دارد شروع به حرکت می کند. تا وقتی که این جسم ۴۰cm روی سطح جابجا می شود. الف) فنر، ب) سطح شیبدارو ج) کره زمین چقدر کار روی آن انجام می دهد؟ د) سرعت قالب در نقطه نهایی این جابجایی چقدر است؟ ه) طول فنر حداکثر چقدر تغییر می کند؟



حل: اگر ۴۰cm جابجایی به سمت پایین سطح شیبدار باشد:

الف)

$$m = ۲\,Kg \quad , \quad k = ۲۰\frac{N}{m}, \quad \mu_k = \frac{۱}{۶} \quad , \quad d = ۴۰\,cm = ۰/۴\,m$$

$$W_۱ = -\frac{۱}{۲}kd^۲ = -\frac{۱}{۲}\times ۲۰\times(۰/۴)^۲ = -۱/۶\,J$$

ب)

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N + mg\,Cos(۵۳) = o$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\,Cos(۵۳)$$

$$= \frac{۱}{۶}\times ۲\times ۹/۸\times ۰/۶ = ۱/۹۶\,N$$

$$W_۲ = f_k d\,Cos(۱۸۰) = -f_k d = ۱/۹۶\times ۰/۴ = -۰/۷۸۴\,J$$

ج) در راستای حرکت مؤلفه وزن در روی سطح شیبدار استفاده می شود. در جهت حرکت است پس زاویه صفر است.

$$W_۳ = (mgSin(۵۳))dCos(o) = ۲\times ۹/۸\times ۰/۸\times ۰/۴ = ۶/۲۷\,J$$

د)

$$W_{۱} = F_s d \qquad \rightarrow \qquad F_s = \frac{W_{۱}}{d} = \frac{-۱/۶}{۰/۴} = -۴\,N$$

$$\sum F_x = ma_x$$

$$mgSin(۵۳) - f_k - F_s = ma$$

$$a = \frac{۱}{m}(mgSin(۵۳) - f_k - kx) = \frac{۱}{۲}(۲ \times ۹/۸ \times ۰/۸ - ۱/۹۶ - (-۴)) = ۴/۸۶\,\frac{m}{s^{۲}}$$

$$v_{۲}^{۲} - v_{۱}^{۲} = ۲a(\Delta x)$$

$$v_{۲}^{۲} - o = ۲ \times ۴/۸۶ \times ۰/۴ \qquad \rightarrow \qquad v = ۱/۹۷\,\frac{m}{s}$$

۲۵. قضیه کار – انرژی را در مورد حرکت سه بعدی، تحت تأثیر نیروی متغیر اثبات کنید.

حل:

$$dW = \vec{F}.d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}.$$

$$\vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$W = \int dW = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

$$= \int_{v_{۰x}}^{v_x} m\frac{dv_x}{dt}dx + \int_{v_{۰y}}^{v_y} m\frac{dv_y}{dt}dx + \int_{v_{۰z}}^{v_z} m\frac{dv_z}{dt}dx$$

$$= \frac{۱}{۲}m(v_x^{۲} - v_{۰x}^{۲}) + \frac{۱}{۲}m(v_y^{۲} - v_{۰y}^{۲}) + \frac{۱}{۲}m(v_z^{۲} - v_{۰z}^{۲})$$

$$W = \frac{۱}{۲}m(v_x^{۲} + v_y^{۲} + v_z^{۲}) - \frac{۱}{۲}m(v_{۰x}^{۲} + v_{۰y}^{۲} + v_{۰z}^{۲})$$

$$v^{۲} = v_x^{۲} + v_y^{۲} + v_z^{۲} \qquad , \qquad v_{۰}^{۲} = v_{۰x}^{۲} + v_{۰y}^{۲} + v_{۰z}^{۲}$$

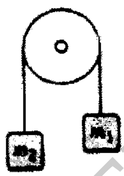
$$W = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_{۰}^{۲}$$

فصل ۸

مسئله ها

بخش ۸-۵- پایستگی انرژی مکانیکی

۱. دو جسم به جرمهای $m_1 = 5\,Kg$ و $m_2 = 2\,Kg$ توسط طناب سبکی به هم متصل اند و در طرفین قرقره بدون اصطکاکی آویزان اند (شکل ۱۲). اگر سیستم از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت m_1 پس از ۴۰cm سقوط چقدر خواهد بود؟



حل:

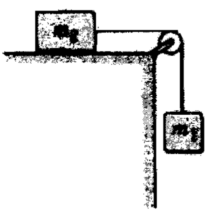
$m_1 = 5\,Kg \quad , \quad m_2 = 2\,Kg \quad , \quad h = 40\,cm = 0/4\,m$

$$m_1 gh = m_2 gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$(m_1 - m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times (5-2) \times 9/8 \times 0/4}{5+2}} = 1/83\,\frac{m}{s}$$

۲. در سیستمی که در شکل ۱۴ نشان داده شد $m_1 = 0/5\,Kg$ و $m_2 = 1/5\,Kg$ است. سطح افقی اصطکاک ندارد و جرم قرقره ناچیز است. اگر جرم ها در ابتدا بی حرکت باشند، سرعت در لحظه ای که به اندازه ۶۰cm سقوط کرده چقدر است؟



حل:

$m_1 = 0/5\,Kg \quad , \quad m_2 = 1/5\,Kg \quad , \quad h = 60\,cm = 0/6\,m$

$$m_1 gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2m_1 gh}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \times 0/5 \times 9/8 \times 0/6}{0/5 + 1/5}} = 1/71\frac{m}{s}$$

۳. طول نخ یک آونگ ساده ۷۵cm و جرم گلوله آن ۰/۶Kg است. وقتی نخ با راستای قائم زاویه ۳۰° می سازد سرعت گلوله برابر با $2\frac{m}{s}$ است. الف) حداکثر سرعت گلوله آونگ چقدر است؟ ب) حداکثر زاویه نخ با امتداد قائم چقدر است؟

حل:

$m = 0/6\,Kg \quad , \quad m_2 = 1/5\,Kg \quad , \quad L = 75\,cm = 0/75\,m$

$\theta = 30^\circ \quad , \quad v = 2\frac{m}{s}$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$h = L(1 - Cos\theta) = 0/75 \times (1 - Cos(30)) = 0/0975\,m$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \sqrt{(2)^2 + 2 \times 9/8 \times 0/0975} = 2/44\frac{m}{s}$$

$$mgL(1 - Cos\theta) = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{v_2^2}{2gL} = 1 - Cos\theta \quad \rightarrow \quad Cos\theta = 1 - \frac{v_2^2}{2gL}$$

$$\theta = Cos^{-1}(1 - \frac{v_2^2}{2gL}) \approx 53/8^\circ$$

۴. مکعبی به جرم ۰/۲۵Kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی به فنری با ثابت $k = 10\frac{N}{m}$ متصل شده است. مکعب را ۴۰cm می کشیم و رها می کنیم. الف) حداکثر سرعت

مکعب چقدر است؟ ب) سرعت مکعب وقتی که انبساط فنر برابر با ۲۰cm باشد چقدر است؟ ج) در چه نقطه ای انرژی جنبشی سیستم با انرژی پتانسیل آن مساوی است؟

حل: الف)

$$m = ۰/۲۵\,Kg \quad , \quad k = ۱۰\frac{N}{m} \quad , \quad x_۱ = ۴۰cm = ۰/۴\,m$$

$$\frac{۱}{۲}kx_۱^۲ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times (۰/۴)^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۰/۲۵ \times v_۱^۲ \quad \rightarrow \quad v_۱ = ۲/۵۳\frac{m}{s}$$

ب)

$$x_۱ = ۲۰cm = ۰/۲\,m$$

$$\frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = \frac{۱}{۲}k(x_۲^۲ - x_۱^۲)$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۰/۲۵ \times v_۲^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ((۰/۴)^۲ - (۰/۲)^۲) \quad \rightarrow \quad v_۲ = ۲/۱۹\frac{m}{s}$$

ج) انرژی مکانیکی ($E = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲$) در تمام نقاط مسیر با هم برابر است. در لحظه ای که فنر را به اندازه ۴۰cm می کشیم انرژی مکانیکی برابر ۰/۸J است. ۲۸cm فاصله ای است که در آن انرژی جنبشی و پتانسیل با هم برابر هستند.

$$E_۱ = \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times (۰/۴)^۲ = ۰/۸\,J$$

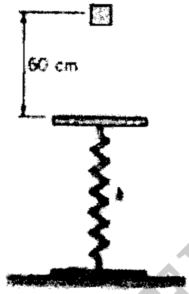
$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$E = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$E = kx^۲$$

$$۰/۸ = ۱۰\,x^۲ \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{۰/۸}{۱۰}} = ۰/۲۸\,m = ۲۸\,cm$$

۵. قطعه ای به جرم ۵۰۰gr از ارتفاع ۶۰cm روی فنر قائمی با ثابت $k = ۱۲۰\frac{N}{m}$ سقوط میکند. (شکل ۱۴) حداکثر تراکم این فنر چقدر خواهد بود. (راهنمایی: پیدا کردن جواب مستلزم حل یک معادله درجه ۲ است.)



حل:

$$m = ۵۰۰gr = ۰/۵\,Kg \quad , \quad h = ۶۰cm = ۰/۶m \quad , \quad k = ۱۲۰\frac{N}{m} \quad , \quad v = o$$

$$L = h - y \qquad , \qquad mgL = \frac{۱}{۲}ky^۲$$

$$mg(h-y) = \frac{۱}{۲}ky^۲$$

$$\frac{۱}{۲}ky^۲ + mgy - mgh = o$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۱۲۰ \times y^۲ + ۰/۵\times ۹/۸ \times y - ۰/۵ \times ۹/۸ \times ۰/۶ = o$$

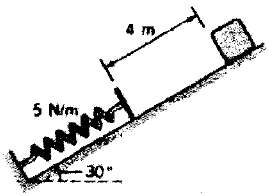
$$۶۰y^۲ + ۴/۹y - ۲/۹۴ = o$$

$$y = \frac{-۴/۹ \pm \sqrt{(۴/۹)^۲ - (۴\times ۶۰ \times (-۲/۹۴))}}{۲\times ۶۰} = \begin{cases} y_۱ = ۰/۱۸m = ۱۸cm \\ y_۲ = -۰/۲۷m \quad \times \end{cases}$$

۶. در سیستم شکل ۱۵، جسمی به جرم ۱۰۰gr روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که زاویه شیب آن ۳۰° است، از حالت سکون به راه می افتد و پس از طی ۴m به فنری با ثابت

$k=۵\dfrac{N}{m}$ برخورد می کند. الف) سرعت جسم درست لحظه برخورد به فنر چقدر است؟

ب) فنر حداکثر چقدر فشرده خواهد شد؟



حل: الف)

$$m=۱۰۰gr=۰/۱Kg \quad , \quad x=۴m \quad , \quad k=۵\frac{N}{m} \quad , \quad v_{\circ}=o \quad , \quad \theta=۳۰^{\circ}$$

$$mgh=\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

$$h=۴\times Sin(۳۰)=۴\times\frac{۱}{۲}=۲m$$

$$v=\sqrt{۲gh}=\sqrt{۲\times۹/۸\times۲}=۶/۲۶\frac{m}{s}$$

ب)

$$y=xSin(۳۰)=\frac{x}{۲}$$

$$mgy+\frac{۱}{۲}mv^{۲}=\frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

$$(۰/۱\times۹/۸\times\frac{x}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times۰/۱\times(۶/۲۶)^{۲})=(\frac{۱}{۲}\times۵\times x^{۲})$$

$$۵x^{۲}-۰/۹۸x-۳/۹۲=o$$

$$y=\frac{+۰/۹۸\pm\sqrt{(۰/۹۸)^{۲}-(۴\times۵\times(-۳/۹۲))}}{۲\times۵}=\begin{cases}y_{۱}=۰/۹۹m=۹۹cm \qquad \times\\ y_{۲}=-۰/۷۹m\end{cases}$$

۷. پرتابه ای که در راستای قائم به بالا پرتاب شده است حداکثر به ارتفاع H می رسد. در کدام نقطه انرژی جنبشی این پرتابه ٪۷۵ انرژی پتانسیل آن است؟ سطح صفر پتانسیل را در $y = o$ بگیرید.

حل:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$K = 0/75U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0/75mgh$$

$$mgH = 0/75mgh + mgh = 1/75mgh$$

$$H = 1/75h$$

$$h = \frac{H}{1/75} = 0/57H$$

۸. گلوله ای با سرعت اولیه $40\frac{m}{s}$ در امتداد قائم به هوا پرتاب می شود: الف) در چه نقطه ای $K = U$ است؟ ب) در چه نقطه ای $K = \frac{U}{2}$ است؟

حل: الف)

$$v_0 = 40\frac{m}{s} \qquad , \qquad K = U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(40)^2}{2\times 9/8} = 81/6m$$

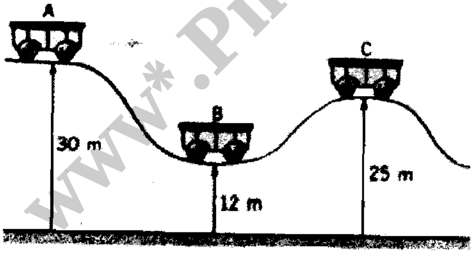
ب)

$$K = \frac{U}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}mgh$$

$$h = \frac{v^۲}{g} = \frac{(۴۰)^۲}{۹/۸} = ۱۶۳/۲۶\,m$$

۹. در یک پارک تفریحی ارابه ای روی مسیری که در شکل ۱۶ نشان داده شده است حرکت می کند. جرم ارابه و مسافران آن ۶۰۰Kg است. سرعت ارابه در نقطه A برابر $۱۲\frac{m}{s}$ است. فرض کنید اصطکاک ناچیز است و سرعت این ارابه را در نقاط B و C پیدا کنید. ارتفاع نقاط A و B و C از سطح زمین به ترتیب ۳۰m و ۱۲m و ۲۵m است.



حل:

$$m = ۶۰۰\,Kg \quad , \ v_A = ۱۲\frac{m}{s} \quad , \ y_A = ۳۰\,m \quad , \ y_B = ۱۲\,m \quad , \ y_C = ۲۵\,m$$

$$\frac{۱}{۲}mv_A^۲ + mg\,y_A = \frac{۱}{۲}mv_B^۲ + mg\,y_B$$

$$v_A^۲ + ۲g(y_A - y_B) = v_B^۲$$

$$v_B = \sqrt{v_A^۲ + ۲g(y_A - y_B)}$$

$$= \sqrt{(۱۲)^۲ + ۲\times ۹/۸ \times (۳۰ - ۱۲)} = ۲۲/۲۸۹\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{۱}{۲}mv_A^۲ + mg\,y_A = \frac{۱}{۲}mv_C^۲ + mg\,y_C$$

$$v_A^2 + 2g(y_A - y_C) = v_C^2$$
$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 2g(y_A - y_C)}$$
$$= \sqrt{(12)^2 + 2\times 9/8 \times (30-25)} = 15/56\ \frac{m}{s}$$

۱۰. پرتابه ای از بامی به ارتفاع $40m$ با سرعت اولیه $25\frac{m}{s}$ در جهت 60° بالاتر از افق پرتاب می شود. با استفاده از ملاحظات مربوط به انرژی تعیین کنید که الف) مقدار سرعت این پرتابه موقع برخورد به زمین چقدر است؟ ب) در چه ارتفاعی سرعت پرتابه $15\frac{m}{s}$ است؟

حل: الف) .

$$y = 40m \quad , \quad v_0 = 25\frac{m}{s} \quad , \quad \theta = 60^\circ$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v_0^2 + 2gy = v^2$$
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gy} = \sqrt{(25)^2 + (2\times 9/8\times 40)} = 37/54\ \frac{m}{s}$$

ب)

$$v = 15\frac{m}{s}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$
$$h = \frac{1}{g}\times(\frac{1}{2}v_0^2 + gy - \frac{1}{2}v^2)$$
$$= \frac{1}{9/8}\times(\frac{1}{2}(25)^2 + (9/8\times 40) - \frac{1}{2}(15)^2)$$
$$= 60/41m$$

بخش ۸-۶- انرژی مکانیکی و نیروهای ناپایستار

۱۱. چتر بازی به جرم ۷۵Kg با چتری که ۸Kg جرم دارد از هواپیمایی که در ارتفاع ۱Km از سطح زمین با سرعت $۱۴۰\frac{Km}{h}$ در پرواز است پایین می پرد و بلافاصله چترش را باز می کند. اگر این چتر باز در امتداد قائم با سرعت $۷\frac{m}{s}$ به زمین برسد، کاری که چتر روی هوا انجام داده چقدر است؟

حل:

$$m_۱ = ۷۵\,Kg \quad , \quad m_۲ = ۸\,Kg \quad , \quad h = ۱\,Km = ۱۰۰۰\,m$$

$$v_۱ = ۱۴۰\frac{Km}{h} = ۳۸/۹\frac{m}{s} \quad , \quad v_۲ = ۷\frac{m}{s} \quad , \quad m = m_۱ + m_۲ = ۷۵ + ۸ = ۸۳\,Kg$$

$$\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - W_f$$

$$W_f = \left[\frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ - mgh\right]$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}\times ۸۳\times(۷)^۲ - \frac{۱}{۲}\times ۸۳\times(۳۸/۹)^۲ - ۸۳\times ۹/۸\times ۱۰۰۰\right]$$

$$= ۸/۷۴\times ۱۰^۵\ J$$

۱۲. کودکی به جرم ۲۰Kg بالای یک سرسره °۲۰ که طول آن ۴m است می نشیند و با سرعت $۴\frac{m}{s}$ به پایین سرسره سر می خورد. ضریب اصطکاک لغزش چقدر است؟

حل:

$$m = ۲۰\,Kg \quad , \quad \theta = ۲۰^\circ \quad , \quad L = ۴m \quad , \quad v = ۴\,\frac{m}{s}$$

$$h = L\,Sin(۲۰)$$

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ - W_f$$

$$mgL\,Sin(۲۰) = \frac{۱}{۲}mv^۲ - W_f$$

$$W_f = \frac{۱}{۲}mv^۲ - mgL\,Sin(۲۰)$$

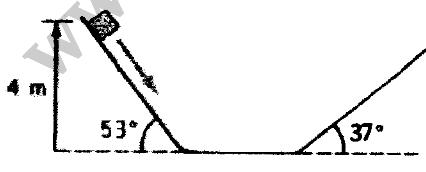
$$= \frac{۱}{۲}\times ۲۰\times (۴)^۲ - ۲۰\times ۹/۸\times ۴\times ۰/۳۴$$

$$= ۱۶۰ - ۲۶۶/۵۶ = -۱۰۶/۵۶\,J$$

$$W_f = \mu_k (mg\,Cos\theta)L$$

$$\mu_k = \frac{W_f}{(mg\,Cos\theta)L} = \frac{-۱۰۶/۵۶}{۲۰\times ۹/۸\times ۰/۹۴\times ۴} = ۰/۱۴۵$$

۱۳. در شکل ۱۷، مکعبی به جرم ۱Kg در ارتفاع ۴m از سطح زمین روی سطح شیبداری به زاویه °۵۳ با سرعت $۲\frac{m}{s}$ در حال پایین آمدن است. این مکعب در پایین شیب یک مسیر افقی به طول ۳m را می پیماید و سپس از شیب °۳۷ بالا می رود. اگر ضریب اصطکاک جنبشی برای تمام قسمتهای مسیر ۰/۴ باشد، مکعب تا چه ارتفاعی می تواند خودش را از روی این شیب بالا بکشد؟



حل:

$m = ۱Kg \quad , \quad h_۱ = ۴m \quad , \quad \theta_۱ = ۵۳° \quad , \quad v_۱ = ۲\frac{m}{s}$

$L = ۳m \quad , \quad \theta_۲ = ۳۷° \quad , \quad \mu_k = ۰/۴$

بخش ۸-۷- نیروهای پایستار

۱۴. تابع انرژی پتانسیل را برای نیروی $F_x = Cx^3$ پیدا کنید. سطح صفر پتانسیل را در $x = o$ بگیرید.

حل:

$$W = -\int_0^x F_x dx = -\int_0^x Cx^3 dx = -\frac{C}{4}x^4$$

۱۵. تابع انرژی پتانسیل وابسته به نیروی $F_x = \frac{ax}{(b^2 + x^2)^{3/2}}$ را پیدا کنید. $U = o$ را در $x = \infty$ بگیرید.

حل:

$$W = -\int_0^x F_x dx = -\int_x^\infty \left(\frac{ax}{(b^2 + x^2)^{3/2}}\right)dx$$

$$u = b^2 + x^2$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\int \frac{ax}{(b^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{a}{(u)^{3/2}} du = \frac{1}{2}\int a(u)^{-3/2} du = 2a\left(\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right) = -\frac{a}{u^{1/2}} = -\frac{a}{(b^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$W = -\int_x^\infty \left(\frac{ax}{(b^2 + x^2)^{3/2}}\right)dx = -\frac{a}{(b^2 + x^2)^{1/2}}\Bigg|_x^\infty = \frac{a}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

۱۶. ذره ای تحت تأثیر نیروی ثابت $\vec{F} = 2\hat{i} - 5\hat{j}$ از نقطه $3\hat{i} + 5\hat{j}$ به نقطه $-2\hat{i} + 11\hat{j}$ تغییر مکان می دهد (نیرو بر حسب نیوتن و جابجای بر حسب متر است.) تغییر انرژی پتانسیل در این جابجایی چقدر است؟

حل:

$$\vec{F} = 2\hat{i} - 5\hat{j}$$

$$\vec{r}_1 = 3\hat{i} + 5\hat{j} \qquad , \qquad \vec{r}_2 = -2\hat{i} + 11\hat{j}$$

$$W = -\Delta U$$

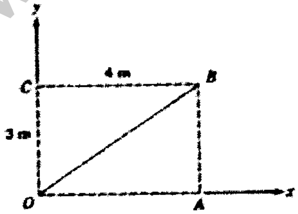
$$W = \vec{F}.(\vec{r}_۲ - \vec{r}_۱)$$

$$= (۲\hat{i} - ۵\hat{j}).\left[(-۲\hat{i} + ۱۱\hat{j}) - (۳\hat{i} + ۵\hat{j})\right]$$

$$= (۲\hat{i} - ۵\hat{j}).(-۵\hat{i} + ۶\hat{j}) = -۱۰ - ۳۰ = -۴۰J$$

$$\Delta U = -W = -(-۴۰) = +۴۰J$$

۱۷. ذره ای تحت تأثیر نیروی اصطکاک ثابتی به مقدار ۱۰N است که در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می شود. کاری که این نیرو در هریک از مسیرهای زیر در شکل ۱۸ روی جسم انجام می دهد چقدر است؟ الف) W_{OAB} و W_{OCB} . آیا از مقادیری که برای این کارها بدست آورده اید می شود نتیجه گرفت که نیرو پایستار است؟ توضیح بدهید که چرا؟ ب) $W_{OAB} + W_{BCO}$ آیا مقداری که برای این مجموع بدست آورده اید ملاک پایستار بودن نیرو است؟



حل: الف)

$$\begin{cases} W_{OA} = -f_k(r_{OA}) = -۱۰ \times ۴ = -۴۰J \\ W_{AB} = -f_k(r_{AB}) = -۱۰ \times ۳ = -۳۰J \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W_{OAB} = W_{OA} + W_{AB} \\ W_{OAB} = -۴۰ - ۳۰ = -۷۰J \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{OC} = -f_k(r_{OC}) = -۱۰ \times ۳ = -۳۰J \\ W_{CB} = -f_k(r_{CB}) = -۱۰ \times ۴ = -۴۰J \end{cases} \rightarrow \begin{cases} W_{OCB} = W_{OC} + W_{CB} \\ W_{OCB} = -۳۰ - ۴۰ = -۷۰J \end{cases}$$

خیر – کار باید برای هر مسیری بین این دو نقطه برابر باشد.

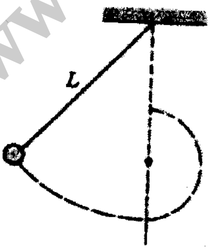
ب) خیر

$$W_{BCO} = W_{BC} + W_{CO} = -۷۰J$$
$$W_{OAB} + W_{BCO} = -۷۰ - ۷۰ = -۱۴۰J$$

مسائل تکمیلی

۱۸. وزنه ای به جرم ۳۲g را به فنر قائمی با ثابت سفتی $۲/۸\dfrac{N}{m}$ آویزان می کنیم ولی در همان حالت نگه اش می داریم. الف) اگر وزنه را (در کف دست) خیلی آرام پایین بیاوریم، انبساط فنر در حالت تعادل وزنه چقدر است؟ ب) اگر وزنه را رها کنیم تا یکباره سقوط کند، فنر حداکثر چقدر منبسط می شود؟

۱۹. آونگی به طول L را از وضعیتی که نخ آن افقی است رها می کنیم. وقتی گلوله آونگ پایین می آید نخ آن به میخی که در فاصله y از زیر نقطه آویز واقع شده است گیر می کند. نشان بدهید که کمترین مقدار برای y برای آنکه گلوله آونگ بتواند دایره کاملی را به دور میخ طی کند برابر با $\dfrac{۳L}{۵}$ است.



حل:

$$L = y + R$$

$$mg = \frac{mv_B^۲}{R} = \frac{mv_B^۲}{L-y} \quad \rightarrow \quad v_B^۲ = g(L-y) \qquad (۱)$$

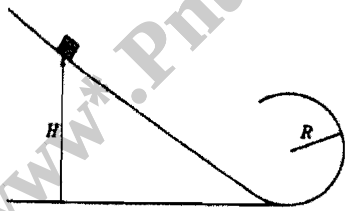
$$E_A = E_B$$

$$mgL = mg(۲R) + \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \qquad (۲)$$

$$mgL = ۲mg(L-y) + \frac{۱}{۲}mg(L-y)$$

$$L = \frac{۵}{۲}(L-y) \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{۳}{۵}L$$

۲۰. در شکل ۲۰، مهره ای به جرم m از ارتفاع H روی مسیر شیبدار بدون اصطکاکی می لغزد. این مسیر در انتهایش به صورت دایره قائمی به شعاع R در می آید. الف) H حداقل باید چقدر باشد تا مهره در بالاترین نقطه دایره از مسیر جدا نشود؟ ب) اگر مهره از ارتفاعی برابر با دو برابر این ارتفاع، شروع به حرکت کند، نیرویی که در بالاترین نقطه این دایره از طرف مسیر به آن وارد می شود چقدر است؟



حل: الف) اگر نقطه A جایی باشد که جسم در ارتفاع H قرار دارد و نقطه B بالاترین نقطه در مسیر دایره ای باشد

$$E_A = E_B$$

$$mgH = mg(۲R) + \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \qquad (۱)$$

$$N_B + mg = \frac{mv_B^۲}{R} \qquad \rightarrow \qquad v_B^۲ = gR \qquad (۲)$$

در بالاترین نقطه حلقه نیروی تماسی $N_B = o$ است یعنی جسم در آستانه جدا شدن است.

$$mgH = ۲mgR + \frac{۱}{۲}mgR \qquad \rightarrow \qquad H = \frac{۵}{۲}R$$

ب)

$$E_A = E_B \quad , \quad H' = ۲H \quad , \quad H = \frac{۵}{۲}R$$

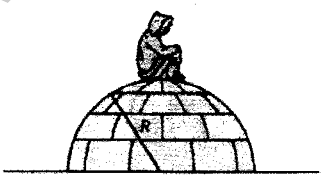
$$mgH' = mg(۲R) + \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \qquad (۱)$$

$$N_B + mg = \frac{mv_B^۲}{R} \quad \rightarrow \quad v_B^۲ = \frac{R}{m}(N + mg) \qquad (۲)$$

$$mg(۲H) = mg(۲R) + \frac{۱}{۲}m\{\frac{R}{m}(N + mg)\}$$

$$۲(\frac{۵}{۲}R) = \frac{R}{۲}N + \frac{۵R}{۲} \quad \rightarrow \quad N = ۵mg$$

۲۱. کودکی در آلاسکا از بالای یک کومه یخی به شکل نیم کره ای به شعاع R از حالت سکون شروع به لغزش می کند. فرض کنید اصطکاک ناچیز است. الف) در چه زاویه ای، نسبت به خط قائم، تماس کودک با سطح قطع می شود. ب) اگر اصطکاک وجود داشت آیا این قطع تماس در ارتفاع بیشتری اتفاق می افتد یا در ارتفاع کمتری؟



حل: الف) اگر v سرعت بچه در لحظه جدا شدن از روی کومه یخی باشد و H ارتفاع در آن نقطه باشد:

$$mgR = mgH + \frac{۱}{۲}mv^۲ \qquad (۱)$$

$$H = R\,Cos\,\alpha$$

$$mgCos\,\alpha - N = \frac{mv^۲}{R}$$

در لحظه جدا شدن از سطح $N = o$ است.

$$mgCos\alpha = \frac{mv^۲}{R} \quad \rightarrow \quad v^۲ = gR\,Cos\alpha \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad mgR = mgR\,Cos\alpha + \frac{۱}{۲}mgR\,Cos\alpha$$

$$Cos\alpha = \frac{۲}{۳} \quad \rightarrow \quad \alpha = Cos^{-۱}(\frac{۲}{۳})$$

ب)

$$mgR = mgH' + \frac{۱}{۲}m(v')^۲ + W_f \qquad (۱)$$

$$H' = R\,Cos\theta$$

$$mgCos\theta = \frac{m(v')^۲}{R} \quad \rightarrow \quad (v')^۲ = gR\,Cos\theta = gH' \qquad (۲)$$

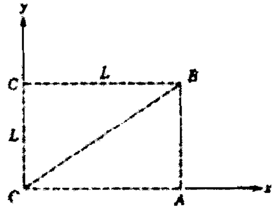
$$(۱),(۲) \quad \rightarrow \quad mgR = mgH' + \frac{۱}{۲}mgH' + W_f$$

$$R = \frac{۳}{۲}H' + \frac{W_f}{mg} \quad \rightarrow \quad H' = \frac{۲}{۳}R + \frac{۲W_f}{۳mg}$$

$$H' < H$$

در ارتفاعی کمتر از قسمت الف سطح را ترک می کند.

۲۲. نیرویی به صورت $\vec{F}(x,y) = xy^۲\,\hat{i}$ تغییر می کند. با توجه به شکل ۲۲، حاصل $\int F_x dx + \int F_y dy$ را از نقطه O تا نقطه B در مسیرهای زیر محاسبه کنید: الف) OA و بعد AB، ب) OC و بعد CB. آیا این نیرو پایستار است؟



حل:

$$\vec{F}(x,y) = xy^{۲}\hat{i}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

$$W = \int \vec{F}(x,y).d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dx$$

الف)

$$OA \text{ مسیر } \rightarrow \begin{cases} d\vec{r} = dx\hat{i} \\ y = o \end{cases} \rightarrow F = o \Rightarrow W_{OA} = o$$

$$AB \text{ مسیر } \rightarrow \begin{cases} d\vec{r} = dy\hat{j} \\ F_y = o \end{cases} \Rightarrow W_{AB} = o$$

$$W_{OAB} = W_{OA} + W_{AB} = o$$

ب)

$$OC \text{ مسیر } \rightarrow \begin{cases} d\vec{r} = dy\hat{j} \\ x = o \end{cases} \rightarrow F_y = o \Rightarrow W_{OC} = o$$

$$CB \text{ مسیر } \rightarrow \begin{cases} d\vec{r} = dx\hat{i} \\ y = L \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{CB} = \int F_x dx = \int_o^L (L^{۲}x)dx = \left.\frac{L^{۲}x^{۲}}{۲}\right)_o^L = \frac{L^{۴}}{۲}$$

$$W_{OCB} = W_{OC} + W_{CB} = \frac{L^{۴}}{۲}$$

نیرو زمانی پایستار است که کار در یک مسیر بسته صفر باشد

$$W_{OABCO} = W_{OAB} + W_{BCO} = o + (-\frac{L^{۴}}{۲}) = -\frac{L^{۴}}{۲} \neq o$$

پس نیرو پایستار نیست.

۲۳. انرژی پتانسیل وابسته به دو ذره به شکل $U(x)=\dfrac{C}{(a^2+x^2)^{1/2}}$ است که در آن c و a ثابت اند. الف) نیروی F_x که این دو ذره به هم وارد می کنند به چه شکلی است؟ ب) این نیرو در کجا ماکزیمم است؟

حل: الف)

$$U(x)=\frac{C}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$F_x=-\frac{dU(x)}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right)=\frac{Cx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

ب)

$$\frac{dF}{dx}=o \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right)=o$$

$$\frac{C(a^2+x^2)^{3/2}-Cx(\frac{3}{2})(2x)(a^2+x^2)^{1/2}}{(a^2+x^2)^3}=o$$

$$C(a^2+x^2)^{3/2}-Cx(\frac{3}{2})(2x)(a^2+x^2)^{1/2}=o$$

$$a^2+x^2=3x^2 \qquad \rightarrow \qquad a^2=2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

۲۴. یک توپ تنیس به جرم ۶۰g که با سرعت $24\frac{m}{s}$ در راستای قائم به بالا پرتاب شده است حداکثر ۲۶m از نقطه پرتاب اوج می گیرد. نیروهای مقاوم چقدر کار روی این توپ انجام می دهند؟

حل:

$$m=60\,gr=0/06\,Kg \qquad , \qquad v=24\frac{m}{s} \qquad , \qquad \Delta y=26\,m$$

$$\frac{1}{2}mv^2+W_f=mgh$$

$$W_f=60\times9/8\times26-\frac{1}{2}\times0/06\times(24)^2=15/288-17/28=-1/992\approx-2\ J$$

فصل ۹

مسئله ها

بخش ۹-۱- تکانه خطی

۱. دونده ای به جرم ۷۰Kg با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ در حال دویدن است. یک گلوله به جرم ۲۰g و یک اتومبیل به جرم ۱۵۰۰ Kg هریک با چه سرعتی باید در حرکت باشند تا تکانه این دونده مساوی می شود؟

حل:

$$m_۱ = ۷۰ Kg \quad , \quad m_۲ = ۲۰ gr = ۰/۰۲ Kg \quad , \quad m_۳ = ۱۵۰۰ Kg \quad , \quad v_۱ = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$m_۱ v_۱ = m_۲ v_۲$$

$$v_۲ = \frac{m_۱}{m_۲} v_۱ = \frac{۷۰}{۰/۰۲} \times ۱۰ = ۳/۵ \times ۱۰^۴ \frac{m}{s}$$

$$m_۱ v_۱ = m_۳ v_۳$$

$$v_۳ = \frac{m_۱}{m_۳} v_۱ = \frac{۷۰}{۱۵۰۰} \times ۱۰ = ۰/۴۷ \frac{m}{s}$$

۲. یکم تریلی به جرم ۱۰۰۰۰Kg با سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ است. تکانه خطی و انرژی جنبشی سواری ای به جرم ۱۲۰۰Kg در چه سرعتهایی با تکانه و انرژی جنبشی این تریلی برابر خواهد بود؟

حل:

$$m_۱ = ۱۰۰۰ Kg \quad , \quad m_۲ = ۱۲۰۰ Kg \quad , \quad v_۱ = ۳۰ \frac{m}{s}$$

$$m_۱ v_۱ = m_۲ v_۲$$

$$v_۲ = \frac{m_۱}{m_۲} v_۱ = \frac{۱۰۰۰}{۱۲۰۰} \times ۳۰ = ۲۵ \frac{m}{s}$$

$$\frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ = \frac{۱}{۲} m_۲ v_۲^۲$$

$$v_۲ = v_۱ \sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}} = ۳۰ \times \sqrt{\frac{۱۰۰۰}{۱۲۰۰}} = ۸۶/۶ \frac{m}{s}$$

۳. یک گلوله ۲۰g و یک دونده ۶۰ کیلوگرمی را در نظر بگیرید. الف) اگر تکانه آنها یکی باشد، نسبت انرژی های جنبشی اشان چقدر است؟ ب) اگر انرژی جنبشی آنها یکی باشد، نسبت تکانه هایشان چقدر است؟

حل: الف)

$$m_۱ = ۲۰ gr = ۰/۰۲ Kg \quad , \quad m_۲ = ۶۰ Kg \quad , \quad P_۱ = P_۲$$

$$K_۱ = \frac{P_۱^۲}{۲m_۱} \quad , \quad K_۲ = \frac{P_۲^۲}{۲m_۲}$$

$$\frac{K_۱}{K_۲} = \frac{\frac{P_۱^۲}{۲m_۱}}{\frac{P_۲^۲}{۲m_۲}} = \frac{P_۱^۲}{P_۲^۲} \times \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} = \frac{۶۰}{۰/۰۲} = ۳۰۰۰$$

ب)

$$m_۱ = ۲۰ gr = ۰/۰۲ Kg \quad , \quad m_۲ = ۶۰ Kg \quad , \quad K_۱ = K_۲$$

$$K_۱ = \frac{P_۱^۲}{۲m_۱} \quad , \quad K_۲ = \frac{P_۲^۲}{۲m_۲}$$

$$\frac{K_۱}{K_۲} = \frac{P_۱^۲}{P_۲^۲} \times \frac{m_۲}{m_۱} \quad \rightarrow \quad \frac{P_۲}{P_۱} = \sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}} = \sqrt{\frac{۰/۰۲}{۶۰}} = ۰/۰۱۸۳$$

$$m = ۱۰ gr = ۰/۰۱\, Kg \quad , \quad v_۱ = ۴۰۰ \frac{m}{s} \quad , \quad v_۲ = ۱۰۰ \frac{m}{s} \quad , \quad \Delta t = ۰/۰۱ s$$

$$|F| = \left| \frac{m(v_۲ - v_۱)}{\Delta t} \right| = \left| \frac{۱ \times (۱۰۰ - ۴۰۰)}{۰/۰۱} \right| = ۳۰۰ N$$

۷. چکشی که جرم کله اش ۰/۵Kg است با سرعت $۴ \frac{m}{s}$ روی یک یخ فرود می آید و متوقف می شود. اگر این برخورد $۱۰^{-۳}\, s$ طول بکشد، نیروی متوسط وارد بر یخ چقدر است؟ (خوب است این نیرو را با وزن خودتان مقایسه کنید)

حل:

$$m = ۰/۵\ Kg \quad , \quad v_۱ = ۴ \frac{m}{s} \quad , \quad v_۲ = o \quad , \quad \Delta t = ۱۰^{-۳}\ s$$

$$|F| = \left| \frac{m(v_۲ - v_۱)}{\Delta t} \right| = \left| \frac{۰/۵ \times (o - ۴)}{۰/۰۰۱} \right| = ۲۰۰۰ N$$

۸. از مسلسلی که روی پایه ای سوار شده است، گلوله های ۱۵ گرمی با سرعت $۴۵۰ \frac{m}{s}$ و با آهنگ ۶۰۰ گلوله در دقیقه شلیک می شود نیروی متوسط وارد بر پایه چقدر است؟

حل:

$$m = ۰۱۵\, gr = ۰/۰۱۵\, Kg \quad , \quad v = ۴۵۰ \frac{m}{s}$$

$$۶۰۰ \frac{\text{گلوله}}{\text{دقیقه}} = \frac{۶۰۰}{۶۰} = ۱۰ \frac{\text{گلوله}}{\text{ثانیه}}$$

$$F = ۱۰ \times ۰/۰۱۵ \times ۴۵۰ = ۶۷/۵ N$$

۹. توپی به جرم ۲۰۰gr از ارتفاع ۴m به زمین سقوط می کند و پس از برخورد تا ارتفاع ۳m بالا می رود. اگر توپ به مدت ۱۰ms با زمین در تماس بوده باشد، چه نیروی متوسطی به آن وارد شده است؟

حل:

$$m = ۲۰۰\,gr = ۰/۲\,Kg$$

$$h_۱ = ۴\,m \quad , \quad h_۲ = ۳\,m \quad , \quad \Delta t = ۱۰\,ms = ۱۰ \times ۱۰^{-۳}\,s$$

$$\frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ = mgh_۱$$

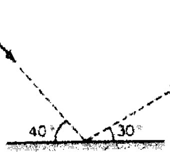
$$v_۱ = -\sqrt{۲gh_۱} = -\sqrt{۲ \times ۹/۸ \times ۴} = -۸/۸۵ \frac{m}{s}$$

$$mgh_۲ = \frac{۱}{۲} m_۲ v_۲^۲$$

$$v_۲ = \sqrt{۲gh_۲} = \sqrt{۲ \times ۹/۸ \times ۳} = ۷/۶۷ \frac{m}{s}$$

$$F = \frac{m(v_۲ - v_۱)}{\Delta t} = \frac{۰/۲ \times (۷/۶۷ - (-۸/۸۵))}{۱۰ \times ۱۰^{-۳}} = ۳۳۰/۴\,N$$

۱۰. یک توپ تنیس به جرم ۶۰gr با سرعت $۲۵\frac{m}{s}$ با زاویه ۴۰ درجه نسبت به افق زمین می خورد و با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ با زاویه ۳۰ درجه نسبت به افق وا می جهد (نگاه کنید به شکل ۷). الف) ضربه وارد به توپ را پیدا کنید. ب) به فرض آنکه این برخورد ۵ms طول کشیده باشد، نیروی متوسط وارد بر توپ را پیدا کنید.



حل:

$$m = ۶۰\,gr = ۰/۰۶\,Kg \quad , \quad I = \Delta P$$

$$v_۱ = ۲۵\frac{m}{s} \quad , \quad v_۲ = ۲۵\frac{m}{s} \quad , \quad \theta_۱ = ۴۰^\circ \quad , \quad \theta_۲ = ۳۰^\circ$$

$$\frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ = mgh_۱$$

$$\vec{v}_۱ = v_۱ Cos(۴۰)\hat{i} - v_۱ Sin(۴۰)\hat{j}$$

$$= (۲۵\times ۰/۷۷)\hat{i} - (۲۵\times ۰/۶۴)\hat{j} = ۱۹/۲۵\hat{i} - ۱۶\hat{j} \quad \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_۲ = v_۲ Cos(۳۰)\hat{i} + v_۲ Sin(۳۰)\hat{j}$$

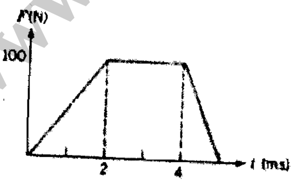
$$= (۲۰\times ۰/۸۷)\hat{i} - (۲۰\times ۰/۵)\hat{j} = ۱۷/۴\hat{i} + ۶\hat{j} \quad \frac{m}{s}$$

$$\Delta P = m(v_۲ - v_۱) = ۰/۰۶\times\left[(۱۷/۴\hat{i} + ۶\hat{j}) - (۱۹/۲۵\hat{i} - ۱۶\hat{j})\right]$$

$$= -۰/۱۱\hat{i} + ۱/۰۲\hat{j} \quad \frac{Kg\,m}{s}$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-۰/۱۱\hat{i} + ۱/۰۲\hat{j}}{۵۰\times ۱۰^{-۳}} = -۲۲\hat{i} + ۲۰۴\hat{j}\,N$$

۱۱. از منحنی F بر حسب t در شکل ۸، کمیتهای زیر را حساب کنید: الف) ضربه و ب) نیروی متوسط



حل: الف) مساحت زیر نمودار برابر ضربه است.

$$I = \frac{۲\times(۲+۴)\times ۱۰۰}{۲} = ۳۰۰\frac{Kgm}{s}$$

ب)

$$\Delta t = ۵\,ms = ۵\times ۱۰^{-۳}\,s$$

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{۳۰۰}{۵\times ۱۰^{-۳}} = ۶۰\times ۱۰^{۳}\ N$$

۱۲. خودرویی به جرم ۱۲۰۰Kg که با سرعت $۱۶\frac{m}{s}$ به طرف شرق در حرکت است به تدریج در مدت ۸s به طرف جنوب می پیچد و با سرعت $۱۲\frac{m}{s}$ به حرکتش ادامه می دهد. الف) ضربه (ناشی از تغییر تکانه) وارد بر خودرو، ب) نیروی متوسط وارد بر آن را پیدا کنید. (توجه کنید که جوابها باید شامل اندازه و جهت باشند.)

حل:

$$m = ۱۲۰۰\,Kg \quad , \quad \vec{v}_۱ = ۱۶\hat{i}\,\frac{m}{s} \quad , \quad \Delta t = ۸\,s \quad , \quad \vec{v}_۲ = ۱۲\,\hat{j}\,\frac{m}{s}$$

$$I = \Delta P = mv = ۱۲۰۰ \times ۲۰ = ۲۴۰۰۰\,\frac{Kg\,m}{s}$$

$$v = \sqrt{۱۲^۲ + ۱۶^۲} = ۲۰\,\frac{m}{s}$$

$$\theta = \tan^{-۱}(-\frac{۱۲}{۱۶}) \approx -۳۷^\circ$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta} = \frac{۲۴۰۰۰}{۸} = ۳۰۰۰\,N$$

بخش ۹-۳- پایستگی تکانه خطی

۱۳. یک جسم ۱۰ کیلوگرمی که با سرعت $۶\hat{i}\,\frac{m}{s}$ در حرکت است ناگهان منفجر می شود و به دو قطعه مساوی تقسیم می شود. یکی از قطعه ها با سرعت $۲\hat{i} - \hat{j}\,\frac{m}{s}$ پرتاب می شود، سرعت قطعه دیگر چیست؟

حل:

$$m_۱ = m_۲ = \frac{m}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵\,Kg \quad , \quad \vec{v} = ۶\hat{i} \quad , \quad \vec{v}_۱ = ۲\hat{i} - \hat{j}\,\frac{m}{s}$$

$$m\vec{v} = m_۱\vec{v}_۱ + m_۲\vec{v}_۲$$

$$۱۰ \times ۶\hat{i} = ۵ \times (۲\hat{i} - \hat{j}) + ۵ \times \vec{v}_۲ \quad \rightarrow \quad \vec{v}_۲ = ۱۰\hat{i} + \hat{j}\,\frac{m}{s}$$

۱۴. یک گلوله خمیر به جرم ۲۰۰gr در راستای قائم روی کالسکه کوچکی به جرم ۲/۵Kg که با سرعت $۲\frac{m}{s}$ در سطح افقی (بدون اصطکاک) در حرکت است می افتد. کالسکه بعد از این واقعه چه سرعتی پیدا می کند؟

حل:

$$m_1 = ۲/۵\,Kg \quad , \quad m_2 = ۲۰۰\,gr = ۰/۲\,Kg \quad , \quad v_1 = ۲\frac{m}{s}$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$۲/۵ \times ۲ = (۲/۵ + ۰/۲) \times v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = ۱/۸۵\frac{m}{s}$$

۱۵. جسمی به جرم $m_1 = ۲\,Kg$ که با سرعت u_1 در حرکت است با جسم ساکنی به جرم $m_2 = ۳\,Kg$ به طور کاملاً غیر الاستیک برخورد می کند، این برخورد یک بعدی است. اگر ۶۰J انرژی جنبشی در این برخورد تلف شده باشد، u_1 چقدر است؟

حل:

$$m_1 = ۲\,Kg \quad , \quad m_2 = ۳\,Kg \quad , \quad v_1 = u_1 \quad , \quad v_2 = o$$

$$\Delta K = ۶۰\,J$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \\ \frac{۱}{۲} m_1 v_1^2 + \frac{۱}{۲} m_2 v_2^2 - \Delta K = \frac{۱}{۲}(m_1 + m_2) v_f^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲u_1 + o = ۵ \times v_f \\ u_1^2 + o - ۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times v_f^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_f = \frac{۲u_1}{۵} \\ u_1^2 - ۶۰ = \frac{۵}{۲} \times (\frac{۲u_1}{۵})^2 \end{cases}$$

$$u_1 = ۱۰\frac{m}{s} \quad , \quad v_f = ۴\frac{m}{s}$$

۱۶. یک نوترون ساده به یک پروتون یک الکترون و یک نوترینو وامی پاشد. اگر تکانه پروتون $\frac{Kg\,m}{s}$ ۳×۱۰^{-۲۴} در جهت ۳۷ درجه شمال شرق و تکانه الکترون $\frac{Kg\,m}{s}$ ۴×۱۰^{-۲۴} در جهت ۵۳ درجه جنوب غرب باشد، تکانه نوترینو چقدر و در چه جهتی است؟

حل:

$$\begin{cases} P_p = ۳\times۱۰^{-۲۴}\dfrac{Kg\,m}{s} \\ \theta_p = ۳۷^\circ \end{cases} , \qquad \begin{cases} P_e = ۴\times۱۰^{-۲۴}\dfrac{Kg\,m}{s} \\ \theta_e = ۵۳^\circ \end{cases}$$

$$\vec{P}_p = P_p\,Sin(۳۷)\,\hat{i} + P_p\,Cos(۳۷)\,\hat{j}$$
$$= ۳\times۱۰^{-۲۴}\times۰/۶\hat{i} + ۳\times۱۰^{-۲۴}\times۰/۸\,\hat{j}$$
$$= ۱/۸\times۱۰^{-۲۴}\hat{i} + ۲/۳۹۴\times۱۰^{-۲۴}\,\hat{j}$$

$$\vec{P}_e = -P_e\,Cos(۵۳)\,\hat{i} - P_e\,Sin(۵۳)\,\hat{j}$$
$$= -۴\times۱۰^{-۲۴}\times۰/۶\hat{i} - ۴\times۱۰^{-۲۴}\times۰/۸\,\hat{j}$$
$$= -۲/۴\times۱۰^{-۲۴}\hat{i} - ۳/۱۹۲\times۱۰^{-۲۴}\,\hat{j}$$

$$\begin{cases} P_{xn} + P_p\,Sin(۳۷) - P_e\,Cos(۵۳) = o \\ P_{yn} + P_p\,Cos(۳۷) - P_e\,Sin(۵۳) = o \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_{xn} + ۱/۸\times۱۰^{-۲۴} - ۲/۴\times۱۰^{-۲۴} = o \\ P_{yn} + ۲/۳۹۴\times۱۰^{-۲۴} - ۳/۱۹۲\times۱۰^{-۲۴} = o \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{xn} = ۱/۳۹۲\times۱۰^{-۲۴} \\ P_{yn} = ۰/۰۰۶\times۱۰^{-۲۴} \end{cases} \rightarrow \quad \vec{P}_n = ۱/۳۹۲\times۱۰^{-۲۴}\,\hat{i} + ۰/۰۰۶\times۱۰^{-۲۴}\,\hat{j}$$

$$\theta = tan^{-۱}\left(\frac{۰/۰۰۶\times۱۰^{-۲۴}}{۱/۳۹۲\times۱۰^{-۲۴}}\right) = tan^{-۱}(۰/۰۰۷) = ۰/۴۱^\circ$$

۱۷. یک شکارچی به جرم ۸۰Kg با تفنگی به جرم ۴Kg روی سطح یخ زده بی اصطکاکی ایستاده است. گلوله ای به جرم ۱۵gr با سرعت $۶۰۰\frac{m}{s}$ (نسبت به سطح) در راستای افق از تفنگ شلیک می شود. الف) اگر شکارچی قنداق تفنگ را به شانه اش نچسبانده باشد، تفنگ بعد از شلیک با چه سرعتی پس می زند؟ ب) شکارچی بعد از برخورد (کاملاً غیر الاستیک) قنداق به شانه اش با چه سرعتی به حرکت در می آید؟ ج) اگر شکارچی قبلاً قنداق را محکم به شانه اش چسبانده بود، چه سرعتی می گرفت؟

حل: $m_۱ = ۸۰\,Kg \quad , \quad m_۲ = ۴\,Kg \quad , \quad m_۳ = ۱۵\,gr = ۰/۰۱۵\,Kg \quad , \quad v_۳ = ۶۰۰\frac{m}{s}$

الف)

$$m_۲ v_۲ = m_۳ v_۳$$

$$۴ \times v_۲ = ۰/۰۱۵ \times ۶۰۰ \qquad \rightarrow \qquad v_۲ = ۲/۲۵\frac{m}{s}$$

ب)

$$m_۲ v_۲ = (m_۱ + m_۲)v$$

$$۰/۰۱۵ \times ۶۰۰ = (۸۰ + ۴) \times v \qquad \rightarrow \qquad v = ۰/۱۰۷\frac{m}{s}$$

ج) مثل قسمت ب حل می شود.

۱۸. یک وانت به جرم ۱۵۰۰Kg که با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ در حرکت است از عقب به یک سواری به جرم ۱۰۰۰Kg که پشت چراغ قرمز متوقف شده است، می زند. خودروها در هم گیر می کنند. اگر ضریب اصطکاک لغزشی میان آسفالت و لاستیک $\mu_k = ۰/۵$ باشد، حساب کنید که این مجموعه (با چرخهای قفل شده) چقدر روی زمین کشیده می شود؟ فرض کنید سرعت مجموعه در همان امتداد سرعت اولیه وانت است.

حل:

$$m_1 = 1500\,Kg \quad , \quad m_2 = 1000\,Kg \quad , \quad v_1 = 20\frac{m}{s} \quad , \quad v_2 = o \quad , \quad \mu_k = 0/5$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_f$$

$$1500 \times 20 = (1500 + 1000) \times v_f \qquad \rightarrow \qquad v_f = 12\frac{m}{s}$$

$$\sum F_x = m a_x$$

$$-\mu_k (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

$$-0/5 \times (1500 + 1000) \times 9/8 = (1500 + 1000) \times a \qquad \rightarrow \qquad a = -4/9\frac{m}{s^2}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ad$$

$$o - (20)^2 = 2 \times (-4/9) \times d \qquad \rightarrow \qquad d = 14/7\,m$$

۱۹. یک واگن قطار به جرم $2\times10^4\,Kg$ با سرعت $3\hat{i}\,\frac{m}{s}$ با واگن دیگری به جرم $3\times10^4\,Kg$ برخورد می کند و به آن می چسبد. سرعت مجموعه پس از برخورد و انرژی جنبشی تلف شده را در هر یک از حالتهای زیر حساب کنید: الف) اگر سرعت واگن دیگر $2\hat{i}\,\frac{m}{s}$ باشد. ب) اگر سرعت واگن دیگر $-3/5\hat{i}\,\frac{m}{s}$ باشد.

حل:الف)

$$m_1 = 2\times10^4\,Kg \quad , \quad m_2 = 3\times10^4\,Kg \quad , \quad \vec{v}_1 = 3\hat{i}\,\frac{m}{s} \quad , \quad \vec{v}_2 = 2\hat{i}\,\frac{m}{s}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$2\times10^4 \times 3\hat{i} + 3\times10^4 \times 2\hat{i} = (2\times10^4 + 3\times10^4) \times \vec{v} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v} = 2/4\hat{i}\,\frac{m}{s}$$

ب)

$$m_1 = 2\times10^4\ Kg \quad , \quad m_2 = 3\times10^4\ Kg \quad , \quad \vec{v}_1 = 3\hat{i}\ \frac{m}{s} \quad , \quad \vec{v}_2 = -3/5\hat{i}\ \frac{m}{s}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}$$

$$2\times10^4 \times 3\hat{i} + 3\times10^4\times(-3/5\hat{i}) = (2\times10^4 + 3\times10^4)\times\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = -0/9\hat{i}\ \frac{m}{s}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \Delta K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$

$$\frac{1}{2}\times(2\times10^4)\times(3)^2 + \frac{1}{2}\times(3\times10^4)\times(3/5)^2 - \Delta K = \frac{1}{2}\times(2\times10^4 + 3\times10^4)\times(-0/9)^2$$

$$\Delta K = -25/35\times10^4\ J$$

۲۰. گلوله ای به جرم 15gr در راستای افقی به یک مکعب چوبی به جرم 2Kg که در انتهای سیمی به طول 1/2m آویزان است، شلیک می شود و در آن فرو می رود. پس از برخورد مکعب به حرکت در می آید و سیم تا ۲۰ درجه از راستای قائم منحرف می شود. الف) سرعت اولیه گلوله، ب) درصد اتلاف انرژی جنبشی را حساب کنید.

حل:

$$m_1 = 15\,gr = 0/015\,Kg \quad , \quad m_2 = 2\,Kg \quad , \quad L = 1/2\,m \quad , \quad \theta = 20^\circ$$

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_1+m_2)gh \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$h = L - L\,Cos\theta = L(1-Cos\theta) = 1/2\times(1-Cos(20)) = 0/072\,m$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9/8\times0/072} = 1/19\,\frac{m}{s}$$

$$m_1v_1 = (m_1+m_2)v$$

$$0/015\times v_1 = (2+0/015)\times1/19 \quad \rightarrow \quad v_1 = 160\,\frac{m}{s}$$

۲۱. گلوله ای به جرم 10gr با سرعت $400\frac{m}{s}$ به وزنه چوبی یک آونگ بالستیک به جرم 2/5Kg اصابت می کند، آنرا می شکافد و از طرف دیگرش با سرعت $100\frac{m}{s}$ خارج

می شود. الف) چوب تا چه ارتفاعی بالا می رود. ب) گلوله در حین عبور از چوب چقدر کار انجام می دهد.

حل:

$$m_۱ = ۱۰gr = ۰/۰۱Kg \quad , \quad m_۲ = ۲/۵Kg \quad , \quad v_۱ = ۴۰۰\frac{m}{s} \quad , \quad v'_۱ = ۱۰۰\frac{m}{s}$$

$$m_۱v_۱ = m_۱v'_۱ + m_۲v_۲$$

$$۰/۰۱ \times ۴۰۰ = ۰/۰۱ \times ۱۰۰^۴ + ۲/۵ \times v_۲ \quad \rightarrow \quad v_۲ = ۱/۲\frac{m}{s}$$

$$\frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ = m_۲gh$$

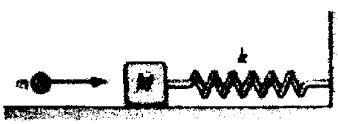
$$h = \frac{v_۲^۲}{۲g} = \frac{(۱/۲)^۲}{۲\times ۹/۸} = ۰/۰۷۳m = ۷/۳cm$$

ب)

$$W = -\Delta K = \frac{۱}{۲}m_۱(v_۱'^۲ - v_۱^۲)$$

$$= \frac{۱}{۲}\times ۰/۰۱ \times ((۱۰۰)^۲ - (۴۰۰)^۲) = -۷۵۰J$$

۲۲. توپی به جرم $m_۱ = ۰/۲۵Kg$ با سرعت $۲۴\frac{m}{s}$ با مکعب ساکنی به جرم ۱/۷۵Kg که به فنری با ثابت $۴۰\frac{N}{m}$ متصل است برخورد می کند و به آن می چسبد (شکل ۸) مکعب قبل از برخورد روی قسمت بدون اصطکاک سطح افقی قرار دارد، ولی بلافاصله پس از برخورد شروع به لغزش روی قسمت زبر سطح می کند. اگر حداکثر انقباض فنر ۰/۵m باشد، نیروی اصطکاک وارد بر مکعب چقدر است؟



حل:

$$m_1 = ۰/۱۲۵\,Kg \quad , \quad m_2 = ۱/۷۵\,Kg \quad , \quad v_1 = ۲۴\frac{m}{s} \quad , \quad v_2 = o$$

$$k = ۴۰\frac{N}{m} \quad , \quad x = ۰/۵\,m$$

$$K_1 = \frac{۱}{۲}m_1 v_1^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۰/۱۲۵ \times (۲۴)^۲ = ۷۲\,J$$

$$U = \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۱}{۲}\times ۴۰ \times (۰/۵)^۲ = ۵\,J$$

$$K_1 = U + W$$

$$W = K_1 - U = ۷۲ - ۵ = ۶۷\,J$$

$$W = f_k x$$

$$f_k = \frac{W}{x} = \frac{۶۷}{۰/۵} = ۱۳۴\,N$$

بخش ۹-٤- برخورد الاستیک یک بعدی

۲۳. یک ذره α به جرم ۴u (u یکای جرم اتمی است.) با سرعت $۱/۵\times۱۰^۷\ \frac{m}{s}$ به طور الاستیک با یک هسته طلا به جرم ۱۹۷u برخورد می کند. اگر ذره α بعد از برخورد در همان راستای مسیر قبلی اش به عقب برگردد، هسته طلا را با چه سرعتی پس می زند؟

حل:

$$m_1 = ۴u \quad , \quad m_2 = ۱۹۷u \quad , \quad v_1 = ۱/۵\times۱۰^۷\ \frac{m}{s} \quad , \quad v_2 = o$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2 \\ \frac{۱}{۲}m_1 v_1^۲ = \frac{۱}{۲}m_1 v_1'^۲ + \frac{۱}{۲}m_2 v_2^۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1} & (۱) \\ v_1'^۲ = \dfrac{m_1 v_1^۲ - m_2 v_2^۲}{m_1} & (۲) \end{cases}$$

$$(1) \qquad \rightarrow \quad v_1'^2 = \left(\frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1}\right)^2 = \frac{m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_2 v_1}{m_1^2}$$

$$(1)\,,\,(2) \quad \rightarrow \quad \frac{m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_2 v_1}{m_1^2} = \frac{m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2}{m_1}$$

$$m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_2 v_1 = m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2$$

$$(m_2^2 + m_1 m_2) v_2^2 = 2m_1 m_2 v_2 v_1$$

$$v_2 = \frac{2m_1 m_2 v_1}{m_2^2 + m_1 m_2} = \frac{2 \times 4u \times 197u \times 1/5 \times 10^7}{(197u)^2 + (4u \times 197u)} = 5/97 \times 10^5 \ \frac{m}{s}$$

۲۴. گلوله آونگی به جرم m از ارتفاع H نسبت به پایین ترین وضعیتش رها می شود و در پایین ترین نقطه مسیر با گلوله ساکن آونگ دیگری به جرم ۲m برخورد می کند. طول نخ آونگ ها مساوی است. الف) اگر برخوردها کاملاً غیر الاستیک باشد مجموعه گلوله ها تا چه ارتفاعی بالا می رود. ب) اگر برخورد صددرصد الاستیک فرض شود، هریک از گلوله ها تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

حل:الف)

$$mv_1 = (m + 2m)v_2 \qquad \rightarrow \qquad v_2 = \frac{v_1}{3}$$

طبق پایستگی انرژی برای گلوله m قبل از برخورد $\quad mgH = \frac{1}{2} m v_1^2$

سرعت قبل از برخورد $\quad v_1 = \sqrt{2gH}$

طبق پایستگی انرژی بعد از برخورد $\quad 3mgh = \frac{1}{2}(m + 2m) v_1^2$

سرعت بعد از برخورد $\quad v_1 = \sqrt{2gh}$

$$v_2 = \frac{v_1}{3} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt{2gH} = 3 \times \sqrt{2gh} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{H}{9}$$

ب)

$$\begin{cases} mv_1 = mv'_1 + 2mv'_2 \\ \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2'^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = v'_1 + 2v'_2 \\ v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \end{cases}$$

$$(v'_1 + 2v'_2)^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

$$v_1'^2 + 4v_2'^2 + 4v'_1v'_2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \rightarrow v'_2 = -2v'_1$$

$$v_1 = v'_1 + 2v'_2 = v_1 = v'_1 + 2(-2v'_1) = -3v'_1$$

طبق پایستگی قبل از برخورد $mgH = \frac{1}{2}mv_1^2$

سرعت قبل از برخورد $v_1 = \sqrt{2gH}$

طبق پایستگی انرژی بعد از برخورد $mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1'^2$

سرعت بعد از برخورد $v_1 = \sqrt{2gh_1}$

$$v_2 = -3v_1 \rightarrow \sqrt{2gH} = -3 \times \sqrt{2gh_1} \Rightarrow h_1 = \frac{H}{9}$$

به جای انرژی های جنبشی از انرژی های پتانسیل استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2'^2$$

$$mgH = mgh_1 + 2mgh_2$$

$$H = h_1 + 2h_2$$

$$H = \frac{H}{9} + 2h_2 \rightarrow h_2 = \frac{4H}{9}$$

۲۵. ذره ای به جرم m_1 با سرعت u_1 به طور کامل الاستیک و یک بعدی با ذره ساکنی به جرم m_2 برخورد می کند. سرعت ذره ها را پس از برخورد در صورتی که الف) $m_1 = 3m_2$ وب) $m_2 = 3m_1$ باشد، پیدا کنید.

حل: الف)

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

$u_2 = o$ جسم ساکن

$$\begin{cases} m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{m_2v_2 + m_1v_1}{m_1} & (1) \\ u_1^2 = \dfrac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2}{m_1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad u_1^2 = \left(\frac{m_2v_2 + m_1v_1}{m_1}\right)^2 = \frac{m_2^2v_2^2 + m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2v_2v_1}{m_1^2}$$

$$(1),(2) \quad \rightarrow \quad \frac{m_2^2v_2^2 + m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2v_2v_1}{m_1^2} = \frac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2}{m_1}$$

$$m_2^2v_2^2 + m_1^2v_1^2 + 2m_1m_2v_2v_1 = m_1^2v_1^2 + m_1m_2v_2^2$$

$$(-m_2^2 + m_1m_2)v_2^2 = 2m_1m_2v_2v_1$$

$$v_2 = \frac{2m_1m_2v_1}{m_1m_2 - m_2^2}$$

$$m_1 = 3m_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{2(3m_2)m_2v_1}{(3m_2)m_2 - m_2^2} = 3v_1 \qquad (3)$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad u_1 = \frac{m_2v_2 + m_1v_1}{m_1} = \frac{v_2 + 3v_1}{3} \qquad (4)$$

$$(3),(4) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}u_1 \\ v_2 = \frac{3}{2}u_1 \end{cases}$$

ب)

$$m_۲ = ۳m_۱ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_۲ = \dfrac{۲m_۱m_۲v_۱}{m_۱m_۲ - m_۲^۲} = \dfrac{۲m_۱(۳m_۱)v_۱}{m_۱(۳m_۱) - (۳m_۱)^۲} = -v_۱ \\ u_۱ = \dfrac{m_۲v_۲ + m_۱v_۱}{m_۱} = \dfrac{(۳m_۱)v_۲ + m_۱v_۱}{m_۱} = ۳v_۲ + v_۱ \end{cases}$$

$$v_۱ = -\frac{۱}{۲}u_۱ \quad , \quad v_۲ = \frac{۱}{۲}u_۱$$

۲۶. ذره ای به جرم $m_۱$ که سرعتش $+u$ است با ذره ساکنی به جرم $m_۲$ به طور الاستیک از رو به رو برخورد می کند، نسبت $\frac{m_۲}{m_۱}$ را در صورتی که سرعت $m_۱$ پس از برخورد الف) $-\frac{u}{۳}$ و ب) $+\frac{u}{۲}$ باشد، پیدا کنید؟

حل:

$$\begin{cases} m_۱u_۱ = m_۱v_۱ + m_۲v_۲ \\ \frac{۱}{۲}m_۱u_۱^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_۱u = m_۱v_۱ + m_۲v_۲ \\ \frac{۱}{۲}m_۱u^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ \end{cases}$$

$$v_۲ = \frac{m_۱}{m_۲}(u - v_۱)$$

$$m_۱u^۲ = m_۱v_۱^۲ + m_۲\left(\frac{m_۱}{m_۲}(u - v_۱)\right)^۲$$

$$\left[m_۱m_۲ - m_۱^۲\right]u^۲ = \left[m_۱m_۲ + m_۱^۲\right]v_۱^۲ - ۲m_۱^۲uv_۱$$

الف)

$$** \quad v_۱ = -\frac{u}{۳}$$

$$\left[m_۱m_۲ - m_۱^۲\right]u^۲ = \left[m_۱m_۲ + m_۱^۲\right](-\frac{u}{۳})^۲ - ۲m_۱^۲u(-\frac{u}{۳})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_۲}{m_۱} = ۲$$

ب)

$$** \quad v_1 = +\frac{u}{2}$$

$$[m_1 m_2 - m_1^2]u^2 = [m_1 m_2 + m_1^2](+\frac{u}{2})^2 - 2m_1^2 u(+\frac{u}{2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$$

۲۷. در سال ۱۹۳۲ جیمز چدویک (کاشف نوترون) در آزمایشهای برخورد الاستیک و رو در روی نوترون با مواد مختلف دریافت که سرعتی که نوترون به یک پروتون ساکن (به جرم 1u) می دهد، ۷/۵ برابر سرعتی است که به یک هسته نیتروژن (به جرم 14u) می دهد. از این مشاهدات چه نتیجه ای درباره جرم نوترون می شود، گرفت؟

حل: V سرعت نوترون قبل از برخورد و v' سرعت نوترون بعد از برخورد و v_1 سرعت پروتون بعد از برخورد و v_2 سرعت نیتروژن بعد از برخورد

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v' + m_2 v_1 \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = \dfrac{m_1 v - m_2 v_1}{m_1} & (1) \\ v'^2 = \dfrac{m_1 v^2 - m_2 v_1^2}{m_1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad v'^2 = (\frac{m_1 v - m_2 v_1}{m_1})^2 = \frac{m_2^2 v_1^2 + m_1^2 v^2 - 2m_1 m_2 v_1 v}{m_1^2}$$

$$(1),(2) \quad \rightarrow \quad \frac{m_2^2 v_1^2 + m_1^2 v^2 - 2m_1 m_2 v_1 v}{m_1^2} = \frac{m_1 v^2 - m_2 v_1^2}{m_1}$$

$$m_2^2 v_1^2 + m_1^2 v^2 - 2m_1 m_2 v_1 v = m_1^2 v^2 + m_1 m_2 v_1^2$$

$$(m_2^2 + m_1 m_2) v_1^2 = 2m_1 m_2 v v_1$$

$$v_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 = 1\,u \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + 1} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v' + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = \dfrac{m_1 v - m_2 v_2}{m_1} & (1) \\ v'^2 = \dfrac{m_1 v^2 - m_2 v_2^2}{m_1} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad v'^2 = \left(\frac{m_1 v - m_2 v_2}{m_1}\right)^2 = \frac{m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v^2 - 2 m_1 m_2 v_2 v}{m_1^2}$$

$$(1),(2) \quad \rightarrow \quad \frac{m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v^2 - 2 m_1 m_2 v_2 v}{m_1^2} = \frac{m_1 v^2 - m_2 v_2^2}{m_1}$$

$$m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v^2 - 2 m_1 m_2 v_2 v = m_1^2 v^2 + m_1 m_2 v_2^2$$

$$(m_2^2 + m_1 m_2) v_2^2 = 2 m_1 m_2 v v_2$$

$$v_2 = \frac{2 m_1 v}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 = 14\,u \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{2 m_1 v}{m_1 + 14} \quad (4)$$

$$v_1 = 7/5\, v_2 \quad , \quad (3),(4)$$

$$\frac{2 m_1 v}{m_1 + 1u} = 7/5 \times \frac{2 m_1 v}{m_1 + 14u}$$

$$m_1 + 14u = 7/5 \times (m_1 + 1u)$$

$$m_1 \times (1 - 7/5) = 7/5\,u - 14u \quad \rightarrow \quad m_1 = 1u$$

مسائل تکمیلی

۲۸. دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 با سرعتهای u_1 و u_2 شاخ به شاخ با هم برخورد می کنند و به هم می چسبند، نشان بدهید که اتلاف انرژی در این برخورد برابر است با :

$$\frac{m_1 m_2 (u_1 + u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

حل:

$$\begin{cases} m_1u_1 - m_2u_2 = (m_1+m_2)v & (1) \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \Delta K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad v = \frac{m_1u_1 - m_2u_2}{m_1+m_2}$$

$$v^2 = \left(\frac{m_1u_1 - m_2u_2}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_2^2u_2^2 + m_1^2u_1^2 - 2m_1m_2u_2u_1}{(m_1+m_2)^2}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \Delta K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_2^2u_2^2 + m_1^2u_1^2 - 2m_1m_2u_2u_1}{(m_1+m_2)^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \Delta K = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2^2u_2^2 + m_1^2u_1^2 - 2m_1m_2u_2u_1}{(m_1+m_2)}\right)$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(m_1u_1^2 + m_2u_2^2 - \left(\frac{m_2^2u_2^2 + m_1^2u_1^2 - 2m_1m_2u_2u_1}{(m_1+m_2)}\right)\right)$$

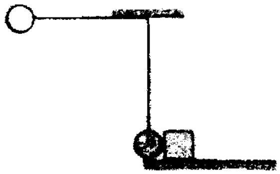
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1(m_1+m_2)u_1^2 + m_2(m_1+m_2)u_2^2 - (m_2^2u_2^2 + m_1^2u_1^2 - 2m_1m_2u_2u_1)}{(m_1+m_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2u_1^2 + m_1m_2u_1^2 + m_1m_2u_2^2 + m_2^2u_2^2 - m_2^2u_2^2 - m_1^2u_1^2 + 2m_1m_2u_2u_1}{(m_1+m_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2u_1^2 + m_1m_2u_2^2 + 2m_1m_2u_2u_1}{(m_1+m_2)}\right)$$

$$= \frac{m_1m_2(u_2+u_1)^2}{2(m_1+m_2)}$$

۲۹. آونگی به جرم گلوله اش ۵۰۰gr و طول نخش ۱m است از وضعیت افقی رها می شود (شکل ۱۰) و با مکعبی به جرم M که روی سطح بدون اصطکاکی قرار گرفته است به طور الاستیک برخورد می کند. گلوله آونگ پس از برخورد در صورتی که الف) $M = ۲/۵\,Kg$ و ب) $M = ۲۰۰\,gr$ باشد تا چه ارتفاعی بالا می رود؟



حل:

$m_1 = ۵۰۰ gr = ۰/۵ Kg \quad , \quad h = L = ۱m \quad , \quad m_۲ = M$

$\frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ = mgh$

$v_۱ = \sqrt{۲gh} = \sqrt{۲ \times ۹/۸ \times ۱} = ۴/۴۳ \frac{m}{s}$

$$\begin{cases} m_۱ v_۱ = m_۱ v_۱' + m_۲ v_۲ & (۱) \\ \frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ = \frac{۱}{۲} m_۱ v_۱'^۲ + \frac{۱}{۲} m_۲ v_۲^۲ & (۲) \end{cases}$$

$(۱) \rightarrow \quad v_۲ = \frac{m_۱}{m_۲}(v_۱ - v_۱') \rightarrow \quad v_۲^۲ = \frac{m_۱^۲}{m_۲^۲}(v_۱^۲ + v_۱'^۲ - ۲v_۱ v_۱')$

$(۲) \rightarrow \quad v_۲^۲ = \frac{m_۱}{m_۲}(v_۱^۲ - v_۱'^۲)$

$(۱),(۲) \rightarrow \quad \frac{m_۱^۲}{m_۲^۲}(v_۱^۲ + v_۱'^۲ - ۲v_۱ v_۱') = \frac{m_۱}{m_۲}(v_۱^۲ - v_۱'^۲)$

$(\frac{m_۱}{m_۲} - ۱)v_۱^۲ + (\frac{m_۱}{m_۲} + ۱)v_۱'^۲ = \frac{۲m_۱}{m_۲} v_۱ v_۱'$

$(m_۱ - m_۲)v_۱^۲ + (m_۱ + m_۲)v_۱'^۲ = ۲m_۱ v_۱ v_۱'$

الف)

$m_۲ = ۲/۵ Kg$

$(۰/۵ - ۲/۵) \times (۴/۴۳)^۲ + (۰/۵ + ۲/۵) \times v_۱'^۲ = ۲ \times ۰/۵ \times ۴/۴۳ \times v_۱'$

$$۳v_۱'^۲ - ۴/۴۳ v_۱' - ۳۹/۲۵ = o$$

$$v_۱' = \frac{۴/۴۳ \pm \sqrt{(۴/۴۳)^۲ - (۴ \times ۳ \times (-۳۹/۲۵))}}{۲ \times ۳} = \begin{cases} v_۱' = -۲/۹۵ \dfrac{m}{s} & \times \\ v_۱' = ۴/۴۳ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

علامت منفی حرکت رو به عقب گلوله را نشان می دهد

$$mgh = \frac{۱}{۲} mv_۱'^۲$$

$$h = \frac{v_۱'^۲}{۲g} = \frac{(-۲/۹۵)^۲}{۲ \times ۹/۸} = ۰/۴۴\,m = ۴۴\,cm$$

ب)

$$m_۲ = ۲۰۰gr = ۰/۲\,Kg$$

$$(۰/۵ - ۰/۲) \times (۴/۴۳)^۲ + (۰/۵ + ۰/۲) \times v_۱'^۲ = ۲ \times ۰/۵ \times ۴/۴۳ \times v_۱'$$

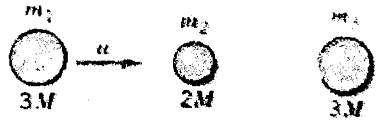
$$۰/۷ v_۱'^۲ - ۴/۴۳ v_۱' + ۵/۸۹ = o$$

$$v_۱' = \frac{۴/۴۳ \pm \sqrt{(۴/۴۳)^۲ - (۴ \times ۰/۷ \times ۵/۸۹)}}{۲ \times ۰/۷} = \begin{cases} v_۱' = -۱/۹ \dfrac{m}{s} & \times \\ v_۱' = ۴/۴۳ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$mgh = \frac{۱}{۲} mv_۱'^۲$$

$$h = \frac{v_۱'^۲}{۲g} = \frac{(-۱/۹)^۲}{۲ \times ۹/۸} = ۰/۱۸\,m = ۱۸\,cm$$

۳۰. گلوله ای به جرم $m_۱ = ۳M$ با سرعت u با گلوله ساکنی به جرم $m_۲ = ۲M$ به طور الاستیک برخورد می کند. (شکل ۱۱) گلوله دیگری به جرم $m_۳ = ۳M$ در همان راستا بعد از $m_۲$ قرار گرفته است. سرعت هر یک از گلوله ها پس از همه برخوردها چیست؟



حل:

$$m_۱ = ۳M \quad , \quad m_۲ = ۲M \quad , \quad m_۳ = ۳M$$

$$\begin{cases} m_۱u = m_۱v_۱ + m_۲v_۲ \\ \frac{۱}{۲}m_۱u^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳Mu = ۳Mv_۱ + ۲Mv_۲ \\ \frac{۱}{۲}(۳M)u^۲ = \frac{۱}{۲}(۳M)v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}(۲M)v_۲^۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳u = ۳v_۱ + ۲v_۲ & (۱) \\ ۳u^۲ = ۳v_۱^۲ + ۲v_۲^۲ & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \rightarrow v_۱ = \frac{۳u - ۲v_۲}{۳} \rightarrow v_۱^۲ = \frac{۱}{۹}(۹u^۲ + ۴v_۲^۲ - ۱۲uv_۲)$$

$$(۲) \rightarrow v_۱^۲ = \frac{۳u^۲ - ۲v_۲^۲}{۳}$$

$$(۱) , (۲) \rightarrow \frac{۱}{۹}(۹u^۲ + ۴v_۲^۲ - ۱۲uv_۲) = \frac{۳u^۲ - ۲v_۲^۲}{۳}$$

$$۹u^۲ - ۶v_۲^۲ = ۹u^۲ + ۴v_۲^۲ - ۱۲uv_۲$$

$$۱۰v_۲^۲ = ۱۲uv_۲ \rightarrow v_۲ = \frac{۱۲}{۱۰}u = ۱/۲u$$

$$v_۱ = \frac{۳u - ۲v_۲}{۳} = \frac{۳u - ۲(۱/۲u)}{۳} = ۰/۲u$$

$$\begin{cases} m_۲v_۲ = m_۲v_۲' + m_۳v_۳ \\ \frac{۱}{۲}m_۱v_۲^۲ = \frac{۱}{۲}m_۲v_۲'^۲ + \frac{۱}{۲}m_۳v_۳^۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲Mv_۲ = ۲Mv_۲' + ۳Mv_۳ \\ \frac{۱}{۲}(۳M)v_۲^۲ = \frac{۱}{۲}(۲M)v_۲'^۲ + \frac{۱}{۲}(۳M)v_۳^۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲v_۲ = ۲v_۲' + ۳v_۳ & (۱) \\ ۳v_۲^۲ = ۲v_۲'^۲ + ۳v_۳^۲ & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \rightarrow v_۲' = \frac{۲v_۲ - ۳v_۳}{۲} \rightarrow v_۱^۲ = \frac{۱}{۴}(۹v_۳^۲ + ۴v_۲^۲ - ۱۲v_۲v_۳)$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad v_2'^2 = \frac{3v_2^2 - 3v_3^2}{2}$$

$$(1), (2) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}(9v_3^2 + 4v_2^2 - 12v_2v_3) = \frac{2v_2^2 - 3v_3^2}{2}$$

$$4v_2^2 - 6v_3^2 = 9v_3^2 + 4v_2^2 - 12v_2v_3$$

$$15v_3^2 = 12v_2v_3$$

$$v_3 = \frac{12}{15}v_2 = \frac{12}{15} \times 1/2u = 0/96u$$

$$v_2' = \frac{2v_2 - 3v_3}{2} = \frac{2(1/2u) - 3(0/96u)}{3} = -0/24u$$

۳۱. ذره ای به جرم m_1 با ذره دیگری که ساکن است برخورد الاستیک می کند. این برخورد یک بعدی است و m_1 پس از برخورد با ۲۵٪ انرژی جنبشی اولیه اش برمی گردد. جرم ذره دوم (m_2) چقدر است؟

حل:

$$0/25\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2\right) = \frac{1}{2}m_1v_1^2$$

$$0/25u_1^2 = v_1^2 \quad \rightarrow \quad u_1 = \pm 2v_1$$

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

$$u_2 = o$$

$$\begin{cases} m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2 & (1) \\ m_1u_1^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2}(u_1 - v_1)$$

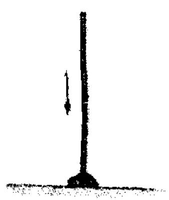
$$u_1 = \pm 2v_1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_2 = \dfrac{m_1}{m_2}(u_1 - v_1) = \dfrac{m_1}{m_2}(2v_1 - v_1) = (\dfrac{m_1}{m_2})v_1 \\ v_2 = \dfrac{m_1}{m_2}(u_1 - v_1) = \dfrac{m_1}{m_2}(-2v_1 - v_1) = -(\dfrac{3m_1}{m_2})v_1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad m_1u_1^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$

$$\begin{cases} u_1 = +2v_1 \\ v_2 = (\dfrac{m_1}{m_2})v_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(+2v_1)^2 = m_1v_1^2 + m_2((\dfrac{m_1}{m_2})v_1)^2 \\ 4m_1 = m_1 + \dfrac{m_1^2}{m_2} \\ m_2 = \dfrac{1}{3}m_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = -2v_1 \\ v_2 = -(\dfrac{3m_1}{m_2})v_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m_1(-2v_1)^2 = m_1v_1^2 + m_2(-(\dfrac{3m_1}{m_2})v_1)^2 \\ 4m_1 = m_1 + \dfrac{9m_1^2}{m_2} \\ m_2 = 3m_1 \end{cases}$$

۳۲. زنجیری به جرم M و به طول L را طوری به حالت قائم نگه داشته ایم که انتهای آن سطح میز را لمس می کند (شکل ۱۳) حالا سر زنجیر را رها می کنیم: الف) نیرویی را که زنجیر به میز وارد می کند به صورت تابعی از مسافتی که سر زنجیر سقوط کرده است، پیدا کنید. ب) نشان دهید که بیشترین مقدار این نیرو برابر با $3Mg$ است.



حل: در لحظه اولیه (t=0) زنجیر با سطح میز در تماس است. بعد از گذشت زمان t سر زنجیر که رها شده به میز برخورد می کند و ارتفاع $y = \frac{۱}{۲}gt^۲$ را طی می کند. هر عنصر کوچک dy در روی زنجیر با سرعت

$$mgy = \frac{۱}{۲}mv^۲ \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{۲gy}$$

به سطح میز می رسد. جرم واحد طول زنجیر برابر است با $\frac{M}{L}$ است. نیروی عمودی ای که از سطح میز به زنجیر وارد می شود در لحظه t باید وزن زنجیر روی میز و تغییر تکانه عنصرهای کوچک dy در مدت dt است.

$$N = \left(\frac{M}{L}gy\right) + \frac{dP}{dt}$$

چون سرعت عنصر های dy در زمان dt ثابت است پس جرم است که تغییر می کند.

$$P = mv$$

$$dP = d(mv) = v\,dm$$

$$\frac{dP}{dt} = v\frac{dm}{dt} \qquad \rightarrow \qquad dm = \left(\frac{M}{L}\right)dy$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = v\left(\frac{M}{L}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{Mv^۲}{L} = \frac{M}{L}(۲gy)$$

$$N = \left(\frac{M}{L}gy\right) + \frac{dP}{dt} = \left(\frac{M}{L}gy\right) + \frac{M}{L}(۲gy) = \frac{۳M}{L}gy$$

$$= \left(\frac{۳M}{L}g\right)\left(\frac{۱}{۲}gt^۲\right) = \frac{۳}{۲}g^۲t^۲\left(\frac{M}{L}\right)$$

اگر $y = L$ بیشترین مقدار نیروی عمودی تکیه گاه برابر است با

$$N = \frac{۳M}{L}gy = \frac{۳M}{L}g(L) = ۳Mg$$

فصل ۱۰

مسئله ها

بخش ۱۰–۱ مرکز جرم

۱. سه ذره به جرمهای ۲gr، ۳gr و ۵gr در صفحه (x,y) به ترتیب در مکانهای $(-۲m,+۳m)$ و $(-۳m,+۴m)$ و $(+۳m,-۱m)$ قرار دارند. مرکز جرم این سیستم کجاست؟

حل:

$$\begin{cases} m_1 = ۲gr \\ x_1 = -۲m \\ y_1 = +۳m \end{cases} , \quad \begin{cases} m_2 = ۳gr \\ x_2 = -۳m \\ y_2 = +۴m \end{cases} , \quad \begin{cases} m_3 = ۵gr \\ x_3 = +۳m \\ y_3 = -۱m \end{cases}$$

$$X_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{۲\times(-۲) + ۳\times(-۳) + ۵\times ۳}{۲+۳+۵} = ۰/۲m$$

$$Y_{CM}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{2\times 3+3\times 4+5\times(-1)}{2+3+5}=1/3\,m$$

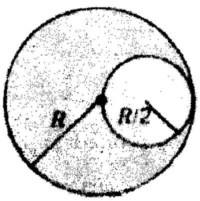
۲. یک چوب ماهیگیری از اتصال سه میله یکنواخت هر یک به طول ۸۰cm ساخته شده است. جرم میله ها به ترتیب ۳۰gr، ۲۰gr و ۱۰gr است. مرکز جرم چوب را نسبت به انتهای میله ۳۰ گرمی پیدا کنید؟

حل: از آنجایی که هر میله به صورت مجزا، یکنواخت است پس مرکز جرمش در وسط آن است و فاصله هر مرکز جرم هر میله تا انتهای میله ۳۰ گرمی

$$\begin{cases}m_1=30\,gr\\x_1=40\,cm\end{cases},\quad\begin{cases}m_2=20\,gr\\x_2=120\,cm\end{cases},\quad\begin{cases}m_3=10\,gr\\x_3=200\,cm\end{cases}$$

$$X_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{30\times 40+20\times 120+10\times 200}{30+20+10}=93/3\,cm$$

۳. قرص یکنواختی به شعاع R سوراخی به شعاع $\frac{R}{2}$ (مطابق شکل ۱۵) دارد. مرکز جرم این جسم را نسبت به مرکز قرص اصلی پیدا کنید. (راهنمای: سوراخ را می توانید مثل شیئ با جرم منفی در نظر بگیرید.)



حل: m_1 جرم قرص کامل و m_2 جرم سوراخ و m جرم کل جسم

$$m=m_1+(-m_2)$$

$$\begin{cases}m_1=\sigma_1A_1=\sigma(\pi R^2)\\m_2=\sigma_2A_2=\sigma(\frac{\pi R^2}{4})\end{cases}\rightarrow\quad\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sigma(\pi R^2)}{\sigma(\frac{\pi R^2}{4})}=4$$

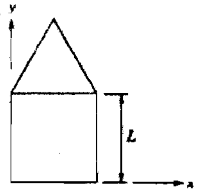
$$m_۲ = \frac{۱}{۴} m_۱$$

$$m = m_۱ - m_۲ = m_۱ - \frac{۱}{۴} m_۱ = \frac{۳}{۴} m_۱ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_۱ = \frac{۴}{۳} m \\ m_۲ = \frac{۱}{۳} m \end{cases}$$

$$x_۱ = o \quad , \quad x_۲ = \frac{R}{۲}$$

$$X_{CM} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{(\frac{۴}{۳} m) \times o + (-\frac{۱}{۳} m) \times (\frac{R}{۲})}{\frac{۴}{۳} m + \frac{۱}{۳} m} = -\frac{R}{۶}$$

۴. در شکل ۱۶، جسم تخت یکنواختی را می بینید که از اتصال مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع L به مربعی به ضلع L تشکیل شده است. مرکز جرم این جسم را نسبت به گوشه سمت چپ در پایین مربع تعیین کنید.



حل: با توجه به تقارن هر شکل مرکز جرم مثلث محل تلاقی میانه های مثلث و مرکز جرم مربع محل تلاقی قطرهای مربع است. یعنی مرکز جرم مربع در نقطه $\left(\frac{L}{۲}, \frac{L}{۲}\right)$ و مرکز جرم مثلث در نقطه $\left(\frac{L}{۲}, L + \frac{\sqrt{۳}}{۶} L\right)$ است. (در مختصه y یک L که طول مربع است و. $\frac{\sqrt{۳}}{۶} L$ که فاصله مرکز جرم تا قاعده مثلث است که با هم جمع شده اند.). $m_۱$ جرم مربع و $m_۲$ جرم مثلث

$$m_۱ = \sigma L^۲$$

$$m_۲ = \sigma\left(\frac{Lh}{۲}\right) = \sigma\left(\frac{L \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} L}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma L^۲$$

$$h = \sqrt{L^۲ - \frac{L^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} L$$

$$X_{CM} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{(\sigma L^۲)\times\left(\frac{L}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma L^۲\right)\times\left(\frac{L}{۲}\right)}{(\sigma L^۲) + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma L^۲\right)} = \frac{L}{۲}$$

$$Y_{CM} = \frac{m_۱ y_۱ + m_۲ y_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{(\sigma L^۲)\times\left(\frac{L}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma L^۲\right)\times\left(L + \frac{\sqrt{۳}}{۶} L\right)}{(\sigma L^۲) + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sigma L^۲\right)}$$

$$= \frac{(\sigma L^۲)\times\left(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۶})\right)}{(\sigma L^۲)\times\left(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)} = \frac{۲ + \sqrt{۳}\times(۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۶})}{۴ + \sqrt{۳}} L = \frac{۵ + ۲\sqrt{۳}}{۸ + ۲\sqrt{۳}} L$$

$$= \frac{۵ + ۲\times ۱/۷}{۸ + ۲\times ۱/۷} L = ۰/۷۳۴ L$$

۵. مرکز جرم سیستم زمین – ماه را نسبت به مرکز زمین پیدا کنید. جرم زمین $۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴} Kg$ و جرم ماه $۷/۳۶\times ۱۰^{۲۲} Kg$ و فاصله متوسط مرکز زمین از مرکز ماه $۳/۸۲\times ۱۰^{۵} Km$ است. (خوب است جواب را با شعاع زمین مقایسه کنید.)

حل:

$$m_۱ = ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\, Kg \quad , \quad m_۲ = ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\, Kg$$

$$x_۱ = o \quad , \quad x_۲ = ۳/۸۲\times ۱۰^{۵}\, Km$$

$$X_{CM} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{o + ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴} \times ۳/۸۲ \times ۱۰^{۵}}{۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴} + ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}} = ۲۱۰۴/۵۹\, Km$$

$$R_e = ۶۴۰۰\, Km$$

$$\frac{X_{CM}}{R_e} = \frac{۲۱۰۴/۵۹}{۶۴۰۰} = ۰/۳۳$$

۶. روی یک آبگیر کاملاً یخ زده، دو نفر یکی به جرم ۷۵Kg در $x = o$ و دیگری به جرم ۶۰Kg در $x = ۵m$ قرار گرفته و با طنابی به هم متصل شده اند. اگر یکی از آنها (یا هر دو) طناب را به طرف خود بکشد: الف) در لحظه ای که شخص ۶۰ کیلوگرمی ۱/۵m حرکت کرده است. فاصله میان آنها چقدر است؟ ب) این دو سرانجام در کجا به هم خواهند رسید؟

حل: الف) چون هر دو حرکت می کنند مرکز جرم را در مبداء مختصات قرار می دهیم:

$m_۱ = ۷۵\, Kg \quad , \quad m_۲ = ۶۰\, Kg \quad , \quad x_۱ + x_۲ = ۵\, cm \quad , \quad X_{CM} = o$

$$X_{CM} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲}$$

$$o = \frac{-۷۵ \times x_۱ + ۶۰ \times x_۲}{۷۵ + ۶۰}$$

$$\begin{cases} -۷۵ \times x_۱ + ۶۰ \times x_۲ = o \\ x_۱ + x_۲ = ۵ \end{cases}$$

$$-۷۵ \times x_۱ + ۶۰ \times (۵ - x_۱) = o \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_۱ = ۲/۲۲\, m \\ x_۲ = ۲/۷۸\, m \end{cases}$$

اگر با کشیدن طناب $m_۲$ به مقدار ۱/۵m حرکت کرده باشد مقدار جابجایی $m_۱$:

$$-۷۵ \times (x_۱ - d) + ۶۰ \times (x_۲ - ۱/۵) = o$$

$$-۷۵ \times (۲/۲۲ - d) + ۶۰ \times (۲/۷۸ - ۱/۵) = o$$

$$۱۶۶/۵ - ۷۵d = ۷۶/۸$$

$$d = \frac{۱۶۶/۵ - ۷۶/۸}{۷۵} = ۱/۱۹۶ \approx ۱/۲\, m$$

این دو نفر به اندازه $(۲/۲۲-۱/۲)+(۲/۷۸-۱/۵)=۲/۳m$ از هم فاصله دارند.

ب) در فاصله ۲/۲۲m از شخص ۷۵ کیلوگرمی به هم می رسند

$$X_{CM}=\left|\frac{m_۱x_۱+m_۲x_۲}{m_۱+m_۲}\right|=\left|\frac{-۷۵\times x_۱+۶۰\times(-x_۱)}{۷۵+۶۰}\right|=\left|\frac{-۷۵\times ۲/۲۲-۶۰\times ۲/۲۲}{۷۵+۶۰}\right|=۲/۲۲m$$

بخش ۱۰-۳- حرکت مرکز جرم

۷. در یک سیستم دو جسمی، $m_۱=۲Kg$ و $m_۲=۶Kg$ است. سرعتهای این اجسام عبارتند از $\vec{v}_۱=۵\hat{i}-۳\hat{j}+۴\hat{k}$ و $\vec{v}_۲=-۳\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}$ که یکای آنها $\frac{m}{s}$ است. الف) سرعت مرکز جرم سیستم و ب) تکانه خطی کل سیستم را بدست آورید.

حل: الف)

$$\vec{v}_۱=۵\hat{i}-۳\hat{j}+۴\hat{k}\quad,\quad \vec{v}_۲=-۳\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}\quad,\quad m_۱=۲Kg\ ,\ m_۲=۶Kg$$

$$\vec{v}_{CM}=\frac{m_۱\vec{v}_۱+m_۲\vec{v}_۲}{m_۱+m_۲}=\frac{۲\times\left(۵\hat{i}-۳\hat{j}+۴\hat{k}\right)+۶\times\left(-۳\hat{i}+۲\hat{j}-\hat{k}\right)}{۲+۶}$$

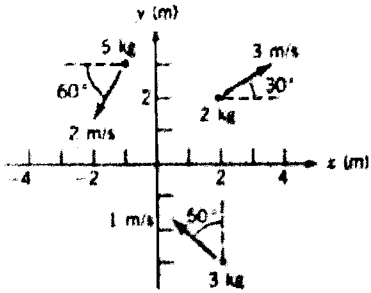
$$=-\hat{i}+\frac{۳}{۴}\hat{j}+\frac{۱}{۴}\hat{k}$$

ب)

$$m=۲+۶=۸Kg$$

$$\vec{P}=m\vec{v}_{CM}=۸\times\left(-\hat{i}+\frac{۳}{۴}\hat{j}+\frac{۱}{۴}\hat{k}\right)=-۸\hat{i}+۶\hat{j}+۲\hat{k}$$

۸. مکانها و سرعتهای لحظه ای سه ذره در شکل ۱۷ مشخص شده اند. الف) مرکز جرم این سیستم کجاست؟ ب) سرعت مرکز جرم را بدست آورید؟ ج) اگر نیروی خارجی خالصی به این سیستم اثر نکند، مرکز جرم آن ۳s بعد از لحظه نشان داده شده در کجا واقع می شود؟



حل:

$$\begin{cases} m_۱ = ۲\ Kg \\ \vec{r}_۱ = ۲\hat{i} + ۲\hat{j} \\ \vec{v}_۱ = ۳\,Cos(۳۰)\hat{i} + ۳\,Sin(۳۰)\hat{j} = ۲/۶۱\hat{i} + ۱/۵\hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_۲ = ۵\ Kg \\ \vec{r}_۲ = -\hat{i} + ۳\hat{j} \\ \vec{v}_۲ = -۲\,Cos(۶۰)\hat{i} - ۲\,Sin(۶۰)\hat{j} = -\hat{i} - ۱/۷۴\hat{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_۳ = ۳\ Kg \\ \vec{r}_۳ = ۲\hat{i} - ۳\hat{j} \\ \vec{v}_۳ = Cos(۱۴۰)\hat{i} - ۲\,Sin(۱۴۰)\hat{j} = -۰/۷۸\hat{i} + ۰/۶۴\hat{j} \end{cases}$$

الف)

$$X_{CM} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + m_۳x_۳}{m_۱ + m_۲ + m_۳} = \frac{۲\times۲ + ۵\times(-۱) + ۳\times۲}{۲+۵+۳} = ۰/۵$$

$$Y_{CM} = \frac{m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + m_۳y_۳}{m_۱ + m_۲ + m_۳} = \frac{۲\times۲ + ۵\times۳ + ۳\times(-۳)}{۲+۵+۳} = ۱$$

$$\vec{r}_{CM} = ۰/۵\hat{i} + ۸\hat{j}$$

ب)

$$v_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{۲\times ۲/۶۱ + ۵\times(-۱) + ۳\times(-۰/۷۸)}{۲+۵+۳} = -۰/۲۱۲\frac{m}{s}$$

$$v_y = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{۲\times ۱/۵ + ۵\times(-۱/۷۴) + ۳\times(۰/۶۴)}{۲+۵+۳} = ۰/۳۷۸\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{CM} = -۰/۲۱۲\hat{i} + ۰/۳۷۸\hat{j}$$

ج)

$$\vec{r}_{oCM} = ۰/۵\hat{i} + ۸\hat{j}$$

$$\vec{v}_{CM} = -۰/۲۱۲\hat{i} + ۰/۳۷۸\hat{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = \vec{v}_{CM} t + \vec{r}_{oCM}$$

$$= \left(-۰/۲۱۲\hat{i} + ۰/۳۷۸\hat{j}\right)\times ۳ + \left(۰/۵\hat{i} + ۸\hat{j}\right) = -۰/۱۳۶\hat{i} + ۲/۱۳۴\hat{j}$$

۹. جسمی به جرم $m_1 = ۱Kg$ در لحظه $t = o$ در مبداء واقع شده و سرعت آن $۲\hat{i}\,\frac{m}{s}$ است؛ این جسم تحت تأثیر نیروی $\vec{F}_1 = ۱۰\hat{j}\,N$ است. جسم دیگری به جرم $m_2 = ۲Kg$ که در لحظه $t = o$ در $x = ۱۰m$ واقع شده و سرعتی برابر با $۴\hat{i}\,\frac{m}{s}$ دارد، تحت تأثیر نیروی $\vec{F}_2 = ۸\hat{i}\,N$ است. الف) مکان و سرعت مرکز جرم در لحظه $t = o$ را تعیین کنید. ب) هر یک از دو جسم چه شتابی دارد. ج) شتاب مرکز جرم را با استفاده از نتایج قسمت (ب) تعیین کنید. د) با استفاده از قانون دوم نیوتن برای یک سیستم، یعنی $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$، صحت پاسخی را که برای قسمت (ج) بدست آورده اید تحقیق کنید. ه) در $t = ۲s$ مرکز جرم سیستم در کجا واقع می شود؟

حل:

$$\begin{cases} m_1 = ۱\,Kg \\ \vec{v}_1 = ۲\hat{i}\,\frac{m}{s} \\ \vec{F}_1 = ۱۰\,\hat{j}\,N \\ x_1 = o \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} m_2 = ۲\,Kg \\ \vec{v}_2 = ۴\,\hat{j}\,\frac{m}{s} \\ \vec{F}_2 = ۸\,\hat{i}\,N \\ x_1 = ۱۰m \end{cases}$$

الف)

$$X_{CM} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱ \times o + ۲ \times (۱۰)}{۱+۲} = ۶/۶۷\, m.$$

$$v_x = \frac{m_۱ v_{۱x} + m_۲ v_{۲x}}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱ \times ۲ + ۲ \times o}{۱+۲} = ۰/۶۷\ \frac{m}{s}$$

$$v_y = \frac{m_۱ v_{۱y} + m_۲ v_{۲y}}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱ \times o + ۲ \times ۴}{۱+۲} = ۲/۶۷\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{CM} = ۰/۶\hat{i} + ۲/۶۷\hat{j}$$

ب)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a}_۱ = \frac{\vec{F}_۱}{m_۱} = \frac{۱۰\hat{j}}{۱} = ۱۰\hat{j}\ \frac{m}{s^۲}$$

$$\vec{a}_۲ = \frac{\vec{F}_۲}{m_۲} = \frac{۸\hat{i}}{۲} = ۴\hat{i}\ \frac{m}{s^۲}$$

ج)

$$a_x = \frac{m_۱ a_{۱x} + m_۲ a_{۲x}}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱ \times o + ۲ \times ۴}{۱+۲} = ۲/۶۷\ \frac{m}{s^۲}$$

$$a_y = \frac{m_۱ a_{۱y} + m_۲ a_{۲y}}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱ \times ۱۰ + ۲ \times o}{۱+۲} = ۳/۳۳\ \frac{m}{s^۲}$$

$$\vec{a}_{CM} = ۲/۶۷\,\hat{i} + ۳/۳۳\,\hat{j}$$

د)

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{a}_{CM} = ۲/۶۷\hat{i} + ۳/۳۳\hat{j}$$

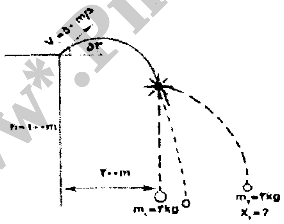
$$\vec{F}_{ext}=(m_۱+m_۲)\vec{a}_{CM}=(۱+۲)\times(۲/۶۷\hat{i}+۳/۳۳\hat{j})=۸/۰۱\hat{i}-۹/۹۹\hat{j}\approx ۸\hat{i}-۱۰\hat{j}$$

$$\vec{a}_{CM}=\frac{m_۱\vec{a}_۱+m_۲\vec{a}_۲}{m_۱+m_۲}=\frac{\vec{F}_۱+\vec{F}_۲}{M}=\frac{\sum\vec{F}_i}{M}$$

$$\vec{F}_{ext}=\sum\vec{F}_i=M\vec{a}_{CM}=۸\hat{i}-۱۰\hat{j}$$

۱۰. از بالای صخره ای به ارتفاع ۱۰۰m، گلوله ای به جرم ۶Kg با سرعت اولیه $۵۰\frac{m}{s}$ در جهت ۵۳° بالای افق پرتاب می شود. این گلوله در نقطه ای از مسیرش منفجر و دو تکه می شود. تکه ۴ کیلوگرمی به فاصله ۲۰۰m از پای صخره به زمین می خورد. با این فرض که هر دو تکه همزمان به زمین می رسند، محل فرود تکه دوم را پیدا کنید. (g را برابر با $۱۰\frac{m}{s^۲}$ بگیرید.)

حل: ابتدا مکان مرکز جرم را روی زمین پیدا می کنیم:



$$M=۶Kg\quad,\quad v=۵۰\frac{m}{s}\quad,\quad \theta=۵۳°\quad,\quad H=۱۰۰m\quad,\quad x_۱=۲۰۰m$$

$$m_۱=۴Kg\quad,\quad m_۲=۲Kg\quad,\quad g=۱۰\frac{m}{s^۲}$$

$$x_{CM}=v_\circ Cos\theta t=۳۰t$$

$$y_{CM}=-\frac{۱}{۲}gt^۲+v_\circ Sin\theta t+y_\circ$$

$$o=-\frac{۱}{۲}\times ۹/۸\times t^۲+۵۰\times Sin(۵۳)t+۱۰۰$$

$$-۴/۹t^۲+۴۰t+۱۰۰=o$$

$$t=\frac{-۴۰\pm\sqrt{(۴۰)^۲-(۴\times(-۴/۹)\times۱۰۰)}}{۲\times(-۴/۹)}=\begin{cases}t=-۲/۰۱s\\ t=۱۰/۱۷s\quad\times\end{cases}$$

$$x_{CM} = ۳۰t = ۳۰\times ۱۰/۱۷ = ۳۰۵/۱m$$

$$x_{CM} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲}$$

$$۳۰۵/۱ = \frac{۶\times ۲۰ + ۲\times x_۲}{۶+۲} \qquad \rightarrow \qquad x_۲ = ۵/۵/۳m$$

۱۱. در یک روز یخ بندان یک سواری به جرم ۱۰۰۰Kg که با سرعت $۱۵\frac{m}{s}$ به طرف شرق می رود، با یک وانت به جرم ۱۸۰۰Kg که با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ به طرف شمال در حرکت است به طور کاملاً غیر الاستیک برخورد می کند. الف) مرکز جرم این سیستم قبل از برخورد چه سرعتی دارد؟ ب) مرکز جرم این سیستم ۳s بعد از برخورد در کجاست؟

حل: الف)

$$\begin{cases} m_۱ = ۱۰۰۰Kg \\ v_۱ = ۱۵\dfrac{m}{s} \rightarrow \end{cases} , \quad \begin{cases} m_۲ = ۱۸۰۰Kg \\ v_۲ = ۱۰\dfrac{m}{s} \uparrow \end{cases}$$

$$v_x = \frac{m_۱ v_{۱x} + m_۲ v_{۲x}}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱۰۰۰\times ۱۵ + ۱۸۰۰\times o}{۱۰۰۰ + ۱۸۰۰} = ۵/۳۶\ \frac{m}{s}$$

$$v_y = \frac{m_۱ v_{۱y} + m_۲ v_{۲y}}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱۰۰۰\times o + ۱۸۰۰\times ۱۰}{۱۰۰۰ + ۱۸۰۰} = ۶/۴۳\ \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{CM} = ۵/۳۶\hat{i} + ۶/۴۳\hat{j}$$

ب) چون نیروی خارجی خالصی به سیستم وارد نمی شود پس شتاب مرکز جرم صفر است. مکان برخورد را در مبداء دستگاه مختصات می گیریم:

$$t = ۳s$$

$$\vec{r} = \vec{v}_{CM} t + \vec{r}_{\circ CM}$$

$$\vec{r} = (۵/۳۶\hat{i} + ۶/۴۳\hat{j})\times ۳ + o = ۱۶/۱\hat{i} + ۱۹/۳\hat{j}\ \ m$$

بخش ۱۰-۴- انرژی جنبشی سیستم ذرات

۱۲. ذره ای به جرم $m_1 = ۰/۸\,Kg$ با سرعت $۳\hat{i}\,\frac{m}{s}$ و ذره دیگری به جرم $m_2 = ۱/۲\,Kg$ با سرعت $-۵\hat{i}\,\frac{m}{s}$ در حرکت است. الف) سرعت مرکز جرم را پیدا کنید. ب) سرعت هر یک از ذرات را نسبت به مرکز جرم تعیین کنید. ج) انرژی جنبشی کل سیستم چقدر است؟ د) انرژی جنبشی کل سیستم نسبت به مرکز جرم چقدر است؟

حل:

$$\begin{cases} m_1 = ۰/۸\,Kg \\ v_1 = ۳\hat{i}\,\frac{m}{s} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} m_2 = ۱/۲\,Kg \\ v_2 = -۵\hat{i}\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

الف)

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(۰/۸ \times ۳\hat{i}\right) + \left(۱/۲ \times (-۵\hat{i})\right)}{۰/۸ + ۱/۲} = -۱/۸\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

ب)

$$u_1 = v_1 - v_{CM} = ۳\hat{i} - (-۱/۸\hat{i}) = ۴/۸\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

$$u_2 = v_2 - v_{CM} = -۵\hat{i} - (-۱/۸\hat{i}) = -۳/۲\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

ج)

$$K_1 = \frac{۱}{۲}m_1u_1^2 = \frac{۱}{۲} \times ۰/۸ \times (۴/۸)^2 = ۹/۲۱\,J$$

$$K_2 = \frac{۱}{۲}m_2u_2^2 = \frac{۱}{۲} \times ۱/۲ \times (-۳/۲)^2 = ۶/۱۴۴\,J$$

$$K_{CM} = \frac{۱}{۲}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 = \frac{۱}{۲} \times (۰/۸ + ۱/۲) \times (-۱/۸)^2 = ۳/۲۴\,J$$

$$K = K_{CM} + K_1 + K_2$$

$$K = ۳/۲۴ + ۹/۲۱ + ۶/۱۴۴ = ۱۸/۶\,J$$

د)

$$K_{CM} = \frac{۱}{۲}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 = \frac{۱}{۲} \times (۰/۸ + ۱/۲) \times (-۱/۸)^2 = ۳/۲۴\,J$$

ه)

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \times 0/8 \times (4/8)^2 = 9/21 J$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} \times 1/2 \times (-3/2)^2 = 6/144 J$$

$$K = K_1 + K_2 = 9/216 + 6/144 = 15/36 J$$

۱۳. گلوله ای به جرم $m_1 = 4 Kg$ که سرعتش $6\hat{i}\,\frac{m}{s}$ است با گلوله دیگری به جرم $m_2 = 2 Kg$ که سرعتش $3\hat{i}\,\frac{m}{s}$ است به طور کاملاً الاستیک برخورد می کند. الف) سرعت مرکز جرم را پیدا کنید. ب) سرعت هر گلوله قبل از برخورد نسبت به مرکز جرم چقدر است؟ ج) سرعت هر گلوله بعد از برخورد نسبت به مرکز جرم چقدر است؟

حل: الف)

$$\begin{cases} m_1 = 4 Kg \\ \vec{v}_1 = 6\hat{i}\,\frac{m}{s} \end{cases} , \quad \begin{cases} m_2 = 2 Kg \\ \vec{v}_2 = 3\hat{i}\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{(4\times 6\hat{i}) + (2\times 3\hat{i})}{4+2} = 5\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

ب)

$$u_1 = v_1 - v_{CM} = 6\hat{i} - 5\hat{i} = \hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

$$u_2 = v_2 - v_{CM} = 3\hat{i} - 5\hat{i} = -2\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

ج)

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2' \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\times 1 + 2\times(-2) = 4\times u_1' + 2\times u_2' \\ 4\times(1)^2 + 2\times(-2)^2 = 4\times u_1'^2 + 2\times u_2'^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4u_1' + 2u_2' = 0 & (1) \\ 4u_1'^2 + 2u_2'^2 = 12 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad 4u'_1 = -2u'_2 \quad \Rightarrow \quad u'_1 = -\frac{1}{2}u'_2 \quad (3)$$

$$(2),(3) \quad \rightarrow \quad 4(-\frac{1}{2}u'_2)^2 + 2u'^2_2 = 12$$

$$u'^2_2 + 2u'^2_2 = 12 \quad \rightarrow \quad u'_2 = 2\frac{m}{s}$$

$$u'_1 = -\frac{1}{2}u'_2 = -\frac{1}{2}\times 2 = -1\frac{m}{s}$$

$$\vec{u}'_1 = -\hat{i}\ \frac{m}{s} \quad , \quad \vec{u}'_2 = 2\hat{i}\ \frac{m}{s}$$

۱۴. ذره ای به جرم $m_1 = 5\,Kg$ که با سرعت $4\hat{j}\frac{m}{s}$ در حزکت است با ذره ساکنی به جرم $m_2 = 3\,Kg$ رو در رو به طور الاستیک برخورد می کند. الف) انرژی جنبشی سیستم نسبت به مرکز جرم چقدر است؟ انرژی جنبشی حرکت مرکز جرم چقدر است؟

حل:

$$\begin{cases} m_1 = 5\,Kg \\ \vec{v}_1 = 4\hat{i}\,\frac{m}{s} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} m_2 = 3\,Kg \\ \vec{v}_2 = o \end{cases}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(5\times 4\hat{i}\right)+(3\times o)}{5+3} = 2/5\,\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

$$u_1 = v_1 - v_{CM} = 4\hat{i} - 2/5\,\hat{i} = 1/5\,\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

$$u_2 = v_2 - v_{CM} = o - 2/5\,\hat{i} = -2/5\,\hat{i} \quad \frac{m}{s}$$

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}\times 5\times(1/5)^2 = 5/625\,J$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}\times 3\times(-2/5)^2 = 9/375\,J$$

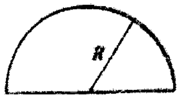
$$K = K_1 + K_2 = 5/625 + 9/375 = 15\,J$$

ب)

$$K_{CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 = \frac{1}{2}\times(5+3)\times(2/5)^2 = 25\,J$$

مسائل تکمیلی

۱۵. نشان بدهید که مرکز جرم یک صفحه یکنواخت به شکل نیم دایره ای به شعاع R (شکل ۱۸) روی محور تقارن آن و در فاصله $\frac{۴R}{۳\pi}$ از قطر واقع شده است. (راهنمایی: از نتیجه مثال ۳ هم می توانید استفاده کنید.)



حل:

$$y = r\,Sin\theta$$

$$dm = \sigma\, ds = \sigma\, r\, dr\, d\theta$$

$$Y_{CM} = \frac{۱}{M}\int y\, dm = \frac{۱}{M}\int (r\,Sin\theta)(\sigma\, r\, dr\, d\theta)$$

$$= \frac{\sigma}{M}\int_o^R r^۲\, dr \int_o^{\frac{\pi}{۲}} Sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{M}\times\left(\frac{r^۳}{۳}\right)_o^R \times \left(-Cos\theta\right)_o^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\sigma}{M}\times\frac{R^۳}{۳}\times ۱$$

$$\begin{cases} M = \sigma S \\ S = \frac{\pi R^۲}{۲} \end{cases} \rightarrow \qquad \sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{\pi R^۲}{۲}} = \frac{۲M}{\pi R^۲}$$

$$Y_{CM} = \frac{\sigma}{M}\times\frac{R^۳}{۳} = \frac{\left(\frac{۲M}{\pi R^۲}\right)}{M}\times\frac{R^۳}{۳} = \frac{۲R}{۳\pi}$$

۱۶. دو نفر هر یک به جرم ۵۰Kg در دو انتهای سکوی یکنواختی به جرم ۲۵Kg و به طول ۴m که با سرعت $۲\frac{m}{s}$ در حرکت است قرار گرفته اند. آنکه (نسبت به جهت حرکت سکو) در عقب است گویی به جرم ۵Kg را با سرعت $۴\frac{m}{s}$ رانسبت به خودش به طرف جلو می غلتاند. الف) سرعت سکو در حین غلتش گوی چقدر است؟ ب) تا

وقتی که نفر جلویی گوی را بگیرد سکو چقدر حرکت کرده است؟ ج) در همین مدت مرکز جرم سیستم (دو نفر + سکو + گوی) چقدر حرکت کرده است؟

حل:

$$m_1 = m_2 = 50\,Kg \quad , \quad m_3 = 25\,Kg \quad , \quad L = 4m \quad , \quad v_3 = 2\frac{m}{s}$$

$$m_4 = 5\,Kg \quad , \quad v_4 = 4\frac{m}{s}$$

الف) سرعت سیستم ثابت است و برابر $v_{CM} = 2\frac{m}{s}$ چون هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نشده است. سرعت گلوله نسبت به زمین $v_4' = 4 + 2 = 6\frac{m}{s}$ است. اگر v_1 سرعت سکو نسبت به غلتش گوی باشد:

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_1 + m_3 v_1 + m_4 v_4'}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$2 = \frac{(50 + 50 + 25) \times v_1 + 5 \times 6}{50 + 50 + 25 + 5} \rightarrow \qquad 2 = \frac{(125) \times v_1 + 30}{130}$$

$$v_1 = 1/84\frac{m}{s}$$

ب) زمانی که گوی با سرعت $4\frac{m}{s}$ به طرف دیگر سکو حرکت می کند:

$$x_1 = L = v_4 t \quad \rightarrow \quad 4 = 4t \quad \Rightarrow \quad t = 1s$$

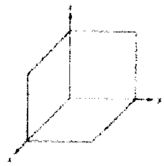
و مسافتی که سکو در این 1s جابجا می شود:

$$x_2 = v_1 t = 1/84 \times 1 = 1/84\,m$$

ج)

$$\Delta X_{CM} = v_{CM} t = 2 \times 1 = 2\ m$$

۱۷. از جعبه مکعب شکلی به ضلع L سه وجه اش را برداشته ایم. وجوه باقیمانده به ترتیب در صفحات xy، yz و zx واقع اند. (نگاه کنید به شکل ۱۷) محل مرکز جرم این جسم را پیدا کنید.



حل: مرکز جرم هر صفحه به دلیل یکنواخت بودن صفحات در مرکز آن است

صفحه xy $\quad\rightarrow\quad \vec{r}_{۱}=\frac{L}{۲}\hat{i}+\frac{L}{۲}\hat{j}$

صفحه xz $\quad\rightarrow\quad \vec{r}_{۲}=\frac{L}{۲}\hat{i}+\frac{L}{۲}\hat{k}$

صفحه yz $\quad\rightarrow\quad \vec{r}_{۳}=\frac{L}{۲}\hat{j}+\frac{L}{۲}\hat{k}$

مساحت هر صفحه $S=L\times L=L^{۲}$

جرم هر صفحه $\quad m_{۱}+m_{۲}+m_{۳}=\sigma S=\sigma L^{۲}$

$\vec{r}_{۱}=\frac{L}{۲}\hat{i}+\frac{L}{۲}\hat{j}$

صفحه xz $\quad\rightarrow\quad \vec{r}_{۲}=\frac{L}{۲}\hat{i}+\frac{L}{۲}\hat{k}$

صفحه yz $\quad\rightarrow\quad \vec{r}_{۳}=$

$$\vec{r}_{CM}=\frac{m_{۱}\vec{r}_{۱}+m_{۲}\vec{r}_{۲}+m_{۳}\vec{r}_{۳}}{m_{۱}+m_{۲}+m_{۳}}$$

$$=\frac{\sigma L^{۲}\times\left(\frac{L}{۲}\hat{i}+\frac{L}{۲}\hat{j}\right)+\sigma L^{۲}\times\left(\frac{L}{۲}\hat{i}+\frac{L}{۲}\hat{k}\right)+\sigma L^{۲}\times\left(\frac{L}{۲}\hat{j}+\frac{L}{۲}\hat{k}\right)}{\sigma L^{۲}+\sigma L^{۲}+\sigma L^{۲}}$$

$$=\frac{\sigma L^{۳}\times\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)}{۳\sigma L^{۲}}=\frac{L}{۳}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$$

$$X_{CM}=Y_{CM}=Z_{CM}=\frac{L}{۳}$$

فصل ۱۱

مسئله ها

بخش ۱۱-۱ سینماتیک دوران

۱. صفحه گرامافونی به قطر ۳۰cm از حالت سکون شروع به حرکت می کند و ۲s طول می کشد تا سرعت نهایی آن به $۳۳\frac{۱}{۳}rpm$ برسد. الف) شتاب زاویه ای (ثابت) در این مدت چقدر بوده است؟ ب) این صفحه در ۵s اول چند دور می زند؟ ج) چه مدت طول می کشد تا ۲ دور بزنند. د) در $t = ۱s$ شتاب شعاعی و شتاب مماسی نقطه ای واقع بر لبه صفحه چقدر است؟ ه) قسمت (د) را برای $t = ۳s$ تکرار کنید.

حل:

$$D = ۳۰ cm \quad , \quad \omega_۱ = o \quad , \quad t = ۲s$$

$$\omega_۲ = ۳۳\frac{۱}{۳} rpm = \frac{۱۰۰}{۳}\frac{rev}{\min} = \frac{۱۰۰}{۳} \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۳/۵\frac{rad}{s}$$

الف)

$$\omega_۲ = \alpha t + \omega_۱$$

$$۳/۵ = \alpha \times ۲ + o \qquad \rightarrow \qquad \alpha = ۱/۷۵\frac{rad}{s^۲}$$

ب) در ۲ ثانیه اول حرکت شتابدار است و در ۳ ثانیه بعدی سرعت ثابت و شتاب صفر است:

$$t_۱ = ۲s$$

$$\Delta\theta_۱ = \frac{۱}{۲}(\omega_۲ + \omega_۱)t = \frac{۱}{۲} \times (o + ۳/۵) \times ۲ = ۳/۵ rad$$

$$\Delta\theta_۱ = ۲\pi n_۱ \qquad \rightarrow \qquad n_۱ = \frac{\Delta\theta_۱}{۲\pi} = \frac{۳/۵}{۲ \times ۳/۱۴} = ۰/۵۶ rev$$

$$t_۲ = ۳s$$

$$\Delta\theta_۲ = \omega t = ۳/۵ \times ۳ = ۱۰/۵ rad$$

$$\Delta\theta_۲ = ۲\pi n_۲ \qquad \rightarrow \qquad n_۲ = \frac{\Delta\theta_۲}{۲\pi} = \frac{۱۰/۵}{۲ \times ۳/۱۴} = ۱/۶۷ rev$$

$$n = n_۱ + n_۲ = ۰/۵۶ + ۱/۶۷ = ۲/۲۳ rev$$

ج)

$$n = ۲ rev$$

$$\Delta\theta = ۲\pi n = ۲ \times ۳/۱۴ \times ۲ = ۱۲/۵۶ rad$$

$$\omega_۲^۲ - \omega_۱^۲ = ۲\alpha\Delta\theta$$

$$\omega_۲^۲ - o = ۲ \times ۱/۷۵ \times ۱۲/۵۶ \qquad \rightarrow \qquad \omega_۲ = ۸/۷\frac{rad}{s}$$

$$\omega_۲ = \alpha t + \omega_۱$$

$$۸/۷ = ۱/۷۵ \times t + o \qquad \rightarrow \qquad t = ۴/۹۷ s$$

$$t = 1s \quad , \quad \omega_1 = 0 \quad , \quad r = \frac{D}{2} = \frac{30}{2} = 15\,cm = 0/15\,m$$

$$\omega_2 = \alpha t + \omega_1 = 1/75 \times 1 = 1/75 \frac{rad}{s}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = 0/15 \times (1/75)^2 = 0/46 \frac{m}{s^2}$$

$$a_t = r\alpha = 0/15 \times 1/75 = 0/26 \frac{m}{s^2}$$

ه) چون سرعت زاویه ای بعد از ۲s ثابت است پس در زمان $t = 3s$ هم $\omega_2 = 3/5 \frac{rad}{s}$ ثابت است و چون شتاب زاویه ای صفر است پس شتاب مماسی هم صفر می شود:

$$t = 3s$$

$$a_r = r\omega^2 = 0/15 \times (3/5)^2 = 1/84 \frac{m}{s^2}$$

$$a_t = r\alpha = 0$$

۲. زمین در همان جهتی می چرخد که به دور خورشید می گردد و فرض می کنیم که محورهای این دو دوران با هم کاملاً موازی باشند. الف) سرعت زاویه ای چرخش زمین به دور خودش چقدر است؟ ب) سرعت زاویه ای مداری آن (به دور خورشید) چقدر است؟ ج) سرعت خطی نزدیکترین و دورترین نقاط زمین نسبت به خورشید چقدر است؟

حل: الف)

$$T = 24 \times 60 \times 60 = 86400 s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3/14}{86400} = 7/27 \times 10^{-5} \frac{rad}{s}$$

ب)

$T = ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰ = ۳۱۵۳۶۰۰۰ s$

$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲ \times ۳/۱۴}{۳۱۵۳۶۰۰۰} = ۱/۹۹ \times ۱۰^{-۷} \ \frac{rad}{s}$

ج) فاصله زمین از خورشید $d = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} m$ است. اگر d فاصله مرکز خورشید تا مرکز زمین باشد برای نزدیکترین فاصله به خورشید ($r_۱$) باید شعاع کره زمین $R_e = ۶۳۷۸۰۰۰ m$ را از d کم کنیم

$r_۱ = d - R_e = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} m - ۶۳۷۸۰۰۰ m = ۱/۴۹۹ \times ۱۰^{۱۱} m = ۱/۴۹۹ \times ۱۰^{۸} \ Km$

برای دورترین فاصله به خورشید ($r_۲$) باید شعاع کره زمین را به آن اضافه کنیم:

$r_۲ = d + R_e = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} m + ۶۳۷۸۰۰۰ \ m = ۱/۵ \times ۱۰^{۱۱} m = ۱/۵ \times ۱۰^{۸} \ Km$

$\omega_۱ = ۷/۲۷ \times ۱۰^{-۵} \ \frac{rad}{s} \quad , \quad \omega_۲ = ۱/۹۹ \times ۱۰^{-۷} \ \frac{rad}{s}$

$r_۱ = ۱/۴۹۹ \times ۱۰^{۸} \ Km \quad , \quad r_۲ = ۱/۵ \times ۱۰^{۸} \ Km \quad , \quad R_e = ۶۳۷۸ \, Km$

سرعت خطی نزدیکترین نقطه به خورشید

$v_۱ = (r_۱ \times \omega_۲) - (R_e \times \omega_۱)$

$= \left(۱/۴۹۹ \times ۱۰^{۸} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{-۷}\right) - \left(۶۳۷۸ \times ۷/۲۷ \times ۱۰^{-۵}\right) = ۲۹/۴ \frac{Km}{s}$

سرعت خطی دورترین نقطه به خورشید

$v_۲ = (r_۲ \times \omega_۲) + (R_e \times \omega_۱)$

$= \left(۱/۵ \times ۱۰^{۸} \times ۱/۹۹ \times ۱۰^{-۷}\right) + \left(۶۳۷۸ \times ۷/۲۷ \times ۱۰^{-۵}\right) = ۳۰/۳ \frac{Km}{s}$

۳. مکان زاویه ای علامتی در روی صفحه چرخانی به شعاع $r = ۶ cm$ با رابطه $\theta = ۱۰ - ۵t + ۴t^۲$ بیان می شود. الف) سرعت زاویه ای متوسط این علامت بین ثانیه اول و سوم چقدر است؟ ب) سرعت خطی نقطه ای روی صفحه در $t = ۲ s$ چقدر است؟ ج)شتاب خطی و شتاب زاویه ای نقطه ای روی لبه در $t = ۲ s$ چقدر است؟

حل: الف)

$$\theta = ۱۰ - ۵t + ۴t^۲$$

$$t_۱ = ۱s \quad \rightarrow \quad \theta_۱ = ۱۰ - ۵\times(۱) + ۴\times(۱)^۲ = ۹\ rad$$

$$t_۲ = ۳s \quad \rightarrow \quad \theta_۲ = ۱۰ - ۵\times(۳) + ۴\times(۳)^۲ = ۳۱\ rad$$

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_۲ - \theta_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۳۱-۹}{۳-۱} = ۱۱\ \frac{rad}{s}$$

ب)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -۵ + ۸t$$

$$t = ۲s \quad \rightarrow \quad \omega = -۵ + ۸\times(۲) = ۱۱\frac{rad}{s}$$

$$v = r\omega = ۰/۰۶\times ۱۱ = ۰/۶۶\frac{m}{s}$$

ج)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ۸\ \frac{rad}{s^۲}$$

$$a_t = r\alpha = ۰/۰۶\times ۸ = ۰/۴۸\frac{m}{s^۲}$$

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = r\omega^۲ = \frac{(۰/۶۶)^۲}{۰/۰۶} = ۷/۲۶\frac{m}{s^۲}$$

۴. در زمان $t = o$ میل لنگی با سرعت $۵۰rpm$ در چرخش است. موتوری به آن شتاب زاویه ای ثابتی برابربا $۰/۵\frac{rad}{s^۲}$ می دهد و در لحظه ای که سرعت میل لنگ به $۱۰۰rpm$ می رسد این موتور خاموش می شود. از این لحظه به بعد میل لنگ در مدت ۲۰s چند دور می زند؟

حل:

$t = o$

$\omega_۱ = ۵۰ rpm = ۵۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۵/۲۳ \frac{rad}{s}$

$\omega_۲ = ۱۰۰ rpm = ۱۰۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۱۰/۷۴ \frac{rad}{s}$

بعد از سرعت زاویه ای $\omega_۲$ موتور خاموش شده پس به عنوان سرعت زاویه ای اولیه برای قسمت دوم مسیر استفاده می شود تا توقف کامل ($\omega_۳ = o$). ابتدا شتاب زاویه ای کند کننده را بدست می آوریم:

$\omega_۳ = \alpha t + \omega_۲$

$o = \alpha \times ۲۰ + ۱۰/۷۴ \quad \rightarrow \quad \alpha = -۰/۵۲۳۵ \ \frac{rad}{s^۲}$

$\omega_۳^۲ - \omega_۲^۲ = ۲\alpha \Delta\theta$

$o - (۱۰/۴۷)^۲ = ۲ \times (-۰/۵۲۳۵) \times \Delta\theta \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = ۱۰۴/۷ rad$

$\Delta\theta = ۲\pi n \quad \rightarrow \quad n = \frac{\Delta\theta}{۲\pi} = \frac{۱۰۴/۷}{۲ \times ۳/۱۴} = ۱۶/۶۷ rev$

۵. طول عقربه ثانیه شمار ساعتی ۸cm الف) سرعت زاویه ای و ب) سرعت خطی نوک این عقربه چقدر است؟

حل:

$T = ۱s \quad , \quad r = ۸cm = ۰/۰۸m$

$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲ \times ۳/۱۴}{۱} = ۶/۲۸ \ \frac{rad}{s}$

$v = r\omega = ۰/۰۸ \times ۶/۲۸ = ۰/۵ \frac{m}{s}$

۶. ماشینی چنان حرکت می کند که چرخ آن به شعاع ۲۰cm در لحظه ای با سرعت زاویه $۱۲۰ rpm$ در چرخش است. اگر این چرخ از این لحظه به بعد در مدت یک دقیقه

۹۰ دور بزند الف) شتاب زاویه ای آن چقدر است؟ ب) ماشین بعد از توقف کامل چه مسافت دیگری جلو می رود؟ فرض کنید هیچ لغزشی در کار نیست.

حل: الف)

$$\omega_1 = ۱۲۰ rpm = ۱۲۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۱۲/۵۶ \ \frac{rad}{s} \quad , \quad t = ۱ \min = ۶۰ s$$

$$\Delta\theta = ۹۰ rev = ۹۰ \times ۲\pi = ۹۰ \times ۲ \times ۳/۱۴ = ۵۶۵/۲ rad$$

$$\Delta\theta = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ + \omega_1 t$$

$$۵۶۵/۲ = \frac{۱}{۲} \times \alpha \times (۶۰)^۲ + (۱۲/۵۶ \times ۶۰) \quad \rightarrow \quad \alpha = -۰/۱۰۵ \ \frac{rad}{s^۲}$$

ب)

$$\omega_2 = \alpha t + \omega_1 = (-۰/۱۰۵) \times ۶۰ + ۱۲/۵۶ = ۶/۲۶ \ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2^۲ - \omega_1^۲ = ۲\alpha\Delta\theta$$

$$o - (۶/۲۶)^۲ = ۲ \times (-۰/۱۰۵) \times \Delta\theta \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = ۱۸۶/۶ \ rad$$

$$S = r\Delta\theta = ۰/۲ \times ۱۸۶/۶ = ۳۷/۳۲ \ rev$$

۷. وانتی که شعاع چرخهایش ۲۵cm است در مدت ۱۰s از حالت سکون به سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ می رسد. در لحظه ای که وانت $۲\frac{m}{s}$ سرعت داشته، شتاب خطی بالاترین نقطه چرخ الف) نسبت به مرکز چرخ و ب) نسبت به جاده چقدر است؟

حل:

$$r = ۲۵ cm = ۰/۲۵ m \quad , \quad t = ۱۰ s \quad , \quad v_1 = o \quad , \quad v_2 = ۳۰\frac{m}{s} \quad , \quad v_3 = ۲\frac{m}{s}$$

$$v_2 = at + v_1$$

$$۳۰ = a \times ۱۰ + o \quad \rightarrow \quad a = ۳\frac{m}{s^۲}$$

الف) در بالاترین نقطه چرخ نسبت به مرکز $v = r\omega$

$$v_۲ = at + v_۱$$

$$۲ = ۳ \times t + o \qquad \rightarrow \qquad t = ۰/۶۷ s$$

$$v_۲ = r\omega_۲$$

$$\omega_۲ = \frac{v}{r} = \frac{۲}{۰/۲۵} = ۸\frac{rad}{s}$$

$$\omega_۲ = \alpha t + \omega_۱$$

$$۸ = \alpha \times ۰/۶۷ + o \qquad \rightarrow \qquad \alpha = ۱۱/۹۴\frac{rad}{s^۲}$$

$$a_t = r\alpha = ۰/۲۵ \times ۱۱/۹۴ = ۲/۹۸۵ \approx ۳\frac{m}{s^۲}$$

ب) در بالاترین نقطه چرخ نسبت به جاده $v = ۲r\omega$

$$v_۲ = ۲r\omega_۲$$

$$\omega_۲ = \frac{v}{۲r} = \frac{۲}{۲ \times ۰/۲۵} = ۴\frac{rad}{s}$$

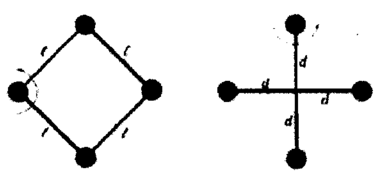
$$\omega_۲ = \alpha t + \omega_۱$$

$$۴ = \alpha \times ۰/۶۷ + o \qquad \rightarrow \qquad \alpha = ۵/۹۷\frac{rad}{s^۲}$$

$$a_t = r\alpha = ۰/۲۵ \times ۵/۹۷ = ۱/۴۹۲۵ \approx ۱/۵\frac{m}{s^۲}$$

بخش ۱۱-۲ و ۱۱- ۳ انرژی جنبشی دورانی و لختی دورانی

۸. چهار ذره هریک به جرم M با میله های بسیار سبکی، در شکل ۳۱- الف به صورت صلیب و در شکل ۳۱- ب به صورت مربع، به هم متصل اند. لختی دورانی این مجموعه در هر مورد، حول محوری که در آن مورد در شکل مشخص شده است، چقدر است؟



(ب) (الف)

حل: در شکل الف فاصله هر گلوله تا گلوله در حال دوران (از راست به چپ)

$$r_1 = \sqrt{2}d \quad , \quad r_2 = 2d \quad , \quad r_3 = \sqrt{2}d$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = m$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3$$

$$= m \times (\sqrt{2}d)^2 + m \times (2d)^2 + m \times (\sqrt{2}d)^2$$

$$= 2md^2 + 4md^2 + 2md^2 = 8md^2$$

در شکل ب فاصله هر گلوله تا گلوله در حال دوران (ساعتگرد از بالا به پایین)

$$r_1 = L \quad , \quad r_2 = \sqrt{2}L \quad , \quad r_3 = L$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = m$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3$$

$$= m \times (L)^2 + m \times (\sqrt{2}L)^2 + m \times (L)^2$$

$$= mL^2 + 2mL^2 + mL^2 = 4mL^2$$

۹. لختی دورانی حلقه نازکی به جرم M و شعاع R را حول محوری که عمود بر صفحه حلقه از مرکز حلقه گذشته است محاسبه کنید.

حل:

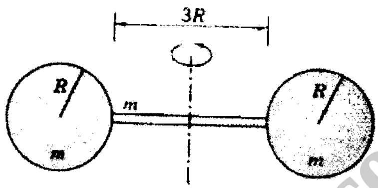
$$\begin{cases} dm = \lambda\, dl \\ dl = r\, d\theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad dm = \lambda\, r\, d\theta$$

$$I = \int r^2\, dm = \int_0^{2\pi} r^2 (\lambda\, r\, d\theta) = \lambda\, r^3 (2\pi)$$

$$\begin{cases} m = \lambda\, L \\ L = 2\pi\, r \end{cases} \quad \rightarrow \quad m = \lambda (2\pi\, r) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m}{2\pi\, r}$$

$$I = \lambda\, r^3 (2\pi) = (\frac{m}{2\pi\, r}) r^3 (2\pi) = mr^2$$

۱۰. دو کره توپر به جرم m و شعاع R به دو انتهای میله ای به جرم m و طول ۳R وصل شده اند. لختی دورانی این سیستم را حول محوری که در شکل ۳۲ مشخص شده است پیدا کنید.



حل:

$$r_1 = r_2 = R \quad , \quad r_3 = ۳R$$
$$m_1 + m_2 + m_3 = m$$

گشتاور لختی کره توپر نسبت به قطر کره $I = \frac{۲}{۵} mR^2$ است. گشتاور لختی کره نسبت به وسط میله ($r = \frac{۵}{۲} R$ فاصله مرکز کره تا وسط میله است.):

$$r = R + \frac{۳R}{۲} = \frac{۵}{۲} R$$

$$I_1 = I_2 = I_{CM} + mr^2 = \frac{۲}{۵} mR^2 + m(\frac{۵}{۲} R)^2 = \frac{۱۳۳}{۲۰} mR^2 = ۶/۶۵\, mR^2$$

و گشتاور لختی میله نسبت به وسط آن $I_3 = \frac{۱}{۱۲} mL^2$ است.

$$L = ۳R$$

$$I_3 = \frac{۱}{۱۲} mL^2 = \frac{۱}{۱۲} m(۳R)^2 = \frac{۹}{۱۲} mR^2 = \frac{۳}{۴} mR^2 = ۰/۷۵ mR^2$$

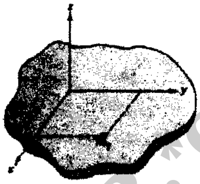
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = ۶/۶۵\, mR^2 + ۶/۶۵\, mR^2 + ۰/۷۵ mR^2 = ۱۴/۰۵\, mR^2$$

۱۱. یک جسم تخت را در صفحه xy در نظر بگیرید. (شکل ۳۳). الف) لختی دورانی ذره ای به جرم m واقع در مختصات x و y را حول محور های x، y و z پیدا کنید. ب) نشان

بدهید که لختی های دورانی کل جسم حول محورهای مختصات با رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$I_z = I_x + I_y$$

این رابطه به قضیه محورهای متعامد معروف است.



حل: الف)

$$I_x = mx^2 \quad , \quad I_y = my^2 \quad , \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_x + I_y = m(x^2 + y^2)$$

$$I_z = mr^2 = m(x^2 + y^2)$$

$$I_z = I_x + I_y$$

ب) در لختی دورانی جسم حول محور x ها جسم به اندازه y از محور x ها فاصله دارد و در لختی دورانی جسم حول محور y ها جسم به اندازه x از محور y ها فاصله دارد

$$\begin{cases} dm = \sigma\, ds \\ ds = dx\, dy \end{cases} \rightarrow \quad dm = \sigma\, dx\, dy$$

$$I_x = \int y^2 dm = \int y^2 \sigma\, dx\, dy$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int x^2 \sigma\, dx\, dy$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad I_z = mr^2$$

$$I_x + I_y = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int (x^2 + y^2)\, \sigma\, dx\, dy = \int r^2\, \sigma\, dx\, dy = I_z$$

$$I_z = I_x + I_y$$

بخش ۱۱-۴ پایستگی انرژی

۱۲. میله یکنواختی به طول L و جرم M را از یک سر به محور افقی لولا کرده ایم. این میله را از وضعیت قائم رها می کنیم. وقتی میله به وضعیت افقی می رسد سرعت خطی سر آزاد آن چقدر است؟

حل: میله یکنواخت است. پس مرکز جرم میله در وسط آن قرار دارد. وقتی جسم از وضعیت قائم به وضعیت افقی می رسد

$$h = \frac{L}{۲}$$

$$U_۱ + K_۱ = U_۲ + K_۲$$

$$mgh + o = o + \frac{۱}{۲} I\omega^۲ \qquad \rightarrow \qquad mgh = \frac{۱}{۲} I\omega^۲$$

لختی دورانی میله حول محوری که از مرکز آن می گذرد $I_{CM} = \frac{۱}{۱۲} mL^۲$ است و نسبت به یک سر آن

$$I = I_{CM} + mR^۲ \qquad , \qquad R = \frac{L}{۲}$$

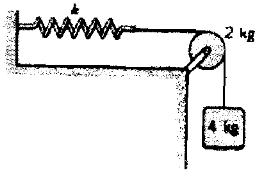
$$I = \frac{۱}{۱۲} mL^۲ + m(\frac{L}{۲})^۲ = \frac{۱}{۳} mL^۲$$

$$v = r\omega = L\omega$$

$$mgh = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ \qquad \rightarrow \qquad mg \times (\frac{L}{۲}) = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۱}{۳} mL^۲) \times (\frac{v}{L})^۲$$

$$g = \frac{v^۲}{۳L} \qquad \rightarrow \qquad v = \sqrt{۳gL}$$

۱۳. در سیستم شکل ۳۴، شعاع قرقره ۵cm و ثابت سفتی فنر $۸۰\frac{N}{m}$ است. الف) اگر جسم ۴Kg از حالت سکون رها شود، فنر را حداکثر چقدر منبسط خواهد کرد؟ ب) سرعت جسم پس از ۲۰cm سقوط چقدر می شود؟ قرقره را مثل قرص ($I = \frac{۱}{۲} mR^۲$) در نظر بگیرید.



حل:

$r = ۵cm = ۰/۰۵m$, $k = ۸۰\frac{N}{m}$, $m_۱ = ۴\,Kg$, $m_۲ = ۲\,Kg$

الف) در حالتی که فنر منبسط می شود، جسم متوقف شده و سرعت آن صفر است. پس انرژی جنبشی آن صفر می شود و فقط انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل فنر دارد. قرقره هم حرکت ندارد پس انرژی جنبشی دورانی آن صفر است.

$$\frac{۱}{۲}kx^۲ = m_۱gx$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۸۰ \times x = ۴\times ۹/۸ \rightarrow \qquad x = ۰/۹۸m = ۹۸cm$$

ب)

$$m_۱gh = \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}m_۱v^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$I = \frac{۱}{۲}m_۲r^۲ \qquad , \qquad v = r\omega$$

$$m_۱gh = \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}m_۱v^۲ + \frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲}m_۲r^۲)\times(\frac{v}{r})^۲$$

$$m_۱gh = \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}m_۱v^۲ + \frac{۱}{۴}m_۲v^۲$$

$$m_۱gh = \frac{۱}{۲}kx^۲ + \frac{۱}{۲}(m_۱ + \frac{۱}{۲}m_۲)v^۲$$

$$v=\sqrt{\frac{۲(m_۱gh-\frac{۱}{۲}kx^۲)}{m_۱+\frac{۱}{۲}m_۲}}=\sqrt{\frac{۲\times\left((۴\times ۹/۸\times ۰/۲)-\left(\frac{۱}{۲}\times ۸۰\times(۰/۲)^۲\right)\right)}{۴+(\frac{۱}{۲}\times ۲)}}=۱/۵۸\frac{m}{s}$$

۱۴. یک کره توپر ($I=\frac{۲}{۵}mR^۲$) و یک دیسک ($I=\frac{۱}{۲}mR^۲$) که شعاعها و جرمهایشان با هم مساوی اند، روی سطح شیبداری به بالا می غلتند. کره تا ارتفاع h_s و دیسک تا ارتفاع h_D روی سطح بالا می روند. نسبت $\frac{h_S}{h_D}$ در هر یک از حالتهای زیر چقدر است؟

الف) اگر انرژی جنبشی کل برای دو جسم در پایین سطح یکی باشد، ب) اگر سرعت دو جسم در پایین سطح یکی باشد.

حل:

$$m_S=m_D \quad , \quad R_S=R_D$$

$$I_S=\frac{۲}{۵}mR^۲ \quad , \quad I_D=\frac{۱}{۲}mR^۲$$

الف) سرعتها با هم برابر پس انرژی های جنبشی آنها با هم برابر می شود

$$K_S=K_D$$

$$\begin{cases}K_S=mgh_S\\K_D=mgh_D\end{cases}\rightarrow \frac{h_S}{h_D}=۱$$

ب)

$$I_S=\frac{۲}{۵}mR^۲ \quad , \quad I_D=\frac{۱}{۲}mR^۲$$

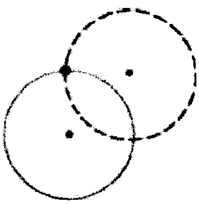
$$\begin{cases}K_S=\frac{۱}{۲}mv_S^۲+\frac{۱}{۲}I_S\omega_S^۲\\K_D=\frac{۱}{۲}mv_D^۲+\frac{۱}{۲}I_D\omega_D^۲\end{cases} , \quad \begin{cases}v_S=R\omega_S\\v_D=R\omega_D\end{cases} , \quad \begin{cases}K_S=mgh_S\\K_D=mgh_D\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}mv_S^{۲}+\frac{۱}{۲}I_S\omega_S^{۲}=mgh_S \\ \frac{۱}{۲}mv_D^{۲}+\frac{۱}{۲}I_D\omega_D^{۲}=mgh_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}mv_S^{۲}+\frac{۱}{۲}\times(\frac{۲}{۵}mR^{۲})\times(\frac{v_S}{R})^{۲}=mgh_S \\ \frac{۱}{۲}mv_D^{۲}+\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲}mR^{۲})\times(\frac{v_D}{R})^{۲}=mgh_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_S^{۲}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}\right)=mgh_S \\ v_D^{۲}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)=mgh_D \end{cases} \xrightarrow{v_S=v_D} \frac{h_S}{h_D}=\frac{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}\right)}{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)}=\frac{۱۴}{۱۵}$$

۱۵. قرص نازکی به جرم M و شعاع R می تواند حول محوری افقی که به لبه اش لولا شده است دوران کند (شکل ۳۵). قرص را از وضعیتی که مرکز آن با لولا هم تراز است رها می کنیم. وقتی لولا به وضعیت قائم می رسد، سرعت خطی پایین ترین نقطه آن چقدر است؟



حل: لختی دورانی میله نسبت به یکی از قطرهایش $I=\frac{۱}{۲}mR^{۲}$ است و لختی دورانی ن نسبت به محوری که در یک لبه آن قرار دارد:

$$I=I_{CM}+mR^{۲}$$

$$I=\frac{۱}{۲}mR^{۲}+mR^{۲}=\frac{۳}{۲}mR^{۲}$$

رها می کنیم پس سرعت اولیه صفر است

سرعت خطی در پایین ترین نقطه نسبت به لوله $v=۲R\omega$ است

$$v_۱ = o \quad \rightarrow \quad K_۱ = o$$

$$h = R \quad , \quad v_۲ = ۲R\omega$$

$$U_۱ + K_۱ = U_۲ + K_۲$$

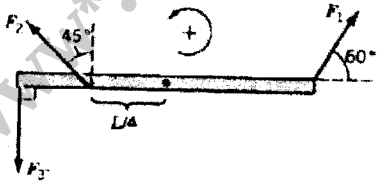
$$mgR + o = o + \frac{۱}{۲} I\omega^۲$$

$$mgR = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۳}{۲} mR^۲) \times (\frac{v_۲}{۲R})^۲ \quad \rightarrow \quad gR = \frac{۳}{۱۶} v_۲^۲$$

$$v_۲ = \sqrt{\frac{۱۶}{۳} gR}$$

بخش ۱۱-۶ و ۱۱- ۷ گشتاور و دینامیک دوران

۱۶. در شکل ۳۶، گشتاور هر یک از نیرو ها را حول محوری که در وسط میله بر آن عمود است حساب کنید. $F_۱ = ۱۰N$, $F_۲ = ۱۵N$, $F_۳ = ۸N$, $L = ۸m$ است.



حل:

$$\begin{cases} F_۱ = ۱۰N \\ r_۱ = \frac{L}{۲} \\ F_{۱\perp} = F_۱ Sin(۳۰) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_۱ = r_۱ F_{۱\perp} = \left(\frac{L}{۲}\right) \times F_۱ Sin(۶۰) \\ = \frac{۸}{۲} \times ۱۰ \times ۰/۵ = ۲۰ N.m \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_۲ = ۱۵N \\ r_۲ = \frac{L}{۴} \\ F_{۲\perp} = F_۲ Cos(۴۵) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_۲ = r_۲ F_{۲\perp} = \left(\frac{L}{۲}\right) \times F_۲ Cos(۴۵) \\ = \frac{۸}{۲} \times ۱۵ \times ۰/۷ = ۲۱ N.m \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_۳ = ۸N \\ r_۳ = \dfrac{L}{۲} \\ F_{۳\perp} = F_۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_۳ = \vec{r}_۳ \times \vec{F}_۳ = \left(\dfrac{L}{۲}\right) \times F_۳ \times Sin(۹۰) \\ = \dfrac{۸}{۲} \times ۸ \times ۱ = ۳۲ N.m \end{cases}$$

۱۷. چرخی که لختی دورانی آن $۰/۰۳ Kg.m^۲$ است در مدت 5s از حالت سکون به سرعت $۲۰\dfrac{rad}{s}$ می رسد. وقتی گشتاور خارجی را برداریم، چرخ در مدت 1min متوقف می شود. الف) گشتاور نیروی اصطکاک چقدر است؟ ب) گشتاور خارجی چقدر است؟

حل: ابتدا دو شتاب زاویه ای را در مدتهای 5s و 1min بدست می آوریم

$$I = ۰/۰۳ Kg\, m^۲ \quad , \quad t_۱ = ۵s \quad , \quad \omega_۱ = o$$

$$\omega_۲ = ۲۰\frac{rad}{s} \quad , \quad t_۲ = ۱\min = ۶۰s \quad , \quad \omega_۳ = o$$

$$\omega_۲ = \alpha_۱ t_۱ + \omega_۱$$

$$۲۰ = \alpha_۱ \times ۵ + o \quad \rightarrow \quad \alpha_۱ = ۴\frac{rad}{s^۲}$$

$$\omega_۳ = \alpha_۲ t_۲ + \omega_۲$$

$$o = \alpha_۲ \times ۵ + ۲۰ \quad \rightarrow \quad \alpha_۲ = -\frac{۱}{۳}\frac{rad}{s^۲}$$

الف)

$$\tau_۱ = I\alpha_۲ = ۰/۰۳ \times (-\frac{۱}{۳}) = -۰/۰۱ N.m$$

ب)

$$\tau_۲ = I\alpha_۱ - \tau_۱ = (۰/۰۳ \times ۴) - (-۰/۰۱) = ۰/۱۳ N.m$$

۱۸. چرخی از حالت سکون به چرخش در می آید و در مدت 5s به اندازه 150rad دوران می کند. گشتاور خالش ناشی از موتور و اصطکاک برابر با مقدار ثابت 48N.m است.

اگر موتور را خاموش کنیم، چرخ در مدت ۱۲s متوقف می شود. الف) گشتاور نیروی اصطکاک و ب) گشتاور نیروی موتور چقدر است؟

حل:

$\Delta\theta = ۱۵۰ rad \quad , \quad t_۱ = ۵ s \quad , \quad \omega_۱ = o$

$t_۲ = ۱۲ s \quad , \quad \omega_۲ = o$

$\Delta\theta = \frac{۱}{۲}\alpha_۱ t_۱^۲ + \omega_۱ t$

$۱۵۰ = \frac{۱}{۲} \times \alpha_۱ \times (۵)^۲ + o \quad \rightarrow \quad \alpha_۱ = ۱۲ \frac{rad}{s^۲}$

$\tau = I\alpha_۱$

$I = \frac{\tau}{\alpha_۱} = \frac{۴۸}{۱۲} = ۴ \ Kg\, m^۲$

$\omega_۲^۲ - \omega_۱^۲ = ۲\alpha_۱ (\Delta\theta)$

$\omega_۲^۲ - o = ۲ \times ۱۲ \times ۱۵۰ \quad \rightarrow \quad \omega_۲ = ۶۰ \frac{rad}{s}$

$\omega_۳ = \alpha_۲ t_۲ + \omega_۲$

$o = \alpha_۲ \times ۱۲ + ۶۰ \quad \rightarrow \quad \alpha_۲ = -۵ \frac{rad}{s^۲}$

الف)

$\tau_۲ = I\alpha_۲ = ۴ \times (-۵) = -۲۰ N.m$

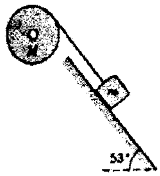
ب) گشتاور نیروی موتور را با $\tau_۲$ مشخص می کنیم

$\tau = \tau_۱ + \tau_۲$

$۴۸ = -۲۰ + \tau_۲ \quad \rightarrow \quad \tau_۲ = ۶۸ N.m$

۱۹. در سیستم شکل ۳۷، $m = ۲ Kg$ و $M = ۴ Kg$ شعاع قرقره ۰/۵m و سطح شیبدار بدون اصطکاک است. قرقره به شکل قرص است. الف) شتاب زاویه ای قرقره چقدر است؟ ب) سرعت قطعه ۲ کیلوگرمی پس از طی ۱m روی سطح به چه مقداری می

رسد؟ فرض کنید سیستم از حالت سکون رها شده است. (برای قرص $I=\frac{۱}{۲}mR^{۲}$ است.)



حل:

$m=۲\,kg \quad , \quad M=۴\,Kg \quad , \quad R=۰/۱۵\,m \quad , \quad \theta=۵۳^{\circ}$

$\omega_{۱}=o \quad , \quad I=\frac{۱}{۲}MR^{۲}$

الف)

$$a=R\alpha$$

$$\tau=I\alpha=TR$$

$$\frac{۱}{۲}MR^{۲}\alpha=TR \quad \rightarrow T=\frac{۱}{۲}MR\alpha=\frac{۱}{۲}Ma$$

$$mg\,Sin\theta-T=ma$$

$$mg\,Sin\theta-\frac{۱}{۲}Ma=ma \quad \rightarrow \quad mg\,Sin\theta=\left(\frac{۱}{۲}M+m\right)a$$

$$a=\frac{mg\,Sin\theta}{\frac{۱}{۲}M+m}=\frac{۲\times ۹/۸\times ۰/۸}{\left(\frac{۱}{۲}\times ۴\right)+۲}=۳/۹۲\frac{m}{s^{۲}}$$

$$a=R\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{a}{R}=\frac{۳/۹۲}{۰/۱۵}=۷/۴۸\frac{m}{s^{۲}}$$

ب)

$x=۱m \quad , \quad v=R\omega \quad , \quad h=x\,Sin(۵۳)$

$$mgh=\frac{۱}{۲}I\omega^{۲}+\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

$$mgx\,Sin(۵۳) = \frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲}MR^{۲})\times(\frac{v}{R})^{۲} + \frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

$$mgx\,Sin(۵۳) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}M + m)v^{۲}$$

$$۲\times۹/۸\times۰/۸ = \frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۲}\times۴+۲)\times v^{۲} \quad\rightarrow\quad v = ۲/۸\frac{m}{s}$$

۲۰. استوانه توپری از یک سطح شیبدار، بدون لغزش، پایین می غلتد. الف) شتاب مرکز جرم آن چقدر است؟ ب) حداقل ضریب اصطکاک سطح برای آنکه غلتش بدون لغزش باشد چقدر است؟

حل: الف)

$$\sum F_x = ma_x$$

$$mgSin\theta - f_k = ma$$

$$\tau = I\alpha = f_k R$$

$$\frac{۱}{۲}mR^{۲}\alpha = f_k R \quad\rightarrow\quad f_k = \frac{۱}{۲}mR\alpha = \frac{۱}{۲}ma$$

$$mg\,Sin\theta - \frac{۱}{۲}ma = ma \quad\rightarrow\quad mg\,Sin\theta = \frac{۳}{۲}ma$$

$$a = \frac{۲}{۳}g\,Sin\theta$$

ب)

$$\sum F_x = ma_x$$

$$N - mgCos\theta = o$$

$$\begin{cases} f_k = \mu_k N = \mu_k mgCos\theta \\ f_k = \frac{۱}{۲}ma = \frac{۱}{۳}mg\,Sin\theta \end{cases} \quad\rightarrow\quad \mu_k = \frac{۱}{۳}\tan\theta$$

بخش ۱۱-۸ کار و توان

۲۱. می خواهیم چرخی با لختی دورانی $۴۵\,Kg.m^{۲}$ را در مدت ۱۰s از $۲۰rpm$ (دور در دقیقه) به $۱۰۰rpm$ شتاب بدهیم. به چه توان متوسطی نیاز داریم؟

حل:

$$I = ۴۵\ Kg\,m^{۲} \quad , \quad t = ۱۰s$$

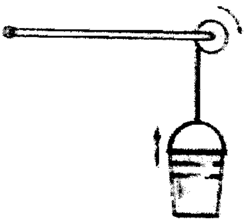
$$\omega_{۱} = ۲۰rpm = \frac{۲۰\times ۲\pi}{۶۰} = ۲/۰۹\frac{rad}{s}$$

$$\omega_{۲} = ۱۰۰rpm = \frac{۱۰۰\times ۲\pi}{۶۰} = ۱۰/۴۷\frac{rad}{s}$$

$$W = \frac{۱}{۲}I(\omega_{۲}^{۲} - \omega_{۱}^{۲})$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{۱}{t}\left(\frac{۱}{۲}I(\omega_{۲}^{۲} - \omega_{۱}^{۲})\right) = \frac{۱}{۱۰}\times\left(\frac{۱}{۲}\times(۴۵)\times\left((۱۰/۴۷)^{۲} - (۲/۰۹)^{۲}\right)\right) = ۲۳۶/۸۲w$$

۲۲. یک سطل آب به جرم ۱۵Kg را با سرعت ثابت $۲۰\frac{cm}{s}$ از چاهی بالا می کشیم. (شکل ۳۸) طناب دور دوکی به شعاع ۳cm می پیچد. دوک را با دسته ای به طول ۴۰cm می پرخانیم. الف) چه توانی برای بالا کشیدن سطل لازم است؟ ب) اگر نیرو را همواره عمود بر دسته وارد کنیم، چه مقدار نیرو برای این کار لازم است؟



حل:

$$m = ۱۵\,Kg \quad , \quad v_{۱} = ۲۰\frac{cm}{s} \quad , \quad a = o \quad , \quad r = ۳\,cm = ۰/۰۳\,m$$

$$d = ۴۰\,cm = ۰/۴\,m$$

الف)

$$P = Fv = mgv = ۱۵\times ۹/۸\times ۲۰\times ۱۰^{-۲} = ۲۹/۴\,w$$

ب)

$$\tau = Fd = mgr$$

$$F = \frac{mgr}{d} = \frac{۱۵\times ۹/۸\times ۰/۰۳}{۰/۴} = ۱۱/۰۲۵\,N$$

مسائل تکمیلی

۲۳. از وسط دیسکی به شعاع B، بخشی به شعاع A برداشته شده است. جرم حلقه ای که به این ترتیب بدست آمده برابر با M است. لختی دورانی این جسم را حول محوری که عمود بر صفحه دیسک از مرکز آن می گذرد، حساب کنید.

حل:

$$\begin{cases} m_B = \sigma S_B = \sigma \pi B^۲ \\ m_A = \sigma S_A = \sigma \pi A^۲ \end{cases}$$

$$M = m_B - m_A = \sigma \pi (B^۲ - A^۲)$$

$$\begin{cases} I_A = \frac{۱}{۲} m_A A^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\sigma \pi A^۲\right) A^۲ = \frac{۱}{۲}\sigma \pi A^۴ \\ I_B = \frac{۱}{۲} m_B B^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\sigma \pi B^۲\right) B^۲ = \frac{۱}{۲}\sigma \pi B^۴ \end{cases}$$

$$I = I_B - I_A = \frac{۱}{۲}\sigma \pi B^۴ - \frac{۱}{۲}\sigma \pi A^۴$$

$$= \frac{۱}{۲}\sigma \pi \left(B^۴ - A^۴\right) = \frac{۱}{۲}\sigma \pi (B^۲ - A^۲)(B^۲ + A^۲)$$

$$= \frac{۱}{۲} M (B^۲ + A^۲)$$

۲۴. میله یکنواختی به طول L را در وضعیت قائم روی سطح بدون اصطکاکی تکیه می دهیم. هر ضربه بسیار کوچک موجب می شود که میله سقوط کند. الف) شتاب زاویه ای میله در موقع سقوط چقدر است؟ ب) وقتی میله به زمین می نشیند، سرعت هر یک از دو سر آن چقدر است؟

حل: در هنگام سقوط چون میله یکنواخت است وزن آن که در مرکز جرم ($r = \frac{L}{۲}$) قرار دارد با میله زاویه θ می سازد.

الف)

$$\tau = I\alpha = Fr$$

$$r = \frac{L}{۲} \quad , \quad F = mg\,Cos\theta \quad , \quad I_{CM} = \frac{۱}{۱۲}mL^۲$$

$$I = I_{CM} + mr^۲ = \frac{۱}{۱۲}mL^۲ + m(\frac{L}{۲})^۲ = \frac{۱}{۳}mL^۲$$

$$\alpha = \frac{Fr}{I} = \frac{(mg\,Cos\theta)\left(\frac{L}{۲}\right)}{\frac{۱}{۳}mL^۲} = \frac{۳g\,Cos\theta}{۲L}$$

ب)

$$v = ۲R\omega \quad , \quad R = L$$

$$a_t = R\alpha = L \times \left(\frac{۳g\,Cos\theta}{۲L}\right) = \frac{۳}{۲}g\,Cos\theta$$

$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = mgh$$

$$\frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۱}{۳}mL^۲\right) \times (\frac{v}{۲R})^۲ = mgR$$

$$\left(\frac{۱}{۶}mL^۲\right) \times (\frac{v}{۲L})^۲ = mgL$$

$$v_C = \sqrt{\frac{۳}{۲}gL} \quad , \quad v_L = o$$

۲۵. شتاب زاویه ای جسمی با رابطه $\frac{rad}{s^۲}$ $\alpha = ۱۲t - ۳t^۲$ بیان می شود. سرعت زاویه ای جسم در $t = ۱s$ برابر $۱۰\frac{rad}{s}$ و جابجایی زاویه ای آن در $t = ۲s$ برابر با $۵\frac{rad}{s}$

است. سرعت زاویه ای و جابجایی زاویه ای این جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

حل:

$$t_1 = 1s \quad , \quad \omega_1 = 10 \frac{rad}{s} \quad , \quad t_2 = 2s \quad , \quad \theta = 5\, rad$$

$$\alpha = 12t - 3t^2 \quad \frac{rad}{s^2}$$

$$\omega_1 = \int \alpha\, dt = \int (12t - 3t^2)\, dt = 6t^2 - t^3 + \omega_0$$

$$10 = 6 \times (1)^2 - (1)^3 + \omega_0 \qquad \rightarrow \qquad \omega_0 = 5 \frac{rad}{s}$$

$$\omega = -t^3 + 6t^2 + 5$$

$$\theta = \int \omega\, dt = \int (-t^3 + 6t^2 + 5)\, dt = -\frac{1}{4} t^4 + 2t^3 + 5t + \theta_0$$

$$5 = \left(-\frac{1}{4} \times (2)^4\right) + \left(2 \times (2)^3\right) + (5 \times 2) + \theta_0 \qquad \rightarrow \qquad \theta_0 = -17\, rad$$

$$\theta = -\frac{1}{4} t^4 + 2t^3 + 5t - 17$$

۲۶. استوانه توپری روی سطح شیبداری با زاویه شیب θ بدون لغزش به پایین می غلتد. الف) شتاب مرکز جرم استوانه چقدر است؟ ب) حداقل ضریب اصطکاک لازم برای غلتش خالص استوانه چقدر است؟

حل: الف)

$$\sum F_x = ma_x$$

$$mgSin\theta - f_k = ma$$

$$\tau = I\alpha = f_k R$$

$$\frac{۱}{۲} mR^۲\alpha = f_k R \qquad \rightarrow \qquad f_k = \frac{۱}{۲} mR\alpha = \frac{۱}{۲} ma$$

$$mg\,Sin\theta - \frac{۱}{۲} ma = ma \qquad \rightarrow \qquad mg\,Sin\theta = \frac{۳}{۲} m\,a$$

$$a = \frac{۲}{۳} g\,Sin\theta$$

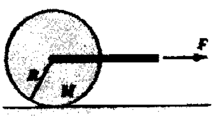
ب)

$$\sum F_x = ma_x$$

$$N - mgCos\theta = o$$

$$\begin{cases} f_k = \mu_k N = \mu_k mgCos\theta \\ f_k = \frac{۱}{۲} ma = \frac{۱}{۳} mg\,Sin\theta \end{cases} \rightarrow \qquad \mu_k = \frac{۱}{۳} \tan\theta$$

۲۷. غلتکی به شکل استوانه است به جرم M و شعاع R (شکل ۳۹). این استوانه در اثر نیروی F، که به وسط محور مرکزی اش وارد می شود، بدون لغزش روی سطح افقی می غلتد. الف) شتاب غلتک چقدر است؟ ب) نیروی اصطکاک وارد به غلتک چقدر است؟



حل: الف)

$$I = \frac{۱}{۲} mR^۲ \qquad , \qquad a = R\alpha$$

$$\tau = I\alpha = FR \qquad , \qquad \frac{۱}{۲} mR^۲\alpha = FR$$

$$F = \frac{۱}{۲} mR\alpha = \frac{۱}{۲} ma \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{۲F}{m}$$

ب)

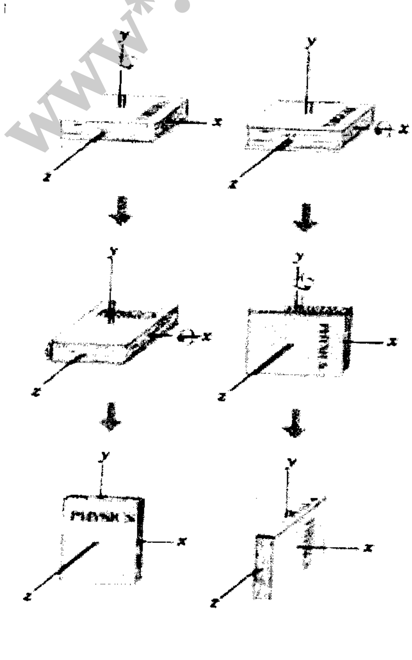
$$F - f_k = ma$$

$$f_k = F - ma = \frac{۱}{۲}ma - ma = -\frac{۱}{۲}ma$$

۲۸. تحقیق کنید که $d\vec{\theta}$ بردار است (چنانکه از رابطه $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ معلوم است.) ولی θ بردار نیست. یعنی نشان بدهید که اولی از قوانین جمع برداری تبعیت می کند ولی دومی نمی کند.)

راهنمایی: یک کتاب را به ترتیب حول دو محور، مثلاً به اندازه ۹۰ درجه بچرخانید. بعد این ترتیب را عوض کنید. خواهید دید که نتیجه نهایی دو چرخش در دو مورد یکی نیست یعنی $\theta_۱ + \theta_۲ \neq \theta_۲ + \theta_۱$ است. اما در مورد چرخشهای کوچک (در حدود دو سه درجه) خواهید دید که $d\vec{\theta}_۱ + d\vec{\theta}_۲ = d\vec{\theta}_۲ + d\vec{\theta}_۱$ است.

حل:

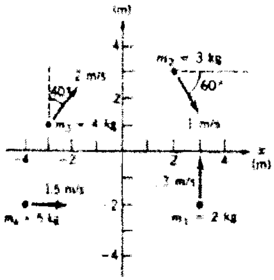


فصل ۱۲

مسئله ها

بخش ۲-۱۲ تکانه زاویه ای

۱. الف) در شکل ۲۰، تکانه زاویه ای هر یک از ذرات را حول مبداء حساب کنید. ب) اندازه و جهت بردار تکانه زاویه ای کل سیستم را بدست آورید.



حل:

$$\begin{cases} m_۱ = ۲\,Kg \\ \vec{r}_۱ = ۳\hat{i} - ۲\hat{j} \\ \vec{v}_۱ = ۳\hat{j}\ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_۲ = ۳\,Kg \\ \vec{r}_۲ = ۲\hat{i} + ۳\hat{j} \\ \vec{v}_۲ = v_۲ Cos(۶۰)\hat{i} - v_۲ Sin(۶۰)\hat{j} = ۰/۵\hat{i} - ۰/۸۷\hat{j}\ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_۳ = ۴\,Kg \\ \vec{r}_۳ = -۳\hat{i} + \hat{j} \\ \vec{v}_۳ = v_۳ Cos(۹۰-۴۰)\hat{i} - v_۳ Sin(۹۰-۴۰)\hat{j} = ۱/۲۸\hat{i} + ۱/۵۴\hat{j}\ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_۴ = ۵\,Kg \\ \vec{r}_۴ = -۴\hat{i} - ۲\hat{j} \\ \vec{v}_۴ = +۱/۵\hat{i}\ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

الف)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{L}_۱ = m_۱\vec{r}_۱ \times \vec{v}_۱$$

$$= ۲ \times \left[\left(۳\hat{i} - ۲\hat{j}\right) \times \left(۳\hat{j}\right)\right] = ۱۸\hat{k}\ \frac{Kg.m^۲}{s}$$

$$\vec{L}_۲ = m_۲\vec{r}_۲ \times \vec{v}_۲$$

$$= ۳ \times \left[\left(۲\hat{i} + ۳\hat{j}\right) \times \left(۰/۵\hat{i} - ۰/۸۷\hat{j}\right)\right] = -۹/۷۲\hat{k}\ \frac{Kg.m^۲}{s}$$

$$\vec{L}_۳ = m_۳\vec{r}_۳ \times \vec{v}_۳$$

$$= ۴ \times \left[\left(-۳\hat{i} + \hat{j}\right) \times \left(۱/۲۸\hat{i} + ۱/۵۴\hat{j}\right)\right] = -۲۳/۵\hat{k}\ \frac{Kg.m^۲}{s}$$

$$\vec{L}_۴ = m_۴\vec{r}_۴ \times \vec{v}_۴$$

$$= ۵ \times \left[\left(-۴\hat{i} - ۲\hat{j}\right) \times \left(۱/۵\hat{i}\right)\right] = +۱۵\hat{k}\ \frac{Kg.m^۲}{s}$$

ب)

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = (۱۸ - ۹/۷۲ - ۲۳/۵ + ۱۵)\hat{k} = -۰/۲۲\frac{Kg.m^۲}{s}$$

۲. دو ذره با جرم های مساوی روی دو خط موازی با سرعتهای یکسان ولی در جهت های مخالف یکدیگر در حرکت اند. نشان بدهید که تکانه زاویه ای کل این سیستم مستقل از مبدئی است که انتخاب می کنیم.

حل:

$$\begin{cases} m_۱ = m_۲ = m \\ v_۱ = -v_۲ = v \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \vec{L}_۱ = m_۱\vec{r}_۱ \times \vec{v}_۱ = mvr_{۱\perp} \\ \vec{L}_۲ = m_۲\vec{r}_۲ \times \vec{v}_۲ = -mvr_{۲\perp} \end{cases}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_۱ + \vec{L}_۲ = mvr_{۱\perp} + (-mvr_{۲\perp}) = mv(r_{۱\perp} - r_{۲\perp}) = mv\,\Delta r_\perp$$

$\Delta r_\perp$ فاصله عمودی دو خط موازی است که ذره ها روی آنها حرکت می کنند و تکانه زاویه ای کل فقط به فاصله دو خط بستگی دارد نه به انتخاب مبداء

۳. گفتیم که رابطه میان L و ω در حالت کلی یک رابطه برداری نیست. اما اگر توزیع جرم حول محور دوران متقارن باشد می توانیم رابطه را به صورت $\vec{L} = I\vec{\omega}$ بنویسیم. با اضافه کردن یک ذره دیگر به شکل ۶، نشان بدهید که این گفته صحیح است.

حل: ذره دوم در سر دیگر قطر مسیر دایره ای قرا دارد و هر دو با سرعت زاویه ای ω می چرخند. فاصله دو ذره از هم برابر است.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = r \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{cases} , \quad \begin{cases} v = R\omega \\ R = r\, Sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{L}_1 = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = mvr = mr(r\, Sin\varphi)\,\omega = mr^2\omega\, Sin\varphi$$

$$\vec{L}_2 = m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = -mvr = mr^2\omega\, Sin\varphi$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = mr^2\omega\, Sin\varphi + mr^2\omega\, Sin\varphi = 2mr^2\omega\, Sin\varphi$$

$$(\vec{L}.\vec{L})^2 = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$$

$$L^2 = (L_1)^2 + (L_2)^2 + 2\vec{L}_1 . \vec{L}_2$$

$$L^2 = (mr^2\omega\, Sin\varphi)^2 + (mr^2\omega\, Sin\varphi)^2 + 2\left[\left(mr^2\omega\, Sin\varphi\right)\left(mr^2\omega\, Sin\varphi\right)\right]Cos(\pi - 2\varphi)$$

$$** \begin{cases} Cos(\pi - 2\varphi) = Cos(\pi)Cos(2\varphi) - Sin(\pi)Sin(2\varphi) = -Cos(2\varphi) \\ 1 - Cos(2\varphi) = 2Sin^2\varphi \end{cases}$$

$$L^2 = 2(mr^2\omega\, Sin\varphi)^2 + 2(mr^2\omega\, Sin\varphi)^2(-Cos(2\varphi))$$

$$= 2\left(mr^2\omega\, Sin\varphi\right)^2\left(1 - Cos(2\varphi)\right)$$

$$= 2\left(mr^2\omega\, Sin\varphi\right)^2\left(2Sin^2\varphi\right)$$

$$L = \sqrt{2\left(mr^2\omega\, Sin\varphi\right)^2\left(2Sin^2\varphi\right)} = 2mr^2\omega\, Sin^2\varphi$$

$$= 2m\omega\left(r^2 Sin^2\varphi\right) = 2mR^2\omega = I\omega$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$\vec{L}$ هم جهت با $\vec{\omega}$ است. پس $I = I_Z$ لختی دورانی حول محور z ها است.

۴. ذره ای با سرعت زاویه ای $\vec{\omega}$ و شتاب زاویه ای $\vec{\alpha}$ روی دایره ای به شعاع r در حرکت است. الف) شتاب شعاعی $\vec{a}_r$ را بر حسب $\vec{v}$ و $\vec{\omega}$ بیان کنید. ب) شتاب مماسی $\vec{a}_t$ را بر حسب $\vec{\alpha}$ و $\vec{r}$ بدست آورید.

حل: الف)

$$\vec{v} = r\vec{\omega}$$

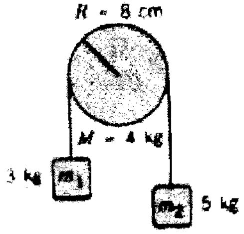
$$a_r = \frac{v^۲}{r} = r\omega^۲ = v\omega \qquad \rightarrow \qquad \vec{a}_r = \vec{v}.\vec{\omega}\hat{r}$$

ب)

$$a_t = r\alpha \qquad \rightarrow \qquad \vec{a}_t = \vec{r}.\vec{\alpha}\,\hat{\theta}$$

بخش ۱۲-۳- دینامیک دورانی

۵. در سیستم شکل ۲۱، قرقره به شکل قرص ($I_C = \frac{۱}{۲}MR^۲$) و اصطکاک ناچیز است. مبداء را در مرکز قرقره o بگیرید. الف) گشتاور خالص وارد بر سیستم چقدر است؟ ب) تکانه زاویه ای سیستم وقتی جرم ها به سرعت V رسیده اند چقدر است؟ ج) شتاب حرکت جرم ها را با استفاده از رابطه $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ محاسبه کنید.



حل:الف)

$$I_C = \frac{۱}{۲}MR^۲ \quad , \quad m_۱ = ۳\,Kg \quad , \quad m_۲ = ۵\,Kg \quad , \quad M = ۴Kg \quad , \quad R = ۸cm$$

$$\tau_۱ = m_۱ gR = ۳ \times ۹/۸ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} = ۲/۳۵۲\,N.m$$

$$\tau_۲ = m_۲ gR = ۵ \times ۹/۸ \times ۸ \times ۱۰^{-۲} = ۳/۹۲\,N.m$$

$$\tau = \tau_۱ - \tau_۲ = ۳/۹۲ - ۲/۵۳۲ = ۱/۵۶۸\,N.m \approx ۱/۵۷\,N.m$$

ب)

$$L = I\omega + m_۱ v_۱ r_{۱\perp} + m_۲ v_۲ r_{۲\perp}$$

$$= \frac{۱}{۲}MR^۲\omega + m_۱ vR + m_۲ vR$$

$$= \frac{۱}{۲}MRv + (m_۱ + m_۲)vR$$

$$= \left[\left(\frac{۱}{۲} \times ۴\right) + (۳+۵)\right] \times ۰/۰۸ \times v = ۰/۸v \frac{Kg.m^۲}{s}$$

ج)

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$$۱/۵۷ = \frac{d}{dt}(۰/۸v) = ۰/۸\frac{dv}{dt} = ۰/۸a$$

$$a = \frac{۱/۵۷}{۰/۸} = ۱/۹۶۲۵\frac{m}{s^۲}$$

۶. ذره ای به جرم M در صفحه xy حرکت می کند. مختصات این ذره بر حسب زمان عبارت اند از $x(t) = At^۳$ و $y(t) = Bt^۲ - Ct$، که در آنها A و B و C همگی ثابت اند. الف) تکانه زاویه ای این ذره حول مبداء چقدر است؟ ب) چه نیرویی به آن وارد می شود؟

حل:

$$\begin{cases} x(t) = At^3 \\ y(t) = Bt^2 - Ct \end{cases} , \qquad \begin{cases} \vec{r} = At^3\,\hat{i} + (Bt^2 - Ct)\,\hat{j} \\ \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 3At^2\,\hat{i} + (2Bt - C)\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{P} = m\vec{v} = m\left(3At^2\,\hat{i} + (2Bt - C)\,\hat{j}\right)$$

الف)

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{P} \\
&= m\left(At^3\,\hat{i} + (Bt^2 - Ct)\,\hat{j}\right) \times \left(3At^2\,\hat{i} + (2Bt - C)\,\hat{j}\right) \\
&= m\left[(At^3)(2Bt - C)\hat{k} - (Bt^2 - Ct)(3At^2)\hat{k}\right] \\
&= m\left[2BAt^4 - CAt^3 - 3BAt^4 - 3CAt^3\right]\hat{k} \\
&= mAt^3(2C - Bt)\hat{k}
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \\
&= m\frac{d}{dt}\left(3At^2\,\hat{i} + (2Bt - C)\,\hat{j}\right) \\
&= m\left(6At\,\hat{i} + 2B\,\hat{j}\right)
\end{aligned}$$

بخش ۱۲-٤- پایستگی تکانه زاویه ای

۷. دیسکی با لختی دورانی $0/012\,Kg.m^2$ با سرعت زاویه ای $2\dfrac{rad}{s}$ حول محور مرکزی قائمش در چرخش است. دیسک دیگری به جرم ۲۰۰gr و شعاع ۳۰cm را به آرامی، از سوراخی که در وسط دارد، روی محور مرکزی دیسک اول می گذاریم تا همراه با آن دوران کند. الف) سرعت زاویه ای جدید سیستم چقدر است؟ ب) انرژی جنبشی چقدر تغییر میکند؟ (لختی دورانی دیسک حول محور مرکزی اش $\frac{1}{2}MR^2$ است.)

حل:الف)

$$I_1 = 0/012\,Kg.m^2 \quad , \quad \omega_1 = 2\frac{rad}{s} \quad , \quad m_2 = 200\,gr = 0/2\,Kg \quad , \quad r_2 = 30\,cm$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2 = \frac{1}{2}\times 0/2\times(0/3)^2 == 0/09\,Kg.m^2$$

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2} = \frac{0/012\times 2}{0/012 + 0/09} = 1/14\frac{rad}{s}$$

ب)

$$\Delta K = K_2 - K_1$$
$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\times(0/012 + 0/09)\times(1/14)^2 - \frac{1}{2}\times 0/012\times(0/9)^2 = -0/01J$$

۸ یک صفحه موسیقی به جرم ۰/۲Kg و شعاع ۱۵cm را به آرامی روی میله وسط گرامافون می گذاریم تا روی دیسک چرخان آن که جرمش ۱/۶Kg و شعاعش برابر با شعاع صفحه است بیفتد. سرعت زاویه ای دیسک قبل از گذاشتن صفحه $4\frac{rad}{s}$ است. الف) سرعت زاویه ای سیستم پس از گذاشتن صفحه چقدر است؟ ب) آیا انرژی جنبشی سیستم پایسته می ماند؟ اگر نمی ماند تغییر آنرا حساب کنید. ج) اگر گرامافون را پس از گذاشتن صفحه روشن کنیم، موتور دستگاه باید چه گشتاور ثابتی را تأمین کند تا بتواند در مدت 2S سرعت زاویه ای سیستم را به همان مقدار قبلی برساند؟ (لختی دورانی صفحه موسیقی را هم $\frac{1}{2}MR^2$ بگیرید.)

حل:

$$m_۱ = ۰/۱۲\,Kg \quad , \quad m_۲ = ۱/۶\,Kg \quad , \quad \omega_۰ = ۴\frac{rad}{s} \quad , \quad r_۱ = r_۲ = R = ۱۵cm = ۰/۱۵\,m$$

$$m = m_۱ + m_۲ = ۰/۱۲ + ۱/۶ = ۱/۸\,Kg \qquad , \qquad I = \frac{۱}{۲}mr^۲$$

الف)

$$I_۱\,\omega_۰ = (I_۱ + I_۲)\omega$$

$$\frac{۱}{۲}m_۲r_۲^۲\omega_۰ = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)\,R^۲\omega$$

$$\omega = \frac{m_۲\omega_۰}{m_۱ + m_۲} = \frac{۱/۶\times ۴}{۰/۱۲ + ۱/۶} = ۳/۵۶\frac{rad}{s}$$

ب)

$$\Delta K = K_۲ - K_۱$$

$$= \frac{۱}{۲}I\omega^۲ - \frac{۱}{۲}I_۱\omega_۰^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)\,R^۲\right)\times\omega^۲ - \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}m_۲r_۲^۲\right)\times\omega_۰^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}\times(۰/۱۲ + ۱/۶)\times(۰/۱۵)^۲\right)\times(۳/۵۶)^۲ - \frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۱}{۲}\times ۱/۶\times(۰/۱۵)^۲\right)\times(۴)^۲$$

$$= -۰/۰۱۶J$$

ج)

$$t = ۲s \quad , \quad \omega_۱ = ۳/۵۶\,\frac{rad}{s} \quad , \quad \omega_۲ = ۴\,\frac{rad}{s}$$

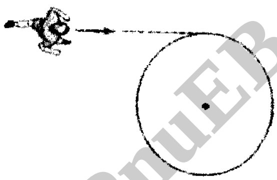
$$\omega_۲ = \alpha t + \omega_۱$$

$$۴ = \alpha\times ۲ + ۳/۵۶ \qquad \rightarrow \qquad \alpha = ۰/۲۲\frac{rad}{s^۲}$$

$$\tau = I\alpha = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)\,R^۲\alpha$$

$$= \frac{۱}{۲}\times(۱/۶ + ۰/۱۲)\times(۰/۱۵)^۲\times ۰/۲۲ = ۴/۴۵۵\times ۱۰^{-۳} \approx ۴/۵\times ۱۰^{-۳}\,\frac{Kg\,m^۲}{s}$$

۹. شخصی به جرم ۶۰Kg در راستای مماس بر لبه سکوی دایره ای بی حرکتی که می تواند بدون اصطکاک حول محور مرکزی اش بچرخد با سرعت $۵\frac{m}{s}$ در حال دویدن است. شعاع سکو ۳m و جرم آن ۱۰۰Kg است. (نگاه کنید به شکل ۲۲) این شخص با همین سرعت روی لبه سکو می پرد و همانجا می ایستد. الف) سرعت زاویه ای سیستم (شخص + سکو) چقدر است؟ ب) چقدر انرژی مکانیکی تلف می شود؟ (سکو به شکل دیسک است، یعنی $I_C = \frac{۱}{۲}MR^۲$ است.)



حل:

$$m_۱ = ۶۰Kg \quad , \quad m_۲ = ۱۰۰Kg \quad , \quad v_۱ = ۵\frac{m}{s} \quad , \quad r_۲ = ۳m$$

الف)

$$L_۱ = L_۲$$

$$m_۱ v_۱ r_۱ = \left(\frac{۱}{۲}m_۲ + m_۱\right) r_۲^۲ \omega$$

$$۶۰ \times ۵ \times ۳ = \left(\frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ + ۶۰\right) \times (۳)^۲ \times \omega \qquad \rightarrow \qquad \omega = ۰/۹۰۹\ \frac{rad}{s}$$

ب)

$$\Delta K = K_۲ - K_۱$$

$$= \frac{۱}{۲}I\omega^۲ - \frac{۱}{۲}I_۱\omega_۰^۲ = \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۱}{۲}m_۲ + m_۱\right) r_۲^۲ \omega^۲ - \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۱}{۲}m_۱ r_۱^۲\right) \times v_۱^۲$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۱۰۰ + ۶۰\right) \times (۳)^۲ \times (۰/۹۰۹)^۲ - \frac{۱}{۲} \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times (۳)^۲\right) \times (۴)^۲$$

$$= -۳۴۰/۹J \approx ۳۴۱J$$

۱۰. شخصی به جرم ۸۰Kg روی لبه یک سکوی دایره ای به جرم ۱۰۰Kg و شعاع ۲m ایستاده و همه چیز در حال سکون است. سکو می تواند کاملاً روان حول محور مرکزی اش دوران کند. شخصی با سرعت $1\frac{m}{s}$ نسبت به سکو، شروع به راه رفتن روی لبه آن می کند. در این حال سرعت زاویه ای سکو چقدر است؟ (سکو را به شکل دیسک در نظر بگیرید.)

حل:

$m_1 = 80 Kg \quad , \quad m_2 = 100 Kg \quad , \quad v_1 = 1\frac{m}{s} \quad , \quad r = 2m$

$I_C = \frac{1}{2}m_2 r^2 = \frac{1}{2}\times 100 \times (2)^2 = 200 \ Kg.m^2$

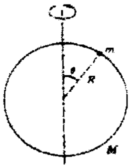
$I = I_C + m_1 r^2 = 200 + (80\times(2)^2) = 520 \ Kg.m^2$

$L_1 = L_2$

$m_1 v_1 r = I\omega$

$80\times 1\times 2 = 520\times\omega \quad \rightarrow \quad \omega = 0/308 \ \frac{rad}{s}$

۱۱. شکل ۲۳ حلقه نازکی به جرم $M = 1Kg$ و شعاع $R = 0/4m$ را نشان می دهد که حول قطر قائمش در چرخش است. مهره کوچکی به جرم $m = 0/2Kg$ می تواند بدون اصطکاک روی حلقه بلغزد. وقتی مهره در بالاترین قسمت حلقه باشد سرعت زاویه ای حلقه $5\frac{rad}{s}$ است. حساب کنید که وقتی مهره به وضعیت $\theta = 45°$ برسد سرعت زاویه ای حلقه چقدر می شود؟ (لختی دورانی حلقه حول قطرش $\frac{1}{2}MR^2$ است.)



حل:

$$M = 1Kg \quad , \quad R = 0/4m \quad , \quad m = 0/2Kg \quad , \quad \omega_1 = 5\frac{rad}{s} \quad , \quad \theta = 45°$$

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\times 1\times(0/4)^2 = 0/08\,Kg.m^2$$

$$r = R\,Sin\theta = 0/4\times Sin(45) = 0/28\,m$$

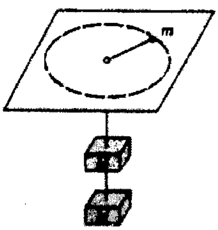
$$I = I_C + mr^2 = 0/08 + 0/28 = 0/096\,Kg.m^2$$

$$L_1 = L_2$$

$$I_C\omega_1 = I\omega_2$$

$$0/08\times 5 = 0/096\times\omega_2 \qquad \rightarrow \qquad \omega_2 = 4/17\frac{rad}{s}$$

۱۲. ذره ای به جرم m در یک مسیر دایره ای روی میز افقی بدون اصطکاکی در حرکت است. نیروی مرکز گرا را نخی تأمین می کند که از سوراخی در وسط دایره رد شده و در زیر میز به دو وزنه یکسان M کیلوگرمی متصل است (نگاه کنید به شکل ۲۴). نشن بدهید که اگر یکی از وزنه ها از نخ جدا شود، شعاع مسیر حرکت ذره با ضریب ۱/۲۶ تغییر می کند.



حل: قبل از جدا شدن وزنه

$$\begin{cases} 2Mg = T \\ T = \dfrac{mv_1^2}{r_1} = mr_1\omega_1^2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad 2Mg = mr_1\omega_1^2 \qquad (1)$$

بعد از جدا شدن وزنه

$$\begin{cases} Mg = T \\ T = \dfrac{mv_2^2}{r_2} = mr_2\omega_2^2 \end{cases} \rightarrow \quad Mg = mr_2\omega_2^2 \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{mr_1\omega_1^2}{mr_2\omega_2^2} = \frac{2Mg}{Mg} \rightarrow \frac{r_1\omega_1^2}{r_2\omega_2^2} = 2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1}} \qquad (*)$$

$$L_1 = L_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \ (**)$$

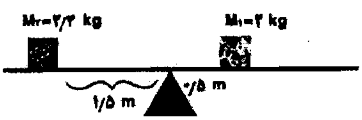
$$(*),(**) \rightarrow \frac{r_2^2}{r_1^2} = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1}} \rightarrow \frac{r_2^4}{r_1^4} = \frac{2r_2}{r_1}$$

$$\frac{r_2^3}{r_1^3} = 2 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \sqrt[3]{2} = 1/26$$

بخش ۱۲-۵- تعادل ایستا

۱۳. تخته یکنواختی به جرم ۳Kg و طول ۳m از وسط به تکیه گاهی لولا شده است. وزنه ای به جرم ۲Kg در فاصله ۵۰cm از لولا در یک طرف و وزنه دیگری به جرم ۲/۴Kg در فاصله ۱/۵m از لولا در طرف دیگر تخته قرار گرفته است. وزنه سوم ۱/۵Kg را باید در چه نقطه ای رو تخته قرار بدهیم تا سیستم متعادل شود؟ آیا لازم است که تخته افقی باشد؟

حل:



$m_1 = 3\,Kg \quad , \quad m_2 = 2\,Kg \quad , \quad m_3 = 2/4\,Kg \quad , \quad m_4 = 1/5\,Kg$

$L = 4m \quad , \quad r_2 = 50\,cm = 0/5\,m \quad , \quad r_3 = 1/5\,m$

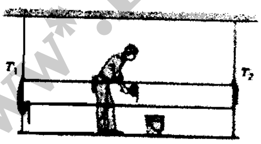
گشتاور حول لولا صفر است. جرم m_4 را در طرفی که جرم m_2 قرار دارد می گذاریم:

$\sum \tau_0 = 0$

$m_3 g r_3 - m_2 g r_2 - m_4 g r_4 = 0$

$2/4 \times 1/5 - 2 \times 0/5 - 1/5 \times r_4 = 0 \qquad \rightarrow \qquad r_4 = 1/73\,m$

۱۴. تخته یکنواختی به جرم 5Kg و طول 3/6m را با دو طناب قائم که به دو سر آن بسته شده اند آویزان کرده ایم (شکل ۲۵). نقاشی به جرم 60Kg در فاصله 0/5m از مرکز تخته در طرف چپ آن ایستاده و سطلی به جرم 8Kg در فاصله 1m از مرکز در طرف راست قرار گرفته است. کشش طناب ها، T_1 و T_2، چقدر است؟



حل:

$m_1 = 5\,Kg \quad , \quad m_2 = 60\,Kg \quad , \quad m_3 = 8\,Kg \quad , \quad L = 3/6m$

$r_1 = 0/5\,m \quad , \quad r_2 = 1m$

$\sum \tau_1 = 0$

$$T_2 \times \frac{L}{2} + T_1 \times \frac{L}{2} + m_3 g r_2 - m_2 g r_1 = 0$$

$$(T_2 + T_1) \times \frac{L}{2} = m_2 g r_1 - m_3 g r_2$$

$$(T_2 + T_1) \times \frac{3/6}{2} = 9/8 \times (8 \times 1 - 60 \times 0/5)$$

$$(T_2 + T_1) = 119/8\,N$$

حول T_1

$$T_2 \times L - m_2 g\left(\frac{L}{2} - r_2\right) - m_1 g\left(\frac{L}{2}\right) - m_3 g\left(\frac{L}{2} + r_1\right) = 0$$

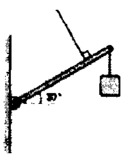
$$T_2 \times L = m_2 g\left(\frac{L}{2} - r_2\right) + m_1 g\left(\frac{L}{2}\right) + m_3 g\left(\frac{L}{2} + r_1\right)$$

$$T_2 \times 3/6 = 9/8 \times \left[60 \times \left(\frac{3/6}{2} - 0/5\right) + 5 \times \left(\frac{3/6}{2}\right) + 8 \times \left(\frac{3/6}{2} + 1\right)\right]$$

$$T_2 = 297/8\,N \approx 298\,N$$

$$T_1 = T_2 + 119/8 = 298 + 119/8 = 417/8\,N$$

۱۵. در شکل ۲۶، طول تیر لولا شده ۴m و جرم آن ۲۰Kg است. کابل نگهدارنده که در فاصله ۳m از لوله به تیر بسته شده و به آن عمود است نمی تواند کشش بیش از ۱۰۰۰N را تحمل کند. الف) بیشترین باری که می توانیم به سر تیر ببندیم چقدر است؟ ب) در این حالت، نیروهای افقی و قائمی که لولا تحمل می کند چقدر است؟



حل: الف)

$$L = 4m \quad , \quad m_1 = 20\,Kg \quad , \quad r = 3m \quad , \quad T = 1000\,N$$

$$\sum \tau = 0 \quad \rightarrow \quad T \times r - W_2 Cos(30) \times (L) - m_1 g\, Cos(30) \times (\frac{L}{2}) = 0$$

$$W_2 = \frac{(T \times r) - \left(m_1 g\, Cos(30) \times (\frac{L}{2})\right)}{Cos(30) \times (L)}$$

$$= \frac{(1000 \times 3) - \left(20 \times 9/8 \times Cos(30) \times (\frac{4}{2})\right)}{Cos(30) \times 4} = 768\,N$$

ب)

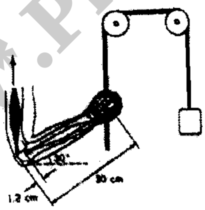
$$\begin{cases} F_x = T\,Sin(۳۰) \\ F_y + T\,Cos(۳۰) = m_۱ g + W_۲ \end{cases}$$

$$F_x = ۱۰۰۰ \times Sin(۳۰) = ۵۰۰\,N$$

$$F_y = m_۱ g + W_۲ - T\,Cos(۳۰)$$

$$= (۲۰ \times ۹/۸) + ۷۶۸ - \left(۱۰۰۰ \times Cos(۳۰)\right) = ۹۸\,N$$

۱۶. در شکل ۲۷، شخصی که ساعدش با افق زاویه ۳۰ درجه می سازد، دارد طنابی را با نیروی ۵۰N پایین می کشد. ماهیچه سه سر به فاصله ۱/۲cm از مفصل واقع شده است و نیروی قائمی اعمال می کند. ساعد را به شکل میله یکنواختی به جرم ۲Kg و طول ۳۰cm در نظر بگیرید و حساب کنید که کشش در ماهیچه سه سر چقدر است؟



حل:

$$T = ۱۵۰\,N \quad , \quad r_۱ = ۱/۲\,cm = ۰/۰۱۲\,m \quad , \quad m = ۲\,Kg \quad , \quad L = ۳۰\,cm$$

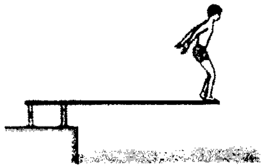
$$F\,Cos(۳۰) \times r_۱ + mg\,Cos(۳۰) \times \left(\frac{L}{۲} - r_۱\right) - T\,Cos(۳۰) \times (L - r_۱) = o$$

$$F = \frac{T\,Cos(۳۰) \times (L - r_۱) - mg\,Cos(۳۰) \times \left(\frac{L}{۲} - r_۱\right)}{Cos(۳۰)}$$

$$= \frac{۱۵۰ \times Cos(۳۰) \times (۰/۳ - ۰/۰۱۲) - ۲ \times ۹/۸ \times Cos(۳۰) \times \left(\frac{۰/۳}{۲} - ۰/۰۱۲\right)}{Cos(۳۰)}$$

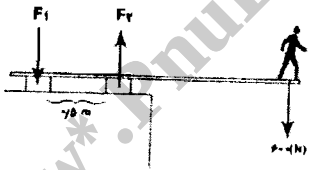
$$= ۹۷۴\,N$$

۱۷. یک شناگر ۶۰ کیلوگرمی در انتهای تخته شیرجه ای به طول ۳m که جرم قابل اغماضی دارد، ایستاده است (شکل ۲۸). تخته شیرجه در انتهای دیگرش به دو پایه، به فاصله ۵۰cm از یکدیگر، متصل شده است. هر یک از پایه ها چه نیرویی و در چه جهتی به تخته وارد می کند؟ (انعطاف تخته را در نظر نگیرید.)



حل:

$$m_1 = ۶۰ Kg \quad , \quad L = ۳ m \quad , \quad d = ۵۰ cm = ۰/۵ m$$



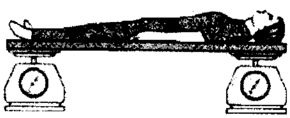
اگر یکی از پایه ها را در انتهای دیگر تخته فرض کنیم فاصله پایه دوم تا شخص $۳ - ۰/۵ = ۲/۵ m$ است. ابتدا گشتاور حول $F_۲$ را بدست می آوریم:

$F_1 \times ۰/۵ = ۶۰۰ \times ۲/۵ \quad \rightarrow \quad F_1 = ۳۰۰۰ N$ پایین

حال گشتاور حول F_1 را بدست می آوریم:

$F_2 \times ۰/۵ = ۶۰۰ \times ۳ \quad \rightarrow \quad F_2 = ۳۶۰۰ N$ بالا

۱۸. شخصی که قدش ۱/۶m است روی تیر سبکی دراز کشیده است (شکل ۲۹) و دو انتهای تیر (سر و پای شخص) روی دو ترازو قرار گرفته اند. ترازوی سمت راست ۳۵۰N و ترازوی سمت چپ ۳۰۰N را نشان می دهند. گرانیگاه در کجا واقع شده است.



حل:

$$d = 1/6m \quad , \quad W_1 = 350N \quad , \quad W_2 = 300N$$

اگر ترازوی سمت راست به اندازه x از گرانیگاه فاصله داشته باشد فاصله ترازوی سمت چپ به اندازه d-x است. گشتاور را حول گرانیگاه در نظر می گیریم:

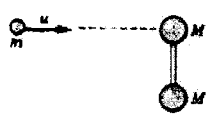
$$W_1 x = W_2(d - x)$$

$$350 \times x = 300 \times (1/6 - x) \quad \rightarrow \quad x = 0/74$$

$1/6 - 0/74 = 0/86$ پاها از

مسائل تکمیلی

۱۹. ذره ای به جرم ۰/۵Kg که با سرعت $u = 4\frac{m}{s}$ در حرکت است به دمبلی برخورد می کند (شکل ۳۰) و به یکی از وزنه های آن می چسبد. این دمبل متشکل از دو وزنه ۱ کیلوگرمی است که با میله بسیار کم جرمی به طول ۲m به هم متصل اند. دمبل و ذره می توانند روی سطح افقی بدون اصطکاک بلغزند. الف) سرعت مرکز جرم سیستم پس از برخورد و چسبیدن ذره چقدر است؟ ب) سرعت زاویه ای سیستم حول مرکز جرم چقدر است؟



حل: $u_1 = 4\frac{m}{s} \quad , \quad L = 2m \quad , \quad m_2 = m_3 = 1Kg \quad , \quad m_1 = 0/5Kg$

الف)

$$v_{Cm} = \frac{m_1 u_1 + (m_2 + m_3)u_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{0/5 \times 4 + o}{4 + 1 + 1} = 0/8\frac{m}{s}$$

ب)

$$r=\frac{L}{۲}$$

$$L_۱=m_۱u_۱r=۰/۵\times ۴\times\frac{۳}{۲}=۲\ \frac{Kg\,m^۲}{s}$$

$$y_{CM}=\frac{m_۱y_۱+m_۲y_۲+m_۳y_۳}{m_۱+m_۲+m_۳}=۰/۸\,m$$

$$L_۱=L_۲\quad,\quad v_۱=y_{CM}\omega\quad,\quad v_۲=(L-y_{CM})\omega$$

$$m_۱u_۱y_{CM}=(m_۱+m_۲)y_{CM}v_۱+m_۳(L-y_{CM})v_۲$$

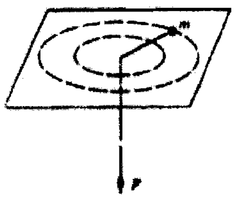
$$m_۱u_۱y_{CM}=(m_۱+m_۲)y_{CM}(y_{CM}\omega)+m_۳(L-y_{CM})((L-y_{CM})\omega)$$

$$m_۱u_۱y_{CM}=(m_۱+m_۲)(y_{CM})^۲\omega+m_۳(L-y_{CM})^۲\omega$$

$$\omega=\frac{m_۱u_۱y_{CM}}{(m_۱+m_۲)(y_{CM})^۲+m_۳(L-y_{CM})^۲}$$

$$=\frac{۰/۵\times ۴\times ۰/۸}{(۰/۵+۱)(۰/۸)^۲+۱\times(۳-۰/۸)^۲}=\frac{۲}{۳}\frac{rad}{s}$$

۲۰. شکل ۳۱ ذره ای به جرم m را نشان می دهد که در مسیر دایره ای روی میزی می چرخد. نیروی مرکز گرا توسط نخی تأمین می شود که از سوراخ وسط میز گذشته است. تانه زاویه ای اولیه L_0 است. نیروی F (وارد به نخ) را طوری تغییر می دهیم که شعاع مسیر حرکت ذره از r_1 به r_2 برسد. الف) تغییر F بر حسب r چگونه است؟ ب) این نیرو در حین تغییر شعاع مسیر چقدر کار انجام می دهد؟ ج) انرژی جنبشی ذره چگونه تغییر می کند؟ د) آیا قضیه کار ــ انرژی در این مورد صادق است؟



حل:

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad , \quad v = r\omega \quad , \quad I = mr^2$$

$$L = I\omega = mr^2(\frac{v}{r}) = mrv \quad \rightarrow \quad v = \frac{L}{mr}$$

الف) اگر F در راستای طناب به ذره وارد شود $L = L_0$

$$v = \frac{L_0}{mr} \quad \rightarrow \quad F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r}\left(\frac{L_0}{mr}\right)^2 = \frac{L_0^2}{mr^3}$$

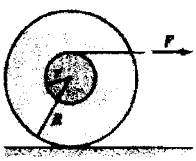
ب)

$$W = -\int F.dr = -\frac{L_0^2}{m}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^3}dr = \frac{L_0^2}{2m}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)$$

ج و د) بله

$$\Delta K = W = \frac{L_0^2}{2m}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)$$

۲۱. شکل ۳۲ چرخی است به جرم M و شعاع R که قرقره ای به شعاع r در وسط دارد (چیزی شبیه به یویو). لختی دورانی سیستم حول محور مرکزی اش I است. نخ را با نیروی F در جهتی که در شکل نشان داده شده است می کشیم. اگر هیچ لغزشی در کار نباشد الف) شتاب مرکز جرم سیستم چقدر است؟ ب) نیروی اصطکاک سطح با چرخ چقدر است؟ ج) در هر یک از حالاتی که r کوچکتر از $\frac{I}{MR}$، مساوی با این مقدار، یا بزرگتر از آن باشد هر یک از کمیتهای الف) و ب) چه تغییری می کند؟



حل:

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum \tau = I\alpha\end{cases} \rightarrow \begin{cases}F - f_k = ma \\ Fr - f_k R = I\alpha \\ a = R\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Fr - f_k R = I(\dfrac{a}{R}) \\ f_k = F - ma\end{cases}$$

الف)

$$Fr - (F - ma)R = I(\frac{a}{R})$$

$$(r - R)F = (\frac{I}{R} - mR)a \quad \rightarrow \quad a = \frac{(r - R)F}{\dfrac{I}{R} - mR}$$

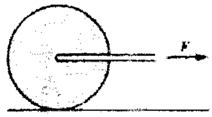
ب)

$$Fr - f_k R = \frac{I}{R}\left(\frac{F - f_k}{m}\right)$$

$$F(r - \frac{I}{R}) = f_k(R - \frac{I}{R}) \rightarrow f_k = \frac{F(r - \dfrac{I}{R})}{R - \dfrac{I}{R}} = \frac{F(rR - I)}{R^{۲} - I}$$

ج) اگر $r < \dfrac{I}{RM}$ باشد نیروی اصطکاک وجود دارد و گشتاوری هم جهت با گشتاور نیروی F می دهد. اگر $r = \dfrac{I}{RM}$ باشد نیروی اصطکاک صفر است و جسم بیشترین شتاب رو به جلو را دارد و اگر $r > \dfrac{I}{RM}$ گشتاور f_k در خلاف جهت گشتاور F است.

۲۲. در شکل ۳۳، یک غلتک استوانه ای به جرم M و شعاع R با نیروی افقی F که به محور مرکزی اش اثر می کند کشیده می شود. نشان بدهید که کمترین ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از لغزش غلتک برابر با $\dfrac{F}{۳Mg}$ است.



حل:

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_x \\ \sum \tau = I\alpha\end{cases} \rightarrow \begin{cases}F - f_s = ma \\ f_s R = I\alpha\end{cases} , \begin{cases}I = \frac{۱}{۲}mR^۲ \\ a = R\alpha\end{cases}$$

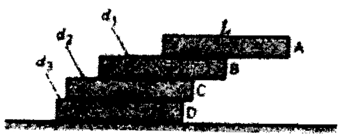
$$f_s R = I\left(\frac{a}{R}\right) \rightarrow a = \frac{f_s R^۲}{I} = \frac{f_s R^۲}{\frac{۱}{۲}mR^۲} = \frac{۲f_s}{m}$$

$$F - f_s = ma$$

$$F - f_s = m\left(\frac{۲f_s}{m}\right) = ۲f_s \rightarrow F = ۳f_s$$

$$\begin{cases}f_s = \frac{F}{۳} \\ f_s = \mu_s mg\end{cases} \rightarrow \mu_s = \frac{F}{۳mg}$$

۲۳. چهار قالب یکسان هر یک به طول L، به نحوی که در شکل ۳۴ نشان داده شده است روی هم قرار گرفته اند. الف) بیشترین مقدار $d_۱$، بی آنکه قالب A واژگون شود، چقدر است؟ ب) بیشترین مقدار $d_۲$، بی آنکه A و B از روی C بیفتند، چقدر است؟ ج) بیشترین مقدار $d_۳$، بی آنکه A و B و C واژگون شوند، چقدر می توانند باشد؟



حل: الف) قالب A حداکثر می تواند به اندازه $d_۱ = \frac{L}{۲}$ نسبت به قالب B جلو رفتگی داشته باشد. زیرا در غیر این صورت گشتاور نیروی وزن آن نسبت به لبه بالایی قالب B

باعث چرخش و افتادن آن می شود. مرکز جرم هر قالب بر مرکز هندسی آنها فرض می شود.

ب) فرض می کنیم که مرکز جرم دو قالب A و B در فاصله $d_۲$ از لبه قالب B قرار داشته باشد برای گشتاور نیروهای وارد بر این قالبها نسبت به مرکز جرم آنها

$$\tau_۱ = Wd_۲ \qquad , \qquad \tau_۲ = W(\frac{L}{۲} - d_۲)$$

برای تعادل باید $\tau_۱ = \tau_۲$

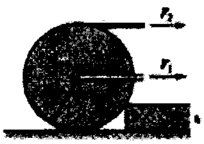
$$Wd_۲ = W(\frac{L}{۲} - d_۲) \qquad \rightarrow \qquad d_۲ = \frac{L}{۴}$$

ج) فرض می کنیم سه قالب A و B و C مطابق قسمتهای قبل روی هم قرار داشته باشند. اگر مرکز جرم این سه قالب در فاصله $d_۳$ از لبه قالب C باشد مرکز جرم قالب C به اندازه $\frac{L}{۲} - d_۳$ از مرکز جرم سه قالب فاصله دارد پس برای تعادل داریم

$$\tau_۱ = \tau_۲$$

$$۲Wd_۳ = W(\frac{L}{۲} - d_۳) \qquad \rightarrow \qquad d_۳ = \frac{L}{۶}$$

۲۴. می خواهیم استوانه ای به جرم $M = ۱۰Kg$ و شعاع $R = ۰/۴m$ را از پله ای به ارتفاع $h = ۰/۲m$ بالا ببریم (شکل ۳۵). در هر یک از حالتهای زیر چه نیروی افقی ای برای این کار لازم است؟ الف) اگر نیرو(ی $F_۱$) به محور مرکزی وارد شود، و ب) اگر نیرو(ی $F_۲$) به لبه بالا اثر کند.



حل: الف) برای اینکه چرخ از پله بالا برود باید

$$F(R - h) \geq mgR\,Cos\theta$$

فاصله افقی مرکز استوانه تا لبه پله d است

$$d = R\,Cos\theta$$

$$d = \sqrt{R^{۲} - (R-h)^{۲}} = \sqrt{R^{۲} - R^{۲} - (h^{۲} + ۲Rh} = \sqrt{h(۲R-h)}$$

$$F(R-h) \geq mgR\,Cos\theta$$

$$F(R-h) \geq mgd = mg\sqrt{h(۲R-h)}$$

$$F \geq \frac{mg\sqrt{h(۲R-h)}}{(R-h)} = \frac{۱۰\times ۹/۸ \times \sqrt{۰/۰۲\times(۲\times ۰/۴ - ۰/۰۲)}}{۰/۴ - ۰/۰۲} = ۳۲/۲۱N$$

پس باید نیرو از ۳۲/۲۱N بیشتر باشد تا استوانه از پله بالا برود.

ب)

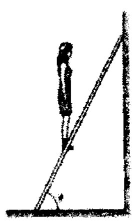
$$F(۲R-h) \geq mgR\,Cos\theta$$

$$F(۲R-h) \geq mgd = mg\sqrt{h(۲R-h)}$$

$$F \geq \frac{mg\sqrt{h(۲R-h)}}{(۲R-h)} = \frac{۱۰\times ۹/۸ \times \sqrt{۰/۰۲\times(۲\times ۰/۴ - ۰/۰۲)}}{۲\times ۰/۴ - ۰/۰۲} = ۱۵/۶۹N$$

پس باید نیرو از ۱۵/۶۹N بیشتر باشد تا استوانه از پله بالا برود.

۲۵. در شکل ۳۶، نردبانی به طول ۳m و جرم ۱۰Kg به دیوار بدون اصطکاکی تکیه دارد و با سطح افقی زاویه $\theta = ۷۰^\circ$ می سازد. شخصی به وزن ۵۰Kg روی پله ای در فاصله ۱m از پایین نردبان ایستاده است. حساب کنید که چه نیروهای افقی و قائمی از دیوار به نردبان وارد می شود.



حل:

$$L = ۳\,m \quad , \quad m_۱ = ۱۰\,Kg \quad , \quad \theta = ۷۰^\circ$$

$$m_۲ = ۵۰\,Kg \quad , \quad d = ۱\,m$$

$$\begin{cases} W_۱ + W_۲ = N_۱ \\ f_s = N_۲ \end{cases}$$

$$N_۱ = (m_۱ + m_۲)g = (۱۰ + ۵۰) \times ۹/۸ = ۵۸۸\,N$$

$$h = L\,Sin(۷۰) = ۳ \times Sin(۷۰) = ۲/۸۲\,m$$

$$R = L\,Cos(۷۰) = ۳ \times Cos(۷۰) = ۱/۰۳\,m$$

$$N_۲ h - m_۱ g\left(\frac{R}{۲}\right) - m_۲ g\left(d\,Cos(۷۰)\right) = o$$

$$N_۲ = \frac{۱}{h}\left[m_۱ g\left(\frac{R}{۲}\right) + m_۲ g\left(d\,Cos(۷۰)\right)\right]$$

$$= \frac{۱}{۲/۸۲} \times \left[۱۰ \times ۹/۸ \times \left(\frac{۱/۰۳}{۲}\right) + ۵۰ \times ۹/۸ \times \left(۱ \times Cos(۷۰)\right)\right]$$

$$= ۷۶/۹۷\,N$$

فصل ۱۳

مسئله ها

بخش ۱۳-۱ – قانون گرانش نیوتن

۱. دو ذره نقطه ای هر یک به جرم ۱۰۰Kg در فاصله ۱m از هم در حال سکون نگه داشته شده اند. اگر این ذرات در اثر جاذبه گرانشی به طرف هم راه بیفتند الف) شتاب اولیه آنها چقدر است؟ ب) وقتی فاصله آنها نصف می شود سرعتشان چقدر است؟ (فرض کنید این دو ذره از همه اجرام بزرگ به قدر کافی دورند.)

حل: الف)

$$m_1 = m_2 = 100\,Kg \quad , \quad r = 1m \quad , \quad G = 6/67\times 10^{-11}\,\frac{N.m^2}{Kg^2}$$

$$F = m_1 a = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \quad , \quad a = \frac{Gm_2}{r^2} = \frac{6/67\times 10^{-11}\times 100}{1^2} = 6/67\times 10^{-9}\ \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}(2m)v^2 = mv^2$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{Gm}{r_2} - \frac{Gm}{r_1} = Gm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$-\Delta U = \Delta K \qquad \rightarrow \qquad Gm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = mv$$

$$v = \sqrt{G\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \sqrt{6/67\times 10^{-11}\times\left(\frac{1}{0/5} - \frac{1}{1}\right)} = 8/17\times 10^{-5}\,\frac{m}{s}$$

۲. نیرویی را که الف) از خورشید و ب) از ماه به یک آدم ۷۰ کیلوگرمی در سطح زمین وارد می شود تخمین بزنید.

حل: الف)

$$m_1 = 1/99 \times 10^{30}\ Kg \quad , \quad m_2 = 70\ Kg \quad , \quad r = 2/6 \times 10^{20}\ m$$

$$G = 6/67 \times 10^{-11} \frac{N.m^2}{Kg^2}$$

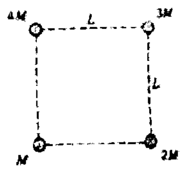
$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{6/67 \times 10^{-11} \times 1/99 \times 10^{30} \times 70}{(2/6 \times 10^{20})^2} = 2/33 \times 10^{-3}\ N$$

ب)

$$m_1 = 7/36 \times 10^{22}\ Kg \quad , \quad m_2 = 70\ Kg \quad , \quad r = 3/82 \times 10^{8}\ m$$

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{6/67 \times 10^{-11} \times 7/36 \times 10^{22} \times 70}{(3/82 \times 10^{8})^2} = 0/419\ N$$

۳. در شکل ۱۵ چهار ذره به جرمهای M، ۲M، ۳M و ۴M در گوشه های مربعی به ضلع L قرار گرفته اند. نیروی خالص وارد بر الف) ۲M و ب) ۳M را پیدا کنید.



حل: الف)

$$m_1 = M \quad , \quad m_2 = 2M \quad , \quad m_3 = 3M \quad , \quad m_4 = 4M$$

$$r_{12} = L \quad , \quad r_{32} = L \quad , \quad r_{42} = \sqrt{2}L$$

$$F_1 = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} = \frac{G \times M \times 2M}{L^2} = \frac{2GM^2}{L^2} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_1 = \frac{2GM^2}{L^2}(-\hat{i})$$

$$F_2 = \frac{Gm_3m_2}{r_{23}^2} = \frac{G \times 3M \times 2M}{L^2} = \frac{6GM^2}{L^2} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_2 = \frac{6GM^2}{L^2}(+\hat{j})$$

$$F_{۳}=\frac{Gm_{۴}m_{۳}}{r_{۴۳}^{۲}}=\frac{G\times ۴M\times ۲M}{L^{۲}}=\frac{۸GM^{۲}}{L^{۲}}$$

$$\vec{F}_{۳}=\frac{۸GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-Cos(۴۵)\hat{i}+Sin(۴۵)\hat{j}\right)=\frac{۲/۸GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-\hat{i}+\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}=\vec{F}_{۱}+\vec{F}_{۲}+\vec{F}_{۳}$$

$$=\frac{۲GM^{۲}}{L^{۲}}(-\hat{i})+\frac{۶GM^{۲}}{L^{۲}}(+\hat{j})+\frac{۲/۸GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-\hat{i}+\hat{j}\right)=\frac{GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-۴/۸\hat{i}+۸/۸\hat{j}\right)N$$

ب)

$$m_{۱}=M \quad , \quad m_{۲}=۲M \quad , \quad m_{۳}=۳M \quad , \quad m_{۴}=۴M$$

$$r_{۱۳}=\sqrt{۲}L \quad , \quad r_{۲۳}=L \quad , \quad r_{۴۳}=L$$

$$F_{۲}=\frac{Gm_{۲}m_{۳}}{r_{۲۳}^{۲}}=\frac{G\times ۳M\times ۲M}{L^{۲}}=\frac{۶GM^{۲}}{L^{۲}} \rightarrow \quad \vec{F}_{۲}=\frac{۶GM^{۲}}{L^{۲}}(-\hat{j})$$

$$F_{۴}=\frac{Gm_{۴}m_{۳}}{r_{۴۳}^{۲}}=\frac{G\times ۴M\times ۳M}{L^{۲}}=\frac{۱۲GM^{۲}}{L^{۲}} \rightarrow \quad \vec{F}_{۴}=\frac{۱۲GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-\hat{i}\right)$$

$$F_{۱}=\frac{Gm_{۱}m_{۳}}{r_{۱۳}^{۲}}=\frac{G\times M\times ۳M}{L^{۲}}=\frac{۳GM^{۲}}{L^{۲}}$$

$$\vec{F}_{۱}=\frac{۳GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-Cos(۴۵)\hat{i}-Sin(۴۵)\hat{j}\right)=\frac{۲/۱GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-\hat{i}-\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}=\vec{F}_{۱}+\vec{F}_{۲}+\vec{F}_{۴}$$

$$=\frac{۲/۱GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-\hat{i}-\hat{j}\right)+\frac{۶GM^{۲}}{L^{۲}}(-\hat{j})+\frac{۱۲GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-\hat{i}\right)=\frac{GM^{۲}}{L^{۲}}\left(-۱۳/۱\hat{i}-۷/۰۶\hat{j}\right)N$$

۴. شعاع زمین در استوا $R_e=۶۳۷۸\,Km$ و در قطب $R_p=۶۳۷۵\,Km$ است. تفاوت شدت میدان گرانشی در قطب و استوا چقدر است؟ توزیع جرم زمین را یکنواخت فرض کنید.

حل: در قطب (p) $\vec{a}_C=o$ و و در استوا (e) $\vec{a}_C=۳/۴\frac{cm}{s}$

$$R_e = ۶۳۷۸\,Km \quad , \quad R_p = ۶۳۷۵\,Km$$

$$\vec{g}_\circ = \vec{g} + \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_{Cp} = o \quad \rightarrow \quad \vec{g}_{\circ p} = \vec{g}_p$$

$$\vec{a}_{Cp} = ۳/۴\frac{cm}{s} \quad \rightarrow \quad \vec{g}_{\circ e} = \vec{g}_e + ۳/۴\frac{cm}{s}$$

$$\left(\vec{g}_{\circ p} - \vec{g}_{\circ e}\right) = \left(\vec{g}_p - \vec{g}_e\right) - ۳/۴\frac{cm}{s}$$

اندازه گیری ها نشان می دهند که

$$\vec{g}_p - \vec{g}_e = ۵/۲\frac{cm}{s}$$

$$g_{\circ p} - g_{\circ e} = ۵/۲ - ۳/۴ = ۱/۸\frac{cm}{s}$$

با اندازه گیری دقیق داریم:

$$M = ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\,Kg \quad , \quad G = ۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\frac{N.m^۲}{Kg^۲}$$

$$g_{\circ e} = \frac{GM}{R_e^۲} \quad , \quad g_{\circ p} = \frac{GM}{R_p^۲}$$

$$g_{\circ p} - g_{\circ e} = \frac{GM}{R_p^۲} - \frac{GM}{R_e^۲} = GM\left(\frac{۱}{R_p^۲} - \frac{۱}{R_e^۲}\right)$$

$$= ۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\times ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\times\left(\frac{۱}{(۶۳۷۵\times ۱۰^۳)^۲} - \frac{۱}{(۶۳۷۸\times ۱۰^۳)^۲}\right)$$

$$= ۰/۰۶۴۸۹\frac{cm}{s^۲} = ۶/۴۸\frac{cm}{s^۲}$$

۵. دوره تناوب آونگ ساده ای به طول L از رابطه $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می آید که در آن g شدت میدان گرانشی است. اگر دوره آونگ ساده ای در روی زمین ۲s باشد در سطح ماه چقدر است؟

حل:

$$T_1 = 2s \quad , \quad g_m = \frac{1}{6} g_e$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_e}} \quad , \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_m}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{1}{6}g_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{6L}{g_e}} = \sqrt{6}\times T_1 = 4/9s$$

۶. الف) شدت میدان گرانشی در سطح یک سیاره چه رابطه ای با شعاع (R) سیاره و چگالی (ρ) آن دارد؟ شدت میدان گرانشی در هریک از موراد زیر چه تغییری می کند؟ ب) اگر جرم سیاره ثابت بماند ولی شعاع آن نصف شود. ج) اگر چگالی اش نصف شود و شعاعش دو برابر شود. د) اگر چگالی اش ثابت بماند ولی حجمش دو برابر شود.

حل: الف)

$$F = \frac{GMm}{R^2} = mg \quad , \quad M = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$F = \frac{GMm}{R^2} = \frac{G\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)m}{R^2} = \frac{4}{3}\rho G\pi Rm$$

$$g = \frac{F}{m} = \frac{4}{3}\rho G\pi R$$

ب)

$$g_1 = \frac{GM}{R_1^2} \quad , \quad R_2 = \frac{R_1}{2} \quad \rightarrow \quad g_2 = \frac{GM}{R_2^2} = \frac{GM}{(\frac{R_1}{2})^2} = \frac{4GM}{R_1^2} = 4g_1$$

ج)

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{2} \quad , \quad R_2 = 2R_1$$

$$M_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)$$

$$M_2 = \rho_2 V_2 = \left(\frac{\rho_1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi(2R_1)^3\right) = 4\rho_1\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right) = 4M_1$$

$$g_۱=\frac{GM_۱}{R_۱^۲}\quad,\quad g_۲=\frac{GM_۲}{R_۲^۲}=\frac{G(۴M_۱)}{(۲R_۱)^۲}=\frac{۴GM}{۴R_۱^۲}=g_۱$$

د)

$$V_۲=۲V_۱$$

$$V_۱=\frac{۴}{۳}\pi R_۱^۳\quad,\quad V_۲=\frac{۴}{۳}\pi R_۲^۳$$

$$\left(\frac{۴}{۳}\pi R_۲^۳\right)=۲\left(\frac{۴}{۳}\pi R_۱^۳\right)\quad\rightarrow\quad\frac{R_۲}{R_۱}=\sqrt[۳]{۲}=۱/۲۶\quad\Rightarrow\quad R_۲=۱/۲۶R_۱$$

$$g_۱=\frac{۴}{۳}\rho G\pi R_۱\quad,\quad g_۲=\frac{۴}{۳}\rho G\pi R_۲=\frac{۴}{۳}\rho G\pi\left(۱/۲۶R_۱\right)=۱/۲۶g_۱$$

بخش ۱۳-٤- انرژی پتانسیل گرانشی و سرعت فرار

۷. موشکی در راستای قائم به هوا پرتاب می شود و تا ارتفاع $۴R_E$ (چهار برابر شعاع زمین) اوج می گیرد. سرعت پرتاب موشک چقدر بوده است؟ چرخش زمین و مقاومت هوا را نديده بگيريد.

حل:

$$h=۴R_e\quad,\quad R_e=۶۳۷۸۰۰۰m$$

$$\frac{۱}{۲}mv^۲=\frac{GmM}{h}\quad,\quad g=\frac{GM}{R_e^۲}$$

$$v=\sqrt{\frac{۲GM}{h}}=\sqrt{\frac{۲GM}{۴R_e}}=\sqrt{\frac{۱}{۲}gR_e}=\sqrt{\frac{۱}{۲}\times۹/۸\times۶۳۷۸۰۰۰}=۵/۶\frac{m}{s}$$

۸. در فضای تهی از گرانش اجرام آسمانی، پشه ای پشت فیلی به جرم ۲۰۰۰Kg نشسته است. سرعت فرار این پشه از فیل چقدر است؟ فیل را به شکل کره ای یکنواخت به شعاع 1m فرض کنید.

حل:

$$M = ۲۰۰۰ Kg \quad , \quad R = ۱ m$$

$$\frac{۱}{۲} mv^۲ = \frac{GmM}{R} \quad ,$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۲۰۰۰}{۱}} = ۵/۱۶ \times ۱۰^{-۴} \frac{m}{s}$$

۹. حداقل انرژی (خالص) برای آنکه یک جسم ۱ کیلوگرمی را از سطح زمین به سطح ماه ببریم چقدر است؟ شدت میدان گرانشی در سطح ماه (g_M) تقریباً ۰/۱۶ شدت میدان گرانشی در سطح زمین (g_E) است، و $g = \frac{GM}{R^۲}$ نیروی گرانشی بر واحد جرم در سطح کره (ماه یا زمین) است. ب) نشان بدهید که این انرژی (در قسمت الف) تقریباً دو برابر کار لازم برای قرار دادن جسم در مداری نزدیک به زمین است.

حل:

$$m_۱ = ۱ Kg \quad , \quad R_e = ۶۳۷۸۰۰۰ m \quad , \quad R_m = ۱۷۴۰۰۰۰ m$$

$$M_e = ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴} Kg \quad , \quad M_m = ۷/۳۶ \times ۱۰^{۲۲} Kg$$

$$\Delta K = \Delta U = Gm\left(\frac{M_e}{R_e} - \frac{M_m}{R_m}\right)$$

$$= ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \times ۱ \times \left(\frac{۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}}{۶۳۷۸۰۰۰} - \frac{۷/۳۶ \times ۱۰^{۲۲}}{۱۷۴۰۰۰۰}\right) = ۶۰ MJ$$

ب)

$$\Delta E = \frac{GMm}{۲R_e} \quad , \quad g = \frac{GM}{R_e^۲}$$

$$\Delta E = \frac{۱}{۲} mR_e = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۶۳۷۸۰۰۰ = ۳/۱ MJ$$

بخش ۱۳-۵- قوانین کپلر

۱۰. ماهواره ای در یک مدار دایره ای به شعاع r می گردد. هر یک از کمیتهای زیر چه رابطه ای با r دارد: الف) سرعت ، ب) دوره تناوب، ج) تکانه خطی، د) انرژی جنبشی و ه) تکانه زاویه ای ماهواره.

حل: الف)

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{GMm}{r^۲} \quad , \quad v = \sqrt{\frac{۲GM}{r}} \quad \rightarrow \quad v \ \alpha \ r^{-\frac{۱}{۲}}$$

ب)

$$v = r\omega$$

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi r}{v} = \frac{۲\pi r}{\sqrt{\frac{۲GM}{r}}} = ۲\pi\sqrt{\frac{r^۳}{۲GM}} \quad \rightarrow \quad T \ \alpha \ r^{\frac{۳}{۲}}$$

ج)

$$P = mv = m\sqrt{\frac{۲GM}{r}} \quad \rightarrow \quad P \ \alpha \ r^{-\frac{۱}{۲}}$$

د)

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}m\left(\sqrt{\frac{۲GM}{r}}\right)^۲ = \frac{۲GmM}{r} \quad \rightarrow \quad K \ \alpha \ r^{-۱}$$

ه)

$$L = mrv = mr\sqrt{\frac{۲GM}{r}} = \sqrt{۲GMmr} \quad \rightarrow \quad L \ \alpha \ r^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۱. سرعت زمین در حضیض مدار بیضی اش $v_p = ۳/۰۳\times ۱۰^۴ \frac{m}{s}$ است. اگر فاصله زمین از خورشید در حضیض و اوج به ترتیب $r_p = ۱/۴۷\times ۱۰^{۱۱} m$ و $r_A = ۱/۵۲\times ۱۰^{۱۱} m$ باشد، سرعت زمین در اوج (v_A) چقدر است؟

حل:

$$v_p = ۳/۰۳\times ۱۰^{۴}\frac{m}{s} \quad , \quad r_p = ۱/۴۷\times ۱۰^{۱۱} m \quad , \quad r_A = ۱/۵۲\times ۱۰^{۱۱} m$$

$$r_A v_A = v_p r_p$$

$$v_A = \frac{v_p r_p}{r_A} = \frac{۳/۰۳\times ۱۰^{۴}\times ۱/۴۷\times ۱۰^{۱۱}}{۱/۵۲\times ۱۰^{۱۱}} = ۲/۹۳\times ۱۰^{۴}\ \frac{m}{s} = ۲۹/۳\ \frac{Km}{s}$$

۱۲. با استفاده از معادلات ۸ و ۹ معادلات ۱۰ و ۱۱ را بدست آورید.

حل:

$$r_A v_A = v_p r_p \qquad (۸) \qquad \rightarrow \qquad v_A = \frac{v_p r_p}{r_A} \ , \ v_A^{۲} = \frac{v_p^{۲} r_p^{۲}}{r_A^{۲}}$$

$$۲GM\left(\frac{۱}{r_p} - \frac{۱}{r_A}\right) = v_p^{۲} - v_A^{۲} \qquad (۹)$$

$$۲GM\left(\frac{۱}{r_p} - \frac{۱}{r_A}\right) = v_p^{۲} - \left(\frac{v_p r_p}{r_A}\right)^{۲} = v_p^{۲}\left(۱ - \left(\frac{r_p}{r_A}\right)^{۲}\right)$$

$$۲GM\left(\frac{r_A - r_p}{r_p r_A}\right) = v_p^{۲}\left(\frac{r_A^{۲} - r_p^{۲}}{r_A^{۲}}\right) = v_p^{۲}\left(\frac{(r_A - r_p)(r_A + r_p)}{r_A^{۲}}\right)$$

$$۲GM\left(\frac{۲۱}{r_p}\right) = v_p^{۲}\left(\frac{r_A + r_p}{r_A}\right)$$

$$۲a = r_A + r_p$$

$$v_p^{۲} = \frac{GM}{a}\left(\frac{r_A}{r_p}\right) \quad , \quad v_A^{۲} = \frac{v_p^{۲} r_p^{۲}}{r_A^{۲}} = \left(\frac{r_p^{۲}}{r_A^{۲}}\right)\frac{GM}{a}\left(\frac{r_A}{r_p}\right) = \frac{GM}{a}\left(\frac{r_p}{r_A}\right)$$

$$E_A = \frac{۱}{۲}mv_A^{۲} - \frac{GMm}{r_A} = \frac{۱}{۲}m\left(\frac{GM}{a}\left(\frac{r_p}{r_A}\right)\right) - \frac{GMm}{r_A} = \frac{GMm}{r_A}\left(\frac{r_p}{۲a} - ۱\right)$$

$$= \frac{GMm}{r_A}\left(\frac{r_p}{r_A + r_p} - ۱\right) = \frac{GMm}{r_A}\left(\frac{r_p - (r_A + r_p)}{r_A + r_p}\right) = -\frac{GMm}{۲a}$$

مسائل تکمیلی

۱۳. نشان بدهید که دوه تناوب ماهواره های کم ارتفاع بستگی به چگالی سیاره دارد ولی مستقل از شعاع آن است.

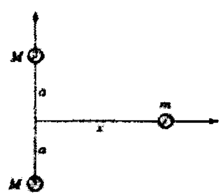
حل:

$$M = \rho V = \frac{۴}{۳}\pi \rho R^{۳}$$

$$T = ۲\pi \sqrt{\frac{R^{۳}}{GM}} = ۲\pi \sqrt{\frac{R^{۳}}{G\left(\frac{۴}{۳}\pi \rho R^{۳}\right)}} = ۲\pi \sqrt{\frac{۳}{G۴\pi \rho}}$$

$$T^{۲} = ۴\pi^{۲}\left(\frac{۳}{G۴\pi\rho}\right) = \frac{۳\pi}{G\rho}$$

۱۴. در شکل ۱۶ دو ذره یکسان به جرم M در $y = +a$ و $y = -a$ قرا گرفته اند. ذره ای به جرم m در نقطه (o و x) واقع شده است. الف) انرژی پتانسیل $U(x)$ این سیستم چقدر است؟ ب) با استفاده از $U(x)$ نیروی F_x وارد بر ذره m را پیدا کنید. ج) به ازای چه مقدار x این نیرو بیشینه است؟ د) منحنی تغییرات F_x را بر حسب x رسم کنید.



حل:

$$m_{۱} = m_{۲} = M \quad , \quad m_{۳} = m \quad , \quad r_{۱۳} = r_{۲۳} = \sqrt{a^{۲} + x^{۲}}$$

الف)

$$U = \frac{Gm_{۱}m_{۳}}{r_{۱۳}} + \frac{Gm_{۲}m_{۳}}{r_{۲۳}} = \frac{GMm}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}} + \frac{GMm}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}} = \frac{۲GMm}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}$$

ب)

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{۲GMm}{\sqrt{a^۲ + x^۲}}\right) = -\frac{d}{dx}\left(۲GMm(a^۲ + x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}\right)$$

$$= -۲GMm\left(-\frac{۱}{۲}(۲x)(a^۲ + x^۲)^{-\frac{۳}{۲}}\right) = \frac{۲GMmx}{(a^۲ + x^۲)^{+\frac{۳}{۲}}}$$

ج)

$$\frac{dF}{dx} = o \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{۲GMmx}{(a^۲ + x^۲)^{+\frac{۳}{۲}}}\right) = o$$

$$۲GMm\left(\frac{(a^۲ + x^۲)^{+\frac{۳}{۲}} - x\left(\frac{۳}{۲}(۲x)(a^۲ + x^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right)}{(a^۲ + x^۲)^۳}\right) = o$$

$$(a^۲ + x^۲)^{+\frac{۳}{۲}} - \left(۳x^۲)(a^۲ + x^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right) = o$$

$$a^۲ + x^۲ = ۳x^۲ \quad \rightarrow \quad ۲x^۲ = a^۲ \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{a}{\sqrt{۲}}$$

۱۵. موشکی در جهت زاویه ۶۰ درجه نسبت به قائم با سرعت اولیه $v_\circ = \sqrt{\frac{GM}{R}}$، که در آن M جرم زمین و R شعاع آن است، پرتاب می شود. نشان بدهید که این موشک حداکثر به فاصله $\frac{۳R}{۲}$ از مرکز زمین می رسد. (به دو اصل پایستگی نیاز دارید.)

حل:

$$\theta = ۶۰^\circ \quad , \quad v_\circ = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$E_i = \frac{۱}{۲}mv_\circ^۲ - \frac{GMm}{R} = \frac{۱}{۲}m\left(\sqrt{\frac{GM}{R}}\right)^۲ - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{۲R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{۲R}$$

$$E_f = -\frac{GMm}{R+h}$$

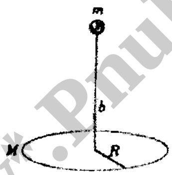
$$E_i = E_f$$

$$-\frac{GMm}{۲R} = -\frac{GMm}{R+h} \quad \rightarrow \quad R+h=۲R \quad \Rightarrow \quad h=R$$

$$d = h\,Cos(۶۰) = R(\frac{۱}{۲}) = \frac{R}{۲}$$ فاصله‌از سطح زمین

$$R+\frac{R}{۲} = \frac{۳R}{۲}$$ فاصله‌از مرکز زمین

۱۶. حلقه ای به شعاع R و جرم M داریم (شکل ۱۷). ذره ای به جرم m روی محور حلقه و به فاصله b از مرکز آن قرار گرفته است. نیروی گرانشی ای که حلقه به ذره وارد می کند چقدر است؟ وقتی $b >> R$ باشد جواب شما به چه شکلی در می آید؟



حل:

$$dU = \frac{GMdm}{r} \quad , \quad r=\sqrt{b^۲+R^۲} \quad , \quad \begin{cases} dm = \lambda\, dl = \lambda R d\theta \\ m = ۲\pi\lambda R \end{cases}$$

$$U = \int\frac{GMdm}{r} = \int^{\pi}\frac{GM\lambda R d\theta}{\sqrt{b^۲+R^۲}} = \frac{GM\lambda R}{\sqrt{b^۲+R^۲}}\int^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{GM\lambda R}{\sqrt{b^۲+R^۲}}(۲\pi) = \frac{GMm}{\sqrt{b^۲+R^۲}}$$

$$F = -\frac{dU}{db} = -\frac{d}{db}\left(\frac{GMm}{\sqrt{b^۲+R^۲}}\right) = -\frac{d}{db}\left(GMm(b^۲+R^۲)^{-\frac{۱}{۲}}\right)$$

$$= -GMm\left(-\frac{۱}{۲}(۲b)(b^۲+R^۲)^{-\frac{۳}{۲}}\right) = \frac{GMmb}{(b^۲+R^۲)^{+\frac{۳}{۲}}}$$

$$b >> R \quad \rightarrow \quad F = \frac{GMmb}{(b^۲+R^۲)^{+\frac{۳}{۲}}} = \frac{GMmb}{b^۳\left(۱+\frac{R^۲}{b^۲}\right)^{+\frac{۳}{۲}}} = \frac{GMm}{b^۲}$$