چند جمله‌ای تیلور سینوس حول ۰ تا درجه (2k) را در نظر می‌گیریم :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \pm \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + 0$$

با توجه به خطای این تقریب درجه (2k) عبارت است از

$$\frac{\sin^{(2k+1)}(c)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$$

که در اینجا c نقطه‌ای بین 0 و x است. مشتق سینوس از هر مرتبه برابر به علاوه یا منهای سینوس یا کسینوس است،

پس $|\sin^{(2k+1)}(c)| \leq 1$. در نتیجه

$$|\text{خطا}| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

برای $x = \frac{1}{100}$ می‌خواهیم $\frac{10^{-4k-2}}{(2k+1)!} < 10^{-10}$ یا $\frac{1}{(2k+1)!} < 10^{4k-8}$

این نامساوی به ازای $k=1$ برقرار نمی‌شود ولی به ازای $k=2$ داریم $\frac{1}{5!} < 1$. بنابراین تقریب مورد

نظر به ازای $k=2$ بدست می‌آید یعنی

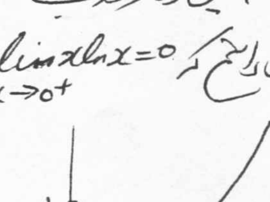
$$\sin\frac{1}{100} \approx x - \frac{x^3}{3!} = \frac{1}{100} - \frac{1}{6\times 10^6}$$

۲) الف) با استفاده از انتگرال جزء به جزء تابع اولیه‌ای برای $\ln x$ پیدا کنید

$$\int \ln x\,dx = \int (\ln x)\cdot 1\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - x$$

روی بازه $]0,\infty[$ با افزودن ثابت همه تابع‌های اولیه حاصل می‌شوند، پس $F(x)=x\ln x-x+C$ و برای $F(1)=0$ داریم $0=0-1+C \Leftarrow C=1$، پس $F(x)=x\ln x-x+1$. برای رسم نمودار F توجه کنید که $F'(x)=\ln x$ در $x=1$ صفر می‌شود، به ازای $x>1$ مثبت و به ازای $0<x<1$ منفی است، پس در $x=1$ دارای مینیمم است. $F''(x)=\frac{1}{x}>0$، پس نمودار محدب است. $F(x)=x(\ln x-1)+1$، پس وقتی $x\to+\infty$، داریم $F(x)\to+\infty$. از درس می‌دانیم که $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$، پس $F(x)\to 1$ وقتی $x\to 0^+$. بالاخره

$F'(x)=\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$



۷

۲) ب) قرار می‌دهیم

$$A_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

پس

$$\ln A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

این یک مجموع ریمان برای تابع $\ln x$ روی بازه $[1,2]$ است که به n قسمت مساوی افراز شده و انتهای سمت راست هر زیربازه در نظر گرفته شده است. پس

$$\lim_{n\to+\infty}\ln A_n \longrightarrow \int_1^2 \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 = 2\ln 2-2-(0-1) = 2\ln 2-1$$

(طبق قسمت الف)

۵

سوال ۳

با استفاده از $u=4-x$ ، $du=-dx$ ، داریم

$$\int_1^7 \sqrt{\frac{9-x}{1+x}}\,dx = -\int_3^{-3}\sqrt{\frac{5+u}{5-u}}\,du = \int_{-3}^{3}\sqrt{\frac{5+u}{5-u}}\,du = \int_{-3}^{3}\frac{\sqrt{25-u^2}}{5-u}\,du$$

حال از تعویض متغیر $u=5\sin\theta$ ، $du=5\cos\theta\, d\theta$ ، استفاده می‌کنیم. توجه کنید که

$$\sqrt{25-u^2}=5|\cos\theta|$$

چون برای $1\le x\le 7$ ، داریم $-3\le u=4-x\le 3$ ، داریم $-\frac{3}{5}\le \sin\theta\le \frac{3}{5}$ ، داریم $\cos\theta>0$ ، پس $\sqrt{25-u^2}=5\cos\theta$ و در نتیجه:

$$\int_{-3}^{3}\frac{\sqrt{25-u^2}}{5-u}\,du = \int_{-\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\sin^{-1}(\frac{3}{5})}\frac{5\cos\theta}{5-5\sin\theta}\,5\cos\theta\, d\theta = 5\int_{-\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\sin^{-1}\frac{3}{5}}\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}\,d\theta = (5)\int_{-\sin^{-1}(\frac{3}{5})}^{\sin^{-1}\frac{3}{5}}(1+\sin\theta)\,d\theta$$

تابع $\sin\theta$ تابعی فرد است، پس انتگرال آن روی بازه متقارن صفر می‌شود و می‌ماند:

$$(5)\int_{-\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\sin^{-1}\frac{3}{5}} d\theta = (10)\sin^{-1}\frac{3}{5}$$