راهنمای حل سؤالات امتحان میان ترم اول ـ ریاضی عمومی ۱ (گروههای ۸—۱ دکتر شهشهانی)

---

۱) <u>راه‌حل اول:</u> بازهٔ باز I را اگر به‌صورت $I=]a,b[$ بنویسیم، $b-a=l>۰$، عدد N را طوری می‌گیریم که $c=\frac{۱}{۱۰^N}<l$ یعنی $c=۰/۰\cdots۰۱۰۰۰۰\cdots$ که رقم ۱ در مکان $N-$ام پس‌از ممیز قرار دارد.

حال عدد صحیح k وجود دارد که $a<kc<b$، زیرا که مضارب c به دلخواه بزرگ می‌شوند، فاصلهٔ دو مضرب متوالی c، برابر c است، پس به‌ناچار دست‌کم یک مضرب c در $]a,b[$ قرار می‌گیرد. حال اگر عدد صحیح k را در c ضرب کنیم، kc مختومه است.

<u>راه‌حل دوم:</u> در بازهٔ I دو نقطهٔ c و d درنظر می‌گیریم که $c<d$،

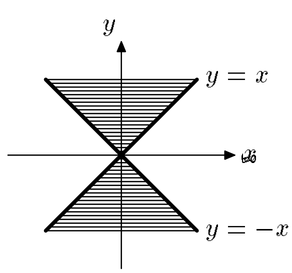
$$c=c_۰/c_۱c_۲c_۳\cdots$$
$$d=d_۰/d_۱d_۲d_۳\cdots$$

n را کوچک‌ترین عددی می‌گیریم که $c_n<d_n$. عدد $d=d_۰/d_۱\cdots d_n۰۰۰\cdots$ خاصیت موردنظر را دارد.

۲) $۵i=۵(\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲})$ پس ریشه‌های سوم $۵i$ عبارت‌اند از:

$$\sqrt[۳]{۵}\left(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}\right)=\sqrt[۳]{۵}(\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}+i\tfrac{۱}{۲})=\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt[۳]{۵}+i\tfrac{\sqrt[۳]{۵}}{۲},$$
$$\sqrt[۳]{۵}\left(\cos(\frac{\pi}{۶}+\frac{۲\pi}{۳})+i\sin(\frac{\pi}{۶}+\frac{۲\pi}{۳})\right)=\sqrt[۳]{۵}(-\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}+i\tfrac{۱}{۲})=-\tfrac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt[۳]{۵}+i\tfrac{\sqrt[۳]{۵}}{۲},$$
$$\sqrt[۳]{۵}\left(\cos(\frac{\pi}{۶}+\frac{۴\pi}{۳})+i\sin(\frac{\pi}{۶}+\frac{۴\pi}{۳})\right)=\sqrt[۳]{۵}(۰-i)=-\sqrt[۳]{۵}i$$

۳) بنویسید $z=x+iy$.



پس $z^۲=(x^۲-y^۲)+i(۲xy)$ پس $\mathrm{Re}(z^۲)=x^۲-y^۲<۰$ مجموعهٔ (x,y) هایی که در این نامساوی صدق می‌کنند نقاط بالا و پایین خطوط $y=\pm x$ هستند.

۴) مرکز دوران و تجانس در دوران و تجانس ثابت می‌ماند، پس

$$(۱+i)z_۰-۱=z_۰\quad\Longrightarrow\quad iz_۰=۱\quad\Longrightarrow\quad z_۰=-i$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} (۱+i)z_\circ - ۱ &= (۱+i)(z_\circ + i - i) - ۱ \\ &= \sqrt{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + i\frac{۱}{\sqrt{۲}})(z+i) - i + ۱ - ۱ \\ &= \sqrt{۲}(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + i\frac{۱}{\sqrt{۲}})(z+i) - i \end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب نخست همهٔ نقاط به اندازهٔ $(+i)$ منتقل شده‌اند، پس نقطهٔ $(-i)$ به $\circ$ فرستاده شده‌است، سپس دوران $\frac{\pi}{۴}$ و بعداز آن تجانس با ظریب $\sqrt{۲}$ انجام شده و بالاخره نتیجه به اندازهٔ $(-i)$ منتقل شده، یعنی نقطهٔ $(-i)$ به جای اولیهٔ خود بازگشته است. زاویهٔ دوران $\frac{\pi}{۴}$، ضریب تجانس $\sqrt{۲}$.

۵)

$$\frac{\frac{۱+n+n^۲}{۱+n+n^۲+n^۳}}{\frac{۱}{n}} = \frac{n+n^۲+n^۳}{۱+n+n^۲+n^۳} \quad \longrightarrow \circ \qquad \circ < ۱ < +\infty$$

پس طبق آزمون نسبت، از آنجا که $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست، سری داده‌شده واگراست.

برای سری بعدی با آزمون ریشه:

$$\sqrt[n]{\frac{n^{۱\circ}}{۱\circ^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{۱\circ}}{۱\circ} \quad \longrightarrow \frac{۱}{۱\circ} < ۱$$

چون $\sqrt[n]{n} \to ۱$ ، بنابراین همگراست. یا با استفاده از آزمون نسبت:

$$\frac{\frac{(n+۱)^{۱\circ}}{۱\circ^{n+۱}}}{\frac{n^{۱\circ}}{۱\circ^n}} = \frac{(۱+\frac{۱}{n})^{۱\circ}}{۱\circ} \quad \longrightarrow \frac{۱}{۱\circ} < ۱$$

پس همگراست.

۶)

(الف)

$$\begin{aligned} |A^۲ - A_n^۲| &= |A + A_n|\,|A - A_n| \\ &\leq (۲A)\,|A - A_n| \\ &\leq (۲A)\,\frac{۱}{۱\circ^n} \leq (۲ \times ۸۵۷)\,\frac{۱}{۱\circ^n} = \frac{۱۷۱۴}{۱\circ^n} \end{aligned}$$

می‌خواهیم این عدد کوچکتر از $۱\circ^{-۲}$ باشد، یعنی؛

$$\frac{۱۷۱۴}{۱\circ^n} < \frac{۱}{۱\circ^۲} \iff ۱\circ^{n-۲} > ۱۷۱۴$$

که $n \geq ۶$ کار می‌کند.(۲ نمره)

(ب) در بالا به جای ۸۵۷×۲، $(a_\circ + ۱) \times ۲$ را باید درنظر بگیریم، پس

$$\frac{۲a_\circ}{۱\circ^n} < \frac{۱}{۱\circ^۲} \iff ۱\circ^{n-۲} > ۲(a_\circ + ۱)$$

بنابراین با بزرگتر کردن $a_\circ$ وقتی تعداد ارقام آن بزرگتر شود، باید n بزرگتر انتخاب کرد.(۲ نمره)

(ج) طبق قرارداد روند کردن اگر A'_n تقریب روندشدهٔ A به n رقم پس‌از ممیز باشد، داریم:
$|A - A'_n| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{10^n}$
بنابراین در محاسبهٔ (الف):

$$\begin{aligned} |A^2 - A'^2_n| &\leq |A + A'_n|\,|A - A'_n| \\ &\leq 2A \times \frac{1}{2}\frac{1}{10^n} = \frac{857}{10^n} \end{aligned}$$

حال

$$\frac{857}{10^n} < \frac{1}{10^2} \Longleftrightarrow 857 < 10^{n-2}$$

پس $n = 5$ کار می‌کند. (۲ نمره)

۷) می‌نویسیم $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$، برای دست‌کم یکی از زیربازه، یعنی $[0, \frac{1}{2}]$ یا $[\frac{1}{2}, 1]$ بی‌نهایت اندیس n وجود دارد که a_n در آن زیربازه است، (وگرنه مجموع اندیس‌های ممکن متناهی خواهد شد.) یک زیر بازه با این ویژگی را اختیار کرده I_1 بنامید. رقم اول پس‌از ممیز نقطه‌ای را که در جستجوی آن هستیم به‌طریق زیر تعین می‌کنیم:
$c = 0/c_1c_2c_3\cdots$ نامزد حد دنباله (مبنای ۲)

$$c_1 = \begin{cases} 0 & I_1 = [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & I_1 = [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

حال I_1 را به دو زیربازهٔ بسته هریک به‌طول $\frac{1}{4}$ تجزیه می‌کنیم که فقط در یک نقطهٔ مرزی اشتراک دارند. مجدداً برای دست‌کم یکی از این زیربازه‌ها بی‌نهایت اندیس n هست که a_n عضو آن زیربازه است. چنین بازه‌ای را I_2 می‌نامیم. (درصورتی‌که هر دو این ویژگی را داشته‌باشند، یکی را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم.) تعریف می‌کنیم:

$$c_2 = \begin{cases} 0 & \text{اگر } I_2 \text{ زیربازهٔ چپ } I_1 \text{ باشد.} \\ 1 & \text{اگر } I_2 \text{ زیربازهٔ راست } I_1 \text{ باشد.} \end{cases}$$

با تقسیم دوبارهٔ I_2 این فرایند را ادامه می‌دهیم و c_n ها را به همین ترتیب تعریف می‌کنیم. نقطهٔ $c = 0/c_1c_2c_3\cdots$ در همهٔ این بازه‌های $[0, 1]$، I_1، I_2، ... قرار دارد.
نشان می‌دهیم: $a_n \longrightarrow c$.
برای اثبات، نخست ادعا می‌کنیم:

($\star$) برای‌هر بازهٔباز J شامل c، بی‌نهایت اندیس n وجود دارد که a_n در J است.
اثبات. فرض کنید $J =]c - e_1, c + e_2[$، n را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $\frac{1}{2^n} < e_1$ و $\frac{1}{2^n} < e_2$. چون طول بازهٔ I_n برابر $\frac{1}{2^n}$ و c عضو I_n است، I_n به تمامی در J قرار می‌گیرد، پس طبق خاصیتی که برای I_n قائل شدیم، بی‌نهایت اندیس n وجود دارد که a_n در I_n و همین طور در J قرار دارد.

حال نشان می‌دهیم $a_n \longrightarrow c$.
برای $e > 0$ داده‌شده می‌خواهیم N را طوری بیابیم که $n > N$ نتیجه دهد $|c - a_n| < e$.

طبق فرض، برای $\frac{e}{3} > 0$ داده‌شده، N_1 وجود دارد که هرگاه n, m از N_1 بزرگتر باشند، آنگاه $|a_m - a_n| < \frac{e}{3}$. بنابر($\star$) بی‌نهایت اندیس n وجود دارد که $|a_n - c| < \frac{e}{3}$، بنابراین اندیس N وجود دارد که $N > N_1$ و $|a_N - c| < \frac{e}{3}$. این N کار می‌کند زیرا اگر $n, m > N$، داریم: $|a_m - a_n| < \frac{e}{3}$ و چون m و N هردو از N_1 بزرگترند؛ $|a_m - a_N| < \frac{e}{3}$ و بالاخره N طوری انتخاب شد که: $|a_N - c| < \frac{e}{3}$.

حال طبق نامساوی مثلث

$$\begin{aligned} |a_n - c| &\leq |a_n - a_m| + |a_m - a_N| + |a_N - c| \\ &< \frac{e}{3} + \frac{e}{3} + \frac{e}{3} = e \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

۸)

(الف) چون $\sum a_n$ همگراست، طبق شرط لازم همگرائی $a_n \longrightarrow 0$، پس N وجود دارد که $n > N \implies |a_n| < 1$ بنابراین: $n > N \implies |a_n b_n| \leq |b_n|$
حال چون $0 \leq |a_n b_n| \leq |b_n|$ برای $n > N$، طبق آزمون مقایسه $\sum |a_n b_n|$ همگراست.(۳ نمره)

(ب) می‌توان گرفت $a_n = b_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$، بنابر آزمون سری متناوب لایب‌نیتس، $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا هستند ولی $a_n b_n = \frac{1}{n}$ سری هارمونیک را پدید می‌آورد که می‌دانیم واگراست.(۳ نمره)