جواب‌ها

۱) الف) تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $g(x)=f(x+\pi)-f(x)$ تعریف می‌کنیم. چون f پیوسته فرض شده، g نیز پیوسته است. ادعا می‌کنیم نقطه‌ای a وجود دارد که $g(a)=0$. برای نقطهٔ دلخواه $b\in\mathbb{R}$ داریم

$$g(b+\pi)=f((b+\pi)+\pi)-f(b+\pi)=f(b+2\pi)-f(b+\pi)=f(b)-f(b+\pi)=-g(b)$$ ۵ن

بنابراین یا $g(b)=0$ که حکم به دست آمده است، و یا $g(b)\neq 0$ که در این صورت $g(x)$ در دو انتهای $[b,b+\pi]$ علامت مختلف دارد. از پیوستگی و قضیهٔ مقدار میانی نتیجه می‌شود که نقطهٔ a بین b و $b+\pi$ هست که $g(a)=0$.

ب) فرض کنید $[b,b+2\pi]$ بازه‌ای دلخواه به طول 2π است. اگر $f(b)=f(b+\pi)$ که بنابر متناوب بودن f داریم $f(b)=f(b+\pi)=f(b+2\pi)$ و طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه‌های c و c' وجود دارند که $b<c<b+\pi<c'<b+2\pi$ به طوری که $f'(c)=0$ و $f'(c')=0$. اگر $f(b)$ برابر $f(b+\pi)$ نباشد، طبق (الف) نقطه‌ای a وجود دارد $b<a<b+\pi$ به طوری که $f(a)=f(a+\pi)$. پس طبق قضیهٔ مقدار میانگین نقطه‌ای c بین a و $a+\pi$ هست ($a<c<a+\pi$) که $f'(c)=0$. در ضمن $b<a<c<a+\pi<b+2\pi$ یعنی c در داخل $[b,b+2\pi]$ است. حال چون f متناوب است، $f(a+2\pi)=f(a+\pi)$، پس نقطه‌ای c' وجود دارد $a+\pi<c'<a+2\pi$ که $f'(c')=0$. اگر c' بین b و $b+2\pi$ باشد حکم ثابت شده است، وگرنه $b+2\pi<c'<a+2\pi$. در این صورت $b<c'-2\pi<a<c$ و ادعا می‌کنیم $f'(c'-2\pi)=0$. در واقع اگر f متناوب و مشتق‌پذیر باشد، با مشتق‌گیری از دو طرف رابطهٔ $f(x+2\pi)=f(x)$ نتیجه می‌شود که $f'(x+2\pi)=f'(x)$ و حکم به اثبات می‌رسد. □ ۵ن

راه دوم برای ب) نشان می‌دهیم هر بازهٔ بسته به طول 2π دارای نقطهٔ ماکسیمم و نقطهٔ مینیمم (سرتاسری) است.

۲) قرار می‌دهیم $\Phi(x)=g(x)-f(x)$. پس Φ نیز مشتق‌پذیر است و $\Phi'(a)=g'(a)-f'(a)>0$. نشان می‌دهیم $\delta>0$ وجود دارد که برای هر h با $0<h<\delta$ داریم $\Phi(a+h)>0$. توجه کنید که $\Phi(a)=0$. قرار می‌دهیم $\varepsilon=\Phi'(a)>0$. طبق تعریف حد و مشتق در نقطهٔ a، $\delta>0$ وجود دارد که:

$$0<|h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}-\Phi'(a)\right|<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}-\Phi'(a)<\varepsilon$$

بالاخص:

$$0<h<\delta \Longrightarrow 0\leq\Phi'(a)-\varepsilon<\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h}$$

بنابراین برای $0<h<\delta$ داریم $\Phi(a+h)>\Phi(a)$ یا $g(a+h)-f(a+h)>0$. □

۳

$$B\hat{A}C = \alpha + \theta(h)$$

$$f(h) = \sin(\alpha+\theta(h)) \overset{\text{تقریب خطی}}{\approx} f(0) + h f'(0) = \frac{4}{5} + h f'(0)$$

راه اول

$$f(h) = \sin\left(\alpha + \tan^{-1}\frac{h}{3}\right)$$

$$f'(h) = \cos\left(\alpha + \tan^{-1}\frac{h}{3}\right) \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{h}{3}\right)^2}$$

$$f'(0) = \cos\alpha \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\sin(\alpha+\theta(h)) \approx \frac{4}{5} + \frac{1}{5} h$$

نتیجه

راه دوم

$$\sin(\alpha+\theta(h)) = (\sin\alpha)(\cos\theta(h)) + (\cos\alpha)(\sin\theta(h))$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{9+h^2}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{h}{\sqrt{9+h^2}} \qquad (*)$$

تقریب خطی $\frac{1}{\sqrt{9+h^2}} = (9+h^2)^{-1/2}$ را به دست می‌آوریم:

$$g(h) = (9+h^2)^{-1/2}$$

$$g(h) \approx g(0) + h \cdot g'(0) \quad , \quad g'(h) = \left(-\frac{1}{2}\right)(9+h^2)^{-3/2}(2h) = -h \cdot (9+h^2)^{-3/2}$$

$$g(h) \approx g(0) = \frac{1}{3} \Leftarrow g'(0) = 0$$

$$\sin(\alpha+\theta(h)) \approx \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{h}{3} = \frac{4}{5} + \frac{h}{5}$$

نتیجه

(توجه: از روش‌های هندسی دیگر نیز می‌توان به (*) رسید)