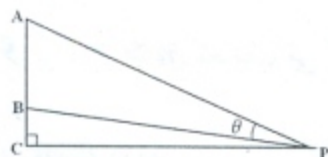


- ۱ در شکل روبرو فرض کنید طول پاره خط AB برابر با ۹، طول پاره خط BC برابر با ۳، طول پاره خط CP برابر با x و زاویه دید نقطه P از پاره خط AB برابر با θ باشد.



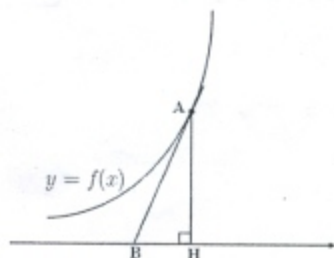
الف) مقدار θ را بر حسب x محاسبه کنید.

ب) برای چه مقداری از $x \in [0, +\infty)$ ، زاویه دید θ بیشترین مقدار ممکن است؟

ج) یک نمودار تقریبی از تغییرات θ وقتی x در بازه $[0, +\infty)$ تغییر می کند

رسم نمایید. (در این نمودار صعودی، نزولی بودن تابع و همچنین تحدب و تقعر آن را مشخص کنید).

(الف) (۵ نمره)، (ب) (۸ نمره)، (ج) (۷ نمره)



(۱۵ نمره)

- ۲ همه توابع مشتق پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را چنان بیابید که برای هر نقطه A روی نمودار این تابع خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه A حتما محور x ها را در یک نقطه یکتای B قطع کند (نقطه B وابسته به A است) و فاصله B تا H (H پای عمود خارج شده از A بر محور x ها است) برابر مقدار ثابت $a > 0$ باشد.

- ۳ ثابت کنید انتگرال ناسره زیر همگراست:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

(۱۵ نمره)

- ۴ فرض کنید $f(x) \geq 0$ یک تابع پیوسته و صعودی روی فاصله $[1, +\infty)$ است. نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n f(k).$$

سپس فرض کنید $f(x) = \ln x$ ، نامساوی زیر را نتیجه گیری کنید:

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

(۱۵ نمره)

۵ سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ را در نظر بگیرید.

- (الف) نشان دهید برای $|x| < 1$ سری فوق به $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ همگراست. (۸ نمره)
(ب) نتیجه گیری کنید برای $0 < x < 1$ داریم $\ln \frac{1+x}{1-x} > 2x$. (۵ نمره)
(ج) به کمک قسمت (ب) نشان دهید $e < 3$. (۷ نمره)

۶ برای $n \geq 1$ ، تعریف می کنیم $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

- (الف) نشان دهید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. (۵ نمره)
(ب) نشان دهید $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-a_n}{\frac{1}{n}} = \ln(2)$. (۵ نمره)
(ج) در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-a_n)$ بحث کنید (با ذکر دلیل). (۵ نمره)

موفق باشید