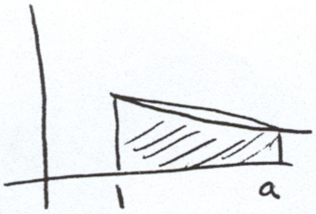

جواب ۱

۲ نمره

با توجه به جهت تقعر $f(x)=\frac{1}{x}$ مساحت

ذوزنقه به رئوس $(1,0)$ ، $(a,0)$ ، $(a,\frac{1}{a})$ و $(1,1)$ از مساحت زیر منحنی بزرگتر است پس:

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx < \left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{a-1}{2} = \frac{a}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}$$

$$= \frac{a^2+1}{2a}$$

۴ نمره

۲ نمره

e عددی است که $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$ ، بنابراین $1<\frac{e^2+1}{2e}$ ، یا $e^2-2e+1>0$

ریشه‌های معادله $x^2-2x+1=0$ عبارتند از $1\pm\sqrt{2}$ که ریشه بزرگتر $1+\sqrt{2}$ است، پس برای

برقراری نامساوی بالا، باید داشته باشیم $e>1+\sqrt{2}$

۲ نمره

۱۰ نمره

جواب ۲

تغییر متغیر $\sqrt{x}=u$ ، $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$ را به کار می‌گیریم

$$\int_0^A e^{-\lambda\sqrt{x}}dx = 2\int_0^{\sqrt{A}} e^{-\lambda u}\,u\,du$$

* نوشتن انتگرال بعد از تغییر متغیر ۲ نمره

از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$=2\left[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda u}\cdot u\Big|_0^{\sqrt{A}}+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\sqrt{A}}e^{-\lambda u}du\right]=2\left[\frac{-e^{-\lambda\sqrt{A}}}{\lambda}\sqrt{A}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda u}\Big|_0^{\sqrt{A}}\right]$$

$$=2\left[\frac{-e^{\lambda\sqrt{A}}}{\lambda}\sqrt{A}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda\sqrt{A}}+\frac{1}{\lambda^2}\right]$$

به دست آوردن جواب انتگرال درست ۶ نمره

۱۰ نمره

حال با میل دادن $A\to+\infty$ و با توجه به اینکه $\lambda>0$ ، داریم:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\sqrt{x}}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

حدگیری و رسیدن به جواب آخر ۲ نمره

جواب ۳ الف

$$(0/9)^{\sqrt{n}} = e^{(\ln\frac{9}{10})\sqrt{n}} = e^{-\ln(\frac{10}{9})\sqrt{n}}$$

و چون $1<\frac{10}{9}$ ، $0<\ln(\frac{10}{9})=\lambda$. با توجه به همگرایی انتگرال اسرهٔ سؤال ۲ و آزمون انتگرال نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0/9)^{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{n}}$$ همگراست.

۵ نمره

توجه شود که راه حل های درست متنوعی برای این قست وجود دارد!

جواب ۳ ب

به طور کلی دیده‌ایم که

$$e^{x} > 1+x \quad \text{برای } x\in\mathbb{R}$$

یا اثبات این که $\ln\frac{10}{9} > \frac{1}{10}$

۳ نمره

بنابراین با گذاردن $x=-\frac{1}{10}$ داریم

$$\frac{9}{10} = 1-\frac{1}{10} < e^{-\frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(0/9)^{\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{n}}{10}} < \int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{x}}{10}}dx$$

۵ نمره

تأکید بر نامساوی بین سری و انتگرال

۲ نمره

و با گذاردن $\lambda=\frac{1}{10}$ در سؤال (۲) نتیجه می‌شود که عبارت بالا برابر است

با (۲۰۰) و حکم نتیجه می‌شود.

(۱) دو راه حل دیگر برای قسمت الف: چون رشد $\sqrt{n}$ از $\ln n$ سریع‌تر است از جایی به بعد داریم

$\sqrt{n}\ln(\frac{10}{9}) > 2\ln n$ و بنابراین $(0/9)^{\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$ پس آزمون مقایسه همگرایی را نتیجه می‌دهد.

(۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(0/9)^{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2}(0/9)^{\sqrt{n}} < \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)(0/9)^{k}$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}k(0/9)^{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(0/9)^{k}$$

که همگرایی هر دو سری (مثلاً با کمک آزمون نسبت) ثابت می‌شود.