



دانشگاه صنعتی شریف

امتحان میان‌ترم اول ریاضی عمومی ۱

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۸۴-۸۳

مدت امتحان: ۳ ساعت

پنجشنبه ۸۳/۸/۲۸

سؤال ۱. فرض کنید A_0, A_1, \dots, A_{n-1} ($n \geq 3$) رؤوس یک n -ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱ باشند. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی این دایره باشد، با استفاده از مفاهیم اعداد مختلط ثابت کنید

$$|PA_0|^2 + |PA_1|^2 + \dots + |PA_{n-1}|^2$$

مقداری ثابت، یعنی مستقل از P ، است. (منظور از $|PA_j|$ طول وتر PA_j است.)

سؤال ۲. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در هر نقطه از $(0, 1)$ مشتق‌پذیر است. اگر $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ ، ثابت کنید نقاط x_1 و x_2 و $0 < x_1 < x_2 < 1$ موجودند که

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2.$$

سؤال ۳. کره‌ای به شعاع r ، و هرم‌هایی با قاعده مربع و وجوه جانبی مثلثی شکل با این ویژگی که قاعده و وجوه هرم‌ها بر کره مماس هستند در نظر بگیرید. ارتفاع هرمی که حجم آن مینیمم است چقدر می‌باشد؟ (ارتفاع را بر حسب r تعیین کنید.)

سؤال ۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که ۴ بار مشتق‌پذیر است و برای یک a در \mathbb{R} ، $f''(a) = 0$. اگر عدد حقیقی و مثبت M موجود باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f^{(4)}(x)| \leq M$ ، ثابت کنید برای هر عدد حقیقی h ،

$$|f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)| \leq \frac{M}{12} h^4.$$

سؤال ۵. فرض کنید عدد حقیقی e این ویژگی را داشته باشد که $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$. با استفاده از تعریف انتگرال ریمان ثابت کنید $2/5 < e < 3$.