بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم اول ـ ریاضی عمومی ۱ (گروههای ۸ـ۱ دکتر شهشهانی)

تاریخ: ۸۱/۸/۹

وقت: ۳ ساعت

---

۱) نشان دهید در هر بازهٔ باز از اعداد حقیقی، اعدادی با بسط اعشاری مختومه (یعنی به شکل $\alpha = c_0/c_1c_2c_3 0000\cdots$) یافت می‌شود.(۴ نمره)

۲) ریشه‌های سوم $5i$ را به‌دست آورید و به شکل $a+ib$ بنویسید.(۴ نمره)

۳) مجموعهٔ نقاط z در صفحهٔ مختلط را توصیف کنید که قسمت حقیقی z^2 منفی است. شکل بکشید.(۴ نمره)

۴) تابع $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ به‌صورت $f(z)=(1+i)z-1$ تعریف شده‌است. نقطهٔ z_0 در $\mathbb{C}$ پیدا کنید که f ترکیب یک دوران و یک تجانس به مرکز z_0 باشد. زاویهٔ دوران و ضریب تجانس را پیدا کنید.(۵ نمره)

۵) همگرایی یا واگرایی هریک از سری‌های زیر را تعین کنید.(٦ نمره)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+n^3} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$$

٦) الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یک سری همگرای مطلق باشد، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$ همگرای مطلق است.

ب) سری‌های همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مثال بزنید که $\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$ همگرا نباشد.

(٦ نمره)

۷) الف) عدد $A = 856/a_1a_2\cdots$ (به مبنای ۱۰) داده شده‌است. برای محاسبهٔ تقریبی A^2 می‌خواهیم از مجذور عدد اعشاری مختومهٔ $A_n = 856/a_1\cdots a_n$ استفاده کنیم. اگر بخواهیم خطا کوچک‌تر از 10^{-2} باشد، n را باید حداقل چند بگیریم؟ توضیح دهید.

ب) اگر در (الف) به‌جای ۸۵٦ یک عدد صحیح k رقمی دلخواه a_0 جایگزین کنیم، یعنی $10^{k-1} \le a_0 < 10^k$، چرا باید با بزرگ‌تر کردن k، n را نیز بزرگ‌تر کرد تا همان درجه دقت حاصل شود؟ توضیح دهید.

ج) فرض کنید در (الف) به جای مختومه کردن عادی از روند کردن به n رقم پس‌از اعشار استفاده می‌کنیم، یعنی رقم $n-$ ام پس‌از ممیز را همان a_n نگاه داریم اگر a_{n+1} یکی از ارقام ۰ تا ۴ باشد و a_n را یکی افزایش دهیم اگر a_{n+1} یکی از ارقام ۵ تا ۹باشد. دراین‌صورت برای همان دقت 10^{-2} در محاسبهٔ مجذور $A = 856/a_1a_2\cdots$، رُند کردن به چند رقم پس‌از اعشار لازم است؟ توضیح دهید.

(٦ نمره)

۸) فرض کنید $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ یک دنبالهٔ اعداد حقیقی در $[0,1]$ باشد با ویژگی زیر:

برای‌هر $e > 0$، عدد صحیح مثبت N وجود دارد که هرگاه n, m از N بزرگ‌تر باشد، آنگاه $|a_m - a_n| < e$.

ثابت کنید دنبالهٔ a_n به نقطه‌ای در $[0,1]$ همگراست.(۵ نمره)

(راهنمایی: $[0,1]$ را به‌صورت اجتماع دو زیربازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},1]$ بنویسید. برای دست‌کم یکی از این دو زیربازه، بی‌نهایت اندیس n وجود دارد که a_n عضو آن زیربازه است. این بازه را I_1 بنامید و آن را مجدداً به دو زیربازهٔ بسته به طول $\frac{1}{4}$ تجزیه کنید. برای دست‌کم یکی از این دو زیربازه، بی‌نهایت اندیس n وجود دارد که a_n عضو آن زیربازه است، چنین زیربازه‌ای را I_2 بنامید و ادامه دهید. استدلال نهایی دقت لازم دارد، باید از فرض استفاده کرد!).