به نام خدا

سؤال ۱

اگر $f(x)=\ln(1+x)$ ، داریم $f'(x)=(1+x)^{-1}$ ، ... ، $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^{k}}$

پس $\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ، بنابراین چندجمله‌ای تیلور درجه n حول ۰ هست :

$$0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

و خطا می‌شود $\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+c)^{n+1}}(x)^{n+1}$ که $0<c<|x|$.

الف) برای تقریب خطی و $x=10^{-2}$ ، $\ln(1.01)\approx 0.01$ ، قدرمطلق خطا هست $10^{-4}\frac{1}{|1+c|^2}\frac{1}{2}$ که چون $0<c<\frac{1}{10}$ ، از $\frac{1}{2}10^{-4}$ کوچکتر است.

ب) برای تقریب درجه n ، قدرمطلق خطا می‌شود $10^{-(n+1)}\frac{1}{|1+c|^{n+1}}\frac{1}{n+1}$ که چون $0<c<x<10^{-1}$ ، از $\frac{1}{(n+1)}10^{-(n+1)}$ کوچکتر است.

سؤال ۲

الف) دو بار انتگرال جزء به جزء :

$$\int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f(x)}\, dx = e^x \sin(x) - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}\, dx$$

$$= e^x \sin(x) - \left[e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx \right]$$

$$\Rightarrow ۲ \int e^x \sin(x)\, dx = e^x (\sin(x) - \cos(x))$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x)\, dx = \frac{۱}{۲} e^x (\sin(x) - \cos(x))$$

ب) در بازهٔ $[۰, ۱]$ داریم $۰ \leqslant x^۲ \leqslant ۱$ ، بنابراین می‌توان قرار داد

$x^۲ = \sin\theta$ ، $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$ ، پس $۲x\,dx = \cos\theta\, d\theta$ و در نتیجه

$$\int_۰^۱ x\sqrt{۱ - x^۴}\, dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ - \sin^۲\theta}\ \left(\frac{۱}{۲}\right) \cos\theta\, d\theta$$

در بازهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ ، جذر $\cos^۲\theta$ مثبت است ، پس

$$= \frac{۱}{۲} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲\theta\, d\theta = \frac{۱}{۲} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}\, d\theta$$

$$= \frac{۱}{۴} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} d\theta + \frac{۱}{۴} \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۲\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{۸} + \frac{۱}{۸} \sin ۲\theta \Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۸}$$

سؤال ۳

الف) باید $\ln x > 0$، پس $x > 1$ دامنه تابع است.

ب) $f(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{(\ln x)\cdot \ln(\ln x)}$، پس

$$f'(x) = e^{(\ln x)(\ln(\ln x))} \cdot \left[\frac{1}{x}\ln(\ln(x)) + (\ln x)\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}\left(1+\ln(\ln(x))\right) = \underbrace{\frac{1}{x} e^{(\ln x)(\ln(\ln x))}}_{\text{همواره مثبت برای } x>1}\left(1+\ln(\ln x)\right)$$

تعیین علامت $1+\ln(\ln(x))$، $\ln(\ln(x)) > -1$ اگر و فقط اگر $\ln x > e^{-1}$ زیرا $\ln(x)$ یکنوای صعودی است و $\ln(e^{-1}) = -1$، بنابراین $\ln(\ln x) > -1$ اگر و فقط اگر $x > e^{\frac{1}{e}}$. مشتق فقط در نقطه $e^{\frac{1}{e}}$ صفر می‌شود، برای $x < e^{\frac{1}{e}}$ مشتق منفی و برای $x > e^{\frac{1}{e}}$ مشتق مثبت است، پس در $x = e^{\frac{1}{e}}$ یک مینیمم موضعی داریم.

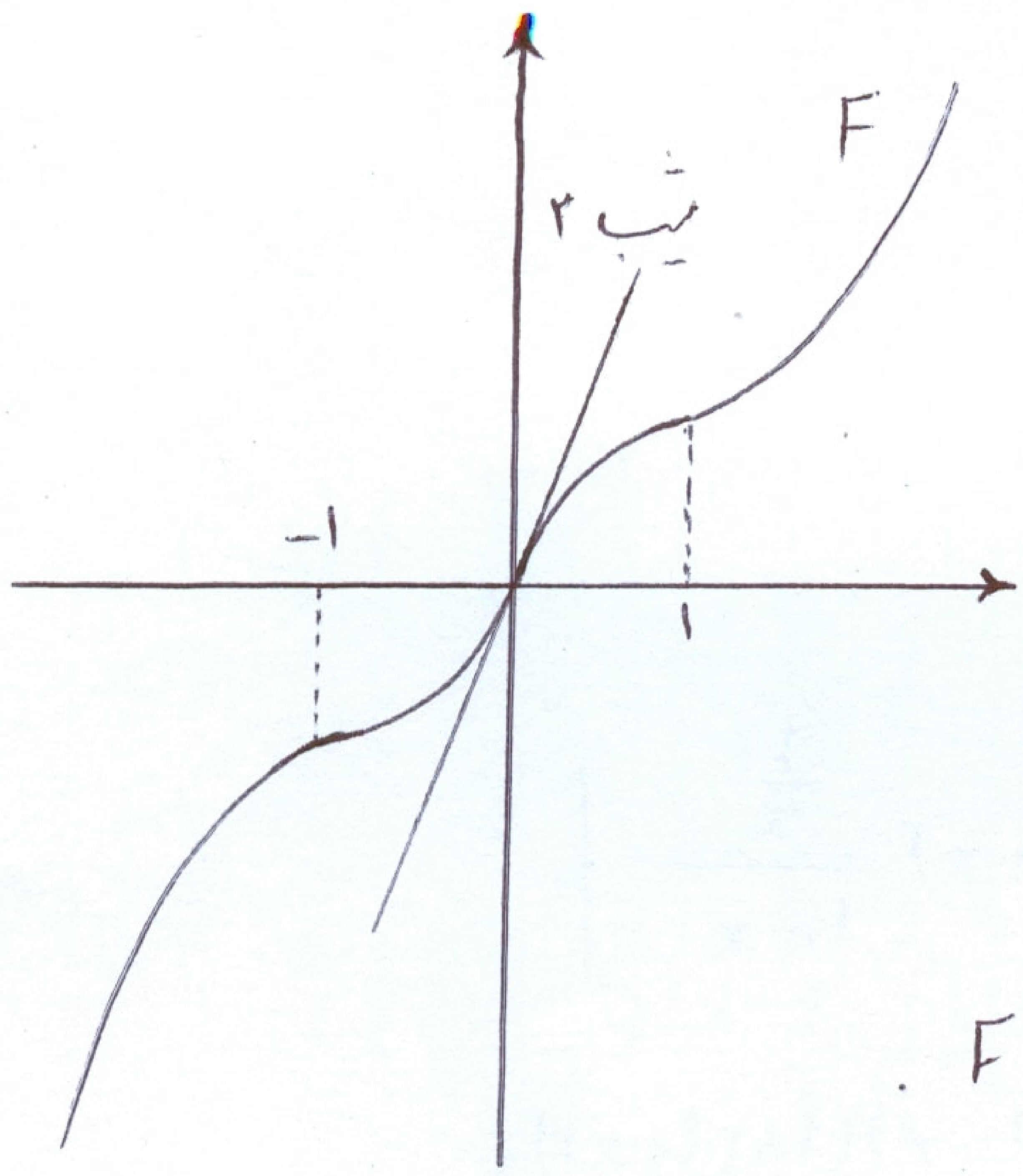
پ) اگر قرار دهیم $y = (\ln x)^{\ln x}$، $\ln y = \ln x \cdot \ln(\ln x)$. حال قرار دهید $u = \ln x$، پس $\ln y = u \ln u$. وقتی $x \to 1^+$، $u \to 0^+$ و طبق گزاره ثابت شده در درس، $\ln y \to 0$، و چون $\exp$ پیوسته است،

$y = \exp(\ln y) \longrightarrow \exp(0) = 1$.

در مورد مشتق، $f'(x) = f(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(1+\ln(\ln(x))\right)$، وقتی $x \to 1^+$،

$\ln x \to 0^+$ و $\ln(\ln x) \to -\infty$، پس $f'(x) \to -\infty$ وقتی $x \to 1^+$.

سؤال ۴-



الف) تابع F صعودی است زیرا $F'(x) = f(x)$
همه جا به استثنای در $x = \pm 1$ که صفر است مثبت است.

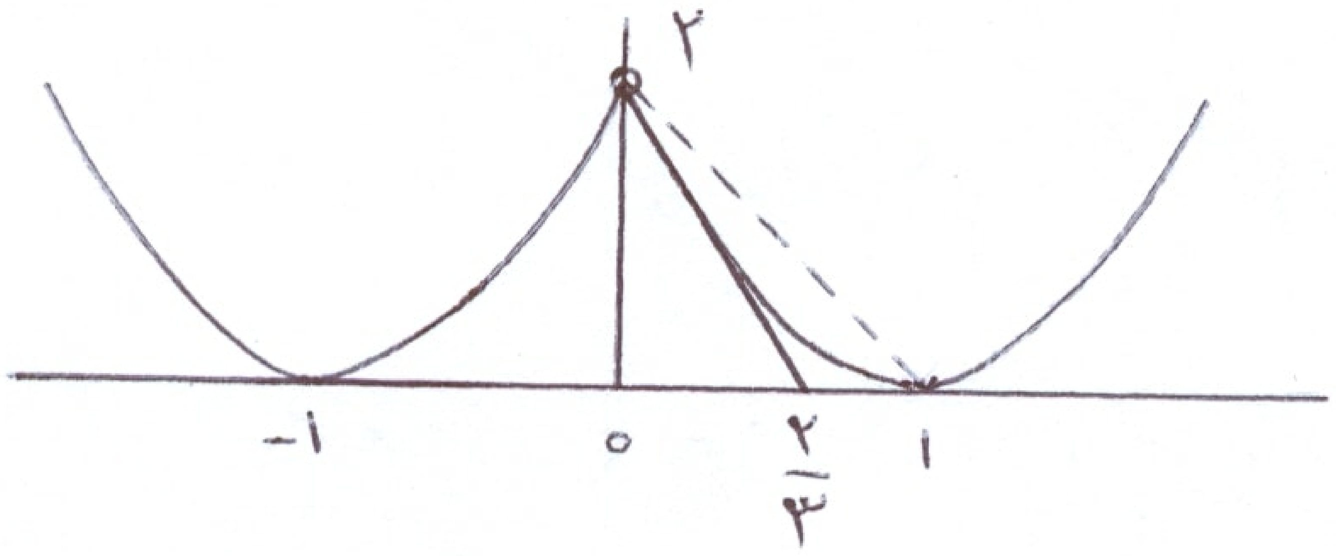
در دو نقطهٔ $x = \pm 1$ مشتق F صفر می‌شود و تابع تغییر تقعر می‌دهد:

$F''(x) > 0$ برای x در $]1, \infty[$ و $]-1, 0[$ و

$F''(x) < 0$ برای x در $]-\infty, -1[$ و $]0, 1[$. زیرا که $F'' = f'$.

بنابراین در $x = \pm 1$ نقطهٔ عطف داریم. چون f تابعی زوج است، یعنی $f(-x) = f(x)$ ، تابع F
فرد می‌شود، یعنی $F(-x) = -F(x)$ زیرا که:

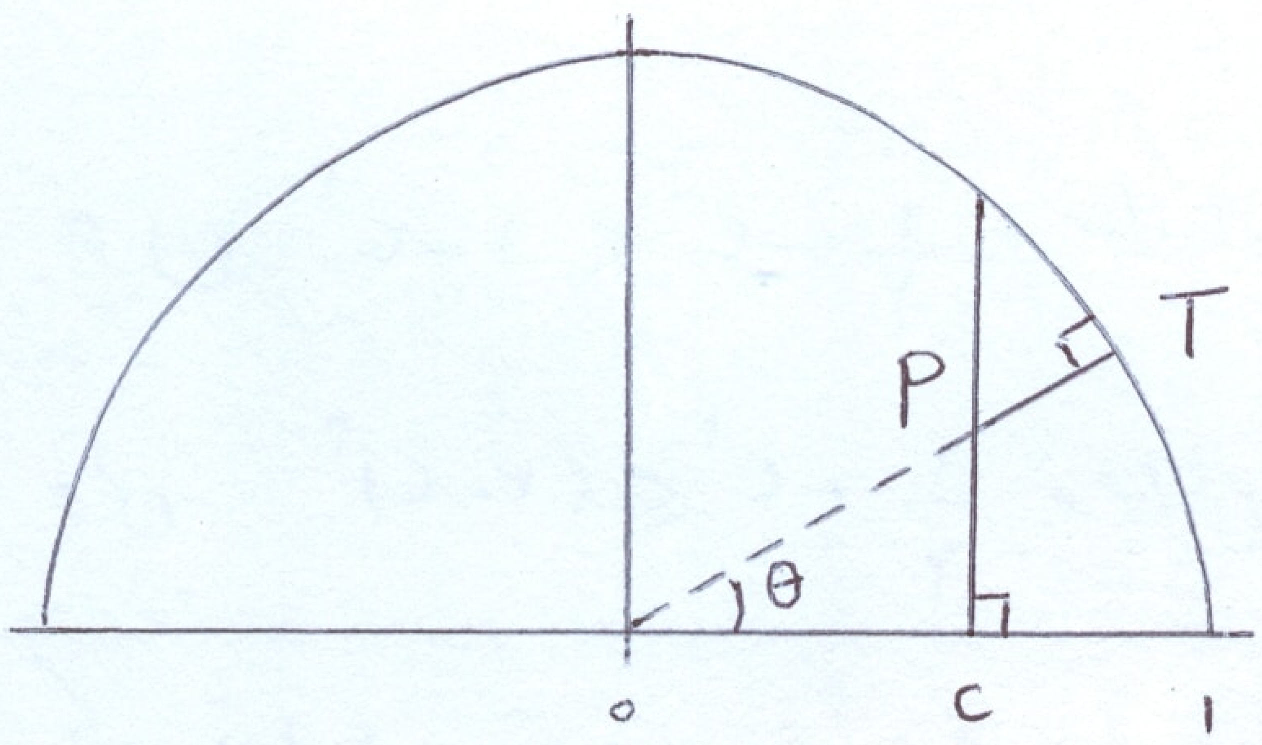
$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = \int_0^{-x} f(-t)\,dt \underset{\text{تعویض متغیر } u=-t}{=} -\int_0^{x} f(u)\,du = -F(x).$$



ب) خط با شیب (-3) از نقطهٔ $(0, 2)$ محور x را
در $(\frac{2}{3}, 0)$ قطع می‌کند و نمودار تابع f همه جا بالای
آن است چون در داخل بازه $]0, 1[$ داریم
$f''(x) > 0$. همچنین به همین دلیل مشتق دوم خط راست
گذرنده از $(0, 2)$ و $(1, 0)$ بالای نمودار است. بنابراین در مقایسه با مساحت دو مثلث داریم:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times 2\right) < \int_0^1 f < \frac{1}{2}(1 \times 2) = 1.$$

سؤال ۵



در شکل می‌خواهیم ماکسیمم و مینیمم $\overline{PC}^2 + \overline{PT}^2$ را پیدا کنیم. زاویه بین نیمهٔ مثبت محور x و شعاع حامل P را θ می‌نامیم. تابعی که باید بررسی شود هست:

$$\begin{cases} f(\theta) = \overline{PC}^2 + \overline{PT}^2 = c^2 \tan^2\theta + (1 - c\sec\theta)^2 \\ 0 \leq \theta \leq \cos^{-1} c \end{cases}$$

به علت تقارن فقط ربع دایره راست را بررسی می‌کنیم.

$$f'(\theta) = 2c^2 \tan\theta \sec^2\theta + 2(1 - c\sec\theta)(-c\sec\theta\tan\theta)$$

$$= 2c \tan\theta \sec\theta \,(c\sec\theta - 1 + c\sec\theta)$$

$$= 2c \tan\theta \sec\theta \,(2c\sec\theta - 1)$$

در دو نقطهٔ انتهایی $\theta = 0 , \cos^{-1} c$ مقدار f را بررسی می‌کنیم، پس در نقاط دیگر که ممکن است مشتق صفر شود مقدار f را پیدا می‌کنیم:

$$f(0) = (1-c)^2$$

$$f(\cos^{-1} c) = c^2\left(\frac{1}{c^2} - 1\right) + \left(1 - \frac{c}{c}\right)^2 = 1 - c^2$$

از طرفی دیگر تنها نقطهٔ جدیدی که $f'(\theta) = 0$ می‌دهد هست $\cos\theta = 2c$ یا $\sec\theta = \frac{1}{2c}$ که این فقط در صورتی مطرح است که $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$. بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $(\frac{1}{2} < c \leq 1)$. باید $f(0)$ و $f(\cos^{-1} c)$ را مقایسه کرد. داریم:

$$(1-c)^2 \overset{?}{\leq} 1 - c^2 \iff 1 - 2c + c^2 \overset{?}{\leq} 1 - c^2 \iff c^2 \overset{?}{\leq} c$$

که برای $0 \leq c \leq 1$ برقرار است، پس مینیمم در نقطهٔ $(c, 0)$ و ماکسیمم در نقطهٔ $(c, \sqrt{1-c^2})$ حاصل می‌شود.

حالت دوم $(0 \leq c \leq \frac{1}{2})$. در این حالت $f(\cos^{-1}(2c))$ را نیز بررسی می‌کنیم. اگر $\cos\theta = 2c$، آنگاه $\sec\theta = \frac{1}{2c}$ و $\tan^2\theta = \frac{1}{4c^2} - 1$، پس

$$f(\cos^{-1}(2c)) = c^2\left(\frac{1}{4c^2} - 1\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - c^2$$

چون $\frac{1}{2} - c^2 < 1 - c^2$ ، مسلماً این نقطه ماکسیمم نیست ماکسیمم همچنان در $(c, \sqrt{1-c^2})$ است،

ولی $\frac{1}{2} - c^2 \leqslant (1-c)^2$ زیرا این معادل است با $2c^2 - 2c + \frac{1}{2} \geqslant 0$ یا $(2c-1)^2 \geqslant 0$

که برقرار است، پس مینیمم نقطه روی خط $x = c$ در دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارد.

سوال ۶

حجم ظرف تا ارتفاع h، وقتی $0 \leqslant h \leqslant 1$ برابر است با

$$V(h) = \int_0^h \pi \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} h^2$$

و اگر $1 < h \leqslant 2$

$$V(h) = V(1) + \int_1^h \pi \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}(h^3 - 1)$$

در این صورت

$$\frac{dV}{dh} = \begin{cases} \pi h & 0 < h < 1 \\ \pi h^2 & 1 < h < 2 \end{cases} \qquad \frac{d^2V}{dh^2} = \begin{cases} \pi & 0 < h < 1 \\ 2\pi h & 1 < h < 2 \end{cases}$$

در نتیجه $\frac{dV}{dh}$ در $h = 1$ وجود دارد اما $\frac{d^2V}{dh^2}$ وجود ندارد. از طرفی

مقدار ثابت $= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Longrightarrow$ $\frac{dh}{dt}$ وجود دارد و پیوسته است

$$\Longrightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=1} = \frac{dV/dt}{\pi}$$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dh}\right) \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{dV}{dh} \cdot \frac{d^2h}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2V}{dh^2} \cdot \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{dV}{dh} \cdot \frac{d^2h}{dt^2}$$

این دو مقدار در $h = 1$ تعریف شده و پیوسته اند،

لذا $\frac{d^2h}{dt^2}$ وجود ندارد.