

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی یک - دی ماه ۱۳۸۴
تعداد سؤال: ۶ - مدت امتحان: ۳ ساعت - جمع نمرات این آزمون ۶۵ است.

(۱) دایره‌ای به مرکز $(b, 0)$ و شعاع a را $(0 < a < b)$ حول محور y ها دوران می‌دهیم، حجم جسم ایجاد شده را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(۲) الف) مطلوب‌ست محاسبه طول منحنی تابع $f(x) = x^2$ از نقطه $(0, 0)$ تا نقطه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. (۱۰ نمره)

ب) انتگرال $\int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

(۳) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم: (۶ نمره)

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{r}} dx = 2^n n!$$

(۴) مقدار تقریبی $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ را با خطای کمتر از 10^{-5} بدست آورید. (۶ نمره)

(۵) الف) برای $|x| < 1$ ، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ با چه تابعی برابر است؟ (۴ نمره)

ب) فاصله (بازه) همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(2n+3)}$ را بدست آورید. (۴ نمره)

ج) تعیین کنید که در داخل فاصله همگرایی، سری فوق با چه تابعی برابر است. (۶ نمره)

د) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+3)4^n}$ را محاسبه کنید. (۳ نمره)

(۶) تابع f روی فاصله $[a, b]$ پیوسته $(0 \leq a < b)$ و روی (a, b) مشتق پذیر است. نشان دهید اعداد c_1 و c_2 در فاصله (a, b) وجود دارند بطوریکه: (۶ نمره)

$$f'(c_1) = (a+b) \frac{f'(c_2)}{2c_2}.$$

موفق باشید.