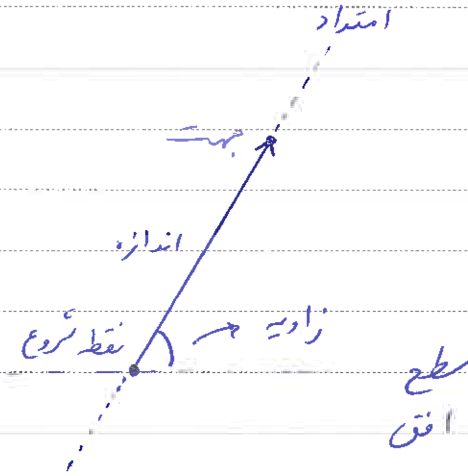
Subject:
Year. Month. Date. ( )

فیزیک عمومی ۱ — به نام خدا — نگارش: برمکی
استاد: صبا

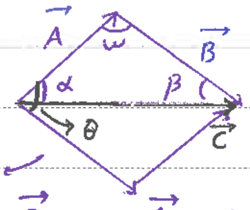
بردار:




چهار ویژگی بردار:
۱- نقطه ابتدا ۲- امتداد
۳- اندازه ۴- جهت

جمع برداری:

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



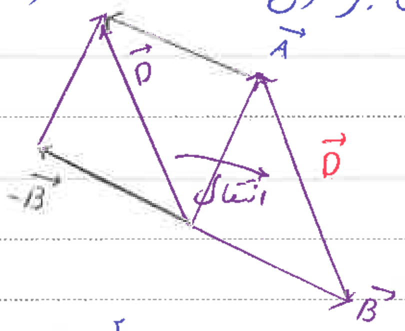

$\frac{\sin w}{c} = \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \beta}{a}$

با توجه به شکل متوازی الاضلاع

تفریق برداری:

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

ابتدای منفی به انتهای بردار اول




ضرب برداری:

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

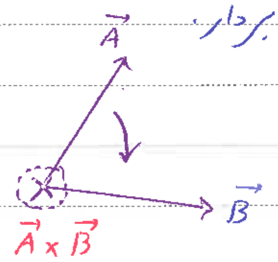
$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta \xrightarrow{\text{متوازی الاضلاع}} C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos w$

$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{M} \qquad |\vec{M}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$

هر امتداد دو جهت دارد، عمود بودن در ضرب خارجی یک امتداد است

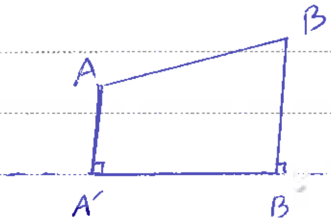
جهت بردار:

$\vec{A}\times\vec{B} \rightarrow$ قانون دست راست $\rightarrow$ از A به جهت B

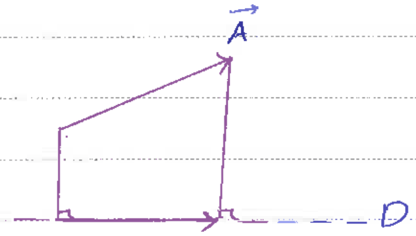



۱- ساعتگرد ← به طرف داخل صفحه
۲- پاد ساعتگرد ← به طرف خارج صفحه

Subject:
Year. Month. Date.




تصویر AB بر امتداد D

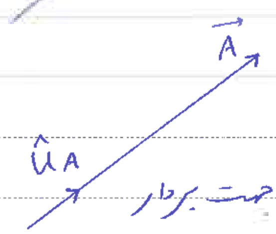



$\vec{A}_D$ خطی که روی آن تصویر شده

چون هر صفحه بی‌نهایت امتداد دارد، پس هر بردار بی‌نهایت تصویر دارد. (در صفحه)

روش اندازه‌گیری: داشتن واحدی که بتواند به تعداد جا بگیرد
اندازه: تعداد جای‌گیری واحد

$1.2\,cm = 1.2 \times 1\,cm$

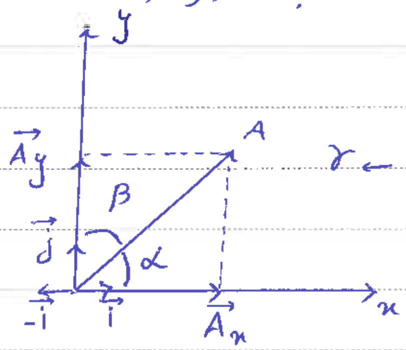



$\vec{A} = |\vec{A}|\,\hat{u}_A$ نماد بردار یکه — بردار یکه $\Rightarrow \hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

یافتن جهت بردار ← یافتن بردار یکه ← نماینده جهت بردار
جهت بردار ← زاویه نسبت به یک مرجع

$\vec{A}_y = |\vec{A}_y|\,\hat{u}_{A_y} \rightsquigarrow \vec{A}_y = a_y\vec{j}$

$\vec{A}_x = |\vec{A}_x|\,\hat{u}_{A_x} \rightsquigarrow \vec{A}_x = a_x\vec{i}$




محور z ← γ

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ محور x ← امتداد $\vec{i}$ ← جهت مثبت محور x

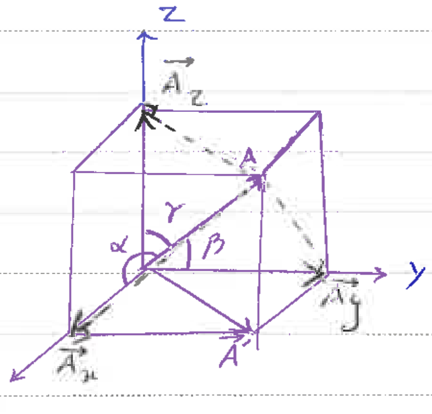
فضای یک بعدی ⟵⟶ فضای دو بعدی (مانند تصویر کردن بردار دو بعدی A بر روی یک محور که آن را یک بعدی می‌سازد.)

به طور مشابه: فضای دو بعدی ⟵ فضای سه بعدی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \qquad |\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\hat{u}_A = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{a_x \vec{i} + a_y \vec{j}}{|\vec{A}|} = \dfrac{a_x}{|\vec{A}|}\vec{i} + \dfrac{a_y}{|\vec{A}|}\vec{j} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} \Rightarrow$ کسینوس های هادی ← برای بدست آوردن بردار یکه




$\vec{A}' = \vec{A}_x + \vec{A}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$

$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

مثال:

$\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow$ اندازه و جهت مولفه‌ها را به ما می‌دهد

$|\vec{A}| = \sqrt{|\vec{A}'|^2 + |\vec{A}_z|^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\hat{u}_A = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}}{|\vec{A}|} = \dfrac{a_x}{|\vec{A}|}\vec{i} + \dfrac{a_y}{|\vec{A}|}\vec{j} + \dfrac{a_z}{|\vec{A}|}\vec{k} =$

$\cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$ برای جهت بردار ← محاسبه بردار یکه

بردار یکه $= \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k} \leftarrow$

$\vec{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$
$\vec{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$
$\Rightarrow \vec{A} \pm \vec{B} = \vec{C} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x (\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_x b_y (\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_x b_z (\vec{i}\cdot\vec{k}) + a_y b_x (\vec{j}\cdot\vec{i}) + \dots =$

$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \longrightarrow$ زاویه بین دو بردار

(برای محاسبه $\theta$ کاربرد دارد)

مثال:

$\vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
$\vec{B} = \vec{j} - \vec{k}$
$\Rightarrow \vec{C} = \vec{i} + 2\vec{k}$

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = 0 - 1 - 3 = -4$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$$\vec{A}\times\vec{B} = a_x b_x(\vec{i}\times\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\times\vec{k}) + \dots$$

بردار صفر $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

* ضرب خارجی بردارها، همیشه یک بردار است.

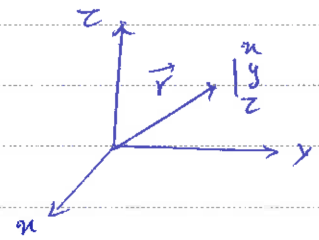
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$\vec{A}\times\vec{B}$ ← همواره یک بردار ← جهت آن ← یافتن بردار یکه ← $\cos\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix} = \dfrac{\text{مؤلفه}}{\text{اندازه بردار}}$

مکانیک:

$\left\{\begin{matrix}|\vec{A}|\\ \alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right.$ بردار یکه را می‌دهند    مکان ← نسبت به یک مرجع تعیین می‌شود

$(x, y, z)$ ← مختصات نقطهٔ انتهایی بردار مکان




$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$ بردار مکان

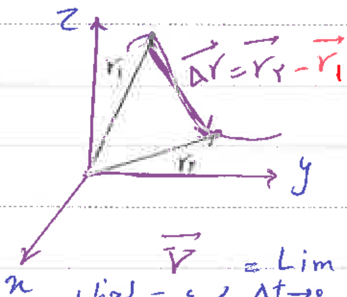
$\rightsquigarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

مثال: $\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \longrightarrow \left|\begin{matrix}2\\ -3\\ 4\end{matrix}\right.$

جسم ساکن ← بردار مکان ساکن    جسم متحرک ← بردار مکان متحرک (هم اندازه هم جهت متغیر است)

هرگاه حداقل یکی از مؤلفه‌های x و y و z جسم برحسب زمان تغییر کند جسم متحرک است.

$$\vec{r}(t) = x_t\vec{i} + y_t\vec{j} + z_t\vec{k}$$




سرعت متوسط $\vec{\bar{v}} = \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{\Delta t}$

مثال: $r(t) = 2t\vec{i} + (t^2+1)\vec{j} + 2t^3\vec{k}$

سرعت لحظه‌ای $\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{dr}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{v_x}\vec{i} + \vec{v_y}\vec{j} + \vec{v_z}\vec{k}$

* سرعت لحظه‌ای همان سرعت متوسط است فقط در بازه زمانی فوق العاده کوچک رخ می‌دهد.

Subject:
Year.  Month.  Date.  ( )

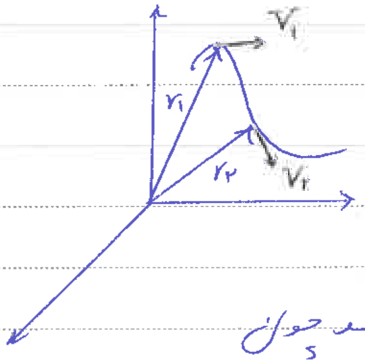
$\vec{V}$ هم جهت $\vec{\Delta r}$ می باشد ولی $\vec{\Delta r}$ که جزئی می باشد ( $\vec{\Delta r}$ مماس بر مسیر حرکت )

( سرعت لحظه‌ای )

مثال قبل : $\vec{V} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} + 6t^2\vec{k}$

اندازه سرعت لحظه‌ای ← تندی = $|\vec{V}|$ ← یک کمیت اسکالر

سرعت ← برای مقایسه جابه‌جایی در زمان




$\vec{\bar{a}} = \dfrac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ شتاب متوسط

$= \dfrac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1}$

تندی یکسان و ثابت ← دلیل بر شتاب صفر نمی باشد چون تفاضل برداری می باشد.

شتاب لحظه‌ای $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{dV_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dV_y}{dt}\vec{j} + \dfrac{dV_z}{dt}\vec{k}$

مکان جسم تقریباً تغییر نمی کند و بردار سرعت نیز مجال تغییر آن چنانی نخواهد داشت.

$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

مثال قبل : $\vec{a} = 2\vec{j} + 12t\vec{k}$

مؤلفه بردار a روی محور y

حرکت (سینماتیک) $\begin{cases} \vec{r} \\ \vec{V} \\ \vec{a} \end{cases}$

حرکت < شتاب ثابت / شتاب متغیر (معیار نوع حرکت شتاب است) که شتاب تابع زمان است.

$* \ \vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

معادلات ← ابزار در حل سؤالات :

$* \ \vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Subject:
Year. Month. Date.

مثال: $\vec{a} = \vec{i} - 2t\vec{j} \quad t=0 \sim \vec{r}_0 = \vec{i} - \vec{k} \quad \vec{V}_0 = 2\vec{j}$

$\xrightarrow[\text{ابزار}]{\text{معادله}} \vec{i} - 2t\vec{j} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} \Longrightarrow \int_{2\vec{j}}^{\vec{V}} d\vec{V} = \int_0^t (\vec{i} - 2t\vec{j})\,dt$

انتگرال معین $\Longrightarrow \vec{V} - 2\vec{j} = t\vec{i} - t^2\vec{j} \Longrightarrow \vec{V} = t\vec{i} - (t^2-2)\vec{j}$

انتگرال نامعین $\Longrightarrow \int d\vec{V} = \int (\vec{i} - 2t\vec{j})\,dt$

$\Longrightarrow \vec{V} = t\vec{i} - t^2\vec{j} + \vec{c} \xrightarrow[\vec{V}_0 = 2\vec{j}]{t=0} \vec{c} = 2\vec{j}$

$\Longrightarrow \vec{V} = t\vec{i} - (t^2-2)\vec{j}$

$\xrightarrow{\text{معادله ابزار}} t\vec{i} - (t^2-2)\vec{j} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \underset{\text{انتگرال معین}}{\int_{\vec{r}_0 = \vec{i}-\vec{k}}^{\vec{r}} d\vec{r}} = \int_0^t [t\vec{i} - (t^2-2)\vec{j}]\,dt$

$\Longrightarrow \vec{r} - (\vec{i} - \vec{k}) = \frac{1}{2}t^2\vec{i} + (-\frac{1}{3}t^3 + 2t)\vec{j}$

$\Longrightarrow \vec{r} = (\frac{1}{2}t^2 + 1)\vec{i} + (-\frac{1}{3}t^3 + 2t)\vec{j} - \vec{k}$

* می‌توان همه مؤلفه‌ها را یک باره محاسبه کرد (مانند بالا) یا مؤلفه مؤلفه:

$\vec{a}_y = -2t \sim \vec{a}_y = \dfrac{d\vec{V}_y}{dt} \to -2t = \dfrac{d\vec{V}_y}{dt} \sim \int_2^{V_y} dV_y = \int_0^t (-2t)\,dt$

$\longrightarrow V_y - 2 = -t^2 \longrightarrow V_y = -t^2 + 2$

محاسبه < فضای سه بعدی / مؤلفه مؤلفه

$a_x = a_x(x)$ $\begin{cases} a_x(t) \\ V_x(t) \\ x(t) \end{cases}$ $a_x = a_x(V_x)$ $\xrightarrow{\text{مثال}} \vec{a} = 2x\vec{i} + \dfrac{1}{V_y}\vec{j} + 2t^2\vec{k}$

روش حل ← مؤلفه مؤلفه بدست می‌آوریم

$a_x = a_x(V_x): \quad a_x = \dfrac{1}{V_x} \quad a_x = e^{V_x} \quad a_x = V_x^2 + 1$

Subject:

Year. Month. Date.

$$a_x(V_x) = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{V_{x_0}}^{V_x} \frac{dV_x}{a_x(V_x)}$$ ← سرعت برحسب زمان بدست می‌آید

جابه‌جایی

۱. معادله ابزار ۲. جابه‌جایی ۳. انتگرال * به تفاوت جابه‌جایی و طرفین وسطین دقت کنید.

مثال: $\frac{1}{V_x} = \frac{dV_x}{dt} \longrightarrow \int_0^t dt = \int_{V_{x_0}}^{V_x} V_x \, dV_x$

$$t = \frac{1}{2}V_x^2 - \frac{1}{2}V_{x_0}^2 \longrightarrow V_x^2 = 2\left(t + \frac{1}{2}V_{x_0}^2\right) \longrightarrow V_x = \sqrt{2\left(t + \frac{1}{2}V_{x_0}^2\right)}$$

$a_x = a_x(x)$: $a_x(x) = \frac{dV_x}{dt} \times \frac{dx}{dx} = \frac{V_x \, dV_x}{dx}$ ایجاد یک رابطه مستقل از زمان

$\longrightarrow \int_{V_{x_0}}^{V_x} V_x \, dV_x = \int_{x_0}^{x} a_x(x) \, dx \longrightarrow$ $V_x(x)$ را می‌دهد

$V_x(x) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{V_x(x)} \longrightarrow$ $t$ می‌دهد $x$ را برحسب

به همین ترتیب $V$ برحسب $t$، پس $a$ برحسب $t$ محاسبه می‌شود

حرکت با شتاب ثابت:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$a_x = a$ $\quad \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \quad \vec{V}_0 = V_{x_0}\vec{i} + V_{y_0}\vec{j} + V_{z_0}\vec{k}$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \longrightarrow \int_0^t a \, dt = \int_{V_{x_0}}^{V_x} dV_x \longrightarrow V_x - V_{x_0} = at \longrightarrow V_x = at + V_{x_0}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} \longrightarrow at + V_{x_0} = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + V_{x_0}) \, dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + V_{x_0}t \longrightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + V_{x_0}t + x_0$$

با داشتن شرایط اولیه به جواب می‌رسیم

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date.

$$a=\frac{dV_x}{dt}\times\frac{dx}{dx}=\frac{V_x\,dV_x}{dx}\longrightarrow\int_{x_0}^{x}a\,dx=\int_{V_{x_0}}^{V_x}V_x\,dV_x$$

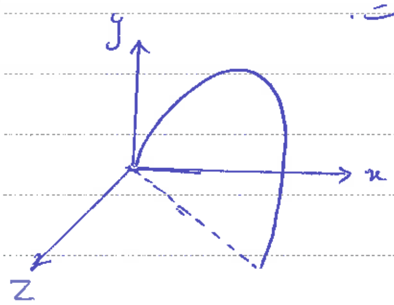
$$\rightsquigarrow a(x-x_0)=\frac{1}{2}V_x^2-\frac{1}{2}V_{x_0}^2\longrightarrow V_x^2-V_{x_0}^2=2a(x-x_0)$$

حرکات دو بعدی مهم فیزیک: ۱ـ پرتابی ۲ـ دایره‌ای

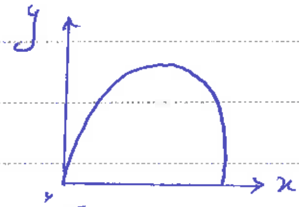
* شرایط اولیه حرکت، نوع حرکت را مشخص می‌کنند.

$\vec{a}=-g\vec{j}\quad t=0\quad \vec{r}_0=\vec{0}\qquad \vec{V}_0=V_{x_0}\vec{i}+V_{y_0}\vec{j}+V_{z_0}\vec{k}$

در محورهای z و x شتاب ثابت داریم که برابر صفر است.

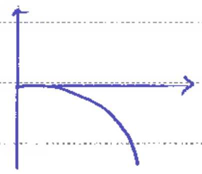


حرکت پرتابی: $a=-g\vec{j}\quad t=0\quad \vec{r}_0=\vec{0}\qquad \vec{V}=V_{x_0}\vec{i}+V_{y_0}\vec{j}$



پرتاب در امتداد قائم: $a=-g\vec{j}\quad t=0\quad \vec{r}_0=\vec{0}\qquad \vec{V}_0=\pm V_{y_0}\vec{j}$

$a=-g\vec{j}\quad t=0\quad \vec{r}_0=\vec{0}\qquad \vec{V}_0=V_{x_0}\vec{i}$



مثلاً $y=\frac{1}{2}at^2+V_{y_0}t+y_0$ ← یک معادله برداری ← در دل آن بردار $\vec{j}$ وجود دارد

$V_y=at+V_{y_0}$

سقوط آزاد: $a=-g\vec{j}\quad t=0\quad \vec{r}_0=\vec{0}\quad \vec{V}_0=\vec{0}$

حرکت پرتابی: $a=-g\vec{j}\quad t=0\quad \vec{r}_0=\vec{0}\quad \vec{V}_0=V_{x_0}\vec{i}+V_{y_0}\vec{j}$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\quad \begin{cases}x=\frac{1}{2}a_xt^2+V_{x_0}t+x_0\\ y=\frac{1}{2}a_yt^2+V_{y_0}t+y_0\end{cases}\xrightarrow[a_y=-g\vec{j}]{a_x=0,\ z=0}$$

$$\vec{r}=(V_{x_0}t)\vec{i}+\left(-\frac{1}{2}gt^2+V_{y_0}t\right)\vec{j}$$

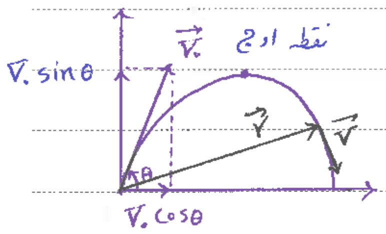
Subject:
Year. Month. Date.

$\vec V = a t + \vec V_0 \longrightarrow \vec V = V_{x_0}\vec i + (-gt + V_{y_0})\vec j$

محور xها　　　محور yها

$\begin{cases} a = 0 \\ V_x = V_{x_0} \\ \underline{x = V_{x_0} t} \end{cases}$　　$\begin{cases} a = -g \\ V_y = -gt + V_{y_0} \\ \underline{y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{y_0} t} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ با حذف $t$ از معادلات $x$، $y$، $z$ به معادله مسیر می‌رسیم

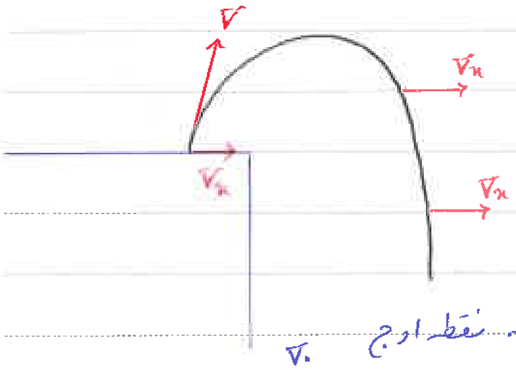
$\Longrightarrow y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_{x_0}}\right)^2 + V_{y_0}\left(\frac{x}{V_{x_0}}\right) \longrightarrow$ منحنی ریاضی مسیر را می‌دهد




$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta}\right) + V_0 \sin\theta \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)$

$\begin{cases} y = x \cdot tg\theta - \dfrac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2 \\ y = ax - bx^2 \end{cases}$

مثال: $y = 2x - 4x^2 \longrightarrow tg\theta = 2 \longrightarrow \theta = \dots \longrightarrow V_0 = \dots$



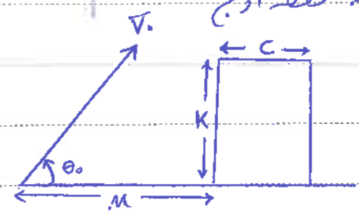

نقطه اوج: $V_y = 0$

$V = V_x = V_0 \cos\theta$

$V_y = at + V_{y_0} = -gt + V_0 \sin\theta = 0$

$\longrightarrow t_{\text{اوج}} = \dfrac{V_0 \sin\theta}{g}$

نقطه اوج $\longleftarrow$ مشتق معادله مسیر $= 0 \longrightarrow \dots$




گلوله در کدام نقطه به سطح برخورد می‌کند؟

محل برخورد جسم با خط $x = M$:

محاسبه برد　① $R < M \longleftarrow$ محل برخورد $= R$

② برخورد با قسمت عمودی $(K)$

$\begin{cases} y = ax - bx^2 \\ x = M \end{cases}$ محاسبه $\longrightarrow y \Longrightarrow$

$K > y > 0 \longrightarrow$ جواب است $(x = M, y = \dots)$

$y < 0 \longrightarrow$ جواب $= R$

$y > K \longrightarrow$ عبور از روی آن

Subject:

Year. Month. Date.

③ برخورد با قسمت افقی دیوار (C)

$$\begin{cases} y = ax - bx^2 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x = \dots$$

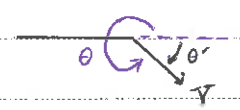
$m + c > x > m \rightarrow$ جواب است $(x = \dots , y = k)$

$\rightarrow x > m + c \rightarrow R =$ جواب

$x < m \rightarrow R =$ جواب

$y = k$ محل برخورد جسم با خط

توجه:



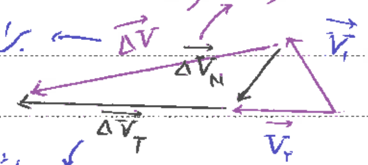

اگر به جای $\theta$ از $\theta'$ استفاده کردیم

حتماً علامت منفی را در نظر بگیریم

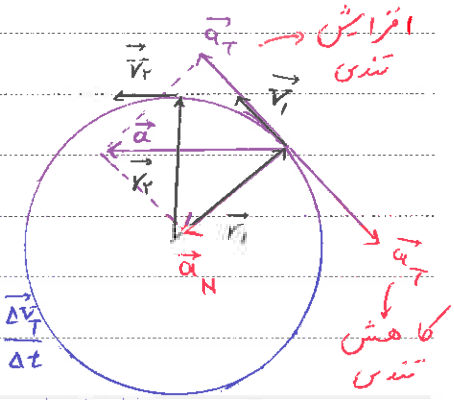
حرکت ذره بر روی دایره:

برای تغییر جهت

$\overrightarrow{\Delta V} \leftarrow$ برای تغییر جهت و اندازه




برای تغییر اندازه

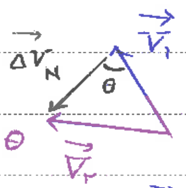



$$\overrightarrow{\Delta V} = \overrightarrow{\Delta V_N} + \overrightarrow{\Delta V_T} \rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V_N}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V_T}}{\Delta t}$$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \rightarrow$ برای جمع برداری باید اندازه و جهت آنان را بیابیم

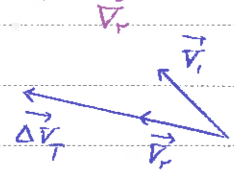
$\vec{a}_T$: شتاب برای تغییر اندازه (شتاب مماسی)

$\vec{a}_N$: شتاب برای تغییر جهت (شتاب مرکزگرا، شعاعی)

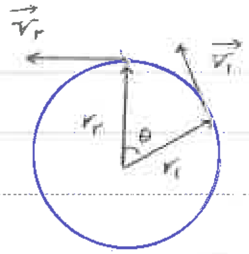


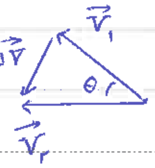

$\theta \leftarrow$ تقریباً $90^\circ \leftarrow$ در حالت حدی دقیقاً برابر $90^\circ$ می‌باشد.

تغییر اندازه $\vec{V}_2$ به اندازه $\overrightarrow{\Delta V_T}$



Subject:
Year. Month. Date. ( )



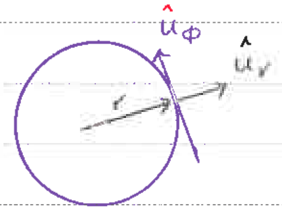


تشابه: $\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v}{r} \longrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$

$\longrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$

$\longrightarrow \vec{a}_N = \frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r}$ , $\vec{a}_T = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_T}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}$

مشتق تندی



$\vec{r} = r\hat{u}_r \,;\, |\vec{r}| = r \qquad |\vec{v}| = v$

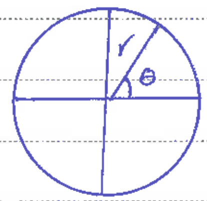
$\vec{v} = v(\pm \hat{u}_\phi) \longrightarrow$ افزاینده بودن (+)، کاهنده بودن (-) حرکت

$\vec{a}_N = \frac{v^2}{r}(-\hat{u}_r)$

$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}(\pm \hat{u}_\phi) \longrightarrow$ افزاینده بودن (+)، کاهنده بودن (-) حرکت

$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r \pm \frac{dv}{dt}\hat{u}_\phi$

توجه: دستگاه و بردارها با حرکت ذره روی دایره، حرکت می‌کنند.



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \longrightarrow \vec{r} = r\cos\theta\,\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j}$

* $\theta$ حتماً باید تابع زمان باشد تا بتوانیم سرعت را محاسبه کنیم

$\theta = \omega t \longrightarrow \vec{r} = r\cos\omega t\,\vec{i} + r\sin\omega t\,\vec{j}$

$\longrightarrow \vec{v} = -r\omega\sin\omega t\,\vec{i} + r\omega\cos\omega t\,\vec{j} \longrightarrow \underset{(\text{تندی})}{v} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = r\omega$

$\vec{a} = -r\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - r\omega^2\sin\omega t \longrightarrow a = r\omega^2$

$\vec{a}_{\text{کل}} = \vec{a}_N \longleftarrow \vec{a}_T = 0 \longleftarrow$ $r\omega$ = تندی ثابت

$\vec{r} = r\hat{u}_r \longrightarrow \hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \qquad \vec{v} = v\hat{u}_\phi \longrightarrow \hat{u}_\phi = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

مثال: متحرکی با بردار مکان $\vec{r} = 2\cos\pi t^2\,\vec{i} + 2\sin\pi t^2\,\vec{j}$ در حال حرکت است. ثابت کنید که شتاب لحظه‌ای این حرکت برابر مجموع شتاب مماسی و شتاب مرکزی است.

$\vec{v} = -4\pi t\sin\pi t^2\,\vec{i} + 4\pi t\cos\pi t^2\,\vec{j} \longrightarrow v = 4\pi t$

$\vec{a} = -8\pi^2 t^2\cos\pi t^2\,\vec{i} - 8\pi^2 t^2\sin\pi t^2\,\vec{j} - 4\pi\sin\pi t^2\,\vec{i} + 4\pi\cos\pi t^2\,\vec{j} =$

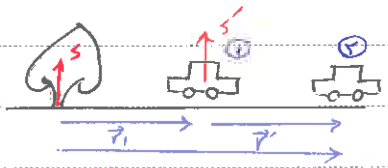
$(-8\pi^2 t^2\cos\pi t^2 - 4\pi\sin\pi t^2)\,\vec{i} + (-8\pi^2 t^2\sin\pi t^2 + 4\pi\cos\pi t^2)\,\vec{j}$

Subject:
Year. Month. Date.

$\vec{a}_N = ? \longrightarrow a_N = \dfrac{16\pi^2 t^2}{2} = 8\pi^2 t^2$

$\longrightarrow \vec{a}_N = a_N(-\hat{u}_r) = -8\pi^2 t^2(\cos\pi t^2\,\vec{i} + \sin\pi t^2\,\vec{j}) = -8\pi^2 t^2 \cos\pi t^2\,\vec{i}$
$-8\pi^2 t^2 \sin\pi t^2\,\vec{j}$ $\qquad \vec{a}_T = ? \longrightarrow a_T = \dfrac{d\bar{V}}{dt} = 4\pi$

$\longrightarrow \vec{a}_T = \dfrac{d\bar{V}}{dt}(\pm\hat{u}_\varphi) = 4\pi(+u_\varphi) = 4\pi(-\sin\pi t^2\,\vec{i} + \cos\pi t^2\,\vec{j}) =$
$-4\pi \sin\pi t^2\,\vec{i} + 4\pi\cos\pi t^2\,\vec{j}$ ← حرکت افزاینده است $(\bar{V} = 4\pi t)$



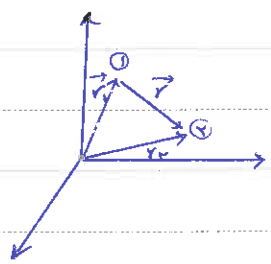
سرعت نسبی:

مکان نسبی $\quad \vec{r}\,' = \vec{r}_2 - \boxed{\vec{r}_1}$ $\longrightarrow \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} - \dfrac{d\vec{r}_1}{dt}$

سرعت نسبی $\quad \vec{V}' = \vec{V}_2 - \boxed{\vec{V}_1}$ $\longrightarrow \dfrac{d\vec{V}'}{dt} = \dfrac{d\vec{V}_2}{dt} - \dfrac{d\vec{V}_1}{dt}$

شتاب نسبی $\quad \vec{a}\,' = \vec{a}_2 - \boxed{\vec{a}_1}$

متحرکی که نسبت به آن می سنجیم



$\vec{V}' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \longrightarrow$ یک معادله برداری

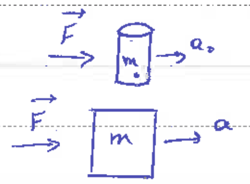
$\longrightarrow V'\cos\alpha'\,\vec{i} + V'\cos\beta'\,\vec{j} + V'\cos\gamma'\,\vec{k} = \bar{V}_2\cos\alpha_2\,\vec{i} + \bar{V}_2\cos\beta_2\,\vec{j} + \bar{V}_2\cos\gamma_2\,\vec{k}$
$- \bar{V}_1\cos\alpha_1\,\vec{i} - V_1\cos\beta_1\,\vec{j} - \bar{V}_1\cos\gamma_1\,\vec{k}$

$$\begin{cases} V'\cos\alpha' = \bar{V}_2\cos\alpha_2 - \bar{V}_1\cos\alpha_1 \\ V'\cos\beta' = \bar{V}_2\cos\beta_2 - \bar{V}_1\cos\beta_1 \\ V'\cos\gamma' = \bar{V}_2\cos\gamma_2 - \bar{V}_1\cos\gamma_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} V'_x = \bar{V}_{2x} - \bar{V}_{1x} \\ V'_y = \bar{V}_{2y} - \bar{V}_{1y} \\ V'_z = \bar{V}_{2z} - \bar{V}_{1z} \end{cases}$$

در فضای سه بعدی ← سه معادله سه مجهول
" دو " " ← دو معادله دو مجهول
" یک " " ← یک معادله یک مجهول

دینامیک حرکت انتقالی ذره:

$\vec{F} \propto \vec{a} \longrightarrow \vec{F} = k\vec{a}$



مثلاً $\vec{F} \longrightarrow ma = m_0 a_0$
استاندارد $m_0$
$\longrightarrow m = m_0 \dfrac{a_0}{a}$

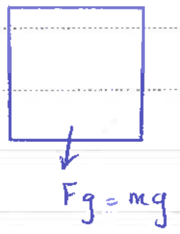
$\longrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \Sigma\vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow \Sigma F_x\,\vec{i} + \Sigma F_y\,\vec{j} + \Sigma F_z\,\vec{k} =$
$m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$

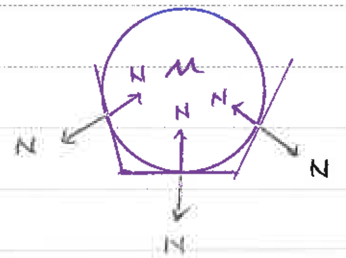
Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

$$\begin{cases} \Sigma F_x = ma_x \\ \Sigma F_y = ma_y \\ \Sigma F_z = ma_z \end{cases}$$

قانون سوم ← کنش و واکنش و شیوه انتخاب چند جسم
به یک جسم تحت شرایط خاص

قانون اول ← تمایل اجسام برای حفظ وضعیت فعلی خود



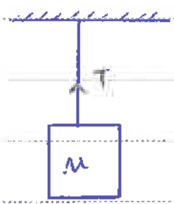



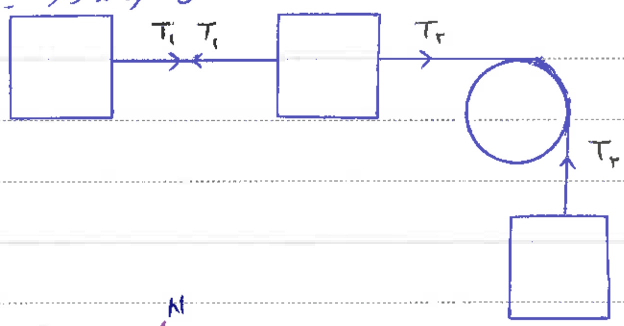

← ازای هر تماس
یک نیروی تماس
سطح داریم.

از طرف زمین بر جسم

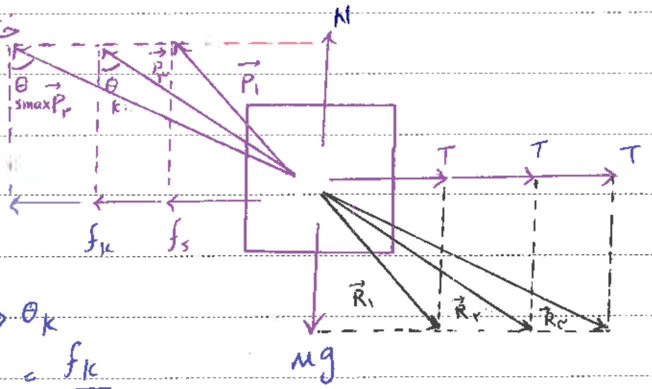
$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow 1N = 1kg \cdot 1\frac{m}{s^2} = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$

که جسم m را تکیه گاه بگیریم
(کششی دارد کل را سیستم بگیریم.)




T: جهت آن در راستای
امتداد نخ و به سمت
خارج سیستم




$\theta_{smax} > \theta_k$

$\mu_k = tg\,\theta_k = \frac{f_k}{N}$

$\rightarrow f_k = \mu_k N$

وارد شدن نیروی اپسیلن به T ← حرکت جسم

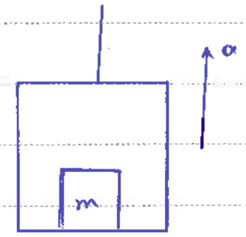
$f_{smax} \leftarrow$

$tg\,\theta_{smax} = \mu_s = \frac{f_{smax}}{N} \rightarrow f_{smax} = \mu_s N$

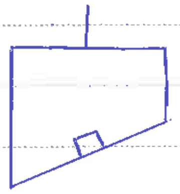
فقط در آستانه حرکت صدق می‌کند.

Subject:
Year. Month. Date.

مثال: بسته ای به جرم m را داخل یک آسانسور قرار می دهیم. آسانسور با شتاب ثابت a رو به بالا در حال حرکت است. نیروی اعمالی از طرف سطح بر آسانسور را بدست آورید.

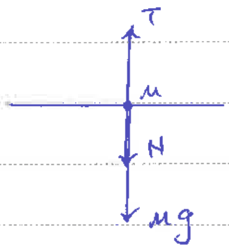



شرط یک جسم در نظر گرفتن ۲ جسم ← داشتن شتاب یکسان



← نمی توانیم یک جسم در نظر بگیریم چون به واسطه شیب شتاب متفاوتی دارند.

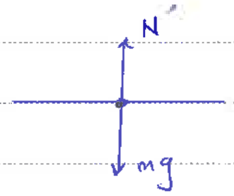
سیستم M: $T - Mg - N = Ma$




N: از طرف جسم m

* اگر در معادله مجهولات زیاد بود، سیستم را تغییر می دهیم.

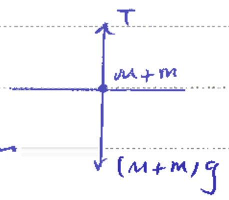
سیستم m:




$N' - mg = ma$

* $N' = N$ ← نیروهای عمل و عکس العمل (از نیروهای داخلی)

سیستم M, m:




$T - (M+m)g = (M+m)a$

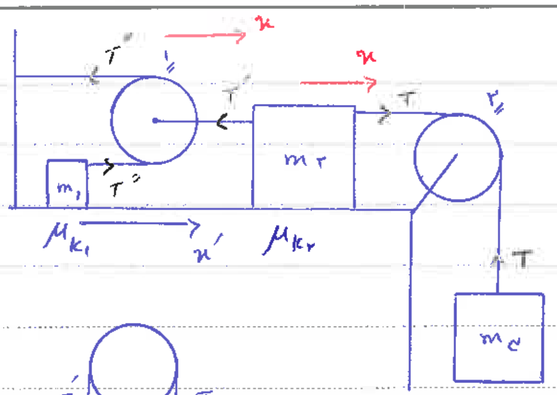
معادله جدیدی نیست (حاصل جمع دو معادله قبل)

مراحل حل سؤالات دینامیک: ۱. انتخاب سیستم ۲. تشخیص دادن نیروها ۳. رسم دیاگرام ۴. $\Sigma F = ma$ (در ابعاد مختلف x و y و ...)

مثال: در شکل زیر جسم $m_3$ رو به پایین شروع به حرکت می کند. شتاب اجسام را

بدست آورید. (از اصطکاک و جرم قرقره ها صرف نظر کنید.)

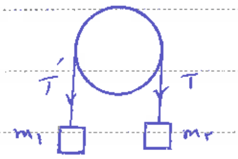
Subject:
Year.　　Month.　　Date.



: $m_3$

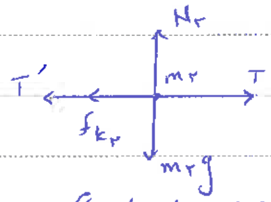
$T - m_3 g = m_3 a$

قرقره بدون اصطکاک ← $T$ یکسان
(لغزش طناب ها)



← $T$ و $T'$ می توانند برابر نباشند

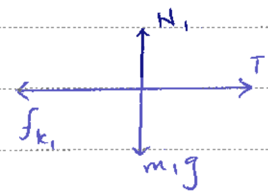
اصطکاک داشتن قرقره ← $T$ در یک طرف بیشتر می شود که به چرخش قرقره منجر می شود.



: $m_2$

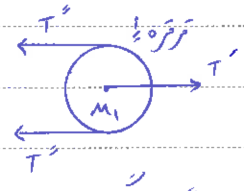
$N_2 - mg = 0$ ، $T - T' - \mu_{k_2} N_2 = m_2 a$

* شتاب قرقره ۲ و اجسام $m_3$ و $m_2$ برابر است ولی جسم $m_1$ بیشتر است چون به قرقره می رسد.



: $m_1$

$N_1 - m_1 g = 0$ ، $T'' - f_{k_1} = m_1 a'$ ، $a' \neq a$



قرقره ۱

$T' - 2T'' = \cancel{m_1} a \longrightarrow T' = 2T''$

* اگر تمام معادلات دینامیک را نوشتیم و هنوز مجهول داشتیم از مباحث دیگر
(مانند کار و انرژی، سینماتیک و ...) استفاده می کنیم

جسم $m_2$ و قرقره ۱ با شتاب برابر هرکدام $x$ متر جلو بروند ← $x' = 2x$ حرکت $m_1$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} V' = 2V \xrightarrow{\text{مشتق}} a' = 2a$

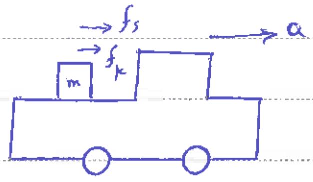
مثال: جسمی به جرم $m$ را روی یک کامیون قرار می دهیم. این کامیون با شتاب $a$
مطابق شکل شروع به حرکت می نماید. جهت حرکت بسته $m$ را مشخص کنید.
(بحث کنید) با چه شتاب ماکسیمم این کامیون می تواند حرکت کند که بسته در حال

PapCo

Subject:
Year. Month. Date.

شکول نسبت به کامیون باشد. اگر $a > a_{max}$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ شتاب جعبه را بدست آورید.

اصطکاک به جهت حرکت جسم به هیچ وجه بستگی ندارد بلکه به حرکت سطح روی سطح بستگی دارد. اصطکاک همیشه خلاف جهت حرکت سطح روی سطح یا تمایل حرکت سطح روی سطح است.




شکول جسم نسبت به کامیون ← $f_s = ma$

عقب رفتن نسبت به کامیون ← $f_k = ma'$

$(a > a')$

$$f_{s\,max} = \mu_s N = m a_{max} \longrightarrow \mu_s mg = m a_{max} \longrightarrow a_{max} = \mu_s g$$

* همیشه حرکات را نسبت به زمین می‌سنجیم یعنی می‌گوییم جعبه m جلو می‌رود ولی اگر نسبت به کامیون خواستند باید محاسبه کنیم (در پاسخ سؤال باید نسبت به زمین بگوییم نسبت به کامیون مگر اینکه خود سؤال بخواهد)

$f_k = \mu_k N = \mu_k mg = ma' \to a' = \mu_k g \Longrightarrow$ شتاب نسبت به کامیون $a'' = a' - a$

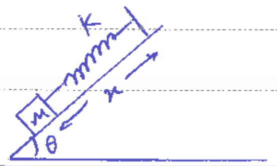
(مثلاً برای $\Delta x$ جعبه m روی کامیون)

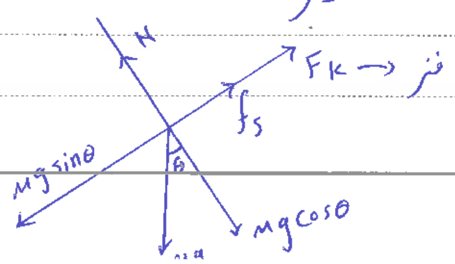

با شتاب a نسبت به دیوار حرکت می‌کند.

با سرعت V به طرف دیوار حرکت می‌کند

به جسم نیرویی وارد نمی‌شود و ساکن است.

مثال: جسمی به جرم M را روی سطح شیب دار به فنری متصل کرده و آن را رها می‌سازیم. بعد از طی مسافت x ($x < x_{max}$) سرعت آن را بدست آورید.



Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$mg\sin\theta - kx - \mu_k N = ma \rightarrow a = g\sin\theta - \frac{kx}{m} - \mu_k g\cos\theta$$

* شتاب متغیر است چون تابعی از x است.

$$a = \frac{dV}{dt}\times\frac{dx}{dx} = \frac{V\,dV}{dx} \rightarrow a\,dx = V\,dV \rightarrow \int_0^V V\,dV = \int_0^x a\,dx =$$

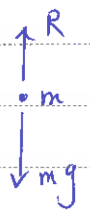
$$\int_0^x \left(g\sin\theta - \frac{kx}{m} - \mu_k g\cos\theta\right)dx \Rightarrow \frac{1}{2}V^2 = xg\sin\theta - \frac{k}{2m}x^2 - x\mu_k g\cos\theta$$

$$V = \sqrt{2xg\sin\theta - \frac{k}{m}x^2 - 2\mu_k g\cos\theta} \qquad V(x) = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int dt = \int \frac{dx}{V(x)}$$

مثلاً بعد از ۲ متر جابجایی a و سپس V را بدست آورید. $(x=2)$

اگر مدت زمان خواست ← انتگرال آخر

مثال: جسمی به جرم m را در فضا رها می‌کنیم. اگر مقاومت هوا $R=bV$ باشد (که b مقداری ثابت، V تندی در هر لحظه باشد):




الف) در آن زمان اول مکان ذره را بدست آورید.

ب) سرعت حدی این ذره چقدر است.

$$mg - R = ma \rightarrow mg - bV = ma \rightarrow a = g - \frac{bV}{m}$$ شتاب متغیر

$$\rightarrow \frac{dV}{dt} = g - \frac{bV}{m} \rightarrow \int_0^t dt = \int_0^V \frac{dV}{g - \frac{bV}{m}} = -\frac{m}{b}\int_0^V \frac{-\frac{b}{m}dV}{g - \frac{b}{m}V}$$

$$\rightarrow t = -\frac{m}{b}\ln\left(g - \frac{b}{m}V\right)\Big|_0^V = -\frac{m}{b}\left(\ln\left(g - \frac{b}{m}V\right) - \ln g\right) \Rightarrow -\frac{b}{m}t = \ln\left(1 - \frac{b}{mg}V\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b}{mg}V = e^{-\frac{b}{m}t} \longrightarrow V = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

$$\left(u = g - \frac{b}{m}V \rightarrow \frac{du}{dV} = -\frac{b}{m} \rightarrow du = -\frac{b}{m}dV\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)dt$$

Subject:
Year. Month. Date.

$\longrightarrow y = \frac{mg}{b}\left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b}\right)$ 　　 $t=0 \longrightarrow y=0$

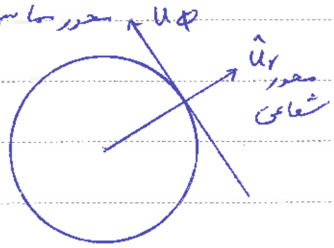
$t=1 \longrightarrow y = \dots$

دینامیک حرکت ذره روی دایره:

$\vec a = \vec a_N + \vec a_T$

$\longrightarrow m\vec a = m\vec a_N + m\vec a_T \longrightarrow \vec F = \vec F_N + \vec F_T \longrightarrow \Sigma \vec F_i = \Sigma \vec F_{N_i} + \Sigma \vec F_{T_i}$

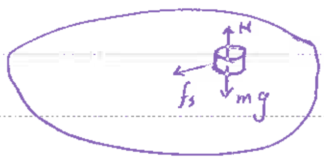
$$\begin{cases} \Sigma \vec F_N = m\vec a_N \\ \Sigma \vec F_T = m\vec a_T \\ \Sigma \vec F_\perp = 0 \longrightarrow \text{محور عمود بر صفحه} \end{cases}$$




مرکزگرا ← برآیند تمام نیروهای روی محور شعاعی

مماسی ← برآیند تمام نیروهای روی محور مماسی

مثال: سکه‌ای به جرم m را روی یک صفحه گرام که با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخش است قرار می‌دهیم. به طوری که روی صفحه گرام نلغزد. معادلات دینامیکی آن را بنویسید.

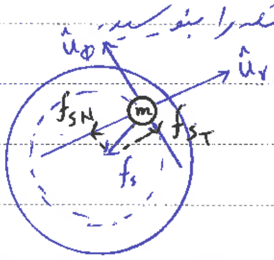



سطح ← نیروی قائم، اصطکاک

سرعت زاویه‌ای ثابت ← $\vec a_T$ نداریم

$\Sigma F_\perp = 0 \longrightarrow N - mg = 0$ 　　 $\Sigma \vec F_N = m\vec a_N \longrightarrow f_s = m\frac{V^2}{R}$

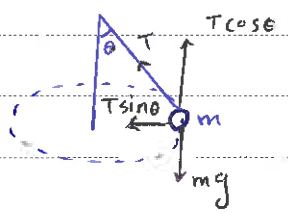
اگر گرام را خاموش کنیم، سکه روی گرام نلغزد معادلات دینامیکی سکه را بنویسید.




$f_{s_N} = m\frac{V^2}{R}$ 　　 $f_{s_T} = m\vec a_T = m\frac{dV}{dt}$

$N - mg = 0$

مثال: گلوله‌ای به جرم m را به طنابی متصل کرده و مطابق شکل آن را به حرکت می‌اندازیم تا روی یک دایره به شعاع R حرکت کند. معادلات دینامیکی این حرکت را بنویسید.

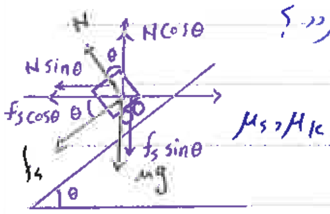



$\sum \vec{F}_N = m\vec{a}_N \rightarrow T\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R}$

$\sum \vec{F}_\perp = 0 \rightarrow T\cos\theta - mg = 0$

اگر حرکت در پاندول مخروطی دایره بود ← تندی ثابت است، $\rightarrow tg\theta = \dfrac{v^2}{Rg}$

مثال: یک کامیون مطابق شکل با چه سرعت ماکسیمم روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع R در پیچ جاده می‌تواند حرکت کند به طوری که از مسیر خارج نگردد؟




$\mu_s, \mu_k$

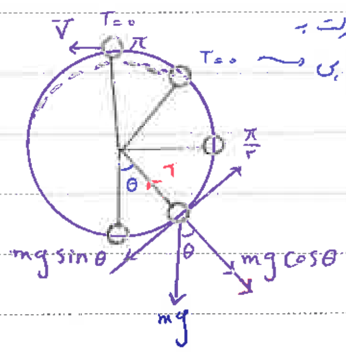
$\vec{a}_T$ ندارد ← اگر داشت حرکت دایره‌ای ممکن نبود

$$\begin{cases} N\cos\theta - f_s\sin\theta - Mg = 0 \\ f_s\cos\theta + N\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

حرکت ذره روی یک دایره در سطح قائم: در اینجا سرعت متغیر است ← $\vec{a}_T$

$mg\sin\theta = m\vec{a}_T \longrightarrow \vec{a}_T = g\sin\theta$

شتاب متغیر ← θ تابع زمان است.




$T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R} \rightarrow T = m\left(\dfrac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$

T یک نیروی متغیر است (تغییر $v$، $\theta$)

پایین دایره $T_{max} = m\left(\dfrac{v^2_{max}}{R} + g\right) \rightarrow \theta = 0$

بالای دایره $T_{min} = m\left(\dfrac{v^2_{min}}{R} - g\right) \rightarrow \theta = \pi$

$[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow v = 0 \rightarrow$ به حرکت خود روی دایره ادامه می‌دهد ولی برمی‌گردد

$[\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow v \neq 0 \rightarrow$ کشش طناب منفی می‌شود که امکان‌پذیر نیست

$[\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow T = 0 \rightarrow$ ادامه حرکت به صورت پرتابی

Subject:
Year. Month. Date.

نقطه $\pi$ ← $V\neq 0$ و $T=0$ ← ادامه حرکت روی دایره

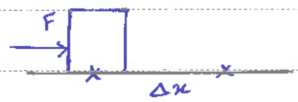
min شرط باقی ماندن روی دایره ← $T(\frac{\pi}{2},\pi)\neq 0$ ← $T(\pi)=0$ می تواند باشد

min شرط حرکت روی دایره ← $V=\sqrt{Rg}$ $\xleftarrow{T(\pi)=0}$ $\frac{V^2}{R}=g$ ← $T_{min}$ ← $\theta=\pi$

* مطالعه میان ترم: ۱. مطالعه جزوه ۲. حل مثال های هالیدی ۳. حل مسائل حل شده تمرین یاران ۴. نمونه سوالات میان ترم

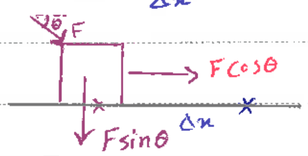
کار و انرژی:

حالت اول: نیرو ثابت در جهت تغییر مکان مستقیم




$W=F_x\cdot\Delta x \longrightarrow 1N.m=1J$

حالت دوم: نیرو ثابت در جهت تغییر مکان مستقیم نباشد



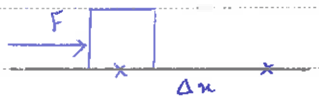

$W=F\cos\theta\cdot\Delta x \Rightarrow \Delta y=0 \longrightarrow W=W_x$

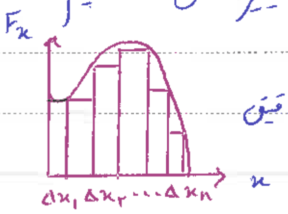
فضای سه بعد: $W=F_x\cdot\Delta x+F_y\cdot\Delta y+F_z\cdot\Delta z=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

$\longrightarrow W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ $\Delta\vec{r}=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}$

* $F_x = F\cos\alpha$ و ...

حالت سوم: نیرو متغیر در جهت تغییر مکان مستقیم



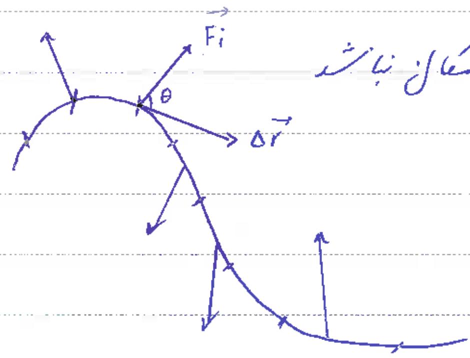




تقریبی $W=\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot\Delta x_i$

دقیق ← $W=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{\infty} F_i\cdot\Delta x_i=\int F_x\,dx$

$\longrightarrow W=\int F_x\cdot dx$

حالت چهارم: نیرو متغیر در جهت تغییر مکان نباشد




تقریبی $W=\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\cdot\Delta\vec{r_i}$

دقیق ← $W=\lim_{\Delta\vec{r_i}\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}\vec{F_i}\cdot\Delta\vec{r_i}$

$\longrightarrow W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$

تعریف کار: انتگرال $\vec{F}$ بر حسب $\vec{r}$ (جابجایی) $W=\int F_x dx+F_y dy+F_z dz$

$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k} \longrightarrow W=\int \underbrace{F\cos\theta}_{F_x,F_y,F_z}\cdot d\vec{r}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر $F_x = F_x(x)$ , $F_y = F_y(y)$ , $F_z = F_z(z)$ مانند $\vec{F} = x^2\hat{i} - y\hat{j} + e^z\hat{k}$ :

$$W = \int F_x \cdot dx + \int F_y \cdot dy + \int F_z \cdot dz \longrightarrow W = W_x + W_y + W_z$$

اگر $\vec{F} = xy^2\hat{i} - z^3\hat{j} + 4xz\hat{k}$ ← برای حل این نوع معادلات باید معادله مسیر را داشته باشیم تا ارتباط میان $x$ و $y$ و $z$، معلوم باشد.

$$a_x(x) = \frac{dV_x}{dt} \times \frac{dx}{dx} = \frac{V_x \cdot dV_x}{dx} \longrightarrow a_x(x) \cdot dx = V_x \cdot dV_x$$

$$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\times m} \int_{x_0}^{x} m\, a_x(x)\, dx = \int_{V_{x_0}}^{V_x} m V_x \cdot dV_x \longrightarrow W_{x\,\text{کل}} = \frac{1}{2} m V_x^2 - \frac{1}{2} m V_{x_0}^2$$

$$W_{y\,\text{کل}} = \frac{1}{2} m V_y^2 - \frac{1}{2} m V_{y_0}^2$$

$$W_{z\,\text{کل}} = \frac{1}{2} m V_z^2 - \frac{1}{2} m V_{z_0}^2$$

$$W_{\text{کل}} = W_{x\,\text{کل}} + W_{y\,\text{کل}} + W_{z\,\text{کل}} = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) - \frac{1}{2} m (V_{x_0}^2 + V_{y_0}^2 + V_{z_0}^2)$$

$$\longrightarrow W_{\text{کل}} = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 \qquad W_{\text{کل}} = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = \Delta KE$$

انرژی جنبشی : $KE$ , $K$ , $E_c$ (نمادها)

" " : کاری که روی جسم انجام شده تا از سکون به سرعت $V$ برسد

" " : مقدار کاری که جسم می‌تواند انجام دهد تا تندی آن به صفر برسد.

$W_{\text{کل}} = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta KE$ (قضیه کار و انرژی)

برای مقایسه کار در زمان ← $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ توان متوسط ، $\left(\frac{J}{s}\right)$ توان $P = \frac{W}{t}$

$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$ ← توان لحظه‌ای $P = \frac{dW}{dt}$ ← درصورتی $P$ ثابت است که $W$ برحسب $t$ خطی باشد.

$dW = P \cdot dt \longrightarrow W = \int P \cdot dt$ ← براساس این رابطه، رابطه اول زمانی درست است که $P$ ثابت باشد ($P = \frac{W}{t}$)

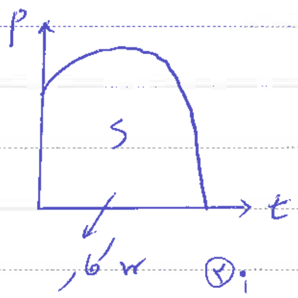
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$P = \frac{dw}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{V} \longrightarrow P = \vec{F}.\vec{V}$

توان لحظه‌ای

$w = \int \vec{F}.d\vec{r} \quad , \quad d\vec{r} = \vec{V}.dt \longrightarrow w = \int P.dt$




برای کار در فضای سه بعدی سه منحنی

$P_x$ , $P_y$ , $P_z$ برحسب $t$ را نیاز داریم

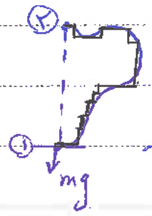
( یا $\vec{F}$ برحسب $\vec{r}$ $\quad w = \int \vec{F}.d\vec{r}$ )


توجه: $y$ مختصات است

$w = \vec{F}.d\vec{r} = F\cos\theta\,\Delta y$

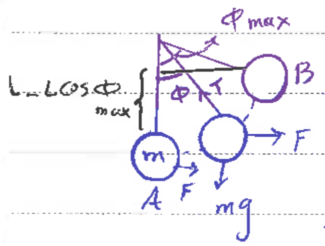

$w = \int F_x.dx + \int F_y.dy + \int F_z.dz = \int F_y.dy$

$w = -mgy$ $\qquad = \int_{y_1}^{y_2} -mg\,dy = -mg\,\Delta y$




$\longrightarrow$ حتی اگر به این شکل بالا بریم تغییری ایجاد نمی‌شود $\longrightarrow$ نیروی افقی = ۰ ، کار افقی = ۰ $\longrightarrow w = w_{عمودی} = -mgy$

مثال: گلوله‌ای به جرم $m$ را به وسیله طنابی به سقف آویزان می‌کنیم و با یک نیروی افقی مانند $F$ آن را از نقطه $A$ بسیار بسیار آهسته به نقطه $B$ می‌بریم. کار نیروی $F$ را بدست آورید.




* بهترین راه محاسبه کار: با داشتن $\vec{V}$ اولیه و ثانویه از تغییر کار و انرژی استفاده کنیم.

L = طول

x = فاصله از تعادل

$w_1 + w_2 + \dots + w_n = \Delta KE \longrightarrow w_{mg} + w_T + w_F = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2$

کار نیروهای مرکزگرا صفر است چون عمود بر مسیر حرکت دایره‌اند.

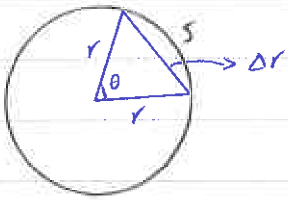
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\bar{V}_2 = \bar{V}_1 = 0 , W_T = 0 \longrightarrow W_F = -W_{mg}$

$W_{mg} = -mg(L - L\cos\phi_{max}) = -mgL(1-\cos\phi_{max}) \xrightarrow{W_F = -W_{mg}}$

$W_F = mgL(1-\cos\phi_{max})$ $\quad W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \begin{cases} \int F\cos\theta\, d\vec{r} \\ \int F_x\, dx + \int F_y\, dy + \int F_z\, dz \end{cases}$ ۲ روش محاسبه

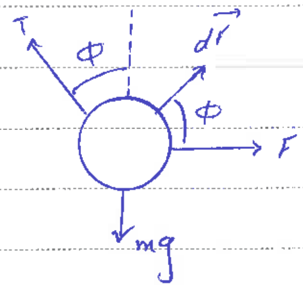



یادآوری: $S = r\theta$

$(\Delta r \to 0)$ در حد $\longrightarrow \begin{cases} ds = dr \\ dr = r d\theta \end{cases} \longrightarrow ds = r d\theta$

در حالت کلی:

$W = \int F\cos\theta\, dr \longrightarrow W = \int mg\, tg\phi \cdot \cos\phi\, dr$




$W = F\cos\phi\, dr$ $\quad \begin{matrix} T\cos\phi = mg \\ T\sin\phi = F \end{matrix} \longrightarrow tg\phi = \frac{F}{mg}$

$\longrightarrow F = mg\, tg\phi \longrightarrow W = \int mg\, tg\phi \cdot \cos\phi\, dr =$

$\int_0^{\phi_{max}} mgL\sin\phi\, d\phi = mgL(1-\cos\phi_{max})$

حالت دوم: $W_F = \int \underbrace{F_x}_{F} dx + \int F_y\, dy + \int F_z\, dz$ $\quad \sin\phi = \frac{x}{L}$

$\longrightarrow x = L\sin\phi \longrightarrow dx = L\cos\phi\, d\phi$

$= \int F\, dx = \int mg\, tg\phi\, dx = \int mg\, tg\phi \cdot L\cos\phi\, d\phi$

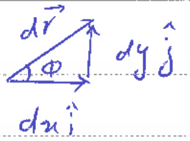
$= mgL\int_0^{\phi_{max}} \sin\phi\, d\phi = mgL(1-\cos\phi_{max})$

$W = \int F\, dx = \int mg\, tg\phi\, dx = \int mg\frac{dy}{dx}\, dx = \int_0^{L - L\cos\phi_{max}} mg\, dy =$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

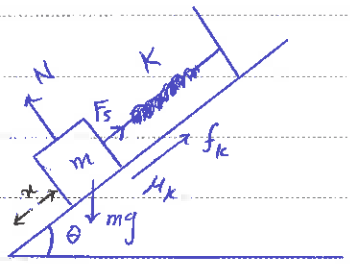
$mgL(1-\cos\phi_{max})$



$tg\,\phi = \frac{dy}{dx}$ ← برداری در هر لحظه
حرکت

هرگاه در انتگرال دو متغیر داشته باشیم با روابط روی شکل آن‌ها را به یک متغیر تبدیل می‌کنیم تا انتگرال بگیریم.

مثال: جسمی را به یک فنر متصل کرده و مانند شکل از روی یک سطح شیب‌دار رها می‌سازیم تا به اندازه $x$ جابه‌جا گردد $(x<x_{max})$. تندی این جسم را در آن نقطه با استفاده از تعریف کار بدست آورید.



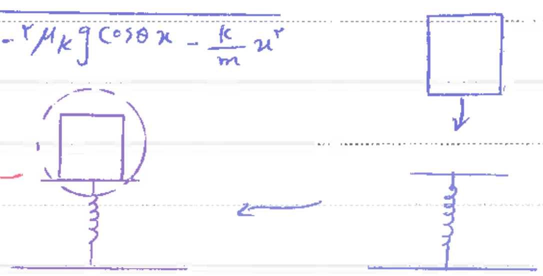

قضیه کار و انرژی کاروری ← داشتن $W$ و $V$

$$\cancel{W_N} + W_{mg} + W_{f_k} + W_s = \frac{1}{2}mV^2 - \cancel{\frac{1}{2}mV_0^2}$$

$$W_s = \int F_s\cos\theta\,dx = -\int kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

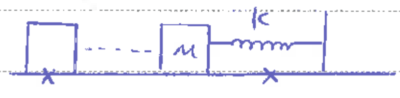
$$mg\sin\theta\,x - \mu_k mg\cos\theta\,x - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2$$

$$\longrightarrow V = \sqrt{2g\sin\theta\,x - 2\mu_k g\cos\theta\,x - \frac{k}{m}x^2}$$



← در نظر گرفتن به عنوان یک سیستم
↓
N را در نظر نمی‌گیریم
(چون نیروی داخلی است.)

پایستگی انرژی:



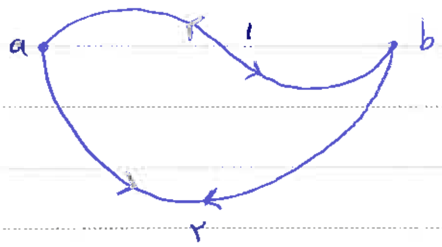

$\mu = 0$

تغییر مکان مهم نیست بلکه باید کار را در تک تک جابه‌جایی‌ها حساب کنیم که به سرعت اولیه و سرعت ثانویه برای نقطه‌ای که می‌خواهیم کار آن را حساب کنیم نیاز داریم
برای مثال اگر $V_1 = V_2$، کار (کل) صفر است حتی اگر تغییر مکان داشته باشیم.

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )

$W = W_N + W_{mg} + W_k$

* نیروی پایستار: هرگاه در یک رفت و برگشت کار کل کار صفر شود به آن نیرو پایستار می‌گوییم.

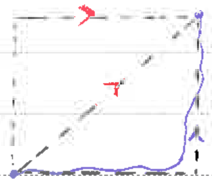


$W_{ab_1} + W_{ba_2} = 0$
$W_{ab_1} + W_{ba_1} = 0$
$\rightarrow W_{ab_1} = -W_{ba_2}$, $W_{ab_1} = -W_{ba_1}$

کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد $\rightarrow W_{ba_1} = W_{ba_2}$

فنر ← نیروی متغیر مکانی و پایستار

کار دیگر:



در فنر ← انرژی جنبشی بر حسب مسیر تغییر می‌کند ← $\Delta KE + \Delta U = 0$

$\Delta KE$ ازجنس

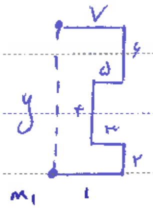
(انرژی پتانسیل) $\Delta KE = -\Delta U \xrightarrow{\text{برای یک نیرو}} W = -\Delta U$

$\rightarrow \Delta U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \rightarrow U - U_0 = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = A - B$

... حد پایین انتگرال ← طوری انتخاب می‌کنیم که $B = 0$ ← $U_0 = 0$

نتیجه → $U = \dots$

نیروی گرانش $\vec{F} = -mg\hat{j}$



$W = \int -mg\,dy \rightarrow U - U_0 = -\int -mg\,y = mgy \Big|_0^y$

$\rightarrow U = mgy$

تنها در صورتی که نسبت به پتانسیل صفر بسنجیم می‌توانیم انرژی پتانسیل را به دست آوریم.

$W_1 = -mgy$
$W_2 = -mg(y_3 + y_4 + y_1) = -mgy$ → گرانش پایستار است.

Subject: 
Year. Month. Date. نیرو همیشه با تغییر مکان در جهت مخالف است

$U - U_0 = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int kx\,(-1)\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^x$ ($\cos 0$, $U_0 = 0$) $\longrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$ انرژی پتانسیل فنر (انرژی پایستار فنر)

تغییر شکل سیستم ← عامل ایجاد انرژی پتانسیل

$U$ ← بسته به شکل سیستم ← بسته به مختصات جسم

$\Longrightarrow U = U(x, y, z)$ ← برحسب مختصات فضا

نیروی الکتریکی نیز پایستار است ← $F = k\frac{qq'}{r^2}$

$U - U_0 = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int k\frac{qq'}{r^2}\,d\vec{r} = +k\frac{qq'}{r}\Big|_\infty^r$

تغییرات انرژی نسبت به پتانسیل صفر الکتریکی (همان نقطه زمین)

پایستگی انرژی مکانیکی: برای یک نیروی پایستار: $\Delta KE + \Delta U = 0$

" " چند " : $\Delta KE + \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = 0 \longrightarrow \Delta KE = W_1 + W_2 + \dots + W_n = -\sum_{i=1}^{n} \Delta U_i$

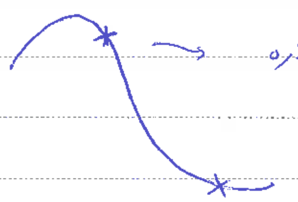
$\longrightarrow \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 + (U_2 - U_1)_1 + (U_2 - U_1)_2 + \dots + (U_2 - U_1)_n = 0$

$\underbrace{\left[\frac{1}{2}mV_2^2 + (U_{21} + U_{22} + \dots + U_{2n})\right]}_{E_2} - \underbrace{\left[\frac{1}{2}mV_1^2 + (U_{11} + U_{12} + \dots + U_{1n})\right]}_{E_1} = 0$

انرژی مکانیکی نقطه

$E_2 - E_1 = 0 \xrightarrow[\text{پایستار}]{\text{تمام نیروها}} \Delta E = 0$ اصل پایستگی انرژی مکانیکی

* نیروی گرانش، الکتریسیته ← پایستار



← مجموع انرژی جنبشی و انرژی های پتانسیل آن نقطه = انرژی ذره

اگر نیروی غیر پایستار داشتیم:

$\underbrace{W_1 + W_2}_{\substack{W_{nc} \\ \text{ناپایستار}}} + \underbrace{W_3 + \dots + W_n}_{\substack{W_c = -\sum_{i=1}^{n'} \Delta U_i \\ \text{پایستار}}} = \Delta KE \longrightarrow W_{nc} - \sum_{i=1}^{n'} \Delta U_i = \Delta KE$

$\longrightarrow W_{nc} = \underbrace{\Delta KE + \sum_{i=1}^{n'} \Delta U_i}_{\Delta E} = \Delta E$

$\longrightarrow \boxed{W_{nc} = \Delta E}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مشهورترین نیروی ناپایستار: اصطکاک

$\Delta E = 0$ تمام نیروها پایستار

$\Delta E = W_{nc} \neq 0$ نیروی ناپایستار هم داریم

برای پایستارها: $-\Delta U = W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ , $\Delta U = \int dU \longrightarrow -dU = \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\longrightarrow -dU = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

$-dU = F_x\,dx \leftarrow dy = dz = 0$ اگر $\longrightarrow F_x = -\dfrac{dU(x,y,z)}{dx}$

$-dU = F_y\,dy \leftarrow dx = dz = 0$

$-dU = F_z\,dz \leftarrow dx = dy = 0$

اگر در فرمول دارد گرفتن ← ثابت در نظر گرفتن $z, y$

$\longrightarrow F_y = -\dfrac{dU(x,y,z)}{dy}$ , $F_z = -\dfrac{dU(x,y,z)}{dz}$

مثال: $U = x^3y^2z \longrightarrow \vec{F} = -3x^2y^2z\,\hat{i} - 2x^3yz\,\hat{j} - x^3y^2\,\hat{k}$

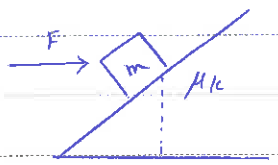
نیروهای مؤثر بر سیستم $W = \Delta E = \Delta E_{mec}$ $\left\langle \begin{array}{l} \Delta E \text{ جنبشی} \\ \Delta E \text{ پتانسیل} \end{array}\right.$ $+ \underbrace{\Delta E_{Th} + \Delta E_{int}}_{W_{f_k}}$

$W_{f_k}$ ‹ گرم کردن جسم / دادن انرژی به هوا

اگر نداشتیم نیروی پایستار هست باشد:

$\Delta E = W_{nc} + W$ ‹ پایستار: $W = -\Delta U \longrightarrow \Delta E + \Delta U = W_{nc}$ ← عبارت درست است $(\Delta E = \Delta K + \sum_{i=1}^{n} \Delta U)$

ناپایستار: $\Delta E = W_{nc}$ ✓




$mg$ , $N$ , $f_k$ , $F$

$\rightarrow mgy_2 - mgy_1 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \cancel{W_N} + W_{f_k} + W_F$

$W_{nc}$ ← به صورت مجهول چون از پایستاری F خبر نداریم

P4PCO

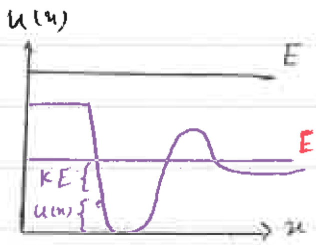
Subject:
Year. Month. Date.

در فضای یک بعدی (مثلاً محور xها): $KE + U(x) = E$

$\longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \longrightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$

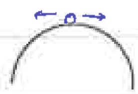
$\longrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$

$\longrightarrow dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \longrightarrow x(t) = \dots$



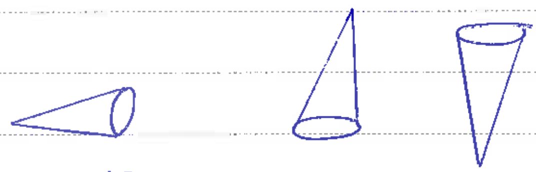

$E \longrightarrow$ مسیر حرکت را مشخص می‌کند

نقاط برگشتی $U(x) = E$



نقطه تعادل ناپایدار

نقطه تعادل پایدار



بی‌تفاوت   پایدار   ناپایدار

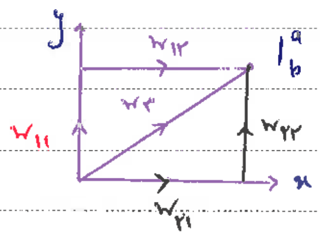
کار $\equiv$ تغییرات انرژی جنبشی

کار $\equiv$ تبدیل انرژی

$\Delta E = \int P\,dt \longleftarrow (P = \frac{dW}{dt}) \quad P = \frac{dE}{dt} \longleftarrow W = \Delta E = \Delta KE + \Delta U + \Delta E_{Th} + \Delta E_{int}$

($\Delta E_{mec}$ تغییرات انرژی مکانیکی) و تغییرات میزان انرژی که تبدیل می‌شود

مثال: نیروی $\vec{F} = -ky\vec{i} - kx\vec{j}$ به جسم اعمال می‌شود. این نیرو پایستار است؟




$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$   $d\vec{r}_{11} = dy\vec{j}$

$W = \int F_x\,dx + \int F_y\,dy + \int F_z\,dz$   $d\vec{r}_{12} = dx\vec{i}$

$\longrightarrow W_{11} = \int -k\cancel{x}\,dy = 0$

$\longrightarrow W_{12} = \int -ky\,dx = \int_0^a -kb\,dx = -kab \Big\} \longrightarrow W_1 = 0 - kab = -kab$

Subject:

Year. Month. Date.

$$W_{21} = \int -ky\,dx = 0$$
$$W_{22} = \int -kx\,dy = -\int_0^b ka\,dy = -kab$$
$\rightarrow W_2 = 0 - kab = -kab \rightarrow W_1 = W_2$

این نیرو پایستار است.

برای حل سؤال از معادلات مسیر $x=0$ , $x=a$ , $y=0$ , $y=b$ استفاده کردیم.

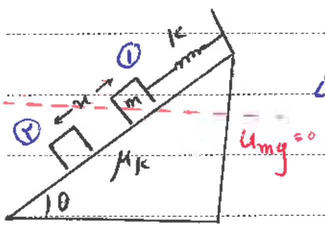
* خاصیت کاربردی پایستارها: اگر فنر داشتیم یا هر نیروی پایستار دیگر مسیر دلخواه و مناسب درنظر گرفته مسئله به راحتی حل می‌شود.

$$W_3 = \int -ky\,dx - kx\,dy \qquad y = \frac{b}{a}x \rightarrow dy = \frac{b}{a}dx$$

$$\rightarrow W = \int -k\frac{b}{a}x\,dx - \int kx\frac{b}{a}dx = -2\int k\frac{b}{a}x\,dx = -k\frac{b}{a}(a^2) = -kab$$

$\rightarrow W_1 = W_2 = W_3 \rightarrow$ پایستار ✓

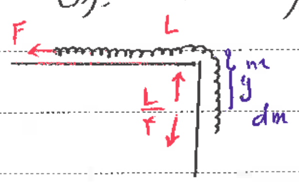
مثال: جسمی به جرم $m$ را به فنری متصل کرده و روی سطح شیب دار مطابق شکل آن را رها می‌کنیم تا به اندازه $x$ ($x < x_{max}$) جابجا گردد. تندی را در آن نقطه بدست آورید.




* قبل از محاسبه سطح پتانسیل صفر را قرار دهیم (نقطه ۱ یا ۲)

$$\Delta E = W_{nc} \rightarrow E_2 - E_1 = W_{nc}$$
$U_{mg} = 0$ $\quad E_1 = 0 + 0 + 0 = 0$
$$E_2 = \frac{1}{2}mV^2 - mgy + \frac{1}{2}kx^2 \qquad y = x\sin\theta$$
$$W_{nc} = W_f = -\mu_k mg\cos\theta\, x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 - mgx\sin\theta + \frac{1}{2}kx^2 - 0 = -\mu_k mg\cos\theta\, x$$
$$\rightarrow V = \sqrt{2g\sin\theta x - \frac{k}{m}x^2 - 2\mu_k g\cos\theta x}$$

مثال: یک زنجیر به طول $L$ و جرم $m$ را روی یک میز طوری قرار می‌دهیم که $\frac{1}{4}$ طول آن آویزان باشد. اگر نیروی $F$ را اعمال کنیم تا کل زنجیر روی میز قرار گیرد، مقدار کار نیروی $F$ را محاسبه نمایید.




$$\lambda = \frac{m}{L} \qquad dm = \lambda\,dy$$
چگالی خطی جرم

$dm = \sigma\,dA$

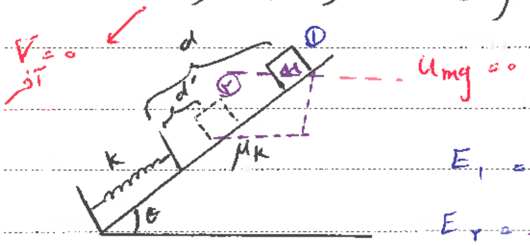
$dm = \rho\,dV$

$$dmgy \rightarrow W_F = \int_0^{\frac{L}{4}} \lambda g y\,dy = \frac{m}{L}g\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{L/4}$$

$$\rightarrow W_F = \frac{mgL}{32}$$

Subject:
Year. Month. Date.

مثال: جسمی به جرم m را از بالای یک سطح شیب‌دار رها ساخته تا به فنر برخورد کند. تا چه فاصله‌ای روی سطح شیب‌دار این جسم می‌تواند به طرف بالا حرکت کند؟




$\Delta E = W_{nc} \longrightarrow E_2 - E_1 = W_{nc}$

$E_1 = 0 + 0 + 0 = 0$

x ← max فشردگی فنر

$E_2 = \frac{1}{2}\cancel{mV^2} - mg(d-d')\sin\theta$ از حالت عادی

$W_{nc} = -\mu_K mg\cos\theta\,(d+d'+2x)$

$\longrightarrow -mg(d-d')\sin\theta - 0 = -\mu_K mg\cos\theta\,(d+d'+2x)$

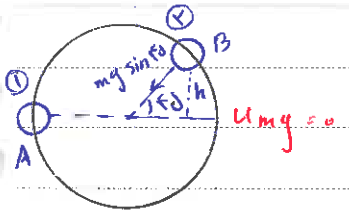
دو مجهول داریم ← برای حل یکبار نقطه ۲ را به انتهای فشردگی فنر ببریم:

$\Delta E = W_{nc} \longrightarrow E_2 - E_1 = W_{nc}$

$E_1 = 0 \quad , \quad E_2 = \frac{1}{2}kx^2 - mg(d+x)\sin\theta$

$W_{nc} = -\mu_K mg\cos\theta\,(d+x) \longrightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg(d+x)\sin\theta - 0 = -\mu_K mg\cos\theta\,(d+x)$

مثال: با چه سرعتی گلوله m را از نقطه A به حرکت بیندازیم تا در نقطه B از مسیر خارج شود؟




$\Delta E = W_{nc} \longrightarrow E_2 - E_1 = W_{nc}$

$E_1 = \frac{1}{2}mV_0^2$

$E_2 = \frac{1}{2}mV^2 + mgh \qquad W_{nc} = 0$

$\longrightarrow \frac{1}{2}mV^2 + mgh - \frac{1}{2}mV_0^2 = 0$

دینامیک دایره‌ای: $\cancel{N}^{0} + mg\sin 45 = m\frac{V^2}{R}$ $\Big\} \longrightarrow V = \sqrt{gh}$

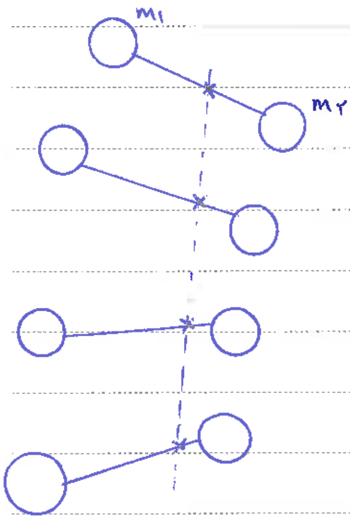
خارج شدن از مسیر

* در معادله اول هم h را برحسب R و زاویه داشتیم.

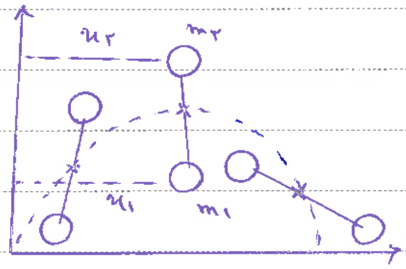
$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 + mgh \xrightarrow[V=\sqrt{gh}]{} \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{3}{2}mgh \longrightarrow V_0 = \sqrt{3gh}$

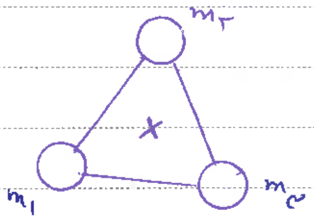
سیستم ذرات:

مرکز جرم:




در پرتاب این جسم تنها یک نقطه به طور کامل روی سهمی حرکت می‌کند



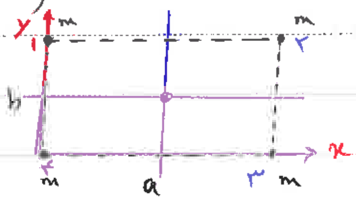

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

فضای سه بعدی $\longrightarrow$ $$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

تعمیم برای اجسام n ذره‌ای $\longrightarrow$

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum m} = \dfrac{1}{M} \sum m_i x_i \\ y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \dfrac{\sum m y}{\sum m} = \dfrac{1}{M} \sum m_i y_i \\ z_{CM} = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_2} = \dfrac{\sum m z}{\sum m} = \dfrac{1}{M} \sum m_i z_i \end{cases}$$

مثال: چهار ذره به جرم m در رئوس یک مستطیل قرار گرفته‌اند. مرکز جرم ذرات را به دست آورید

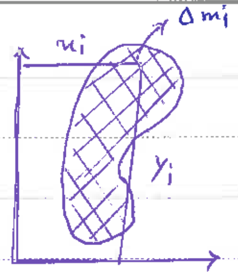



$$x_{CM} = \frac{m \times 0 + ma + ma + m \times 0}{4m} = \frac{1}{2} a$$

$$y_{CM} = \frac{mb + mb + m \times 0 + m \times 0}{4m} = \frac{1}{2} b$$

اگر $(\frac{1}{2} a = x)$ و $(\frac{1}{2} b = y)$ را محور در نظر می‌گرفتیم چون هر جسم نسبت به یکی دیگر قرینه است، قطعاً مرکز جرم ذره‌ها مرکز محور مختصات انتخابی بود

Subject:
Year. Month. Date.




هر جسم ← بی‌نهایت ذره ← مرکز جرم آن !؟

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i x_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i} = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm}$$

$$y_{CM} = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm} \quad , \quad z_{CM} = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm}$$

برای محاسبه باید $m$ را به فضای سه‌بعدی ارتباط دهیم:

$dm$ ← ذره خیلی کوچک ← $dV$

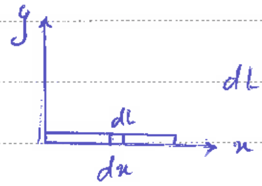
$m = \rho V \longrightarrow dm = \rho\, dV$

محال تغییر ندارد ← رابطه ۱ ✓

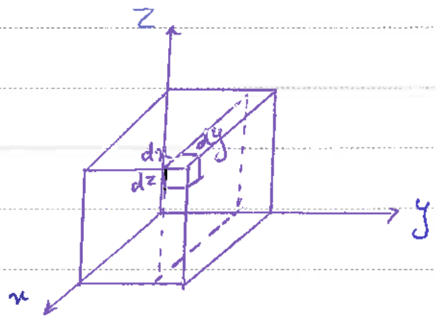
$m = \sigma A \longrightarrow dm = \sigma\, dA$

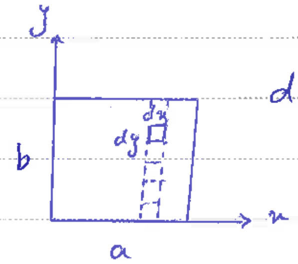
$m = \lambda L \longrightarrow dm = \lambda\, dL$

$$\longrightarrow x_{CM} = \frac{\int x \begin{matrix}\rho dV \\ \sigma dA \\ \lambda dL\end{matrix}}{\int \begin{matrix}\rho dV \\ \sigma dA \\ \lambda dL\end{matrix}}$$




$dL = dx$




$dA = dx\,dy$

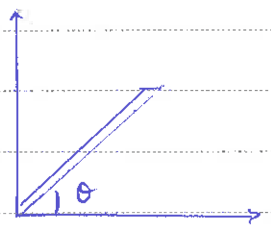
$dV = dx\,dy\,dz$

مثال: میله‌ای به طول $L$ با چگالی $\lambda = 2x^2$ مفروض است. مرکز جرم این میله را به دست آورید.

$x$ قرار دارد روی محور $x$

$$x_{CM} = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int x \lambda\, dL}{\int \lambda\, dL} = \frac{\int_0^L x (2x^2)\, \overbrace{dL}^{=dx}}{\int_0^L 2x^2\, \underbrace{dL}_{=dx}} = \frac{\frac{1}{2} L^4}{\frac{2}{3} L^3} = \frac{3}{4} L$$

Subject:
Year. Month. Date.




اگر به این حالت بود بازه‌ها نقطه به دست می‌آید ←
ولی باید بر طبق هم x و هم y حل می‌کردیم.

انتگرال دوگانه ←

فضای دو بعدی:

$$A = \int dA \longrightarrow A = \int_0^a \int_0^b dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b dy = \int_0^a b\,dx = ab$$

تبدیل اول این را انجام می‌دهیم.

مساحت یک نوار

مساحت کل نوارها (فضای دو بعدی)

مثال: یک صفحه مستطیل شکل به ابعاد a و b مطابق شکل مفروض است. اگر چگالی جرمی آن $\sigma = x^2 y$ باشد، مرکز جرم را بیابید. (شکل قبل)

$$x_{CM} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\sigma\,dA}{\int \sigma\,dA} = \frac{\int_0^a\int_0^b x\sigma\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b \sigma\,dx\,dy} = \frac{\int_0^a\int_0^b x(x^2y)\,dx\,dy}{\int_0^a\int_0^b x^2y\,dx\,dy}$$

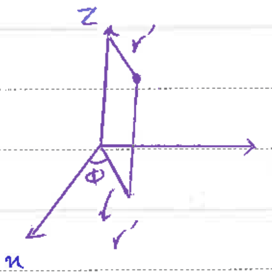
$$= \frac{\int_0^a x^3dx\,(\frac{1}{2}b^2)}{\int_0^a x^2dx\,(\frac{1}{2}b^2)} = \frac{(\frac{1}{4}a^4)(\frac{1}{2}b^2)}{(\frac{1}{3}a^3)(\frac{1}{2}b^2)} = \frac{3a}{4}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\sigma\,dA}{\int \sigma\,dA} = \frac{\int_0^a\int_0^b y(x^2y)\,dx\,dy}{(\frac{1}{3}a^3)(\frac{1}{2}b^2)} = \frac{(\frac{1}{3}b^3)(\frac{1}{3}a^3)}{(\frac{1}{3}a^3)(\frac{1}{2}b^2)} = \frac{2}{3}b$$

مختصات استوانه‌ای:

$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$ دکارتی

$\begin{matrix} r' \\ \phi \\ z \end{matrix}$ استوانه‌ای




$x = r'\cos\phi$

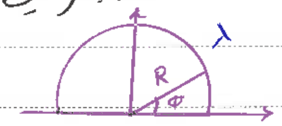
$y = r'\sin\phi$

$z = z$

PAPCO

Subject:
Year.  Month.  Date.

مثال: یک میله نیم دایره‌ای شکل با چگالی $\lambda$، شعاع $R$ مفروض است. مرکز جرم این میله را بدست آورید.




$y = R\sin\phi$

* اول محورهای مناسب انتخاب می‌کنیم.

به ازای هر $x$ مثبت، $x$ منفی هم داریم $\rightarrow x_{cm} = 0$ تقارن

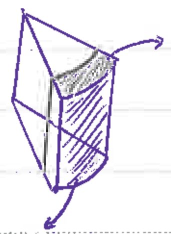
$dL$ ← طول دایره

$dL = R\,d\phi$

$$y_{cm} = \frac{\int y.dm}{\int dm} = \frac{\int y\lambda dL}{\int \lambda dL} = \frac{\int y\lambda R d\phi}{\lambda(\pi R)} = \frac{\int R\sin\phi\,\lambda R\,d\phi}{\lambda\pi R} =$$

$$\frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi = \frac{2R}{\pi}$$

مخرج $\longrightarrow \lambda\int dL = \lambda\int_0^{\pi} R\,d\phi = \lambda\pi R$

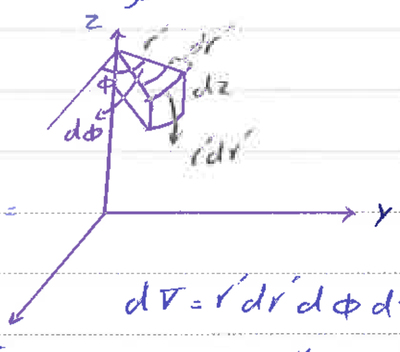


$dA = r'dr'd\phi$

$dA = R\,d\phi\,dz$
↓
در سطح جانبی $r$ ثابت ($R$) است

حالت اول:
اول از $\phi$ انتگرال بگیریم

حالت دوم:
اول از $r$ انتگرال بگیریم



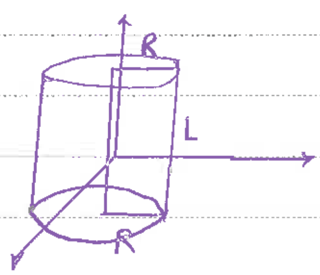

$$V = \int dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L r'dr'd\phi\,dz =$$

$$L(2\pi)\left(\tfrac{1}{2}R^2\right) = \pi R^2 L$$

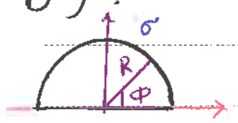
حجم استوانه

$dV = r'dr'd\phi\,dz$

با گرفتن انتگرال حجم را بدست می‌دهد.



مثال: یک صفحه نیم‌دایره‌ای شکل به شعاع R، چگالی σ مفروض است. مرکز جرم آن را بدست آورید.




* انتخاب محورها در مرکز دایره

تقارن $x_{cm} = 0$

شکل به قسمتی از استوانه به مختصات استوانه‌ای

$$y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = \frac{\int y\sigma\,dA}{\int \sigma\,dA} = \frac{\int_0^R\int_0^\pi y\sigma r'\,dr'\,d\phi}{\sigma\int dA} = \frac{\int_0^R\int_0^\pi r'\sin\phi\, r'\,dr'\,d\phi}{\frac{\pi R^2}{2}} =$$

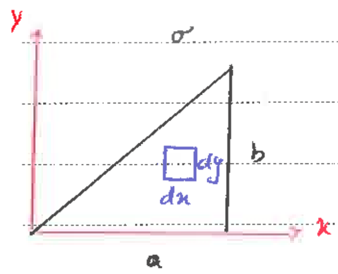
$$\frac{2\times R^3/3}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$$

$dA = dx.dy$

۲: $$y_{cm} = \frac{\int_{-R}^{R}\int_0^y y\sigma\,dx\,dy}{\sigma\,\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\int_{-R}^{R}\sigma\,\frac{1}{2}y^2\,dx}{\sigma\,\frac{\pi R^2}{2}} \xrightarrow[\text{معادله مسیر}]{x^2+y^2=R^2}$$

$$y_{cm} = \frac{\frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{6}x^3\Big|_{-R}^{R}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

مثال: یک مثلث قائم‌الزاویه به ابعاد a، b، چگالی σ مفروض است. مرکز جرم این مثلث را بدست آورید.




$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\int x\sigma\,dA}{\sigma\times\frac{ab}{2}} = \frac{\int_0^a\int_0^y x\,dx\,dy}{\frac{ab}{2}} =$$

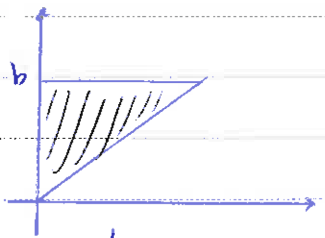
$y = \frac{b}{a}x$

$$\frac{\int_0^a xy\,dx}{\frac{ab}{2}} = \frac{\int_0^a \frac{b}{a}x^2\,dx}{\frac{ab}{2}} = \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{1}{3}a^3\right)}{\frac{ab}{2}} = \frac{2}{3}a$$

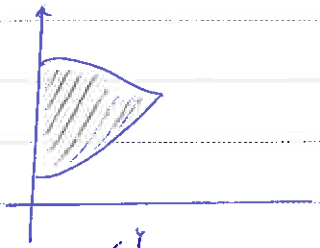
* اگر $\int_0^b$ بود، مساحت مثلث محاسبه می‌شد.

$\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{همین}}$ $y_{cm} = \frac{1}{3}b$ ⟶ محل برخورد میانه‌ها

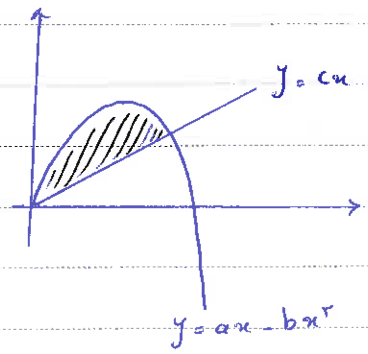
Subject:
Year. Month. Date.




$$\int_y^b$$

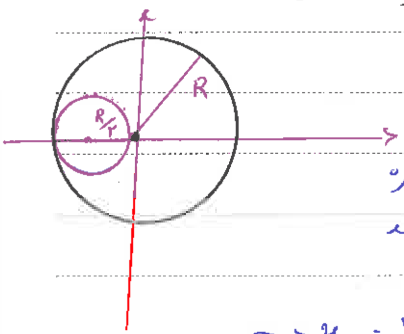


$$\int_{y_1}^{y_2}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: یک صفحه دایره‌ای شکل به شعاع R با پخش یکنواخت مفروض است. در آن یک حفره مطابق شکل به شعاع $\frac{R}{2}$ ایجاد می‌کنیم. مرکز جرم این جسم را بدست آورید.

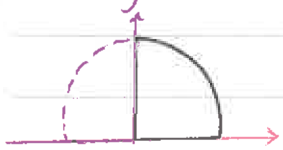



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

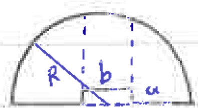
فرض کنیم حفره پر باشد $\longrightarrow 0 = \dfrac{m_1(-R/2) + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$\longrightarrow x_2 = \dfrac{m_1}{m_2}\left(R/2\right) \longrightarrow$ $x$ مرکز جرم در بودن حفره و حذف جرم $m_1$

* با پرکردن حفره، ۲ مرکز جرم دو دایره را یک شکل می‌کنیم که $x_{cm}$ آن مرکز دایره است ( $x_{cm} = 0$ ) سپس رابطه را برای دو جرم می‌نویسیم.



$$\frac{4R}{3\pi} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$




$y = \sqrt{R^2 - x^2} \longrightarrow$ راه حل عادی

پرکردن $\longrightarrow \dfrac{4R}{3\pi} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\ ,\ \dfrac{4R}{3\pi} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$

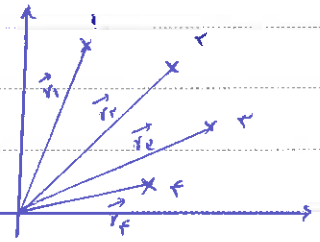
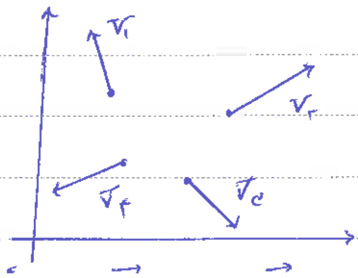
$$\begin{cases} M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n \xrightarrow{\times \hat{i}} M x_{cm}\hat{i} = m_1 x_1 \hat{i} + m_2 x_2 \hat{i} + \dots + m_n x_n \hat{i} \\ M y_{cm} = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n \xrightarrow{\times \hat{j}} M y_{cm}\hat{j} = m_1 y_1 \hat{j} + m_2 y_2 \hat{j} + \dots + m_n y_n \hat{j} \\ M z_{cm} = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n \xrightarrow{\times \hat{k}} M z_{cm}\hat{k} = m_1 z_1 \hat{k} + m_2 z_2 \hat{k} + \dots + m_n z_n \hat{k} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\oplus} M(x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}) = m_1(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}) + \dots + m_n(x_n\hat{i} + y_n\hat{j} + z_n\hat{k})$$

$\longrightarrow M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n$ داشتن داده های ذرات

داشتن مرکز جرم

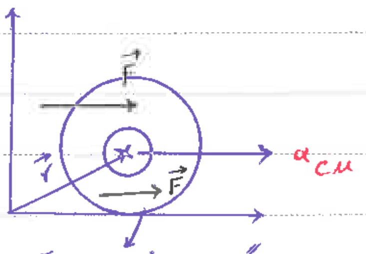
Subject:
Year. Month. Date.

$\xrightarrow{\text{مشتق}} M\vec{V}_{cm} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots + m_n\vec{V}_n$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_n\vec{a}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \Sigma\vec{F} = \vec{F}_{ext}$

نیروی خارجی



* حرکت در مورد یک جسم نیست بلکه در مورد یک ذره ( مرکز جرم ) است

اگر ذره‌ای که نیرو بر آن وارد می‌شود تغییر کند شتاب تغییر نخواهد کرد. ← تنها اثر نیرو مهم نیست ← هر جا نیرو وارد شود به مرکز جرم اعمال می‌شود و این مرکز جرم است که شتاب خواهد گرفت ← در نتیجه اجاز را یک ذره به جرم $M$ در مرکز جرم در نظر می‌گیریم.

$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = M\dfrac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \dfrac{dM\vec{V}_{cm}}{dt} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \longrightarrow \vec{P} = m\vec{V}$ تکانه خطی

توجه: $\vec{F}_{ext}$ به تمام ذرات جسم وارد می‌شود ولی به وسیله نیروهای داخلی خنثی می‌شوند (به جز در مرکز جرم که محل اعمال $\vec{F}_{ext}$ است.)

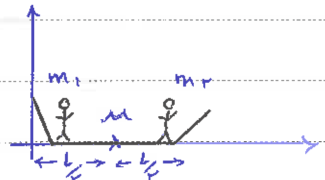
$\vec{F}_{ext} = 0 \longrightarrow \dfrac{d\vec{P}_{cm}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{P}_{cm} =$ ثابت $\longrightarrow$ اصل پایستگی (بقای) تکانه خطی

* در پایستگی $M\vec{V}_{cm}$ در روابط تمام سرعت‌ها نسبت به زمین محاسبه می‌شوند. به عبارتی سرعت نسبی نداریم.

مثال: دو نفر به جرم های $m_1$ و $m_2$ در ابتدا و انتهای یک قایق به جرم $M$ و طول $L$ نشسته اند. اگر جای خود را عوض کنند جابه جایی قایق را حساب کنید.

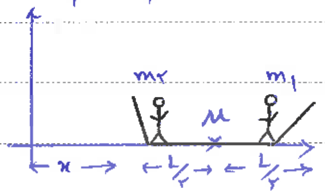
اگر σ داشتیم (پخش جرم قایق) ← محاسبه مرکز جرم آن

برحسب L ← ادامه حل




$\vec F_{ext}=0 \longrightarrow \vec P_{cm}=$ ثابت

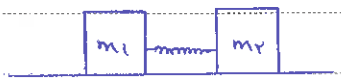
$$M x_{cm} = m_1x_1+m_2x_2+Mx_c = m_1x_1'+m_2x_2'+Mx_c'$$




$$\longrightarrow m_1\times 0 + m_2\times L + M\times \frac{L}{2} = m_1(x+L)+m_2x + M\left(x+\frac{L}{2}\right)$$

$$\longrightarrow x$$

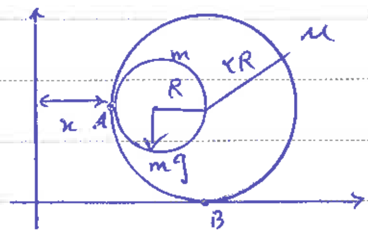
مثال: دو جسم $m_1$ و $m_2$ در دو طرف یک فنر قرار داده و آن را فشرده ساخته، روی یک سطح بدون اصطکاک قرار داده و رها می‌سازیم. نسبت سرعت‌های این دو جسم را بدست آورید.




$\vec F_{ext}=0 \longrightarrow \vec P_{cm}=$ ثابت

$$\longrightarrow \cancel{m_1\vec V_1}^{\,0}+\cancel{m_2\vec V_2}^{\,0} = m_1\vec V_1'+m_2\vec V_2' \longrightarrow \frac{V_1'}{V_2'} = -\frac{m_2}{m_1}$$

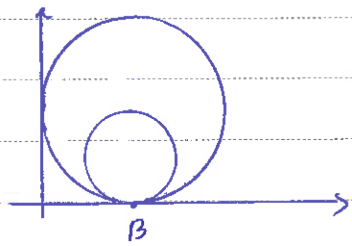
مثال: گلوله‌ای به جرم m و شعاع R از نقطه A داخل یک پوسته کروی شکل به جرم M و شعاع 2R رها می‌سازیم تا به نقطه B برسد. جابجایی پوسته را حساب کنید.




1/ $m_1x_1+m_2x_2=m_1x_1'+m_2x_2'$

$$\longrightarrow m(x+R)+M(x+2R) = m(2R)+M(2R)$$

$$\longrightarrow x=\dots$$

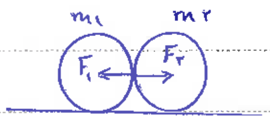



2/ $* \underbrace{mg}_{\vec F_{ext}} = (m+M)\vec a_{cm}$

Subject:
Year. Month. Date.

ضربه:

برخورد:




$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{P}_1}{dt}$ , $\vec{F}_2 = \frac{d\vec{P}_2}{dt} \longrightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$\longrightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{d(P_1+P_2)}{dt} = 0$

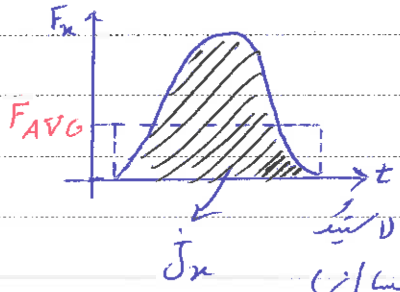
$\longrightarrow P_1 + P_2 =$ ثابت　　اصل بقای تکانه خطی

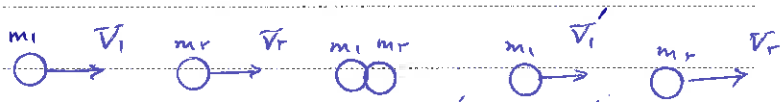
$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \longrightarrow \int d\vec{P} = \int \vec{F}\cdot dt \longrightarrow \vec{J} = \Delta\vec{P} = \int \vec{F}\cdot\Delta t$　　ضربه

$\longrightarrow J_x = \Delta P_x = \int F_x \cdot dt \; , \; J_y = \Delta P_y = \int F_y \cdot dt \; , \; J_z = \Delta P_z = \int F_z \cdot dt$

$\Delta\vec{P} = \vec{F}\cdot\Delta t \longrightarrow \vec{F}_{AVG} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$　　نیروی ضربه

برخورد $\equiv$ اصل بقای تکانه خطی




برخورد الاستیک (کشسان)
$$\begin{cases} m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2' \\ \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2 \end{cases}$$
برقراری اصل بقای انرژی

$$\left.\begin{aligned} &\longrightarrow m_1(V_1 - V_1') = m_2(V_2 - V_2') \\ &\longrightarrow m_1(V_1^2 - V_1'^2) = m_2(V_2^2 - V_2'^2) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow V_1 + V_1' = V_2 + V_2'$$

$\longrightarrow V_1 - V_2 = V_2' - V_1'$

$\Longrightarrow V_2' = V_1 - V_2 + V_1' \longrightarrow m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_1 - m_2V_2 + m_2V_1'$

$\longrightarrow (m_1+m_2)V_1' = (m_1-m_2)V_1 + 2m_2V_2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_2$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_2$$

حالات مختلف برخورد کشسان:

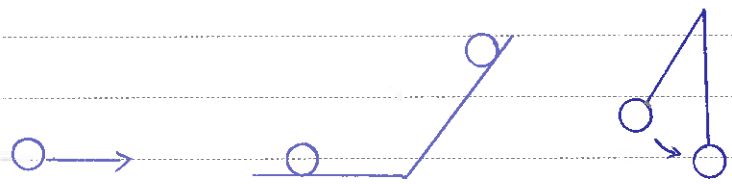
۱/ $m_1 = m_2 \longrightarrow V_1' = V_2 \ , \ V_2' = V_1$ عوض شدن سرعت‌ها با هم

۲/ $V_2 = 0 \longrightarrow V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 \ , \ V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1$

۳/ $m_1 = m_2 \ , \ V_2 = 0 \longrightarrow V_1' = 0 \ , \ V_2' = V_1$ انتقال سرعت به جسم دوم

۴/ $V_2 = 0 \ , \ m_1 \gg m_2 \longrightarrow V_1' = V_1 \ , \ V_2' = 2V_1$

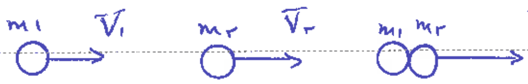
۵/ $V_2 = 0 \ , \ m_2 \gg m_1 \longrightarrow V_1' = -V_1 \ , \ V_2' = 0$



$$\begin{cases} m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2' \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 + Q \end{cases}$$

اصل بقای انرژی: ← برخورد ناکشسان (غیرالاستیک)

$Q$ ← تلف شده همان انرژی منتقل شده به محیط

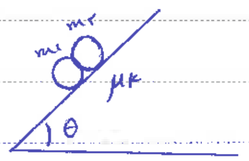



برخورد ناکشسان کامل

اصل بقای تکانه خطی:
$$\begin{cases} m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + Q \end{cases}$$

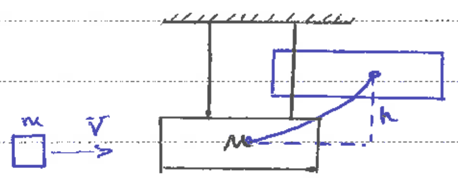
Subject:
Year.　Month.　Date.

اصل بقای تکانه خطی فقط قبل از برخورد و بعد از برخورد به صورت لحظه‌ای صدق می‌کند چون پس از آن $\vec{F}_{ext}$ داریم.




لحظه برخورد ،
(باید لحظه قبل و بعد از آن را بررسی می‌کنیم.)

مثال: گلوله‌ای به جرم m و سرعت V به طرف جسمی به جرم M که به وسیله ۲ طناب به سقف متصل شده است شلیک می‌کنیم بعد از برخورد گلوله در جسم متوقف شده و باهم به اندازه h تغییر مکان (ارتفاع) می‌دهند. سرعت گلوله را بدست آورید.



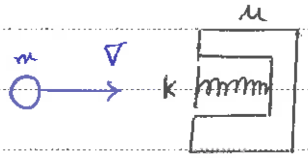

حرکت گردن باهم ← الاستیک کامل
غیر (ناالاستیک کامل)

اصل بقای انرژی (نیروها پایستارند)

$$\begin{cases} mV + 0 = (m+M)V' \\ \frac{1}{2}(m+M)V'^2 = (m+M)gh \end{cases}$$

$$\longrightarrow V' = \sqrt{2gh} \longrightarrow V = \frac{m+M}{m}V' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

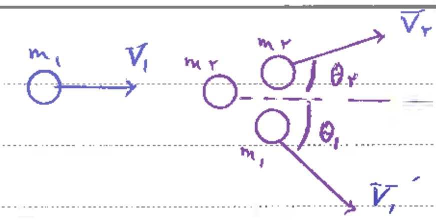
مثال: گلوله‌ای به جرم m را با سرعت V به طرف جسمی با جرم M که در داخل آن یک فنر نصب شده است مطابق شکل پرتاب می‌کنیم. فشردگی فنر را بدست آورید.




چسبیدن به هم و حرکت توامان ← ناالستیک کامل

$$\begin{cases} mV + 0 = (m+M)V' \\ \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}(m+M)V'^2 + \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



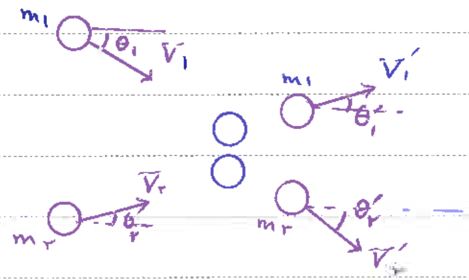
برخورد دو بعدی ← نوشتن به صورت برداری

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$$

به تک بعدی رفتن :

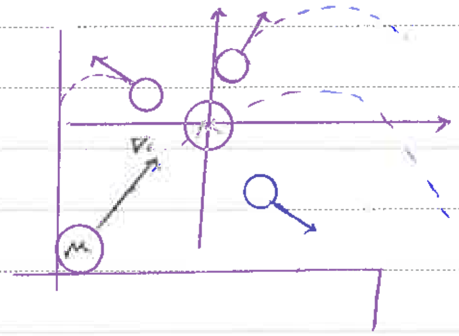
محور x ها : $m_1V_1 + 0 = m_1V_1'\cos\theta_1 + m_2V_2'\cos\theta_2$

y ها : $0 + 0 = m_1V_1'\sin\theta_1 + m_2V_2'\sin\theta_2$



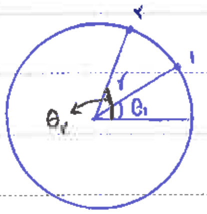
انفجار ← اصل بقای تکانه خطی

(درست قبل و بعد از انفجار به صورت لحظه‌ای)



حرکت دورانی یا چرخشی :

حرکت ذره روی دایره : $\theta(t)\Big|_1^2$



$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ سرعت زاویه‌ای متوسط

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای $\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

← همان سرعت زاویه‌ای متوسط اما در بازه زمانی فوق العاده کوچک

$\longrightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date.

شتاب زاویه‌ای متوسط $\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای $\alpha = \lim_{\Delta t\to 0} \bar{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

همان شتاب زاویه‌ای متوسط اما در بازه زمانی فوق العاده کوچک $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

معادلات ابزار ما: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\quad \theta \equiv x$, $\omega \equiv V$, $\alpha \equiv a$

ثابت $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \longrightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt \longrightarrow \omega - \omega_0 = \alpha t \longrightarrow \omega = \alpha t + \omega_0$

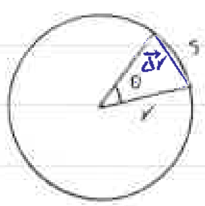
$\alpha t + \omega_0 = \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

به طور ثابت بنویسید: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$ $\qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \times \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{\omega\, d\omega}{d\theta}$

$\longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha\, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega \longrightarrow \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$

به طور ثابت بنویسید: $\alpha(t)$ , $\alpha(\omega)$ , $\alpha(\theta) \longrightarrow \dots$

حرکت ذره بر روی دایره: پارامتر خطی $\left| \begin{array}{l} r \\ V \\ a \end{array} \right.$ ، پارامتر زاویه‌ای $\left| \begin{array}{l} \theta \\ \omega \\ \alpha \end{array} \right.$

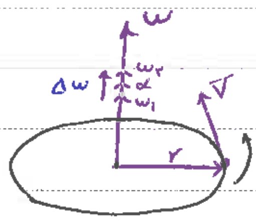



$s = r\theta \longrightarrow ds = r\, d\theta \longrightarrow \frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow V = r\omega$

$\xrightarrow{\theta \to 0} ds = dr$

$\longrightarrow \frac{dV}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$

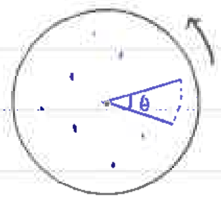
$\longrightarrow a_T = r\alpha$




$\vec{V} = \vec{r} \times \vec{\omega} = |\vec{r}|\,|\vec{\omega}| \sin 90^\circ = |\vec{r}|\,|\vec{\omega}| = r\omega$

$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

هرگاه جسمی حول یک محور دوران کند آن را حرکت دورانی (چرخشی) گویند.



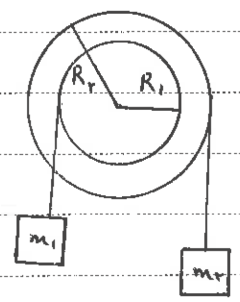

⟵ تمام ذرات به اندازه $\theta$ جابه‌جا می‌شوند

برای جسم در حال دوران ⟵ پارامتر خطی آن صفر است. (نداریم)
(پارامتر انتقالی)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}\times\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{\omega} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{V}\times\vec{\omega} = \vec{a}_T + \vec{a}_H$$

$$\vec{V}\times\vec{\omega} = |\vec{V}|\left|\frac{\vec{V}}{\vec{r}}\right|\sin 90^\circ = \frac{V^2}{r} = \vec{a}_H$$ ⟵ انتقال بردار ها بر روی دایره $\overrightarrow{V\times\omega}$ به طرف مرکز جسم در حال دوران است

مثال: در شکل زیر $m_2$ با شتاب $a_2$ رو به پایین شروع به حرکت می‌کند.
الف) در آغر ثانیه اول سرعت زاویه‌ای قرقره را به دست آورید.
ب) در این زمان قرقره چند دور می‌زند.
ج) جابه‌جایی $m_1$ را در ثانیه اول به دست آورید.




$$\left.\begin{aligned} a_T &= R_2\alpha = a_2 \\ a_2 &= R_2\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha = \frac{a_2}{R_2}$$

$$\omega = \alpha t + \cancel{\omega_0} \longrightarrow \omega = \frac{a_2}{R_2}t \longrightarrow \omega_1 = \frac{a_2}{R_2}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \cancel{\omega_0 t} + \cancel{\theta_0} \longrightarrow \theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a_2}{R_2}t^2 = \frac{a_2}{2R_2}$$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{a_2/2R_2}{2\pi} = \frac{a_2}{4\pi R_2}$$ تعداد دور

$$\begin{cases} y_1 = s_1 \\ s_1 = R_1\theta \end{cases} \Longrightarrow y_1 = R_1\frac{a_2}{2R_2}$$

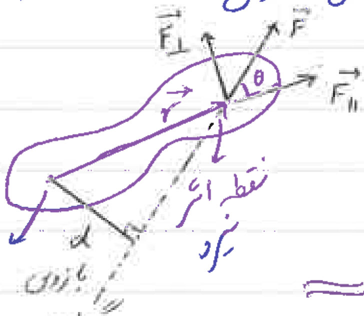
دینامیک دورانی :

عامل دورانی ← گشتاور ( $\tau$ )

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$* \ \tau = rF\sin\theta$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$




گشتاور حاصل $\vec{F}_\perp = \vec{F}\sin\theta$

$\vec{F}_\parallel$ می‌باشد. چون در $\sin\theta = 0$ می‌باشد.

جسم حول این نقطه می‌چرخد (نقطه محور)

$\rightarrow d = r\sin\theta$

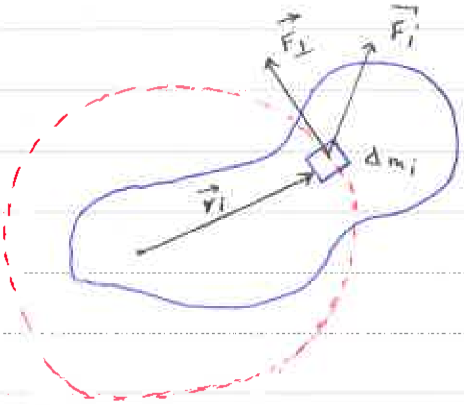
$\Rightarrow * \ \tau = rF_\perp$

$* \ \tau = Fd$

$\tau_i = r_i F_\perp = r_i \Delta m_i a_{T_i}$

$= r_i \Delta m_i r_i \alpha$

$\tau_i = r_i^2 \Delta m_i \alpha$



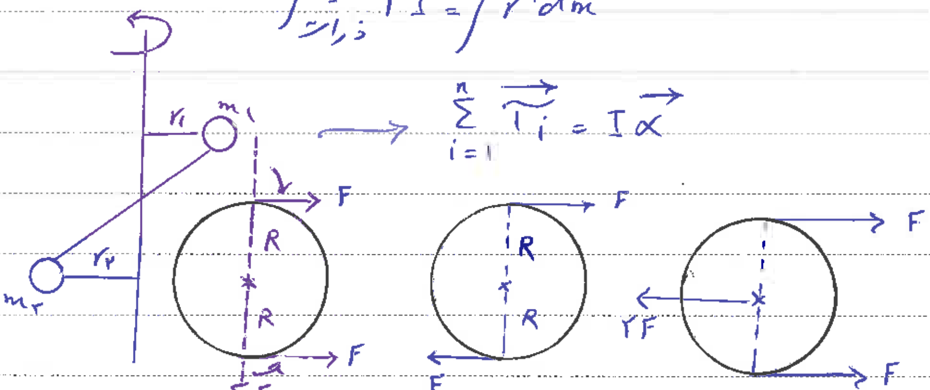

$\Rightarrow \tau = \sum \tau_i = (\sum \Delta m_i r_i^2)\alpha$

$I = \sum \Delta m_i r_i^2 \longrightarrow \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm \longrightarrow$ بیشتر ذرات $\begin{cases} I = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i^2 \\ I = \int r^2 dm \end{cases}$

* در $\sum F = ma$، m لختی دورانی

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$




$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = I\vec{\alpha}$

| | | |
|---|---|---|
| $\sum F \neq 0$ | $\sum F = 0$ | $\sum \vec{F} = 0$ |
| $\sum \tau = 0$ | $\sum \tau \neq 0$ | $\sum \vec{\tau} = 0$ |
| تعادل دورانی | تعادل انتقالی | تعادل |

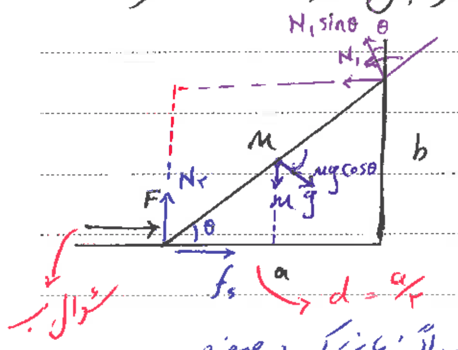
Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: نردبانی را به یک دیوار مطابق شکل تکیه می دهیم. دیوار بدون اصطکاک است.
نیروی قائم سطح دیوار را بدست آورید.

ب) چه نیرویی در پایین نردبان مطابق شکل اعمال کنیم تا نردبان در آستانه حرکت قرار گیرد.

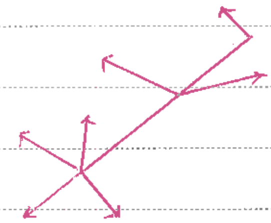
بیشترین نیروی اعمال شده نقطه محور




$$\sum F_x = 0 \longrightarrow f_s - N_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow N_2 - Mg = 0$$

(معمولاً زمانی که در صفحه قرار داریم از آن استفاده می کنیم) $\sum \tau_z = 0 \longrightarrow -Mg\frac{a}{2} + N_1 b = 0$

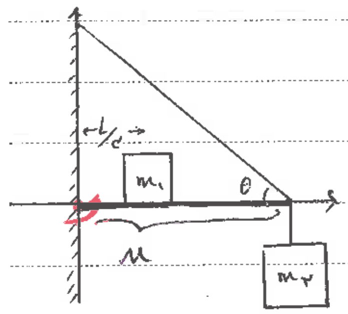


$$-Mg\cos\theta\frac{L}{2} + N_1\sin\theta L = 0$$

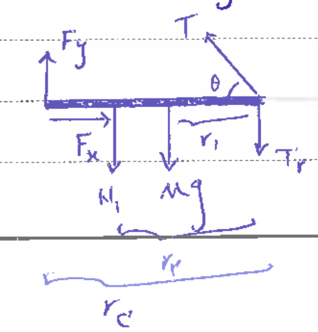
ب)

$$\left.\begin{aligned} &F - f_s - N_1 = 0 \\ &N_2 - Mg = 0 \\ &-Mg\frac{a}{2} + N_1 b = 0 \\ &f_s = \mu_s N_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow F = \dots$$

مثال: در شکل زیر سیستم در حال تعادل است. نیروی اعمالی از طرف لولا بر میله را بدست آورید.




نیروی $M \longleftarrow$ لولا $- Mg - N_1 - T_2$




میله:
$r_1 = L/2$
$r_2 = 2L/3$
$r_c = L$

Subject:
Year. Month. Date.

چون نیروی لولا مشخص نیست با دو مؤلفه x و y آن را می‌نویسیم (F).

$\sum F_x = 0 \longrightarrow F_x - T\cos\theta = 0$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow F_y - N_1 - Mg - T_2 + T\sin\theta = 0$

$\sum T_z = 0$

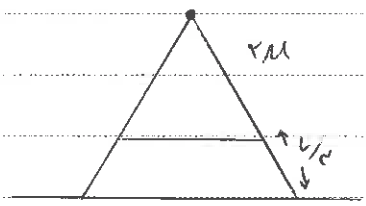
$\longrightarrow Mg\frac{L}{2} + N_1(\frac{3}{4}L) - F_y L = 0$ — تجمع نیروها ← ابتدا یا انتهای نیروها

$T_2 - m_2 g = 0$ — انتها ← حذف ۳ نیرو

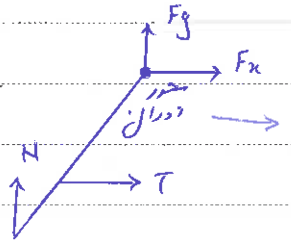
$T_1 - m_1 g = 0$ — ابتدا ← حذف ۲ نیرو

۵ مجهول ۵ معادله $\longrightarrow$ ...

مثال: یک نردبان نقاشی را که به وسیله تسمه‌ای در فاصله $\frac{L}{4}$ (L طول نردبان) مهار شده است مفروض است. اگر جرم نردبان 2M باشد، کشش تسمه را بدست آورید.




انتخاب سیستم ← یک سیستم متعادل ← تک تک ذرات سیستم متعادل اند




$d = \frac{L}{2}\sin\theta$ بازو

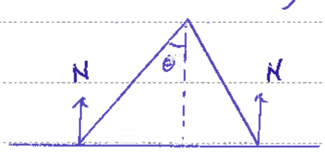
حذف شدن ۲ نیرو $\longrightarrow$ $\sum F_x = 0 \longrightarrow F_x + T = 0$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow F_y - Mg + N = 0$

$\sum T_z = 0 \longrightarrow Mg\frac{L}{2}\sin\theta + T\frac{3}{4}L\cos\theta - NL\sin\theta = 0$

برای کل سیستم داریم: $2N - 2Mg = 0$ (دو سطح تماس)

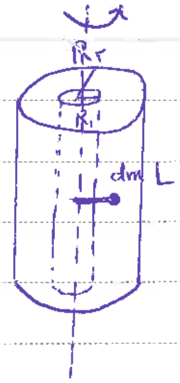
۴ معادله ۴ مجهول $\longrightarrow$ ...




نیروی عمودی بر دو نقطه ابتدا و انتها وارد می‌شوند که چون تقارن داریم برابرند

محاسبه $I$:

استوانه‌ای توخالی به شعاع داخلی $R_1$، شعاع خارجی $R_2$ و طول $L$ مفروض است. این استوانه حول محورش دوران می‌کند. لختی دورانی آن را بدست آورید.




$$I = \int r^2 \underline{dm} = \int r^2 \rho \, dV$$

جرم تکه کوچکی از جسم

$r$: فاصله dm تا محور دوران

همیشه dm را کلی در نظر بگیرید نه روی نقاط مرزی شکل (سطوح بیرونی)

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho \, dV = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L r^2 \rho \, r' \, dr' \, d\phi \, dz$$

$r$ ← فاصله dm از محور تقارن استوانه (محور z) ← $r' = r$

$r$ و $r'$ می‌توانند برابر نباشند برای مثال استوانه خمیده باشد که با داشتن زاویه با محور تقارن برابر نمی‌شوند (حل مثلثاتی)

$$\Longrightarrow I = \rho (L)(2\pi) \times \frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\rho L \pi}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

سطح مقطع $\times L$ ⟵ $\rho \times$ حجم ⟵ جرم $M$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

استوانه توپر: $I = \dfrac{MR^2}{2}$

استوانه توخالی: $I = MR^2$

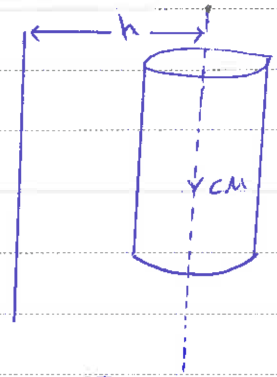
مثال: میله‌ای به طول $L$ را حول محوری که از ابتدای آن می‌گذرد و بر آن عمود است دوران می‌دهیم. اگر پخش یکنواخت شده، لختی دورانی آن را بدست آورید.


$$\lambda L = M \rightarrow I = \int r^2 dm = \int r^2 \lambda \, dL = \int r^2 \lambda \, dr = \frac{1}{3}\lambda L^3 = \frac{1}{3} M L^2$$

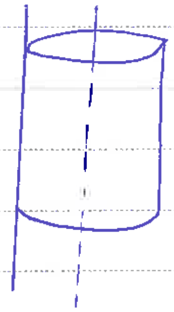
که قرار دارد روی محور

قضیه محورهای موازی:

اگر جسم حول محوری موازی $I_{cm}$ بچرخد (با فاصله h از آن) داریم:



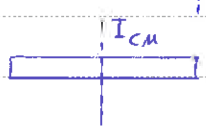

$I = I_{cm} + Mh^2$



$I_{cm} = \frac{MR^2}{2}$ $\quad h = R$

$I = \frac{MR^2}{2} + Mh^2 = \frac{3}{2}MR^2$

برای مثال قبل:




$\rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} \dots$ $\quad I = I_{cm} + Mh^2 \quad h = \frac{L}{2}$

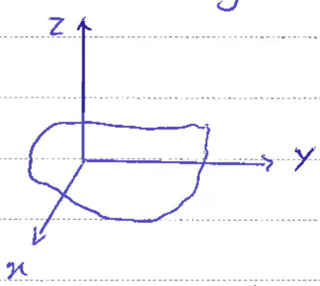
$\rightarrow I_{cm} = I - M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2$

تعریف قضیه: اگر جسمی حول یک محور دوران کند مقدار لختی دورانی آن برابر است با لختی دورانی حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد و موازی آن است به علاوه حاصل ضرب جرم در مجذور فاصله آن دو محور.

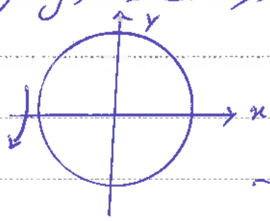
قضیه محورهای متعامد:

(فقط در مورد پخش سطحی صادق است.)

اگر سطح را در صفحه xy قرار دهیم همیشه $I_z = I_x + I_y$ است.




مثال:




$2I_x = \frac{1}{2}MR^2$

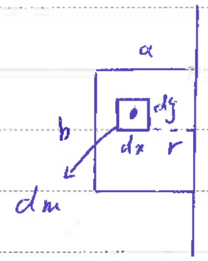
$\rightarrow I_x = \frac{1}{4}MR^2$

اینرسی دورانی دایره‌ای که حول محور x می‌چرخد؟

$I_z = \frac{1}{2}MR^2 \quad I_x = I_y$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: یک مستطیل به ابعاد a و b حول محوری که از یک ضلع آن می‌گذرد دوران می‌کند. اینرسی دورانی آن را بدست آورید.




$r = x$

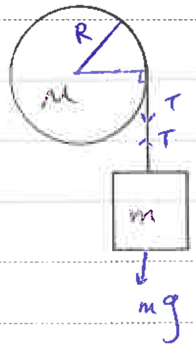
$$\Rightarrow I = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma dA = \int_0^a \int_0^b r^2 \sigma \, dx \, dy$$

$$M = \sigma \underbrace{ab}_{M} \qquad = \sigma \int_0^a \int_0^b x^2 dx \, dy =$$

$$\sigma (b)\left(\tfrac{1}{3}a^3\right) = \tfrac{1}{3} M a^2$$

علت شباهت جواب با ۲ مثال قبل به این دلیل است که با درنظر گرفتن جسم به صورت چند میله و جمع I آنان است (توزیع جرم)

مثال: در شکل زیر جسم m که به ریسمان طنابی به دور یک قرقره پیچیده شده است از نقطه A رها می‌سازیم. شتاب این جسم را بدست آورید.




$$\begin{cases} mg - T = ma \\ \sum \tau = -RT = I(-\alpha) \ , \ I = \tfrac{1}{2} M R^2 \\ a = R\alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{سه مجهول}]{\text{سه معادله}} \dots$$

$$\tau_{ext} = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} \longrightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$$ تکانه زاویه‌ای

$$\tau_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ اگر: $\tau_{ext} = 0 \longrightarrow L$ ثابت $\longrightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

اصل بقای تکانه زاویه‌ای

تکانه زاویه‌ای برای ذره $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{V} \times M\vec{V}}_{0} = \tau$

تکانه زاویه‌ای کل ذرات $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

مثال ۲

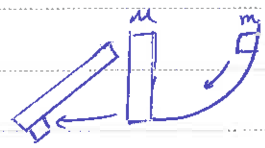

$\bar{V} = gt \longrightarrow m\bar{V} = mgt$

$\longrightarrow r\sin\theta\, m\bar{V} = r\sin\theta\, mgt$

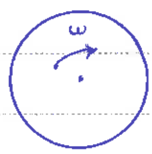
$\longrightarrow \vec{L} = \vec{T} \times t \longrightarrow \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$L m\bar{V} = (\frac{1}{3}ML^2 + mL^2)\omega$

اصل بقای تکانه زاویه ای



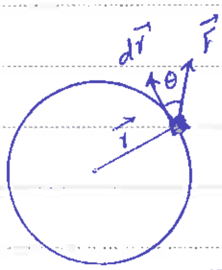

* دوران — پارامتر خطی ندارد — فقط برای اجسام با پارامتر زاویه ای




$KE_{\text{دوران}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Delta m_i V_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Delta m_i R_i^2 \omega^2$

سرعت زاویه ای

$\longrightarrow KE_{\text{دوران}} = \frac{1}{2}I\omega^2$




$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}\cos\theta \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_{\perp} \cdot d\vec{r}$

مماس بر مسیر حرکت

$d\vec{r} = d\vec{s} \longrightarrow = \int \vec{F}_{\perp} \cdot d\vec{s}$

$d\vec{s} = r\,d\phi \longrightarrow W = \int \vec{F}_{\perp}\, r \cdot d\phi = \int T\, d\phi$

$\alpha(\phi) = \frac{d\omega}{dt} \times \frac{d\phi}{d\phi} = \frac{\omega\, d\omega}{d\phi} \longrightarrow I\alpha = I\frac{\omega\, d\omega}{d\phi}$

$\int_{\phi_0}^{\phi} I\alpha(\phi)\, d\phi = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega\, d\omega \longrightarrow W_{\text{کل}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$

دوران

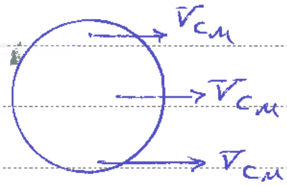
$\longrightarrow (W_1 + W_2 + \cdots + W_n)_{\text{دورانی}} = \Delta KE_{\text{دورانی}}$

PAPCO

Subject:

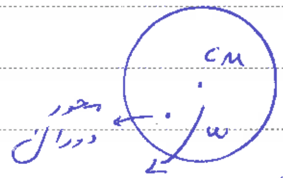
Year. Month. Date. ( )

تمام ذرات جسم با $\vec{v}_{CM}$ در حال حرکت اند

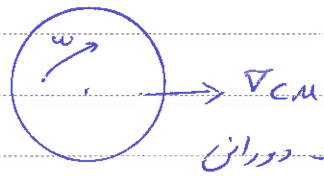



حالت عادی

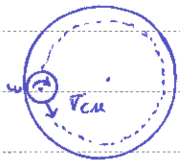

به خاطر تغییر محور حرکت دورانی و به همین دلیل نیز انتقال نداریم بلکه شکل جسم عوض می شود




حرکت دورانی انتقالی




حرکت دورانی انتقالی با انتقال روی دایره




در مطالعه انتقالی دورانی :

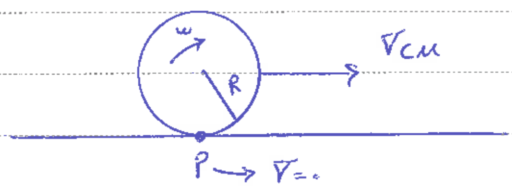
۱- اول انتقال را انتخاب می دهیم و کاری به دوران نداریم

۲- دوم دوران را انتخاب می دهیم و کاری به انتقال نداریم

۳- بررسی ارتباط میان این دو

حرکت غلتشی :

اگر کمان برابر جابه جایی بود غلتشی است و اگر نه لغزشی محسوب می شود.




چون جابه جایی تمام ذرات برابر است جابه جایی $x_{CM}$ هم برابر کمان S است. $(x_{CM} = S = R\theta)$

شرط غلتش :

$x_{CM} = R\theta \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{v}_{CM} = R\omega \xrightarrow{\text{مشتق}} a_{CM} = R\alpha$

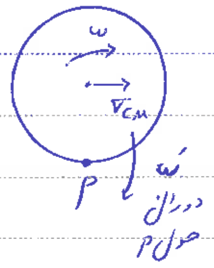
حرکت دورانی-انتقالی (غلتش) $\equiv$ دوران حول P

شروط غلتش
$$\begin{cases} x_{CM} = R\theta \\ v_{CM} = R\omega \\ a_{CM} = R\alpha \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

به نوعی جسم می‌خواهد حرکت دورانی حول P انجام دهد ولی سطح مانع می‌شود به همین دلیل جسم به جلو حرکت می‌کند.




$$KE = \frac{1}{2} I_p \omega'^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega'^2$$

$$= \frac{1}{2} I_{cm}\omega'^2 + \frac{1}{2} MR^2\underline{\omega'^2} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega'^2 + \frac{1}{2} M\vec{v}_{cm}^2$$

$$\omega = \omega' \qquad = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M\vec{v}_{cm}^2$$

دو انگشت روی P, cm

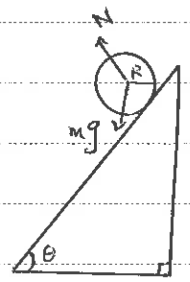
بگذاریم هر جور بچرخانیم $\omega$ برابر داریم.

$$\text{توان}\ p = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau\, d\theta}{dt} = \tau \cdot \omega$$

* در غلتش اصل بقای انرژی برقرار است، و اتلاف در انرژی مکانیکی نداریم.

مثال: یک استوانه توپر از بالای یک سطح شیب‌دار مطابق شکل رها شده و با یک حرکت غلتشی رو به پایین حرکت می‌نماید.

الف) معادلات سینماتیکی برای این استوانه را بنویسید.




انتقال
$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 + \vec{v}_{0cm} t + x_{0cm} \\ \vec{v}_{cm} = a_{cm} t + \vec{v}_{0cm} \\ \vec{v}_{cm}^2 - \vec{v}_{0cm}^2 = 2a_{cm}(x_{cm} - x_{0cm}) \end{cases}$$

دوران
$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t + \theta_0 \\ \omega = \alpha t + \omega_0 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

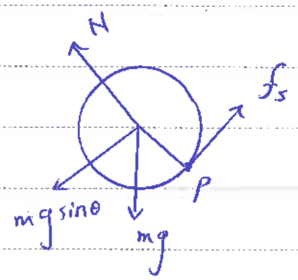
چون غلتش گفته شده معادلات زیر را نیز داریم:

غلتش
$$\begin{cases} x_{cm} = R\theta \\ \vec{v}_{cm} = R\omega \\ a_{cm} = R\alpha \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date.

ب) معادلات دینامیکی را بنویسید و شتاب مرکز جرم را بدست آورید

* حتماً اصطکاک داریم چون بدون آن اصلاً دوران نداریم! جهت آن طوری است که $\vec{f_s} \times \vec{r}$ بر طبق دست راست در جهت دوران قرار بگیرد.




$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \longrightarrow mg\sin\theta - f_s = m a_{cm}$

$R f_s = \underbrace{\tfrac{1}{2} m R^2}_{I} \alpha = \tfrac{1}{2} m R^2 \times \frac{a_{cm}}{R} = \tfrac{1}{2} m R a_{cm}$

$a_{cm} = R\alpha$ ؛ غلتشی

$\Longrightarrow mg\sin\theta = \tfrac{3}{2} m a_{cm} \longrightarrow a_{cm} = \tfrac{2}{3} g \sin\theta$

حل با دوران حول P:

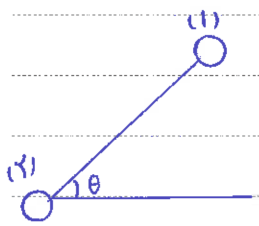
$mg\sin\theta R = I_p \cdot \alpha = (I_{cm} + mR^2)\frac{a_{cm}}{R}$

$\longrightarrow mg\sin\theta R = \tfrac{3}{2} m R^2 \frac{a_{cm}}{R} \longrightarrow a_{cm} = \tfrac{2}{3} g \sin\theta$

* چون دو مقدار برابرند $f_s$ غلتشی است (شیوه تشخیص غلتشی بودن حرکت)
* در این سوالات اصطکاک را اصلاً بر اساس تمایل اعمال نکنیم!
* اصل بقای انرژی صادق است.

E = انرژی های پتانسیل + انرژی های جنبشی

انرژی های جنبشی ← KE دورانی ، KE انتقالی




ج) سرعت استوانه را در پایین سطح بدست آورید

غلتشی $\Delta E = 0 \longrightarrow E_2 - E_1 = 0$

$E_1 = mgh \qquad E_2 = \tfrac{1}{2} I \omega^2 + \tfrac{1}{2} m V_{cm}^2$

Subject:
Year. Month. Date.

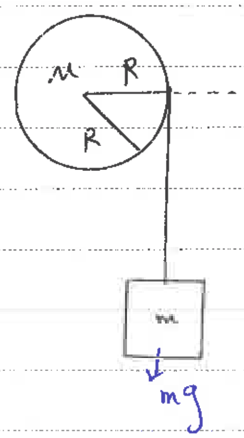
$$mgR = \frac{1}{2} mR^2\alpha = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_{cm}}{R} + mR\,a_{cm} = \frac{3}{2} mR\,a_{cm}$$

$$\rightarrow 2g = 3a_{cm} \longrightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g$$

گرفتن حول نقطه P:
$$mgR = I_P \cdot \alpha = \left(\frac{1}{2} mR^2 + mR^2\right) \frac{a_{cm}}{R}$$

$$\rightarrow g = \frac{3}{2} a_{cm} \longrightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g$$

مثال: جسمی به جرم m را توسط یک طناب به دور یک قرقره پیچانده، و آن را رها می‌سازیم. با استفاده از تکانه زاویه‌ای شتاب این جسم را بدست آورید.




$$L = I\omega + Rmv$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} + Rm\frac{dv}{dt}$$

باید گشتاورها چون تمام علامت‌ها یا + یا - هستند → می‌توان همه را + در نظر گرفت!

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} MR^2 + I\alpha + Rma = mgR$$

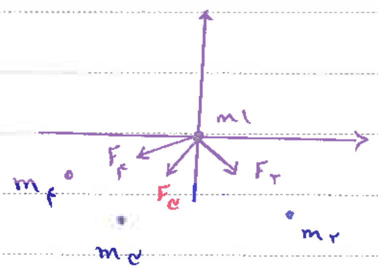
$$\Longrightarrow a = \frac{2mg}{2m + M}$$

گرانش:

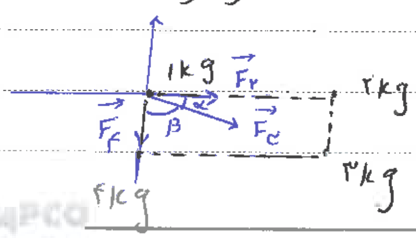
$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r$$

$M \bullet\!\xrightarrow{F} \quad \xleftarrow{F}\!\bullet\, m$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}$$




مثال: ۴ ذره مطابق شکل در رئوس یک مستطیل به ابعاد ۳ و ۴ متر قرار گرفته‌اند. نیروی اعمالی بر ذره 1kg را بدست آورید.

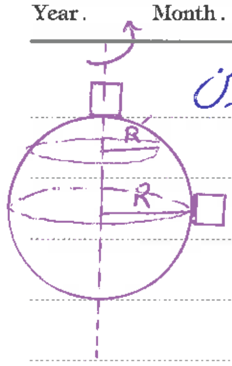



$$\vec{F}_2 = \frac{2G}{9}\hat{i} \qquad \vec{F}_3 = \frac{3G}{25}\cdot\frac{3}{5}\hat{i} - \frac{3G}{25}\cdot\frac{4}{5}\hat{j}$$

$$\vec{F}_4 = -\frac{4G}{16}\hat{j} \Longrightarrow \vec{F} = \sum \vec{F}_i = \ldots$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



کره زمین

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma_g \longrightarrow a_g = G\frac{M}{r^2}$$

$$ma_g - N = m\frac{V^2}{R}$$ چون جعبه روی زمین حرکت دایره‌ای دارد!

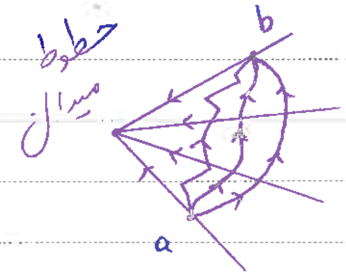
$$\longrightarrow g = a_g - R\omega^2$$

بدست آوردن اختلاف شتاب گرانش در هر فاصله:

$$da_g = \frac{-2GM}{r^3}\,dr$$

$$a_g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_e+h)^2} \longrightarrow \frac{GM_E/R_e^2}{(1+\frac{h}{R_e})^2} = \frac{g}{(1+\frac{h}{R_e})^2}$$

محاسبه کار نیروی گرانش از دو مسیر متفاوت





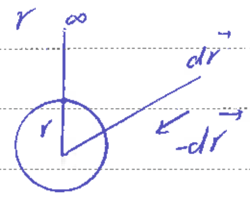
نیروی گرانش نیروی پایستار است!

پس انرژی پتانسیل دارد!

تابع انرژی پتانسیل گرانشی:

$$\underbrace{U - U_0 = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{W} \xrightarrow{\text{در شکل}} U - U_0 = -\int \vec{F}\cdot(-d\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \frac{GM_E m}{r^2}\,d\vec{r}$$

$$= -G\frac{M_E m}{r}\Big|_{\infty}^{r} \longrightarrow U = -G\frac{M_E m}{r}$$





پتانسیل گرانشی $V = \frac{U}{m}$ , $U = -G\frac{M_E}{r}$ $\quad U = mV$

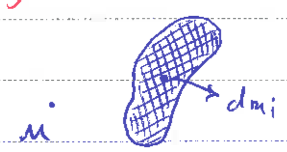
میدان $E = \frac{F}{m} \longrightarrow \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$

Subject:
Year.  Month.  Date.

نیروی وارد از طرف جسم بی‌نهایت ذره‌ای بر یک ذره:

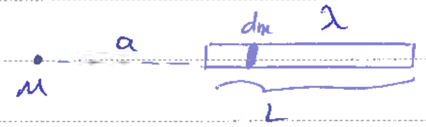
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} G \frac{M_0 m_i}{r^2}$$

در جهات x و y می‌نویسیم

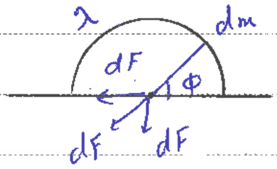



باید انتگرال بگیریم

مثال: میله‌ای با چگالی $\lambda$ و طول L در مقابل جسمی به جرم M قرار گرفته است. نیروی اعمالی بر M را به دست آورید.




$$\vec{F} = \int G \frac{M\,dm}{r^2} = \int G \frac{M\lambda\,dL}{r^2} = \int_a^{a+L} G \frac{M\lambda\,dr}{r^2}$$




مثال دیگر: $dm = \lambda\,dL = \lambda\,ds = \lambda R\,d\phi$

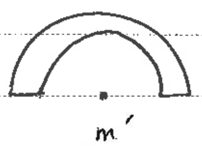
$dF_x$ ها همدیگر را خنثی می‌کنند، فقط $F_y$ داریم

$$dF_y = dF \cdot \sin\phi$$

$$\rightarrow \int dF_y = \int dF \sin\phi = \int G \frac{M\,dm}{r^2} \sin\phi = \int G \frac{M\lambda\,ds}{R^2} \sin\phi$$

$$= \int_0^{\pi} G \frac{M\lambda R\,d\phi}{R^2} = \frac{2GM\lambda}{R}$$

مثال: در شکل زیر انرژی پتانسیل $m'$ را اگر ۲r=۵ باشد بدست آورید.




PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

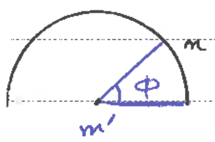
میخواهیم جسمی را از روی زمین به بالا پرتاب کنیم که به بی‌نهایت برود و برنگردد!

$$\frac{1}{2}mV^2 - G\frac{M_E m}{r} = 0 \longrightarrow V = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_e}} \simeq 25000\ mph$$

نیروی اعمالی از طرف چند ذره بر یک ذره:

مثال: چند ذره را در رئوس یک مستطیل قرار می‌دهیم نیروی اعمالی بر ذره 1kg را بدست آورید. ۳ ص قبل

مثال: یک میله نیم دایره‌ای به شعاع R و چگالی $\lambda$ مفروض است. ذره‌ای به جرم $m'$ را در مرکز آن قرار می‌دهیم. انرژی پتانسیل آن را حساب کنید.



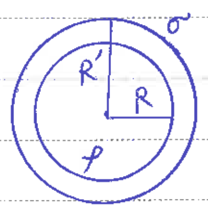
$$U = -G\frac{mm'}{r} \longrightarrow dU = -G\frac{m'dm}{r}$$

$$\longrightarrow U = -\int_0^{\pi} G\frac{m'\lambda R\, d\phi}{R} = -Gm'\lambda\pi$$

مثال: یک کره با چگالی $\rho$ و شعاع R را با یک پوسته کروی با چگالی $\lambda$، شعاع $R'$ هم مرکز می‌کنیم:

الف) نیروی گرانشی را بر یک ذره به جرم $m'$ در فاصله $R<r<R'$ بدست آورید.

ب) انرژی پتانسیل گرانشی را در نقاط $r<R$ ، $R<r<R'$ محاسبه نمایید.



الف)

$$F = G\frac{Mm'}{r^2} \qquad M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$\longrightarrow \vec{F} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho m'}{r^2}$$

فقط برای کره می‌توان مرکز جرم را گذاشت!

Subject:
Year. Month. Date.

ب) $R<r<R'$ تمام نقاط داخل، انرژی پتانسیل برابر با نقاط روی پوسته دارند.

$U_{\text{کره}} = -\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m'}{r} \times G$

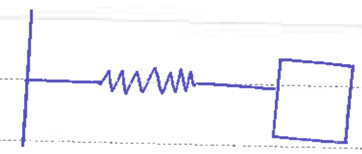
$U_{\text{پوسته}} = -G\dfrac{\sigma 4\pi R'^2 m}{r}$ ← فاصله جرم تا مرکز

$\rightarrow U_{\text{کل}} = U_{\text{پوسته}} + U_{\text{کره}}$

$r<R$ داخل کره چون جرم داریم نیرو هم داریم و انرژی پتانسیل با سطح کره فرق می‌کند.

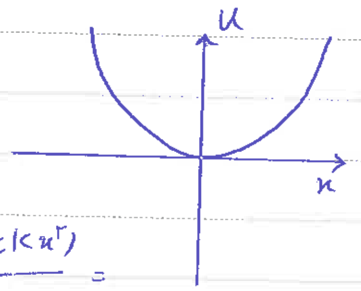
## حرکت تناوب:

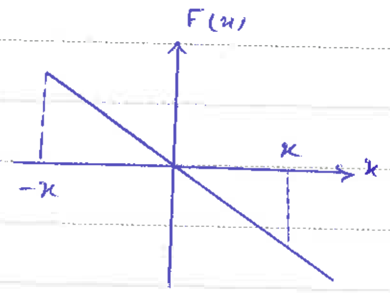
حرکت متناوب روی خط راست نوسانی است.



$F = -kx \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$

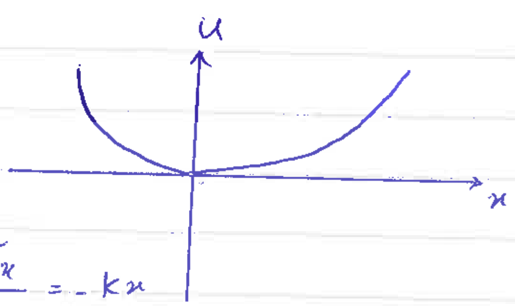
حرکت نوسانی ساده




$F(x) = -\dfrac{dU}{dx} = -\dfrac{d(\frac{1}{2}kx^2)}{dx} = -kx$

حرکت نوسانی غیر ساده




$F = -kx$

$F = ma = m\dfrac{dV}{dt} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$\rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

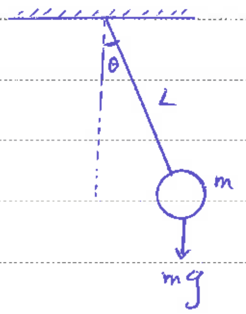
هارمونیک : هر حرکتی که توابعش برحسب $\sin x$ , $\cos x$ باشند.

$X = A \cdot \cos(\underbrace{\omega t + \Phi}_{\text{فاز حرکت}})$ $\qquad$ $\Phi$ : ثابت فاز (فاز اولیه)

$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi) \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$

$\frac{1}{2} m V^2 = E - \frac{1}{2} k x^2 \longrightarrow V = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$

$V_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$




$T = I\alpha = -L mg \sin\theta$

حرکت هارمونیک ساده نیست

اگر $\sin\theta = \theta$ حرکت هارمونیک

ساده است (در زاویه‌های کوچک)

$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lmg\theta$

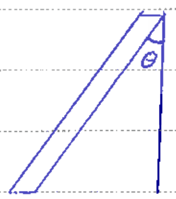
$I = mL^2$

$\Longrightarrow mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \longrightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

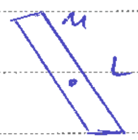
پاندول فیزیکی :

$mg$ روی مرکز جرم اعمال می‌شود.




$T = I\alpha = -\frac{L}{2} Mg \sin\theta$

$\sin\theta = \theta$




$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{L}{2} Mg\theta$

$I = \frac{1}{3} ML^2$

$-A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \Phi)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Subject:
Year. Month. Date.

$x = A\cos\omega t\cos\phi - A\sin\omega t\sin\phi$

$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

فاز؛ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — تناوب — دوره تناوب

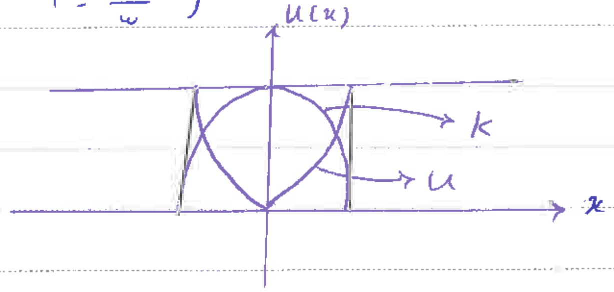
$x = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \phi)$

$t \rightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$ , $T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \frac{1}{T} = \dots = \frac{\omega}{2\pi}$

فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2\pi\nu$ $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\longrightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$




$\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$ $\quad \frac{1}{2}kA^2 = E$

$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi)$ $\quad k = m\omega^2$

$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = E$

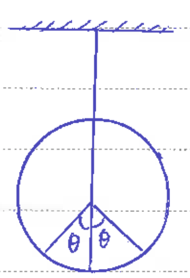
$\frac{1}{2}ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{L}{2}Mg\theta$ $\quad s = L\theta$ در پاندول ساده می‌شود برای راحتی گفت

$ds = dr$

$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{g}{L}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\cdot L/g} \longrightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot g/L}$

$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \theta_0)$

پاندول پیچشی:




$\tau = I\alpha = -k\theta$ $\quad$ ثابت پیچش: $k$

$F = -kx$

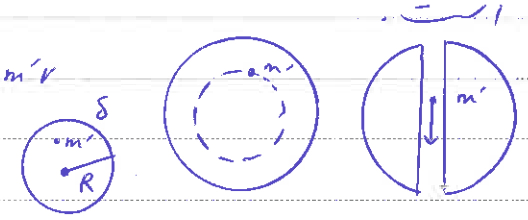
$\tau = -k\theta \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$

Subject:
Year.    Month.    Date.    ( )

قانون پوسته:

اگر ذره‌ای را درون پوسته‌ای با پخش جرم $\delta$ داریم نیروی وارد بر آن صفر است.

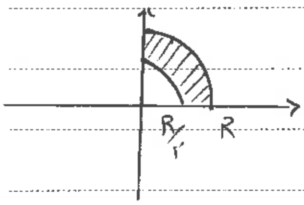



$$F = -G\frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3 m'}{r^2} = -G\frac{4}{3}\rho\pi m' r = -kr$$

$$F = m\frac{d^2 r}{dt^2}$$

بررسی حرکت ذره روی دایره به صورت هارمونیک ساده:
روی محور $x$ ها تصویرش حرکت هارمونیک ساده دارد

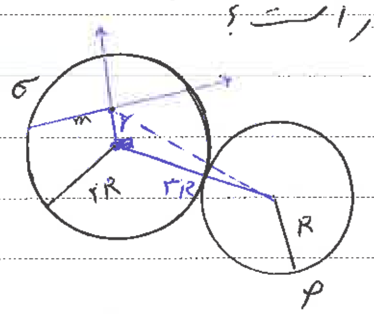
مثال: جرمی به طور یکنواخت با چگالی $\sigma$ بین دو ربع دایره با شعاع $R/2$ و $R$ پخش شده است.




الف) انرژی دورانی را حول محور $z$ بیابید

ب) در لحظه $t=0$ جسم در صفحه $z$-$x$ است.
در این لحظه به جسم گشتاوری توسط رابطه $L = \frac{1}{2\sqrt{6}}\sin\theta$ را اعمال می‌شود پس از دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ سرعت $\omega$ چقدر است؟

مثال: در شکل زیر یک کره به چگالی $\rho$، شعاع $R$ در کنار یک پوسته به شعاع $2R$ و چگالی $\sigma$ قرار دهیم. اگر ذره‌ای به جرم $m$ را در نقطه A قرار دهیم نیروی اعمالی بر آن را بدست آورید. انرژی پتانسیل این ذره چقدر است؟




طبق قانون گاوس پوسته نیوتن پوسته هیچ تاثیری بر $m$ ندارد (به $m$ نیرو وارد نمی‌کند)

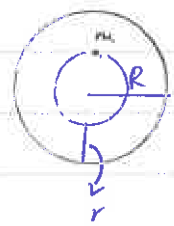
$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m}{r^2 + 9R^2}\vec{u}_r$$

$$U = -G\underbrace{\frac{m'm}{2R}}_{\text{پوسته}} - \underbrace{\frac{Mm}{\sqrt{r^2+9R^2}}}_{\text{کره}}$$

مثال: پتانسیل $m$؟

یک کره مرکزی کنیم

جرم کره $M$



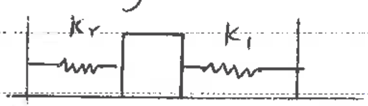

$$U = -\underbrace{G\frac{Mm}{R}}_{\text{کره}} - \int_R^r \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W = -\Delta U$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 m}{r^2} = \frac{4}{3}m\pi r \rho G$$

ما ابتدا برای کل جرم‌ها حساب می‌کنیم سپس آن پوسته را حساب می‌کنیم دیگر کره داخلی را فرض نمی‌کنیم.

مثال: جسمی را مطابق شکل به دو فنر متصل می‌کنیم و آن را روی سطح افقی به اندازه $x$ جابجا کرده، سپس رها می‌سازیم. فرکانس زاویه‌ای جسم را بدست آورید.



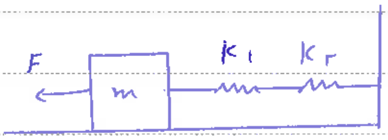

$$\sum F = ma \longrightarrow F_1 + F_2 = ma$$

$$\longrightarrow -k_1 x - k_2 x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{\frac{k_1+k_2}{m}}_{\omega^2}x$$

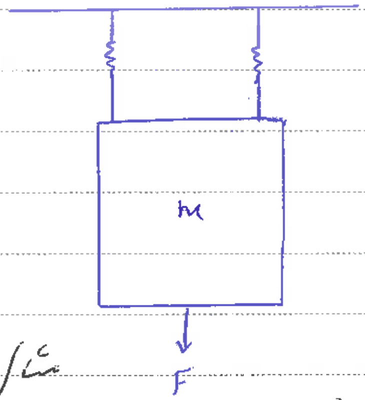
$$\longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

## معادل سازی:

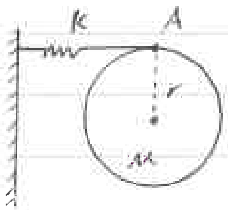



$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$




$$k_t = k_1 + k_2$$

مثال: در شکل زیر فنری را مطابق شکل در نقطه A به یک قرقره که می‌تواند حول مرکزش دوران کند، متصل می‌سازیم. اگر این قرقره را به اندازه یک زاویه کوچک منحرف کنیم زمان تناوب آن را حساب کنید.




$\sum T = I\alpha \qquad rF = I\alpha$

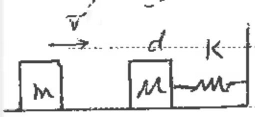
$x = r\theta \qquad$ با فنر $\; -rkx = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$\longrightarrow -r^2k\theta = \dfrac{1}{2m}R^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{2r^2}{R^2}\cdot\dfrac{k}{m}\theta \longrightarrow \omega = \dfrac{r}{R}\sqrt{\dfrac{2k}{M}}$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{2K}}\;\dfrac{R}{r}$

مثال: در شکل زیر M را به اندازه d به فنر فشرده و سپس رها می‌سازیم. جسم m با سرعت $\vec{v}$ زمانی که M به نقطه تعادل می‌رسد به آن برخورد کرده و با هم به حرکت ادامه می‌دهند. سرعت بعد از برخورد را بدست آورید.




بقای تکانه خطی: $mv - Mv = (m+M)V \implies V = \dots$

$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow v = d$

Subject:

Year. Month. Date.