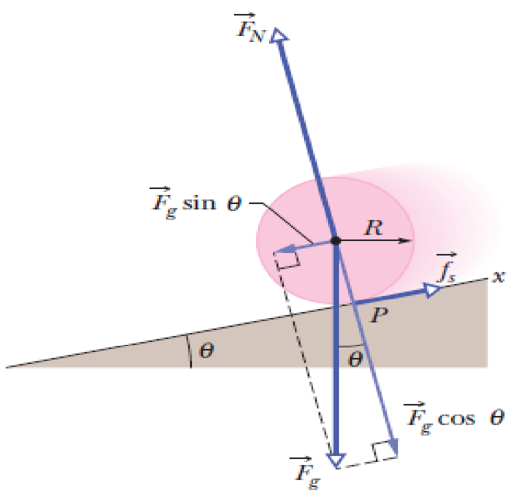
پایان ترم ۹٤ (نیمسال دوم)

۱. **استوانه‌ای به شعاع قائده R و جرم M، بر یک سطح شیبدار به زاویه $45°$ غلتش می‌کند. نیروی اصطکاک بین سطح استوانه و سطح شیبدار را به دست آورده و نشان دهید که ضریب اصطکاک نمی‌تواند کمتر از $\frac{1}{3}$ باشد (لختی دورانی استوانه حول محور آن برابر است با $\frac{1}{2}MR^2$).**

جواب:

فرض می‌کنیم که استوانه به صورت زیر به سمت پایین سطح شیبدار غلتش می‌نماید. بنابراین نیروهای وارد بر آن را رسم نموده و سپس قانون دوم نیوتن برای چرخش و حرکت خطی را می‌نویسیم:



$$\begin{cases} \vec{\tau}_{net} = I_{com}\alpha \ \rightarrow \ Rf_s = \frac{1}{2}MR^2\alpha \ \rightarrow \begin{cases} f_s = \frac{MR}{2}\alpha \\ \alpha = \frac{-a_{com}}{R} \end{cases} \rightarrow \ f_s = -\frac{M}{2}a_{com} \\ \vec{F}_{net} = Ma_{com} \ \rightarrow \ x: \ f_s - F_g sin\theta = Ma_{com} \ \rightarrow f_s = Ma_{com} + Mgsin\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$3f_s = Mgsin\theta \ \rightarrow \ f_s = \frac{Mgsin\theta}{3} = \frac{Mg}{3\sqrt{2}}$$

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} f_s \le f_{s,max} \\ f_{s,max} = \mu_s F_N \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

$$\rightarrow \ \frac{Mg}{3\sqrt{2}} \le \mu_s Mg cos\theta \ \rightarrow \ \frac{Mg}{3\sqrt{2}} \le \frac{\mu_s Mg}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \ \mu_s \ge \frac{1}{3}$$

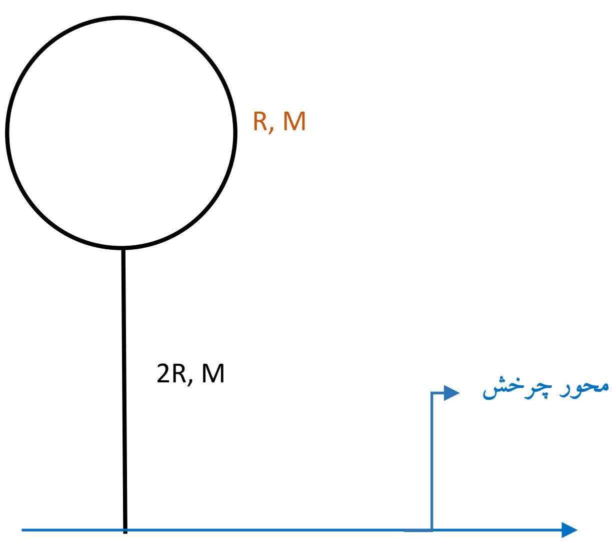
بنابراین برای اینکه حرکت استوانه همواره غلتشی هموار باشد، همواره ضریب اصطکاک باید کمتر از $\frac{1}{3}$ باشد.

---

۲. مطابق شکل مجموعه‌ای از یک حلقه باریک به جرم $\mathbf{M}$ و شعاع $\boldsymbol{R}$ و میله‌ای نازک به جرم $\mathbf{M}$ و طول $\boldsymbol{2R}$ تشکیل شده است. این مجموعه از حالت نشان داده شده رها می‌شود و آزادانه (بدون اصطکاک) حول محور نشان داده شده می‌چرخد. چنانچه لختی دورانی حلقه حول یک قطر برابر با $\frac{1}{2}\boldsymbol{MR^2}$ باشد و همچنین لختی دورانی میله حول محور عبوری از مرکز جرم آن $\frac{1}{3}\boldsymbol{MR^2}$ باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) لختی دورانی مجموعه حول محور چرخش؟

ب) سرعت زاویه‌ای مجموعه در پایین‌ترین نقطه (وضعیت وارون شده)



جواب:

الف) برای به دست آوردن لختی چرخشی کل جسم، می‌توان ابتدا لختی‌های چرخشی حلقه و میله را به طور جداگانه به دست آورد و سپس نتایج را با یکدیگر جمع نمود تا لختی چرخشی کل به دست آید. با استفاده از داده مساله، لختی چرخشی حلقه حول یک قطر آن برابر است با:

$$I_{com} = \frac{1}{2}MR^2$$

بنابراین لختی چرخشی حلقه حول محوری که در فاصله $R + 2R$ از مرکز آن قرار دارد، برابر است با:

$$I_{Loop} = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+2R)^2 = \frac{19}{2}MR^2 \quad \text{(I)}$$

لختی چرخشی میله حول محور فوق را می‌توان با استفاده از قضیه محورهای موازی به ترتیب زیر بدست آورد: می‌دانیم که لختی چرخشی میله حول محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد (طبق جدول موجود در کتاب) برابر است با:

$$I_{com} = \frac{1}{3}MR^2$$

بنابراین لختی چرخشی میله حول محوری که در فاصله R از مرکز آن قرار دارد، برابر است با:

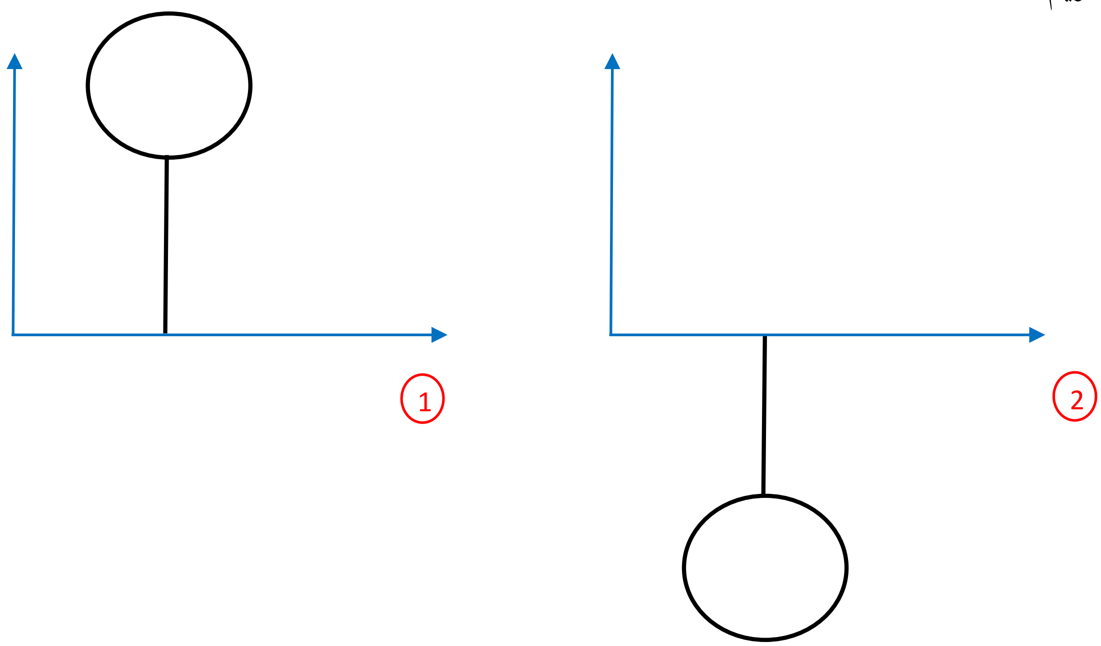
$$I_{Rod} = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{3}MR^2 + M(R)^2 = \frac{4}{3}MR^2 \quad \text{(II)}$$

بنابراین لختی چرخشی کل جسم، با جمع نمودن (I) و (II) به صورت زیر خواهد بود:

$$I_{net} = I_{Loop} + I_{Rod} = \frac{19}{2}MR^2 + \frac{4}{3}MR^2 = \frac{65}{6}MR^2 \quad \text{(III)}$$

ب) برای محاسبه تندی زاویه‌ای، از قانون پایستگی انرژی مکانیکی و معادله انرژی جنبشی جسم چرخان $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ استفاده می‌نماییم. حالت اول را حالت در حال سکون جسم در مکان اولیه در نظر می‌گیریم. حالت دوم را حالتی در نظر می‌گیریم که جسم به وضعیت معکوس خود نسبت به حالت اولیه چرخش نموده است، به طوری که تندی زاویه‌ای در آن مکان برابر با ω می‌باشد. برای محاسبه انرژی پتانسیل گرانشی، جسم

صلب را به صورت یک ذره با جرم 2M در نظر می‌گیریم که در مرکز جرم آن تجمع پیدا کرده است و بنابراین داریم:



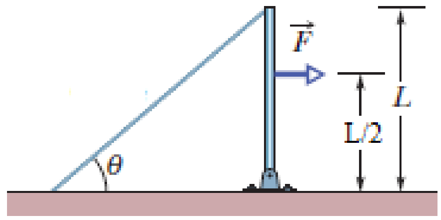
$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad \rightarrow \quad 0 + 2Mgy_{com} = \frac{1}{2} I_{net}\omega^2 + 2Mg(-y_{com})$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} I_{net}\omega^2 = 4Mgy_{com} \\ y_{com} = \frac{M\left(y_{(com)Loop}\right) + M\left(y_{(com)Rod}\right) +}{2M} = \frac{M(3R) + M(R)}{2M} = \frac{M(3R+R)}{2M} = 2R \end{cases}$$

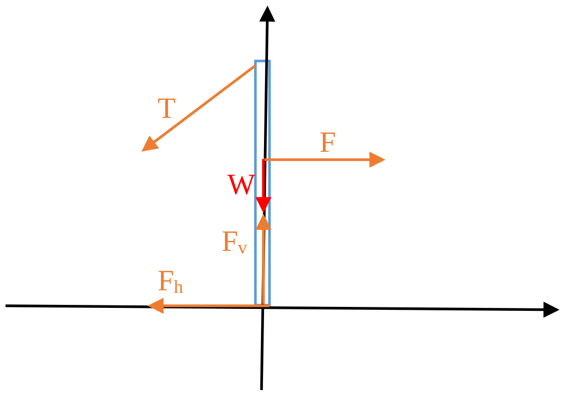
$$\rightarrow \omega^2 = \frac{8Mg2R}{I_{net}} \xrightarrow{\text{(III)}} \omega = \sqrt{\frac{16MgR}{\frac{65}{6}MR^2}} = \sqrt{\frac{96g}{65R}} \; \frac{rad}{s}$$

---

۳. مطابق شکل زیر، یک تیرچه قائم یکنواخت به طول L و با وزن W، از یک انتها به زمین لولا شده است. نیروی افقی F بر تیرچه مطابق زیر وارد می‌شود. تیرچه به واسطه کابلی که به انتهای دیگر آن وصل شده و با افق زاویه θ می‌سازد، قائم باقی می‌ماند. نیروی وارد بر تیرچه از طرف لولا را حساب نمایید.



جواب: برای حل مساله، ابتدا تیرچه را به عنوان دستگاه در نظر گرفته و سپس تمام نیروهای وارد بر آن را رسم می‌نماییم:



مبدا مختصات و چرخش را در محل لولا در نظر می‌گیریم. برای اینکه تیرچه در حالت تعادل باقی بماند، باید دو معادله موازنه زیر برقرار باشند تا بتوان نیروی وارد بر تیرچه از طرف لولا (F_L که ترکیبی از نیروی افقی (F_h) و عمودی (F_v) لولا می‌باشد) را به دست آورد:

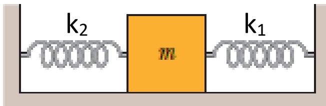
$$\begin{cases} \vec{\tau}_{net} = 0 \;\rightarrow\; TLcos\theta - F\dfrac{L}{2} = 0 \;\rightarrow T = \dfrac{F}{2cos\theta} \\ \vec{F}_{net} = 0 \;\rightarrow \begin{cases} x: F - F_h - Tcos\theta = 0 \;\rightarrow\; F_h = F - Tcos\theta \\ y: F_v - W - Tsin\theta = 0 \;\rightarrow\; F_v = W + Tsin\theta \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x: F_h = F - \dfrac{F}{2cos\theta}cos\theta = \dfrac{F}{2} \\ y:\; F_v = W + \dfrac{F}{2cos\theta}sin\theta = W + \dfrac{Ftan\theta}{2} \end{cases}$$

---

٤. مطابق شکل زیر دو فنر با ثابت‌های $k_1 = 30$ N/m و $k_2 = 60$ N/m به جسمی به جرم M = 0.1 kg متصل شده‌اند. در حالی‌که طول فنرها، طول طبیعی‌شان است، جرم را به اندازه 1cm در راستای افقی

جابجا و از حالت سکون رها می‌کنیم. چنان چه اصطکاک بین سطوح ناچیز باشد، بسامد زاویه‌ای نوسان و دامنه سرعت جسم را به دست آورید.



جواب: هنگامی که فنر به اندازه 1cm از حالت تعادل جابجا می‌شود، نیروی خالص زیر برای بازگرداندن آن به حالت تعادل، به جسم وارد می شود:

$$F_{net} = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن و معادله فوق، بسامد زاویه‌ای نوسان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} F_{net} = ma \\ a = \frac{d^2x}{dt^2} \\ x = x_m\cos(\omega t + \phi) \end{cases} \Rightarrow \quad -(k_1 + k_2)x = -m\omega^2x \ \rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}} = 30 \ \frac{rad}{s}$$

از آنجایی که از نیروهای اصطکاک صرف نظر می‌گردد، بنابراین انرژی مکانیکی جسم–فنر باید پایسته بماند. فنر از حالت سکون و در x = 1cm از نقطه تعادل خود، رها می‌گردد، بنابراین در این حالت انرژی پتانسیل کشسانی فنر در بیشینه مقدار خود و انرژی جنبشی برابر با صفر می‌باشد. به عبارتی دیگر، فنر هیچ‌گاه از x = 1cm فراتر نخواهد رفت:

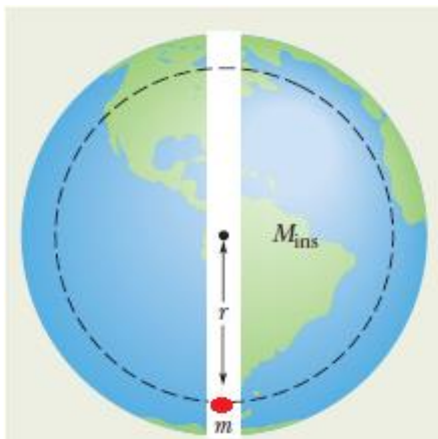
$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + 0 \ \rightarrow \ x_m = x$$

دامنه سرعت جسم (v_m) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$v_m = \omega x_m = 0.3 \ \frac{m}{s}$$

۵. سیاره‌ای به صورت کره یکنواختی به شعاع R و جرم M در نظر بگیرید. فرض کنید تونل باریکی در آن حفر شده که از مرکز می‌گذرد. همچنین فرض کنید می‌توانیم سیبی به جرم m را در هر جای تونل یا خارج از سیاره قرار دهیم. مطلوب است محاسبه نیروی گرانشی وارد بر سیب به صورت تابعی از فاصله r از مرکز سیاره (ثابت جهانی گرانش را برابر با G بگیرید).

جواب: اگر فرض کنیم که سیب در فاصله r از مرکز کره سیاره قرار گرفته باشد، برای حل این مساله باید به نکات زیر توجه داشت:



۱–طبق قضیه پوسته نیوتن، آن قسمتی از سیاره که در خارج از کره با شعاع r قرار دارد، نمی‌تواند هیچ نیروی گرانشی خالصی به سیب وارد نماید.

۲–آن قسمت از سیاره که در داخل کره r قرار دارد، می‌تواند نیروی گرانشی خالصی به سیب وارد نماید.

۳–جرم این کره (M_{in}) را می‌توان مانند ذره‌ای در نظر گرفت که در مرکز سیاره قرار دارد.

با استفاده از این سه نکته و معادله زیر می‌توان نیروی گرانشی وارد بر سیب را به دست آورد:

$$F = \frac{GM_{in}m}{r^2} \qquad \text{(I)}$$

برای تعیین جرم M_{in} به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_{in}}{V_{in}} \quad \rightarrow \quad M_{in} = \frac{V_{in}}{V}M = \frac{\frac{4\pi}{3}r^3}{\frac{4\pi}{3}R^3}M = \frac{r^3}{R^3}M \qquad \text{(II)}$$

با جایگذاری معادله (II) در معادله (I)، نیروی وارد بر سیب را به صورت تابعی از فاصله r خواهیم داشت:

$$F = \frac{G\frac{r^3}{R^3}Mm}{r^2} = \frac{GMm}{R^3}r$$