



میان‌ترم دوم- ۲۶ آذر ۱۳۹۴
مدت امتحان: ۱۸۰ دقیقه

سؤال ۱. تقریب $\ln(1+x)$ را برای $|x|$ کوچک‌تر از ۱ بررسی می‌کنیم.
الف) برای تقریب خطی $\ln(1.01) \approx 0.01$ ، نشان دهید که قدر مطلق خطای تقریب از $10^{-4} \times 0.5$ کوچک‌تر است.

ب) برای تقریب

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

وقتی $0 < x < 0.1$ ، نشان دهید قدر مطلق خطا از $10^{-(n+1)} \times (n+1)^{-1}$ کوچک‌تر است.

سؤال ۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int e^x \sin x dx$ (ب) $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$

سؤال ۳. تابع $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تعریف f را بیابید.

ب) مشتق f را محاسبه کرده و تعیین علامت کنید. نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی در دامنه را در صورت وجود پیدا کنید.

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ را بدست آورید.

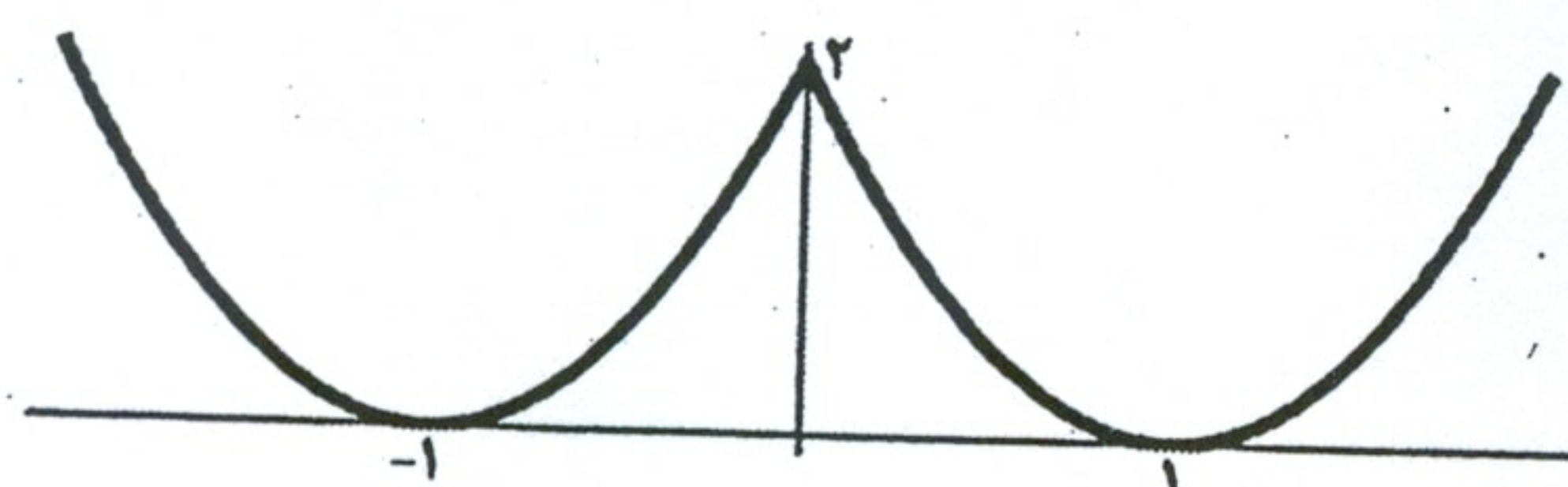
سؤال ۴. نمودار تابع پیوسته f که در شکل روبرو نمایش داده شده است، ویژگی‌های زیر را دارد:

۱. $f(-x) = f(x)$ و $f(x) \geq 0$.

۲. $f(x) = 0$ اگر و فقط اگر $x = \pm 1$.

۳. $f(0) = 2$ و f در صفر مشتق‌پذیر نیست.

۴. f در همه جا غیر از صفر دوبار مشتق‌پذیر است و $f'' > 0$.



۵. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -3$.

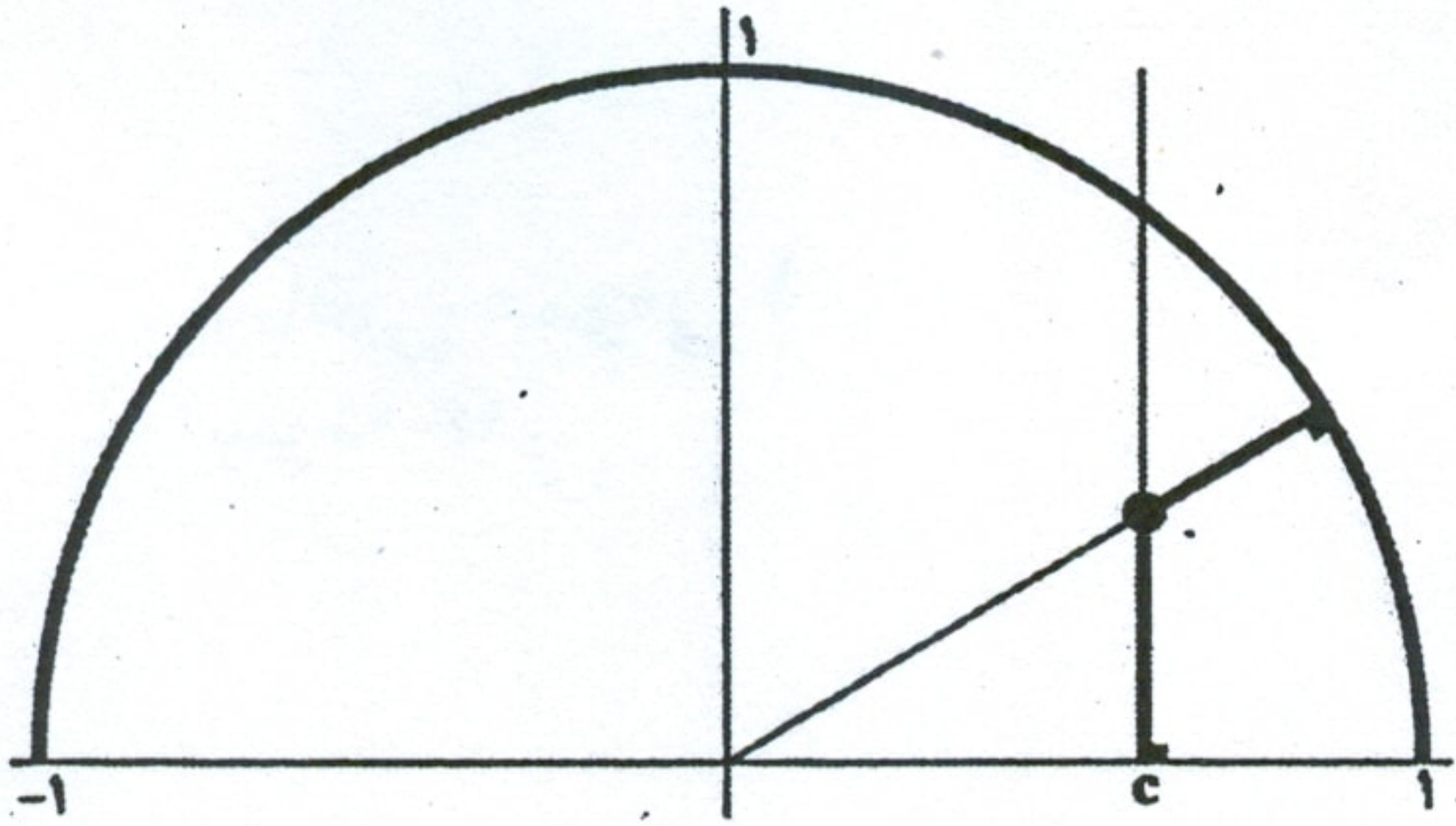
تعریف می‌کنیم $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

الف) نمودار F را رسم کنید و نقاط اکسترمم، عطف و تحدب تابع را در نقاط مختلف تعیین کنید.

ب) نشان دهید $1 < F(1) < \frac{2}{3}$.



سؤال ۵. در نیم‌دایره روبرو به شعاع یک، روی خط قائم $x = c$ که $0 \leq c \leq 1$ ثابت داده شده است، نقاطی را پیدا



کنید که مجموع مجزورات فاصله آنها از محیط دایره و قطر افقی $y = 0$ حداقل باشد.

سؤال ۶. نمودار تابع $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

حول محور y دوران می‌دهیم. در شکل حاصل با سرعت ثابتی آب می‌ریزیم. تابع ارتفاع آب را در نظر بگیرید. آیا مشتقات اول و دوم این تابع در ارتفاع ۱، وجود دارند؟ در صورت وجود، آنها را محاسبه کنید.

(هر سؤال ۲۰ نمره دارد.)

موفق باشید.