



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات

# منطق مرتبه اول

---

«هوش مصنوعی: یک رهیافت نوین»، فصل ۸

ارائه‌دهنده: سیده فاطمه موسوی

نیم‌سال اول ۱۳۹۹-۱۳۹۸

# بازنمائی دانش

---

- ابزارهای ارائه دانش
  - زبان‌های طبیعی
  - زبان‌های برنامه‌نویسی متداول
  - منطق گزاره‌ای
  - منطق مرتبه اول
- دو جنبه مهم ابزارهای ارائه دانش
  - قدرت بیان
  - امکانات استنتاج

- زبان‌های برنامه‌نویسی
- ذخیره‌سازی حقایق موجود در دنیا در ساختارهای داده‌ای
- تغییر ساختارهای داده‌ای با استفاده از رویه‌های خاص حوزه (domain-specific)
- فاقد امکانات راحت برای بیان اطلاعات جزئی
- مثال: یک گودال در  $[2,2]$  یا  $[3,3]$  وجود دارد یا اگر وامپوس در  $[1,1]$  باشد آن‌گاه در  $[2,2]$  نیست.
- فاقد مکانیزم عامی برای استخراج حقایق جدید از حقایق موجود

- منطق گزاره‌ای
  - یک زبان اعلانی (declarative) یا توصیفی است.
  - معنای جملات آن براساس رابطه درستی میان جملات و دنیاهای ممکن تعیین می‌شود.
  - دارای قدرت بیان کافی برای اداره کردن اطلاعات ناقص با استفاده از ترکیب فصلی و نقیض است.
- یک زبان ترکیبی (compositional) است.
  - معنای هر جمله تابعی از معنای اجزای تشکیل دهنده آن است.
  - معنای جملات در منطق گزاره‌ای مستقل از متن می‌باشد. (برخلاف زبان طبیعی)
  - فاقد قدرت بیانی کافی برای تشریح دقیق محیط پیچیده با اشیاء زیاد است.
  - مثلاً، در منطق گزاره‌ای نمی‌توان گفت ”چاله‌ها باعث وزش نسیم در خانه‌های مجاور می‌شوند“ مگر آن‌که برای هر خانه یک جمله نوشته شود.

# بازنمایی دانش

---

- زبان طبیعی
- قدرت بیان بسیار بالا
- ابزاری برای برقراری ارتباط و ارائه دانش
- وابستگی مفهوم یک جمله به زمینه (context) استفاده از آن جمله
- وجود ابهام (ambiguity) در کلمات و جملات

# بازنمایی دانش

---

- مزایای منطق گزاره‌ای
  - اعلانی
  - ترکیبی
  - مستقل از زمینه و غیرمبهم بودن
- مزایای زبان طبیعی
  - قدرت بیان بالا
- ایده
- استفاده از منطق گزاره‌ای به عنوان پایه روش ارائه و اضافه کردن قابلیت‌های بیانی زبان‌های طبیعی

# منطق مرتبه اول

---

- مدل‌های یک زبان ساختارهای رسمی هستند که جملات زبان را به عناصر دنیای ممکن مربوط ساخته و امکان ارزیابی درستی آن‌ها را فراهم می‌آورد.
- اجزا مدل‌های منطق مرتبه اول:
  - اشیاء: دنیا شامل اشیائی است که از طریق خصوصیاتشان از هم قابل تمایز هستند.
  - اسامی و عبارات اسمی که به اشیاء اشاره می‌کنند. مانند وامپوس، هر فرد، گودال‌ها و ...
  - روابط: در بین اشیاء می‌تواند روابط مختلفی وجود داشته باشد.
  - افعال و عبارات فعلی که به روابط بین اشیا دلالت دارد. مانند برادری، قرمز بودن و ...
- توابع: نوع خاصی از روابط که یک یا چند شیء را به دقیقا یک شیء دیگر ربط می‌دهند.

تمرین: اشیاء و روابط را در جمله‌ی زیر تعیین کنید.  
- خانه‌های مجاور وامپوس، بودار هستند.

- رابطه‌های یکانی (خاصیت‌ها)

- رابطه‌هایی که فقط در ارتباط با یک شیء هستند.

- مثال: «قرمز بودن»، «بودار بودن»

- رابطه‌های چندتایی

- رابطه‌هایی که دو یا چند شیء را به هم ربط می‌دهند.

- مثال: «برادری»، «مجاورت»، «بزرگ‌تر بودن»

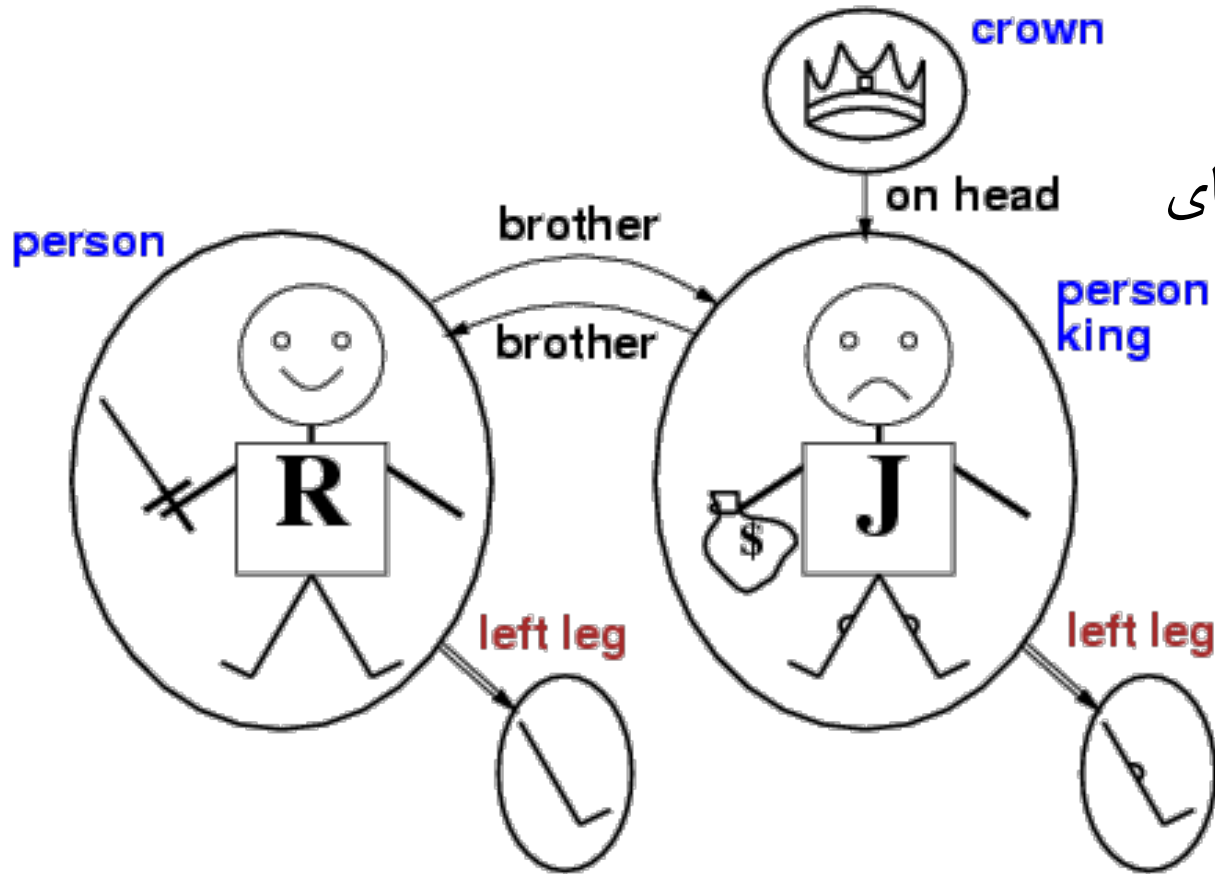
- توابع

- مثال: رابطه‌ی «پدر» هر شخص را به دقیقاً یک شیء (پدر آن شخص) ربط می‌دهد.

- مثال: «بیشترین معدل»، «مجموع» و ...



# مثال: پادشاه شیطان و برادرش



• اشیاء؟

• John, Richard, تاج, پای چپ John, پای  
چپ Richard

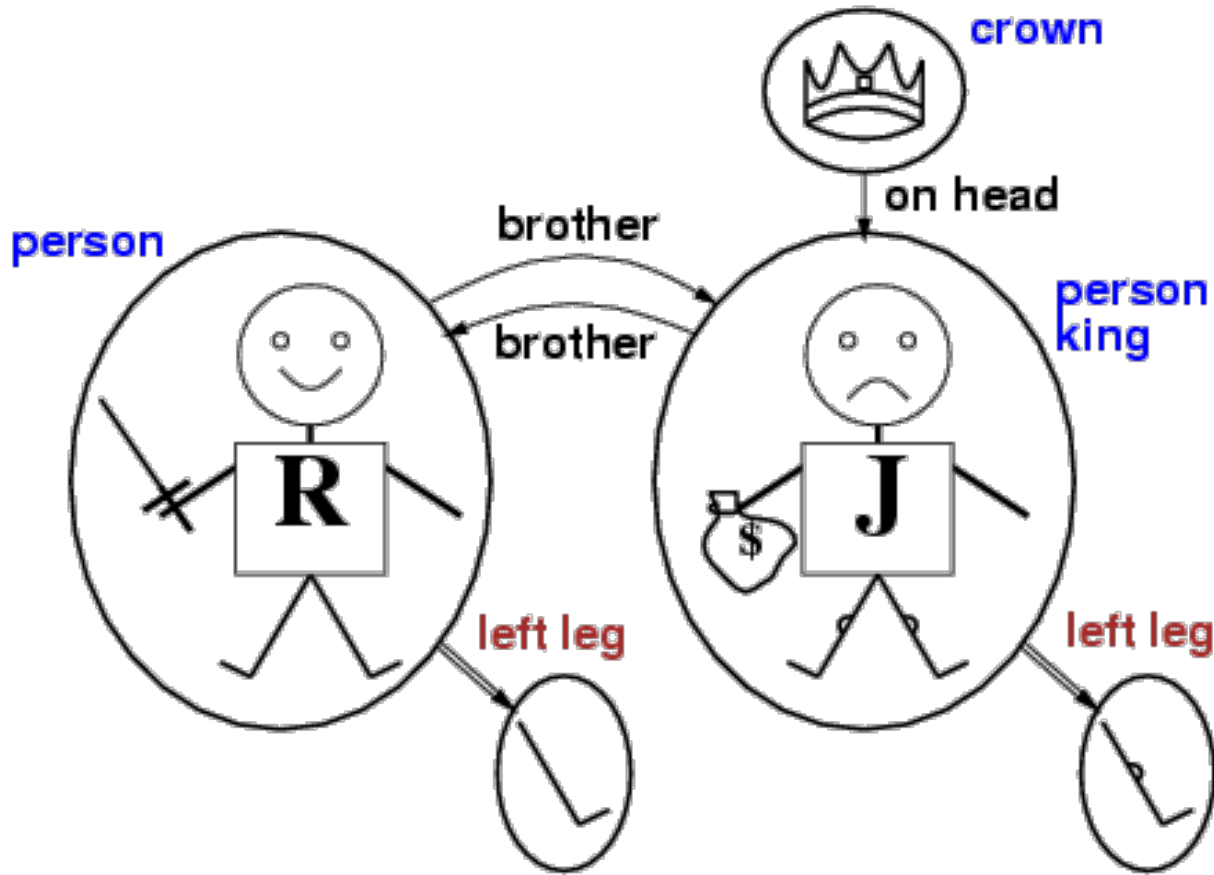
• رابطه‌های یکانی؟

• Crown: تاج بودن

• Person: شخص بودن

• King: شاه بودن

# مثال: پادشاه شیطان و برادرش



• رابطه‌های چندتایی؟

• Brother: برادری

{<Richard, John>, <John, Richard>}

• OnHead: بر سر

<the crown, John>

• توابع؟

• LeftLeg: پای چپ

<Richard> → Richard's left leg

<John> → John's left leg

- در منطق مرتبه اول، هر شیء، رابطه یا تابع را با یک نماد نشان می‌دهیم.
- نمادهای ثابت: اشیاء مانند John
- نمادهای مسندی (گزاره): روابط مانند Brother, OnHead
- نمادهای تابعی: روابط تابعی مانند LeftLeg, Father
- درستی هر جمله نسبت به یک مدل و تفسیری از نمادهای جمله تعیین می‌شود.
- هر مدل در منطق مرتبه اول علاوه بر اشیاء، روابط و توابع باید شامل یک تفسیر باشد که تعیین می‌کند هر یک از نمادهای ثابت، خبری و تابع به چه شیء، رابطه و تابعی اشاره می‌کنند.
- به دلیل تعداد زیاد مدل‌های ممکن در منطق مرتبه اول، معمولاً امکان بررسی درستی استلزام با مرور کلیه مدل‌ها امکان‌پذیر نیست.

# ترم (Term)

- هر ترم یک عبارت منطقی است که به یک شیء اشاره می کند.
- یک نماد ثابت (Constant): برای اشاره به یک شیء می توان اسم آن را ذکر کرد.
  - مانند John
- یک متغیر (Variable): یک متغیر می تواند به یک شیء اشاره کند.
- مثلا اگر قبلا متغیر X را برابر با شیء John قرار داده باشیم از این به بعد هر جا از متغیر X استفاده کنیم منظور ما شیء John است.
- یک نماد تابع (Function): هر تابع یک یا چند شیء داده شده را به یک شیء ربط می دهد، پس هر تابع به یک شیء اشاره می کند.
- برای مثال اگر Henry پدر John باشد آن گاه Father(John) به پدر Henry اشاره می کند.

$$\text{Term} = \text{function}(term_1, \dots, term_n) \mid \text{constant} \mid \text{variable}$$

# جملات اتمیک (Atomic)

- برای بیان یک حقیقت از جملات اتمیک استفاده می کنیم.

*Atomic sentence = predicate (term<sub>1</sub>,...,term<sub>n</sub>) | term<sub>1</sub> = term<sub>2</sub>*

- برای بیان این حقیقت که دو ترم مختلف به یک شیء اشاره می کنند از عملگر = استفاده می شود. (عملگر = یک نماد مسند است)

*Brother(John, Richard)*

*Married(Father(Richard), Mother(John))*

*Father(John)= Henry*

- یک جمله ساده *predicate(term<sub>1</sub>,...,term<sub>n</sub>)* زمانی درست است (اگر و فقط اگر) که رابطه *predicate* بین اشیایی که *term<sub>1</sub>,...,term<sub>n</sub>* به آن ها اشاره می کنند برقرار باشد.

- جملات مرکب از ترکیب جملات ساده بوسیله رابط‌های منطقی به دست می‌آیند.

$$\neg S, S_1 \wedge S_2, S_1 \vee S_2, S_1 \Rightarrow S_2, S_1 \Leftrightarrow S_2$$

- مثال:

$$\text{Sibling}(\text{John}, \text{Richard}) \Rightarrow \text{Sibling}(\text{Richard}, \text{John})$$

$$>(1,2) \vee \leq (1,2)$$

$$>(1,2) \wedge \neg >(1,2)$$

- سورها این امکان را به ما می‌دهند که یک خاصیت را به مجموعه‌ای از اشیاء نسبت دهیم.
- برتری منطق مرتبه اول نسبت به منطق گزاره‌ای به امکان استفاده از سورها مربوط می‌شود.
- منطق گزاره‌ای فاقد سور بود و نمی‌توانست یک خاصیت را به مجموعه‌ای از اشیاء نسبت دهد.
- مثلاً برای بیان این که «در یک مربع نسیم می‌وزد اگر و تنها اگر در خانه‌های مجاور گودال باشد» باید برای تمامی مربع‌ها نوشته شود.

- سور عمومی بیان می کند که یک ویژگی یا حقیقت خاص برای تمام اشیاء دامنه برقرار است.

$$\forall <variables> <sentence>$$

*Everyone at AUT is smart:  $\forall x \text{ At}(x, \text{AUT}) \Rightarrow \text{Smart}(x)$*

- سور عمومی برابر است با ترکیب عطفی تمام جملاتی که با جایگذاری متغیرها در آنها به دست می آیند.

- برای مثال اگر دامنه  $\{\text{John}, \text{Richard}, \text{AUT}\}$  باشد آن گاه عبارت بالا هم ارز زیر است:

$$\text{At}(\text{John}, \text{AUT}) \Rightarrow \text{Smart}(\text{John})$$

✓  $\text{At}(\text{Richard}, \text{AUT}) \Rightarrow \text{Smart}(\text{Richard})$

✓  $\text{At}(\text{AUT}, \text{AUT}) \Rightarrow \text{Smart}(\text{AUT})$



- سور وجودی بیان می کند که یک ویژگی یا حقیقت خاص برای برخی از اشیاء دامنه برقرار است.

$$\exists \langle variables \rangle \langle sentence \rangle$$

*Someone at AUT is smart:  $\exists x \text{ At}(x, \text{AUT}) \wedge \text{Smart}(x)$*

- سور وجودی برابر است با ترکیب فصلی تمام جملاتی که با جای گذاری متغیرها در آنها به دست می آیند.

- برای مثال اگر دامنه  $\{\text{John}, \text{Richard}, \text{AUT}\}$  باشد آن گاه عبارت بالا هم ارز زیر است:

$$(\text{At}(\text{John}, \text{AUT}) \wedge \text{Smart}(\text{John}))$$

$$\checkmark (\text{At}(\text{Richard}, \text{AUT}) \wedge \text{Smart}(\text{Richard}))$$

$$\checkmark (\text{At}(\text{AUT}, \text{AUT}) \wedge \text{Smart}(\text{AUT}))$$

# یک اشتباه متداول

- سور عمومی اغلب با ترکیب شرطی و سور وجودی اغلب با ترکیب عطفی به کار می‌رود:

$$\forall x \text{ At}(x, AUT) \Rightarrow \text{Smart}(x)$$

$$\exists x \text{ At}(x, AUT) \wedge \text{Smart}(x)$$

- استفاده از سور عمومی با ترکیب عطفی ممکن است باعث اشتباه در معنا گردد.

- مثال: جمله زیر به معنای «هر شی‌ای هم در  $AUT$  است و هم باهوش است» می‌باشد.

$$\forall x (\text{At}(x, AUT) \wedge \text{Smart}(x))$$

- استفاده از سور وجودی با ترکیب شرطی ممکن است باعث اشتباه در معنا گردد.

- مثال: جمله زیر حتی برای زمانی که شخص در  $AUT$  نباشد  $\text{true}$  است.

$$\exists x \text{ At}(x, AUT) \Rightarrow \text{Smart}(x)$$

# سورهای تو در تو

• ساخت جملات پیچیده‌تر با ترکیب سورها

$$\forall x \forall y \equiv \forall y \forall x \equiv \forall x, y$$

$$\exists x \exists y \equiv \exists y \exists x \equiv \exists x, y$$

$$\forall x \forall y \text{ Brother}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y)$$

$$\forall y \forall x \text{ Brother}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y)$$

$$\forall x, y \text{ Brother}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y)$$

•  $\exists x \forall y$  معادل  $\forall y \exists x$  نیست.

• مثال: عبارت زیر به این معناست که شخصی در جهان وجود دارد که همه او را دوست دارند.

$$\exists y \forall x \text{ Loves}(x, y)$$

و عبارت زیر به این معناست که هر شخصی حداقل یک نفر را دوست دارد.

$$\forall x \exists y \text{ Loves}(x, y)$$

# ارتباط بین سورها

- در صورت استفاده از دو سور با متغیر یکسان، هر متغیر به نزدیک‌ترین سور بازمی‌گردد.

$$\forall x (\text{Crown}(x) \vee (\exists x \text{ Brother}(\text{Richard}, x)))$$

- سور عمومی و وجودی از طریق عملگر نقیض با یکدیگر در ارتباط هستند.
- مثال:

$$\forall x \text{ Likes}(x, \text{IceCream}) \quad \neg \exists x \neg \text{ Likes}(x, \text{IceCream})$$

$$\exists x \text{ Likes}(x, \text{Broccoli}) \quad \neg \forall x \neg \text{ Likes}(x, \text{Broccoli})$$

- چون سور عمومی در حقیقت ترکیب عطفی برای تمام اشیای جهان است و سور وجودی ترکیب فصلی است بنابراین از قوانین دمورگان تبعیت می‌کند.

# مفهوم متفاوت برخی جملات منطق مرتبه اول

- دانش فرد: Richard دو برادر به نام John و Geoffrey دارد.
- بیان غلط:

$$\text{Brother}(\text{John}, \text{Richard}) \wedge \text{Brother}(\text{Geoffrey}, \text{Richard})$$

- بیان درست:

$$\text{Brother}(\text{John}, \text{Richard}) \wedge \text{Brother}(\text{Geoffrey}, \text{Richard}) \wedge \\ \neg(\text{John} = \text{Geoffrey}) \wedge \forall x \text{ Brother}(x, \text{Richard}) \Rightarrow (x = \text{John} \vee x = \text{Geoffrey})$$

- فرضیاتی برای ساده کردن اعلان‌ها:
- فرض یکتایی نام‌ها: هیچ دو نامی به شیء یکسان اشاره نمی‌کنند.
- فرض دنیای بسته: جملات اتمیکی که معلوم نیست درست باشند نادرست فرض می‌شوند.
- بستار حوزه: محدود بودن اشیاء حوزه به موارد مشخص شده با نمادهای ثابت

# اظهارات و پرس وجوها در منطق مرتبه اول

---

- همانند منطق گزاره‌ای، جملات با استفاده از TELL به یک پایگاه دانش افزوده می‌شود.
- برای مثال می‌توان به پایگاه دانش اظهار کرد که John یک پادشاه و Richard یک شخص است و تمامی شاهان شخص هم هستند:

$TELL(KB, King(John))$  .

$TELL(KB, Person(Richard))$  .

$TELL(KB, \forall x King(x) \Rightarrow Person(x))$

# اظهارات و پرس وجوها در منطق مرتبه اول

- درخواستها (queries)

- با استفاده از ASK سوالاتی از پایگاه دانش در مورد درستی جمله پرسید.
- پاسخ این سوالات مقدار true یا false است.

$ASK(KB, King(John))$

$ASK(KB, \exists x Person(x))$

- جایگذاری (substitution, binding list)

- به ازای چه مقادیری از متغیرها یک جمله درست خواهد بود.

$ASKVARS(KB, Person(x)) \rightarrow results = \{\{x/Richard\}, \{x/John\}\}$

- اگر پایگاه دانش شامل جملات  $King John \vee King(Richard)$  باشد پاسخ سوال زیر چه خواهد بود؟  
 $ASK(KB, \exists x king(x))$

# توصیف روابط خویشاوندی با منطق مرتبه اول

---

• اشیاء؟

• *People*

• روابط؟

• *Parent, Sibling, Brother, Sister, Child, Daughter, Son, Spouse, Wife, Husband, Grandparent, Grandchild, Cousin, Aunt, and Uncle*

• توابع؟

• *Mother .Father*



# توصیف روابط خویشاوندی با منطق مرتبه اول

---

- مادر یک شخص والد مؤنث وی است.
- $\forall m, c \text{ Mother}(c)=m \Leftrightarrow \text{Female}(m) \wedge \text{Parent}(m, c).$
- شوهر یک شخص همسر مذکر اوست.
- $\forall w, h \text{ Husband}(h,w) \Leftrightarrow \text{Male}(h) \wedge \text{Spouse}(h,w).$
- مذکر و مؤنث دو دسته جدا از هم هستند.
- والدین و فرزندان رابطه معکوس یکدیگرند.
- $\forall p, c \text{ Parent}(p, c) \Leftrightarrow \text{Child}(c, p).$

# توصیف روابط خویشاوندی با منطق مرتبه اول

• جد، والدِ والدین شخص است.

•  $\forall g, c \text{ Grandparent}(g, c) \Leftrightarrow \exists p \text{ Parent}(g, p) \wedge \text{Parent}(p, c) .$

• یک همزاد، فرزند دیگر والدین شخص است.

•  $\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow x \neq y \wedge \exists p \text{ Parent}(p, x) \wedge \text{Parent}(p, y)$

تمامی روابط فوق به عنوان **axiom** (اصل) شناخته می‌شوند. در واقع تعاریفی هستند که براساس سایر مسندها به دست آمده‌اند.

• همزادی متقارن است.

•  $\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow \text{Sibling}(y, x)$

این رابطه یک قضیه است که به طور منطقی از اصول گفته شده به دست می‌آید.

# توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

---

- اشیاء؟
- زوج‌های  $[i,j]$  مشخص‌کننده‌ی مربع‌ها، وامپوس و عامل
- روابط؟
- *Pit, Adjacent, Breezy, Stenchy, Percept, Action, At, HaveArrow*

# توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

---

- عامل دنیای وامپوس یک بردار ادراکات متشکل از پنج عنصر را دریافت می کند.
- برای مثال ادراکات دریافتی عامل در لحظه ۵ می تواند به صورت زیر باشد:

*Percept ([Stench, Breeze, Glitter , None, None], 5)*

- اقدام ها

*Turn(Right ), Turn(Left ), Forward , Shoot , Grab, Climb*

- انتخاب بهترین اقدام

*ASKVARS( $\exists a$  BestAction( $a, 5$ ))*

- جوابی به صورت  $\{a/Grab\}$  می تواند برگرداند.

# توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

• ادراکات به واقعیت‌های مشخصی درباره وضعیت فعلی اشاره می‌کند.

$$\forall t, s, g, m, c \text{ Percept } ([s, \text{Breeze}, g, m, c], t) \Rightarrow \text{Breeze}(t),$$

$$\forall t, s, b, m, c \text{ Percept } ([s, b, \text{Glitter}, m, c], t) \Rightarrow \text{Glitter}(t)$$

• پیاده‌سازی یک رفتار انعکاسی ساده با جملات استلزام سوردار

$$\forall t \text{ Glitter}(t) \Rightarrow \text{BestAction}(\text{Grab}, t)$$

• مجاورت

$$\forall x, y, a, b \text{ Adjacent } ([x, y], [a, b]) \Leftrightarrow$$

$$(x = a \wedge (y = b - 1 \vee y = b + 1)) \vee (y = b \wedge (x = a - 1 \vee x = a + 1))$$

# توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

---

- تغییر مکان عامل در طی زمان و ثابت بودن مکان وامپوس در یک خانه مشخص

$$At(Agent, s, t) \quad \forall t \, At(Wumpus, [2, 2], t)$$

- هر یک از اشیاء در یک لحظه تنها می‌توانند در یک خانه باشند.

$$\forall x, s1, s2, t \, At(x, s1, t) \wedge At(x, s2, t) \Rightarrow s1 = s2$$

- اگر عامل در خانه‌ای باشد و نسیم حس کند، آن خانه دارای نسیم است (مستقل از زمان)

$$\forall s, t \, At(Agent, s, t) \wedge Breeze(t) \Rightarrow Breezy(s)$$

# توصیف دنیای وامپوس با منطق مرتبه اول

---

- اگر یک خانه دارای نسیم باشد حداقل یکی از خانه‌های مجاور آن دارای چاه است.

$$\forall s \text{ Breezy}(s) \Leftrightarrow \exists r \text{ Adjacent}(r, s) \wedge \text{Pit}(r)$$

- در اختیار داشتن تیر (یک اصل successor-state)

$$\forall t \text{ HaveArrow}(t + 1) \Leftrightarrow (\text{HaveArrow}(t) \wedge \neg \text{Action}(\text{Shoot}, t))$$

# نظریه مجموعه‌ها با استفاده از منطق مرتبه اول

- کلیه مجموعه‌ها عبارتند از مجموعه تهی و مجموعه‌هایی که از اضافه کردن عنصری به یک مجموعه دیگر ایجاد می‌شوند.

$$\forall s \text{ Set}(s) \Leftrightarrow (s = \{\}) \vee (\exists x, s_2 \text{ Set}(s_2) \wedge s = \{x \mid s_2\})$$

- هیچ عنصری به مجموعه تهی اضافه نشده است.

$$\neg \exists x, s \{x \mid s\} = \{\}$$

- اضافه کردن عنصری که هم اکنون در مجموعه وجود دارد اثری ندارد.

$$\forall x, s \ x \in s \Leftrightarrow s = \{x \mid s\}$$

- تنها اعضای هر مجموعه عناصری هستند که به مجموعه اضافه شده‌اند.

$$\forall x, s \ x \in s \Leftrightarrow [\exists y, s_2 (s = \{y \mid s_2\} \wedge (x = y \vee x \in s_2))]$$



# نظریه مجموعه‌ها با استفاده از منطق مرتبه اول

- یک مجموعه زیرمجموعه مجموعه دیگری است اگر اعضای مجموعه اول اعضای مجموعه دوم نیز باشند.

$$\forall s1, s2 \quad s1 \subseteq s2 \Leftrightarrow (\forall x \quad x \in s1 \Rightarrow x \in s2)$$

- دو مجموعه در صورتی مساوی هستند که هر یک زیرمجموعه دیگری باشد.

$$\forall s1, s2 \quad s1 = s2 \Leftrightarrow (s1 \subseteq s2 \wedge s2 \subseteq s1)$$

- یک عنصر در صورتی به اشتراک دو مجموعه تعلق دارد که عضو هر دو مجموعه باشد.

$$\forall x, s1, s2 \quad x \in (s1 \cap s2) \Leftrightarrow (x \in s1 \wedge x \in s2)$$

- یک عنصر در صورتی به اجتماع دو مجموعه تعلق دارد که عضو یکی از آن دو مجموعه باشد.

$$\forall x, s1, s2 \quad x \in (s1 \cup s2) \Leftrightarrow (x \in s1 \vee x \in s2)$$

# نمونه‌های بیشتر

---

- حتما نمونه‌های آورده شده در کتاب شامل موارد زیر را برای یادگیری بیشتر مطالعه کنید.
- اعداد و لیست‌ها
- مهندسی دانش در مدارهای الکتریکی