

بسمه تعالی

سری ۶: تمرینات مبحث توابع احتمال شرطی، کوواریانس، ضریب همبستگی، امید و واریانس شرطی و توابع احتمال چند متغیره

۱- تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر داده شده است. مقادیر  $E(X^2|Y=y)$  و  $COV(X,Y)$  را به دست آورید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-\left(y+\frac{x}{y}\right)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

۲- فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(x-y) & -x < y < x, 0 < x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

الف) مقدار  $c$  را تعیین کنید.

ب)  $f_Y(y)$  و  $p(2Y > X)$  و  $p(Y < \frac{1}{2} | X=1)$  را محاسبه کنید.

۳- فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  و  $Z$  دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y)e^{-z} & 0 < x < 1, 0 < y < 2, z > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

الف) مقدار  $c$  را تعیین کنید و  $p(X < Y, Z > 1)$  را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که هر سه متغیر  $X$  و  $Y$  و  $Z$  از یکدیگر مستقل نیستند اما  $Z$  از  $X$  و  $Z$  از  $Y$  مستقل هستند و  $X$  از  $Y$  مستقل نمی باشد.

۴- فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{y} y^2 e^{-y} x^{y-1} & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

مقدار  $k$  را تعیین کرده و  $p(X < \frac{1}{2} | Y=2)$  و  $Var(X|Y=y)$  را محاسبه کنید.

۵- الف) فرض کنید برای متغیر تصادفی گسسته  $X$ ،  $E(X) = 2$ ،  $E(X(X-4)) = 5$ . واریانس و انحراف معیار  $-4X + 12$  را محاسبه کنید.

ب) متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  دارای میانگینهای ۱ و ۲ و واریانسهای ۳ و ۴ و کوواریانس ۱- می باشند. میانگینها و واریانسهای  $U = 2X - Y$  و  $V = X + 2Y$  را بیابید. همچنین  $E(X^2 + 3X - 5)$  و  $\rho(U, V)$  را محاسبه کنید.

موفق باشید