Date: .................... Subject: ....................

# نظریه برآورد (Estimation Theory)

منظور از استنباط آماری، تعمیم‌هایی بر مبنای داده‌های نمونه‌ای می‌باشد. استنباط آماری به

۱- مسائل برآورد

2- آزمون فرض

تفکیک شده است.

## برآورد پارامتر مجهول جامعه

فرض کنید $(X_1, \dots, X_n)$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی با مقادیر مشاهده شده $(x_1, \dots, x_n)$ از جامعه $X$ که دارای تابع احتمال $f_\theta(x)$ می‌باشد. تابع احتمال به پارامتر مجهول $\theta$ وابسته است.

هدف - برآورد $\theta$ با توجه به مقادیر $(x_1, \dots, x_n)$.

انواع برآورد:
- ۱- برآورد نقطه‌ای (point estimate)
- 2- برآورد فاصله‌ای (interval estimate)

۱- برآورد نقطه‌ای: با توجه به مقادیر مشاهده شده $(x_1, \dots, x_n)$، مقدار آماره $T = T(X_1, \dots, X_n)$ را به عنوان $t = T(x_1, \dots, x_n)$ تقریبی از پارامتر مجهول جامعه ارائه می‌دهیم.

با این اوصاف، برای برآورد پارامتر مجهول جامعه می‌توان برآوردگرهای (estimator) زیادی را در نظر گرفت.

حال سؤال پیش می‌آید که در بین آنها، کدام یک را باید انتخاب نماییم.

Date: ........................ Subject: ........................

**تعریف**- برآوردگر $T=T(X_1,\dots,X_n)$ را یک برآوردگر نااریب (unbiased) برای پارامتر $\theta$ نامند هرگاه

$$\mathbb{E}[T]=\theta.$$

**مثال**- فرض کنید $(X_1,\dots,X_n)$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از جامعه‌ای با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ است.

الف- تحت چه شرایطی برآوردگر $T=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ ، که در آن $a_i\in\mathbb{R}$ ، یک برآوردگر نااریب برای $\mu$ است.

ب- نشان دهید $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-X_i)^2$ یک برآوردگر نااریب برای $\sigma^2$ است.

الف-

$$\forall i \quad \mathbb{E}[X_i]=\mu$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T]=\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big]=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{E}[X_i]=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu=\mu\sum_{i=1}^{n} a_i=\mu$$

پس اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$ ، در اینصورت $T$ یک برآوردگر نااریب برای $\mu$ است.

ب- .

$$\begin{cases} * \ \forall i \quad \operatorname{var}[X_i]=\sigma^2=\mathbb{E}[(X_i-\mu)^2] \\ ** \ \mathbb{E}[\bar{X}]=\mu \ , \quad \operatorname{var}[\bar{X}]=\frac{\sigma^2}{n} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[S^2]=\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\Big]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i-\bar{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big[\big((X_i-\mu)-(\bar{X}-\mu)\big)^2\Big]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}[(X_i-\mu)^2]}_{*}-n\,\underbrace{\mathbb{E}[(\bar{X}-\mu)^2]}_{**}$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}=\sigma^2$$

Date:................................ Subject:..........................................................................................

تعریف- اگر $T_1$ و $T_2$ دو برآوردگر نااریب برای پارامتر $\theta$ باشند و $var[T_1] < var[T_2]$ ،

دراینصورت برآوردگر $T_1$ را کاراتر از برآوردگر $T_1$ گویند. درنتیجه دربین برآوردگرهای نااریب $\theta$ ، برآوردگری

که دارای کمترین واریانس است را کاراترین برآوردگر نامند. (efficient estimator)

مثال- دربین برآوردگرهای نااریب $\mu$ ، $\bar{x}$ کاراترین برآوردگر است.

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$var[T] = var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, var[x_i] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$= \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - \tfrac{1}{n})^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(2 a_i \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^2}\right)\right] = \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - \tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{2}{n}\sum a_i - \tfrac{n}{n^2}\right]$$

$$= \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - \tfrac{1}{n})^2 + \tfrac{1}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \sum_{i=1}^{n} (a_i - 1/n)^2$$

درنتیجه $var[T]$ زمانی دارای کمترین مقدار می‌باشد که به ازای هر $i$ ، $a_i = 1/n$ .

تذکر- در برآورد نقطه‌ای ، اگر مقدار $t = T(x_1, \dots, x_n)$ به $\theta$ نزدیک باشد، دراینصورت برآوردگر $T$ ،

برآوردگر خوبی است. ازطرفی‌دیگر، با تغییر نمونه ، مقدار برآورد تغییر می‌کند. روی‌هم‌رفته می‌توان گفت

برآوردگر نقطه‌ای ، دارای خطای زیاد است.

2 - برآورد فاصله‌ای : در این نوع ، یک بازه $(L, U)$ بعنوان تقریبی از پارامتر $\theta$ ارائه می‌گردد ،

بطوریکه با احتمال بسیار زیاد پارامتر $\theta$ دراین بازه قرار دارد. این بازه را فاصله اطمینان می‌نامند. اختصار

(CI : confidence interval)

Date:................ Subject:................

قرار گرفتن θ در این بازه $1-\alpha$ باشد، آن را یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ می‌گویند. L را حد پایین

فاصله و U را حد بالا و $1-\alpha$ را ضریب اطمینان فاصله می‌نامند.

الف - برآورد میانگین جامعه

- برآوردگر نقطه‌ای $\hat{\mu} = \bar{X}$

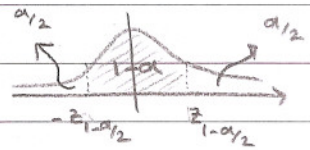
- فاصله اطمینان:

۱) واریانس جامعه معلوم است:

• اگر جامعه نرمال باشد، تابع محور $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ را در نظر می‌گیریم.

بازه $(a,b)$ چه باشد تا داشته باشیم

$$\mathbb{P}\left( a < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b \right) = 1-\alpha.$$




$$\Rightarrow \mathbb{P}\left( -z_{1-\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\alpha/2} \right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left( \bar{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mu \in \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$ با احتمال $(1-\alpha)100\%$،

• اگر جامعه نرمال نباشد، اگر $n \geq 30$، در اینصورت طبق قضیه حد مرکزی، فاصله اطمینان بدست آمده در ۲ یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای $\mu$ است.

AZIN

2) اگر واریانس جامعه نامعلوم باشد : در این حالت اگر جامعه نرمال باشد ، تابع محور $T=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$ را در نظر بگیرید . یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای $\mu$ در این حالت عبارتست از

$$\mu \in \left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right).$$

تذکر -

← برای محاسبه s در فاصله بالا ، از فرمول زیر نیز می‌توان استفاده نمود :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right).$$

← اگر $n \geq 30$ در اینصورت $t_{1-\alpha/2}(n-1) = z_{1-\alpha/2}$ .

مثال- نمونه‌ای 25 تایی لامپ از یک دسته بزرگ از لامپ‌های 40 واتی انتخاب کرده‌ایم . میانگین عمر لامپ‌های نمونه 1410 ساعت است . اگر عمر لامپ‌ها دارای توزیع نرمال با انحراف معیار 200 ساعت باشد، یک فاصله اطمینان 95٪ برای میانگین عمر لامپ‌های این دسته بدست آورید .

| z | .06 |
|---|---|
| 1.9 | .975 |

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$

$\bar{x} = 1410 \;,\; n = 25 \;,\; \sigma = 200$

$\mu \in \left(\bar{x} - z_{0.975}\frac{200}{5} \;,\; 1410 + 1.96 \times \frac{200}{5}\right)$

$\mu \in (1331.6 \;,\; 1488.4)$ .

Date:.............................. Subject:..................................................

مثال - یک نشریه می‌خواهد میانگین درآمد سهام عادی را در سال گذشته برای تمام شرکت‌های نرم‌افزاری برآورد کند.

نمونه تصادفی به اندازه ۱۴ شرکت انتخاب می‌گردد و درآمد سهام عادی آنها به شرح زیر است:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -8.37 | 31.38 | -6.52 | 24.87 | -8.47 | 17.78 | -3.15 |
| 7.20 | 15.45 | 24.83 | .35 | 11.28 | 21.01 | 26.68 |

اگر درآمد سهام عادی این شرکت‌ها از توزیع نرمال پیروی کند، برای میانگین درآمد سهام عادی، یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی بدست آورید.

$\sigma$ نامعلوم , $n=14$ , $1-\alpha=0/90 \rightarrow \alpha=0/1 \rightarrow t_{0/95}(13)=1.77$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 171.06$ , $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4301.2552$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{14} \times 171.06 = 12.22$

$s^2 = \frac{1}{13}\left[4301.2552 - \frac{1}{14}(171.06)^2\right] = 170.09$

$\Rightarrow \mu \in \left(12.22 - 1.77 \times \frac{13.04}{\sqrt{14}} , 12.22 + 1.77 \frac{13.04}{\sqrt{14}}\right)$

$\Rightarrow \mu \in (6.05 , 18.39).$

AZIN

Date: Subject:

## خطای برآورد میانگین

میزان خطای برآورد میانگین $= |\bar{x} - \mu|$

الف ـ اگر واریانس جامعه معلوم باشد: $|\bar{x} - \mu| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2}$

ب ـ اگر واریانس جامعه نامعلوم باشد: $|\bar{x} - \mu| \le \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$

## تعیین اندازه نمونه

در یک استنباط آماری یکی از مهمترین مراحل، تعیین اندازه نمونه تصادفی یعنی $n$ است.

اگر $e$ حداکثر مقدار خطا برای برآورد میانگین $\mu$ باشد که برای تحلیلگر قابل تحمل است،

آنگاه: الف ـ اگر واریانس جامعه معلوم باشد:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2} \le e \Rightarrow n \geq \left( \frac{\sigma}{e} Z_{1-\alpha/2} \right)^2.$$

ب ـ اگر واریانس جامعه نامعلوم باشد:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \le e \Rightarrow n \geq \left( \frac{s}{e} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)^2.$$

AZIN

مثال - الف - از یک جامعه نرمال با واریانس ۴ یک نمونه تصادفی به اندازه 25 انتخاب کرده ایم و میانگین این نمونه 20 شده است. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای میانگین این جامعه پیدا کنید.

ب - اگر بخواهیم طول فاصله اطمینان را به نصف کاهش دهیم، اندازه نمونه را چه مقدار باید انتخاب کنیم؟

ج - بیشترین خطایی را که ممکن است در تعیین فاصله اطمینان ۹۰ درصدی مرتکب شویم، بدست آورید.

$\sigma^2 = 4 \quad , \quad n = 25 \quad , \quad \bar{x} = 20$

الف) $1-\alpha = 0/9 \longrightarrow 1-\alpha/2 = 0.95 \longrightarrow Z_{.95} = 1.65$

$\mu \in \left(20 - 1.65 \times \frac{2}{5} \; , \; 20 + 1.65 \times \frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow$ ٪۹۰ فاصله اطمینان : $\mu \in (19.34 \; , \; 20.66)$ .

ب - طول فاصله اطمینان $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2}$ است، پس برای نصف شدن این طول باید اندازه نمونه را ۴ برابر کنیم. یعنی در این حالت $n=100$ گردد.

ج - بیشترین خطای ممکن $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha/2} = \frac{2}{5} \times 1.65 = 0.66$

Date: Subject:

## د- برآورد نسبت واریانس دو جامعه

فرض کنید یک نمونه $n_1$ تایی از یک جامعه با میانگین $\mu_1$ و واریانس $\sigma_1^2$ و یک نمونه $n_2$ تایی از یک جامعه با میانگین $\mu_2$ و واریانس $\sigma_2^2$ در اختیار داریم. بطوریکه این دو نمونه از یکدیگر مستقلند.

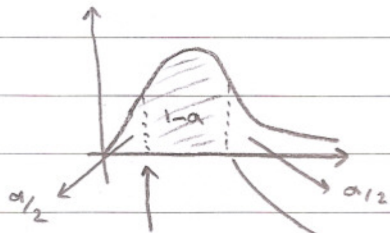
- برآوردگر نقطه‌ای

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

- فاصله اطمینان

اگر دو جامعه نرمال باشند، طبق فصل قبل تابع محور زیر را در نظر بگیرید:

$$F = \frac{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} = \frac{S_2^2}{S_1^2}\,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_2-1, n_1-1)$$




بنابراین یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عبارت است از

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1) , \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1) \right)$$

تذکر - توجه نمایید اتحاد روبرو برقرار است:

$$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}$$

با توجه به نکته که اگر $F \sim F(n_1-1, n_2-1)$ باشد آنگاه $\frac{1}{F} \sim F(n_2-1, n_1-1)$ است، این اتحاد اثبات می‌گردد.

برای استفاده از جدول این معادله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\mathbb{P}\left(F < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right) = \alpha/2 = \mathbb{P}\left(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{F} \le \frac{1}{F_{\alpha/2}}\right)$$

AZIN

Date:............................ Subject:..............................................................

مثال - دو نمونه تصادفی با اندازه‌های 25 و 16 به ترتیب از دانشجویان پسر و دختری که در یک آزمون شرکت کرده‌اند را انتخاب و مشاهده نموده‌ایم که میانگین نمرات دانشجویان پسر 82 و واریانس آن 64 است. درحالیکه میانگین نمرات دانشجویان دختر 78 و واریانس 49 می‌باشد. یک فاصله اطمینان 98 درصدی برای نسبت انحراف معیار معیار نمرات پسرها به دخترها بدست آورید. فرض کنید توزیع نمرات نرمال است.

$1-\alpha = 0/98 \rightarrow \alpha = 0/02 \Rightarrow \alpha/2 = 0/01 \Rightarrow$

پسرها : $n_1 = 25$ $\bar{X}_1 = 82$ $S_1^2 = 64$

دخترها : $n_2 = 16$ $\bar{X}_2 = 78$ $S_2^2 = 49$

$$= \frac{1}{F_{0/99}(n_1-1, n_2-1)}$$

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{0/1}(n_2-1, n_1-1) , \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{0/99}(n_2-1, n_1-1) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left( \frac{64}{49} \frac{1}{3.29} , \frac{64}{49} 2.89 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \in (0/63 , 1/943).$$ ▲

مثال - میزان تقاضا برحسب کیلوگرم برای دو محصول A و B دارای توزیع نرمال بصورت زیر می‌باشد، یک فاصله اطمینان 95 درصدی برای $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ بدست آورید.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A محصول | 3 | 3.2 | 2.9 | 3.4 | 2.5 | 2.8 | 3 | 3.3 | 2.7 | 3.1 |
| B محصول | 3 | 2.6 | 3.1 | 3.5 | 3.2 | 3.9 | 2.7 | | | |

Date: ........ Subject: ........

در اینصورت با احتمال $(1-\alpha)100\%$ ، تفاضل میانگین دو جامعه دارای فاصله اطمینان

$$\mu_1-\mu_2 \in \left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, z_{1-\alpha/2} \,,\, \bar{x}_1-\bar{x}_2+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

خواهد بود.

2 - اگر واریانس جوامع نامعلوم باشد ولی مساوی باشند: واریانس مشترک $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

- برآورد نقطه‌ای

$$\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

- فاصله اطمینان: اگر دو جامعه نرمال باشند ، آنگاه تابع محور .

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

بنابراین یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای برآورد پارامتر $\mu_1-\mu_2$ عبارتست از

$$\mu_1-\mu_2 \in \left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\; t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) \,,\, \bar{x}_1-\bar{x}_2+s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\; t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)$$

تذکر - اگر جوامع نرمال نباشند ولی $n_1,n_2 \geq 30$ ، در اینصورت حالت 1 ، جای $\sigma_1$ و $\sigma_2$ ، $S_1$ و $S_2$ قرار دهید.

$$\mu_1-\mu_2 \in \left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\, Z_{1-\alpha/2} \,,\, \bar{x}_1-\bar{x}_2+\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\, Z_{1-\alpha/2}\right).$$

Date:............................ Subject:........................................................

مثال - نمرات زیر نمونه‌ای از نمرات درس آمار در دو گروه 1 و 2 می‌باشد. فرض کنید نمرات کلاس دارای توزیع نرمال با واریانس‌های مساوی است.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| گروه 1 | 12 | 10 | 14 | 13 | 11 | | |
| گروه 2 | 17 | 15 | 14 | 16 | 17 | 17 | 16 |

الف - فاصله (10.92 و 13.08) یک فاصله اطمینان چند درصدی برای میانگین نمرات گروه 1 است؟

ب - آیا با اطمینان 95 درصدی می‌توان گفت که میانگین نمره گروه 2 بیشتر از گروه 1 است؟ چرا؟

$n_1 = 5 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i = 60 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 730 \rightarrow s_1^2 = 2.5 \ , \ \bar{x}_1 = 12$

$n_2 = 7 \qquad \sum_{i=1}^{7} x_i = 112 \qquad \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 1800 \rightarrow s_2^2 = 1.33 \ , \ \bar{x}_2 = 16$

$$\mu_1 \in \left( 12 - \sqrt{\frac{2.5}{5}}\, t_{1-\alpha/2}(4) \ , \ 12 + \sqrt{\frac{2.5}{5}}\, t_{1+\alpha/2}(4) \right) = (10.92, 13.$$

$$\Rightarrow t_{1-\alpha/2}(4) = 1.53 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.9$$

پس این فاصله، یک فاصله اطمینان 80 درصدی برای $\mu_1$ است.

ب) $s_p^2 = \dfrac{4 \times 2.5 + 6 \times 1.33}{10} = 1.798 \rightarrow s_p = 1.341$

$t_{.975}(10) = 2.233$

$$\mu_1 - \mu_2 \in \left( 12-16 - 2.233 \times 1.341 \times \sqrt{\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}} \ , \ 12-16 + 2.233 \times 1.341 \times \sqrt{\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}} \right)$$

$$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 \in (-5.751 \ , -2.249)$$

AZIN

چون تمام بازه منفی است، پس با اطمینان 95 درصدی می‌توان گفت میانگین گروه دوم بیشتر از گروه اول است.

Date:.............................. Subject:..............................

## ب ـ برآورد واریانس جامعه

فرض کنید از یک جامعه نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ یک نمونه تصادفی به اندازه $n$ انتخاب کرده باشیم.

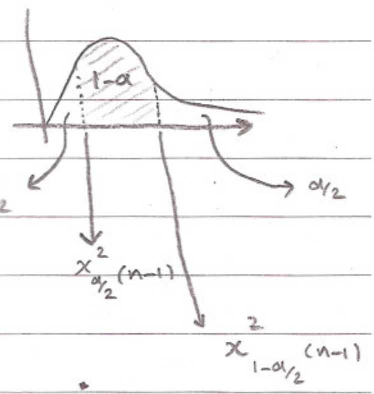
برای برآورد واریانس $\sigma^2$ ،

ـ بهترین برآوردگر نقطه ای $\hat{\sigma}^2 = S^2$

ـ فاصله اطمینان : تابع محور $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

بنابراین یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای پارامتر $\sigma^2$ ، عبارت از

$$\sigma^2 \in \left( \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right).$$




مثال ـ یک سازنده ساعت می خواهد مقدار تغییر پذیری نوعی ساعت ساخته شده را برآورد کند. یک نمونه از 8 ساعت را به مدت 48 ساعت به کار می اندازد. تعداد ثانیه هایی را که هر ساعت پس از 48 ساعت عقب یا جلو افتاده است را اندازه می گیرد ، +6 ، -4 ، -7 ، +5 ، +9 ، -6 ، -3 و +2 .

اگر زمان های ثبت شده دارای توزیع نرمال باشد ، یک فاصله اطمینان 95 درصدی برای

الف ـ میانگین ، ب ـ انحراف معیار

زمان های ثبت شده برای این نوع از ساعت پس از 48 ساعت را بدست آورید.



ب ـ $n = 8$ $\quad \sum_{i=1}^{8} x_i = 2$ $\quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 256$

Date:............ Subject:............

$$s^2 = \frac{1}{7}\left[256 - \frac{1}{8}12^2\right] = 36.5$$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.05 \\ \alpha/2 = 0.025 \\ 1-\alpha/2 = 0.975 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \chi^2_{0.025}(7) = 1.69 \\ \chi^2_{0.975}(7) = 16 \end{cases}$$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{7 \times 36.5}{16}, \frac{7 \times 36.5}{1.69}\right) = (15.97, 151.18)$$

$$\sigma \in (4, 12.3).$$

ج - برآورد تفاضل میانگین دو جامعه

$S_1^2$ $\bar{X}_1$

- فرض کنید یک نمونه $n_1$ تایی از یک جامعه با میانگین $\mu_1$ و واریانس $\sigma_1^2$ و

یک نمونه $n_2$ تایی از یک جامعه با میانگین $\mu_2$ و واریانس $\sigma_2^2$ در اختیار داریم.

$S_2^2$ $\bar{X}_2$

- این دو نمونه از یکدیگر مستقل هستند.

- برآوردگر نقطه‌ای $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$

- فاصله اطمینان

نرمال باشد

۱- اگر واریانس دو جامعه معلوم باشد: تابع محور

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

را در نظر بگیرید.

Date:............................ Subject:..............................................

$n_A = 10 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} x_i = 29.9 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 90.09 \qquad S_A^2 = 0.0765$

$n_B = 7 \quad , \quad \sum_{i=1}^{7} x_i = 22 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 70.36 \qquad S_B^2 = 0.203$

$1-\alpha = 0.95 \longrightarrow \alpha = 0.5 \longrightarrow \alpha/2 = 0.25$

$F_{0.975}(9,6) = 5.523$

$F_{0.975}(6,9) = 4.32$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \in \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} \frac{1}{F_{0.975}(9,6)} \, , \, \frac{S_A^2}{S_B^2} F_{0.975}(6,9) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \in \left( \frac{0.0765}{0.203} \frac{1}{5.523} \, , \, \frac{0.0765}{0.203} 4.32 \right) = (0.0682 , 1.628)$$

عدد یک در بازه $(0.0682 , 1.628)$ موجود است. پس ٪95 اطمینان داریم که تقریباً

$\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ . ▲