Techniques de valorisation de portefeuilles et de calcul de capital économique en assurance-vie

Partie 2 – Modélisation et agrégation des risques

Cours ENSAE - Année 2013 – 2014

Matthieu Chauvigny

redefining / standards

Contact

- Matthieu Chauvigny
  - Risk Management AXA France
  - Manager équipe Modèles Solvabilité 2
  - matthieu.chauvigny@axa.fr

Introduction

- Objectif : détailler la modélisation des risques et leur agrégation dans le cadre de Solvabilité II
- Notions / problématiques :
  - La modélisation des risques doit reposer sur des modèles statistiques / stochastiques
    - Il est en effet question dans le dispositif Solvabilité II de « niveau de confiance 99,5% » -> seul un modèle statistique ou stochastique permet d'objectiver ce seuil
  - Que signifie «agréger des risques » ?
    - Corréler des risques -> à l'aide d'outils dédiés (copules, modèles causaux) modélisation de la loi jointe de facteurs de risques,
    - Corréler les variables économiques dépendant de ces risques,
      - Par exemple, dans les QIS, on agrège des ΔNAV choquées « actions » et choquées « taux » -> conceptuellement différent que de parler de corrélation entre « actions » et « taux »
    - Intégrer des risques : effectuer les calculs d'éléments actuariels en tenant compte de l'ensemble des risques (marché, mortalité,…)
      - On parle d'agrégation même si certains risques sont indépendants (exemple marché / mortalité hors situation de crise)

Sommaire

- Rappels : le capital économique Solvabilité II
- La modélisation des risques
- La prise en compte des dépendances
- Techniques d'agrégation des risques
- Comparaison de l'agrégation des risques « formule standard » vs « modèle interne »
- ORSA et solvabilité à T années
- Robustesse d'estimation du capital économique

Rappels : le capital économique Solvabilité II

- Qu'est-ce qu'un bilan économique ?

Bilan Economique en t

Fonds propres économiques

	FP_t
	VEP_t

Valeur économique des passifs

- VEP_t : espérance de VAN des cash-flows de passifs (prestations, commissions, frais, …) sous la probabilité risque-neutre
- FP_t: espérance de VAN des marges futures sous la probabilité RN (augmentée de l'ANR)
- $FP_t = A_t - VEP_t$
- Remarque : pour t>0, les éléments VEP_t , FP_t et A_t sont des variables aléatoires (espérances conditionnelles)

Rappels : le capital économique Solvabilité II

- Le capital économique Solvency II = montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau 99,5%,
- Trois notions fondamentales :
  - Ruine économique = situation où la valeur de marché l'actif est inférieure à la fair value des passifs,
  - L'horizon d'une année impose de pouvoir disposer de la distribution des fonds propres économiques dans un an,
  - Le seuil 99,5% représente le niveau de solvabilité requis. La probabilité de l'événement « ruine économique » est dans ce cas inférieure à 0,5%.
- Le capital économique s'estime de la manière suivante :

$$C = FP_0 - P(0,1).q_{0,5\%}(FP_1)$$

Fonds propres économiques initiaux

Surplus (algébrique) de capital à ajouter en t=0

Rappels : le capital économique Solvabilité II

- Introduisons les notations :
  - Surplus de capital à ajouter en 0 : $S = -P(0,1).q_{0,5\%}(FP_1)$
  - Variables économiques après ajout du montant S : $FP_1^{ajust},\ A_1^{ajust}\ \ et\ \ VEP_1^{ajust}$
- La probabilité de ruine après injection de capital vaut :

$$
\begin{aligned}
& P\left(FP_1^{ajust} < 0\right) \\
& = P\left(A_1^{ajust} - VEP_1^{ajust} < 0\right) \\
& \approx P\left(A_1 + S / P(0,1) - VEP_1 < 0\right) \\
& = P\left(FP_1 + \frac{S}{P(0,1)} < 0\right) \\
& = P\left(FP_1 - q_{0,5\%}\left(FP_1\right) < 0\right) \\
& = P\left(FP_1 < q_{0,5\%}\left(FP_1\right)\right) \\
& = 0,5\%
\end{aligned}
$$

Remarque : pour un calcul exact du capital économique il faudrait procéder par itérations successives

Rappels : le capital économique Solvabilité II

- Les univers de probabilité :
  - La probabilité de ruine basée sur l'événement $\{FP_1<0\}$ suppose nécessairement un conditionnement de première période en univers « monde-réel »
  - A conditionnement « monde-réel » de première année fixé -> calcul de la valeur des postes du bilan de manière « market consistent »

Bilan éco en 0

A(0) **FP(0)** **VEP(0)**

Risques financiers et techniques

Bilan éco en 1

A(1) **FP(1)** **VEP(1)**

t=0 **t=1**

- Valeur économique « conditionnelle » des fonds propres et des passifs :

Résultats **Conditionnement monde-réel** **Cash-flows de passifs**

$$FP_1 = ANR_1 + E_Q\left[\sum_{u\geq 2}\frac{\delta_u}{\delta_1}R_u \,\middle|\, F_1^{MR}\right] \qquad VEP_1 = E_Q\left[\sum_{u\geq 2}\frac{\delta_u}{\delta_1}P_u \,\middle|\, F_1^{MR}\right]$$

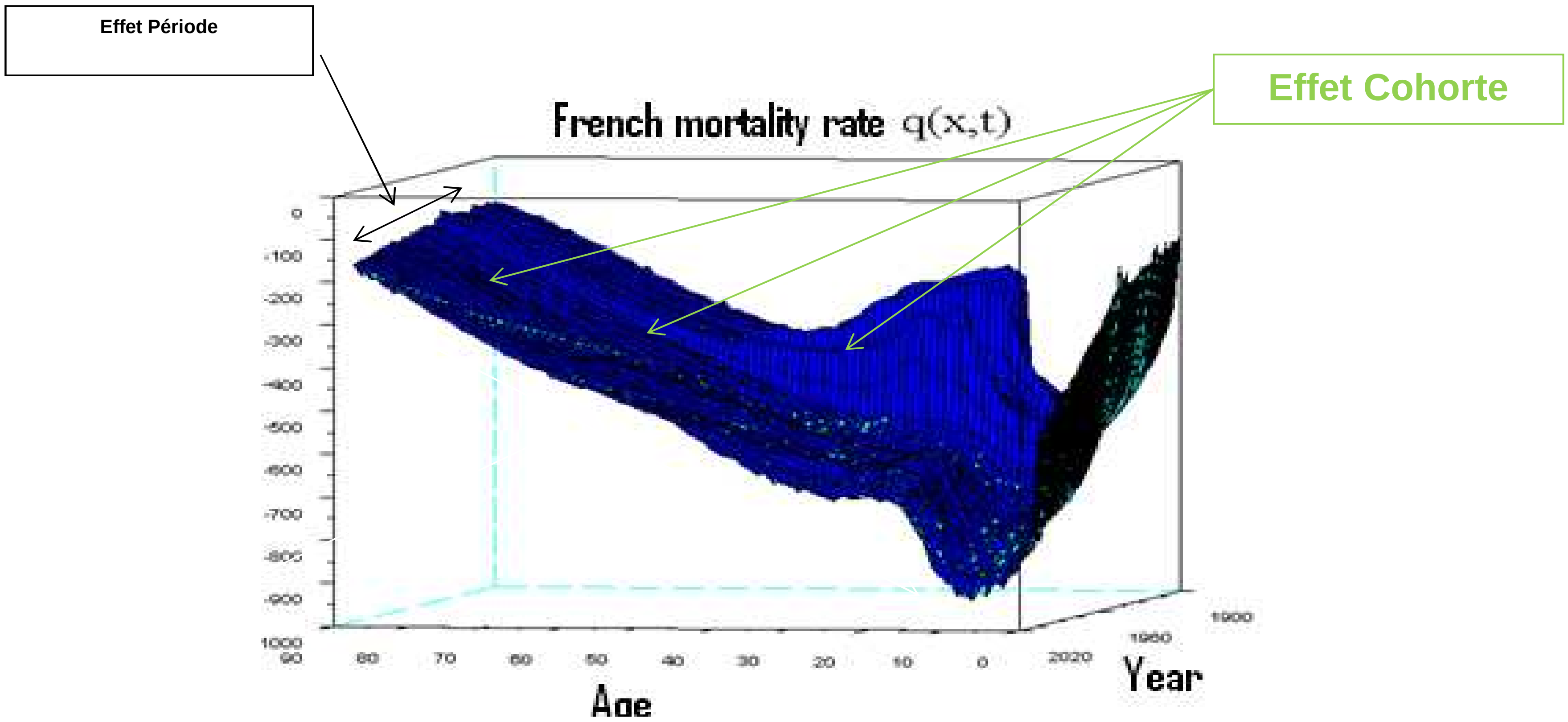
Sommaire

- Rappels : le capital économique Solvabilité
- La modélisation des risques
- La prise en compte des dépendances
- Techniques d'agrégation des risques
- Comparaison de l'agrégation des risques « formule standard » vs « modèle interne »
- ORSA et solvabilité à T années
- Robustesse d'estimation du capital économique

Modélisation de la mortalité

Analyse du risque de Mortalité

- 3 facteurs nécessaires pour comprendre le risque de mortalité :



Modélisation de la mortalité

Différentes classes de modèles de mortalité stochastique

- **Modélisation du taux de mortalité instantané** (la possibilité à l'âge x de mourir instantanément en date t)
  - **Modèle de Lee-Carter** *(1992)* $$\log \mu(x,t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)}$$
  - **Modèle de Brouhns-Denuit** *(2002)* $$\log \mu(x,t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)}$$
  - **Modèle de Renshaw-Haberman** *(2006)* $$\log \mu(x,t) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Effet Période

Effet Cohorte

- **Modélisation du taux de mortalité** *(2007)*
  - **Cairns Blake Dowd (CBD)** $$Logit(q(x,t)) = \ln\left(\frac{q(x,t)}{1-q(x,t)}\right) = k_{t+1}^{(1)} + k_{t+1}^{(2)} \times (x+t)$$
  - **CBD2** $$Logit(q(x,t)) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x-\bar{x}) + k_t^{(3)}((x-\bar{x})^2 - \sigma_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}$$
  - **CBD3** $$Logit(q(x,t)) = k_t^{(1)} + k_t^{(2)}(x-\bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x)$$
- **P-Splines** *(2004)* $$\log \mu(x,t) = \sum_{i,j} \theta_{i,j} B_{i,j}^{ay}(x,t)$$

Modélisation de la mortalité catastrophique

Exemple de modèle

- Principe : modèle intégrant une composante stochastique centrale et une composante pandémie
- Exemple de structure :

Taux de mortalité pour un âge x et une date t

$$q(x,t) = \boxed{q(x,t)_{Central}} + \boxed{B_t(p) \times Exp_t(\varepsilon)}$$

Indépendance

$$q(x,t)_{Central} = 1 - e^{-\mu(x,t)}$$

$$\log \mu(x,t) = \boxed{\beta_x^{(1)}} + \boxed{\beta_x^{(2)}}\boxed{k_t}$$

$$k_t = k_{t-1} + C + \sigma \times N(0,1)$$

$$avec\ N(0,1) \quad l'innovation$$

$$\boxed{B_t(p)} \times \boxed{Exp_t(\varepsilon)}$$

p représente la fréquence de la pandémie : En moyenne il y a p% de probabilité d'avoir une pandémie

ε représente la sévérité moyenne de la pandémie, c'est-à-dire le supplément de taux de mortalité engendré par la pandémie

Calibration de la composante pandémie à partir de dires d'experts (OMS, INVS, ….) et de données historiques

Modélisation des scénarios Economiques

Exemple de modélisation du taux court Nominal

- Modélisation du taux court nominal r_t à partir du modèle de Hull & White (1994)
- Dynamique du taux instantané : $$dr_t = \left(\theta(t) - a r_t\right)dt + \sigma dW$$

$$\theta(t) = \frac{\partial}{\partial T} f^M(0,t) + a f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right) \qquad f^M(0,T) = -\frac{\partial \ln P^M(0,T)}{\partial T}$$

avec $f^M(0,t)$ le taux forward instantané

  - Pour simplifier les calculs, on pose $\alpha_t = f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-at}\right)^2$ et $x_t = x_s e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u$

$$r_t = x_t + \alpha_t$$ Avec $$dx_t = -a x_t dt + \sigma dW_t$$

- Procédure de Discrétisation (pas mensuel pour une meilleur précision, i.e. Δt=1/12) :
  1. Discrétisation du processus x_t : $x_{t+\Delta t} = x_t(1 - a \cdot \Delta t) + \sigma \cdot \Delta W_t$ avec $\Delta W_t \sim \mathrm{N}(0, \Delta t)$
  2. Déduction du taux court nominal $$r_t = x_t + \alpha_t$$

Modélisation des scénarios économiques

Exemple de modélisation de l'indice Action

- Modélisation de l'indice action S_t avec un brownien géométrique (cf. modèle de Black Scholes) auquel on ajoute
  - Un taux court stochastique (éventuellement issu du modèle de Hull & White)
  - Une structure par terme de la volatilité (ce qui est mis en évidence par une analyse du prix du call)
- Diffusion du modèle : $dS_t = (r_t - q) S_t dt + \eta_t S_t dZ$
- Simulation de l'indice action à partir de la relation ci-dessous :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left\{ \int_t^{t+\Delta t} \left(r_t - q - \frac{1}{2}\eta_u^2 \right) du + \int_t^{t+\Delta t} \eta_u dW_u \right\}$$

Modélisation du risque de crédit

Exemple : le modèle LMN

- Principe: modéliser le prix du zéro coupon corporate par une décomposition du spread corporate en spread de crédit et prime de liquidité
  - Le taux d'intérêt corporate est alors la somme du taux sans-risque r_t, d'un spread de crédit λ_t et d'une prime de liquidité γ_t

$$rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t$$

- Modélisation : 3 processus à modéliser

1. Lorsque les trois processus sont décorrélés, il suffit de disposer du prix du ZC du modèle interne
   - Le modèle LMN n'impose pas de modèle particulier de taux sans risque
2. L'intensité du défaut est modélisée à partir d'un modèle de type CIR :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}\,dZ_t$$

3. La prime de liquidité est modélisée grâce au processus : $d\gamma_t = \eta dB_t$

Sommaire

- Rappels : le capital économique Solvabilité
- La modélisation des risques
- La prise en compte des dépendances
- Techniques d'agrégation des risques
- Comparaison de l'agrégation des risques « formule standard » vs « modèle interne »
- ORSA et solvabilité à T années
- Robustesse d'estimation du capital économique

Comment se pose la problématique de la dépendance ?

Introduction

- Un modèle interne doit, pour modéliser les risques le plus fidèlement possible, tenir compte des corrélations entre les facteurs qui le composent
  - Ceci permet de calculer un capital ajusté au risque
- Des dépendances entre variables aléatoires s'observent à différents niveaux dans un modèle interne :
  - Cas A : entre les éléments de l'actif
    - Par exemple, corrélations taux / actions -> elles sont prises en compte dans la table de scénarios économiques (mouvements browniens corrélés)
  - Cas B : entre les éléments de l'actif et ceux du passif
    - En assurance non-vie : l'inflation impacte par exemple les montants de prestations
    - En assurance vie : les mécanismes de revalorisation des provisions (participation aux bénéfices) et les comportements de rachats dynamiques dépendent des conditions économiques
  - Cas C : entre les éléments du passif
    - En assurance vie les risques techniques (mortalité, morbidité, etc…) sont le plus souvent traités sous forme de best estimates (mortalité espérée, morbidité espérée, …) -> par conséquent, impossibilité de lier les aléas sous-jacents
    - Remarque : en assurance non-vie, les variables techniques sont simulées (nombre de sinistres, charges ultimes, …). Cette approche permet de modéliser les dépendances : copules, modèles causaux, …

Comment se pose la problématique de la dépendance ?

Illustration du Cas A : dépendance « en amont » interne aux scénarios

Scénarios économiques

Dates de projections

SIMULATION	CLASS	MEASURE	TERM	Y2008	Y2009	Y2010	...
1	VALN	DEF	0	1	0,938718	0,482895	
1	ZCB	PRICE	1	0,962226	0,962521	0,966356	
1	ZCB	PRICE	2	0,92648	0,925968	0,933091	...
1	ZCB	PRICE	3	0,89163	0,890322	0,900345	
1	ZCB	PRICE	4	0,857651	0,855665	0,868206	
1	ZCB	PRICE	5	0,824615	0,822035	0,836746	
...					...		
1	ZCB	PRICE	28	0,321604	0,317286	0,33726	
1	ZCB	PRICE	29	0,308776	0,304557	0,324044	
1	ZCB	PRICE	30	0,296473	0,292354	0,311346	
1	EQUITY	RNY_PC	0	2,54164	2,65054	0,865443	
1	EQUITY	RET_IDX	0	1	1,078132	1,672004	...
1	EQUITY	GTH_IDX	0	1	1,050764	1,60084	
1	INFLN	INFLN_IDX	0	1	1,01047	1,032085	
...					...		...

Déflateurs

Prix des ZC nominaux

Indice « actions »

Indice d'inflation

Dépendances

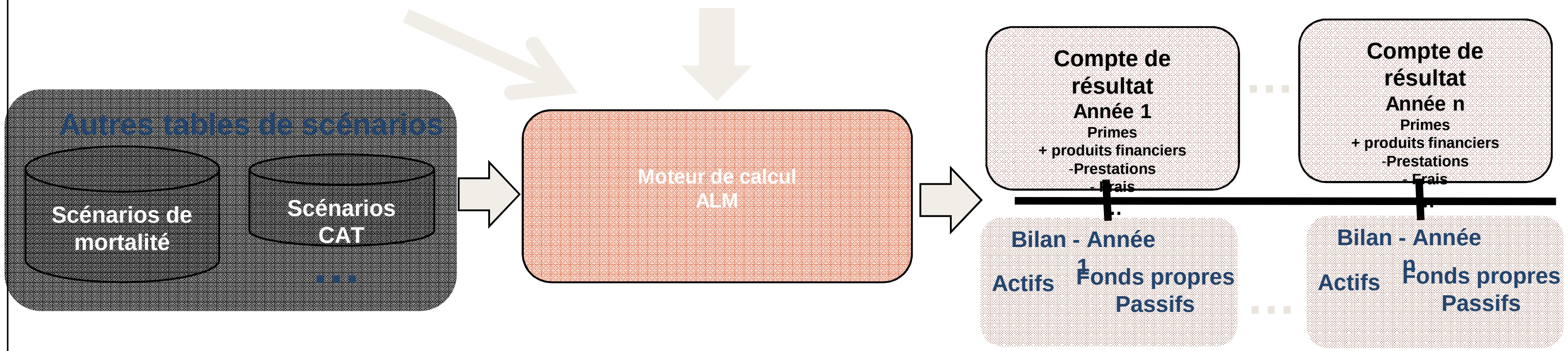
Hypothèses générales

Model Points de passifs (Age, sexe, PM,…)

Paramètres produits (garanties, prix, …)

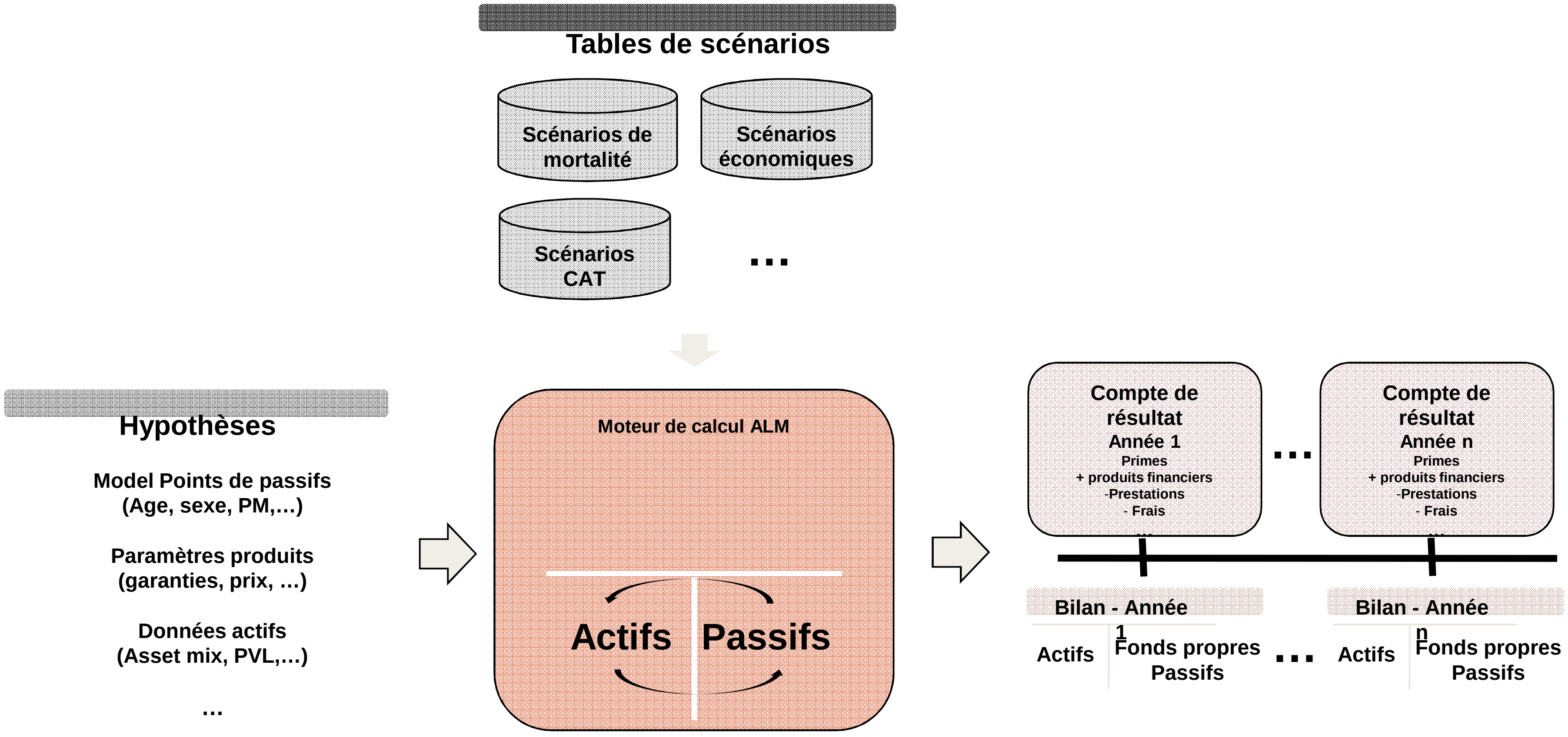
Données actifs (Asset mix, PVL,…)

…



Comment se pose la problématique de la dépendance ?

Illustration du Cas B : dépendance par « mécanique ALM »



Interactions mécaniques « actifs / passifs »

Exemple : PB, rachats dynamiques,…

Comment se pose la problématique de la dépendance ?

Du phénomène de dépendance à l'agrégation « bottom-up » des risques

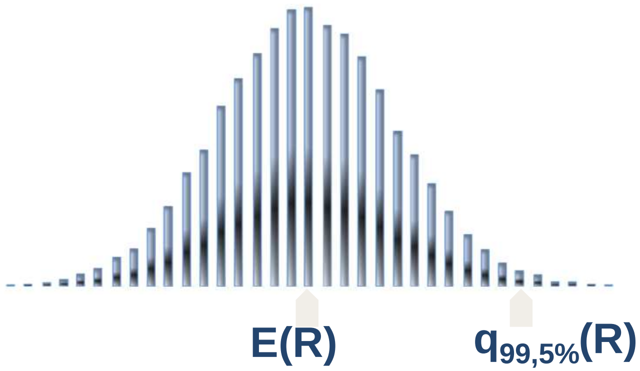
- Dans la littérature, les techniques d'agrégation des risques font très souvent référence à la théorie des copules
- Cette méthodologie revient implicitement à considérer une variable aléaloire « risque global » correspondant à une somme de risques :

Risque global ← $$\underbrace{R = R_1 + \ldots + R_i + \ldots + R_n}$$

Risque « i »

R est la somme de n risques corrélés

- En estimant à la fois les marginales et la copule du vecteur $R=(R_1, \ldots, R_n)$ le capital économique est estimé comme suit :



$$\Rightarrow \quad C = q_{99,5\%}(R) - E(R)$$

Dépend de la copule et des marginales

Ne dépend que des marginales

Comment se pose la problématique de la dépendance ?

Du phénomène de dépendance à l'agrégation « bottom-up » des risques

- En pratique, une telle décomposition des risques n'est pas automatique
- Par exemple, comment mettre en œuvre cette méthodologie pour agréger un risque actions avec un risque taux ?
  - En toute rigueur, il faudrait pouvoir écrire :

$$FP_1 = \underbrace{FP_1^{Actions}}_{\text{Composante des fonds propres économiques sensible uniquement au risque actions}} + \underbrace{FP_1^{taux}}_{\text{Composante des fonds propres économiques sensible uniquement au risque taux}} \qquad (*)$$

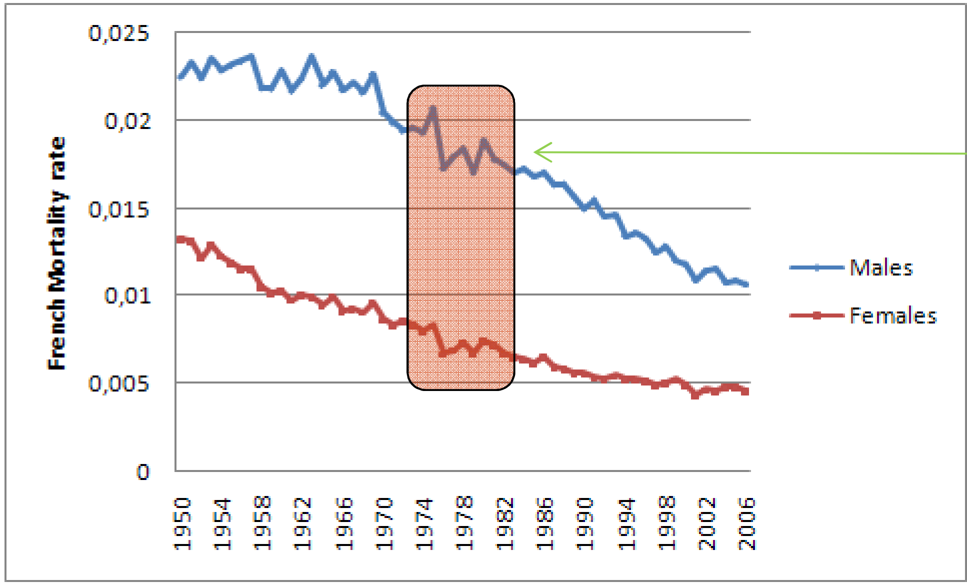
Composante des fonds propres économiques sensible uniquement au risque actions

Composante des fonds propres économiques sensible uniquement au risque taux

  - Etudier les distributions marginales $FP_1^{Actions}$ et FP_1^{taux}
  - Etudier la copule du vecteur $(FP_1^{Actions}, FP_1^{taux})$
  - En déduire une estimation de $q_{0,5\%}(FP_1)$
- Remarques :
  - La décomposition (*) n'est pas toujours assurée,
  - Comment procéder dans le cas contraire ?

Corrélations des taux de mortalité Hommes / Femmes
Introduction

- Une très forte dépendance des taux de mortalité hommes / femmes :



Corrélations Homme-Femmes: ***une augmentation du taux de mortalité des hommes correspond à une augmentation du taux de mortalité des femmes***

- Possibilité de modéliser les corrélations avec tous les modèles de mortalité stochastique mais dans la suite nous nous concentrons uniquement sur la modélisation à partir du modèle de Lee-Carter

Corrélations des taux de mortalité Hommes / Femmes

Méthodologie générale

- Structure du modèle de Lee-Carter:

$$\log \mu^S(x,t) = \beta_{1,x}^S + \beta_{2,x}^S \boxed{k_t^S} \quad avec \quad S \in \{M, F\}$$

Effet Période lié à une série temporelle

$$k_{t+1}^S = k_t^S + c^S + \sigma^S \times \varepsilon_{t+1}^S$$

$$\boxed{\varepsilon_{t+1}^S} \to N(0,1)$$

- Mesurer les corrélations entre les taux de mortalité des hommes et des femmes revient à étudier la structure de dépendance du couple de bruits

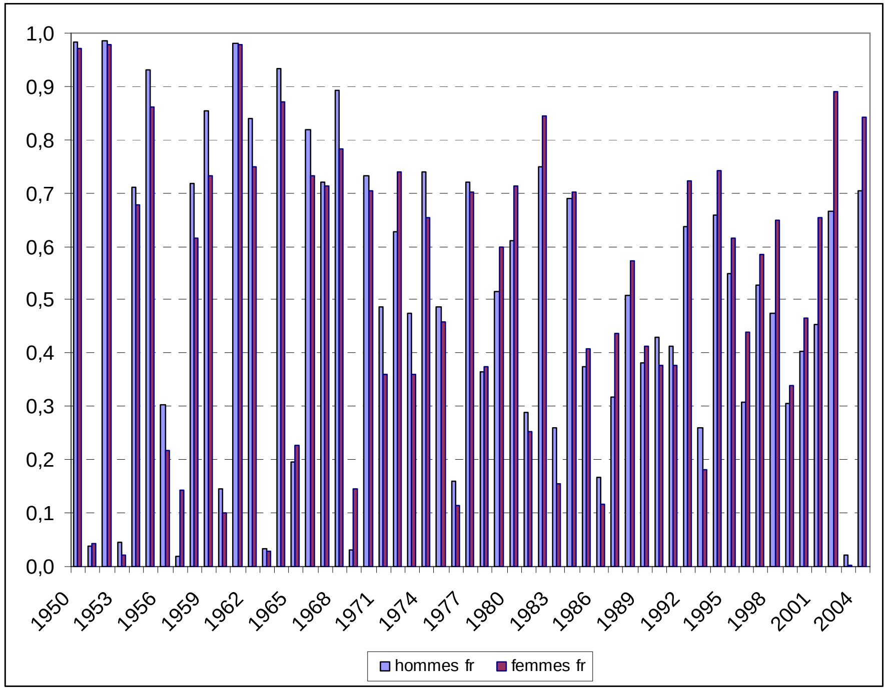
$$\left(\varepsilon^M, \varepsilon^F\right) \quad \text{en supposant } \forall t, \left(\varepsilon_t^M, \varepsilon_t^F\right) \overset{L}{=} \left(\varepsilon^M, \varepsilon^F\right)$$

- Nécessaire d'utiliser la théorie des copules afin de modéliser les dépendances
- Il est ainsi possible de simuler conjointement les taux de mortalité des hommes et des femmes

Corrélations des taux de mortalité Hommes / Femmes

Mesure

- Données:
  - Source Human Mortality Database
  - Populations des hommes et des femmes de trois pays: France, Angleterre&Pays de Galle, USA
  - Estimation sur une période de 1950 à 2005 pour une population âgée de 30 à 105 ans.
- Observations



Bruits Hommes/Femmes(France)

	ρ Pearson	τ Kendall
France	95,2%	79,9%
England & Wales	91,3%	73,6%
USA	84,2%	67,9%

Très fortes corrélations entre les couples de bruits = Phénomène de dépendance

Corrélations au sein des scénarios économiques

- Rappels : modélisation du taux court nominal HW et de l'indice action
  - Taux court nominal : $r_{t+\Delta t} = x_{t+\Delta t} + \alpha_{t+\Delta t}$ avec $x_{t+\Delta t} = x_t(1-a\cdot\Delta t)+\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\times N^r(0,1)$
  - Indice Action : $$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(r_t - q - \frac{\eta^2}{2}\right)\Delta t + \eta\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot N^A(0,1)\right)$$

-> l'aléa de chacun des modèles provient des lois normales $N^r(0,1)$ et $N^A(0,1)$

- Principe : corréler les différents drivers économiques (taux et action) par l'intermédiaire des mouvements browniens des diffusions
- Les accroissements des browniens des diffusions action et taux court sont générés conjointement :

$$x_{t+\Delta t} = x_t(1-a\cdot\Delta t)+\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\times N^r(0,1)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(r_t - q - \frac{\eta^2}{2}\right)\Delta t + \eta\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot\left(\rho.N^r(0,1)+\sqrt{1-\rho^2}.N^{\perp}(0,1)\right)\right)$$

« Dépendance » action / taux

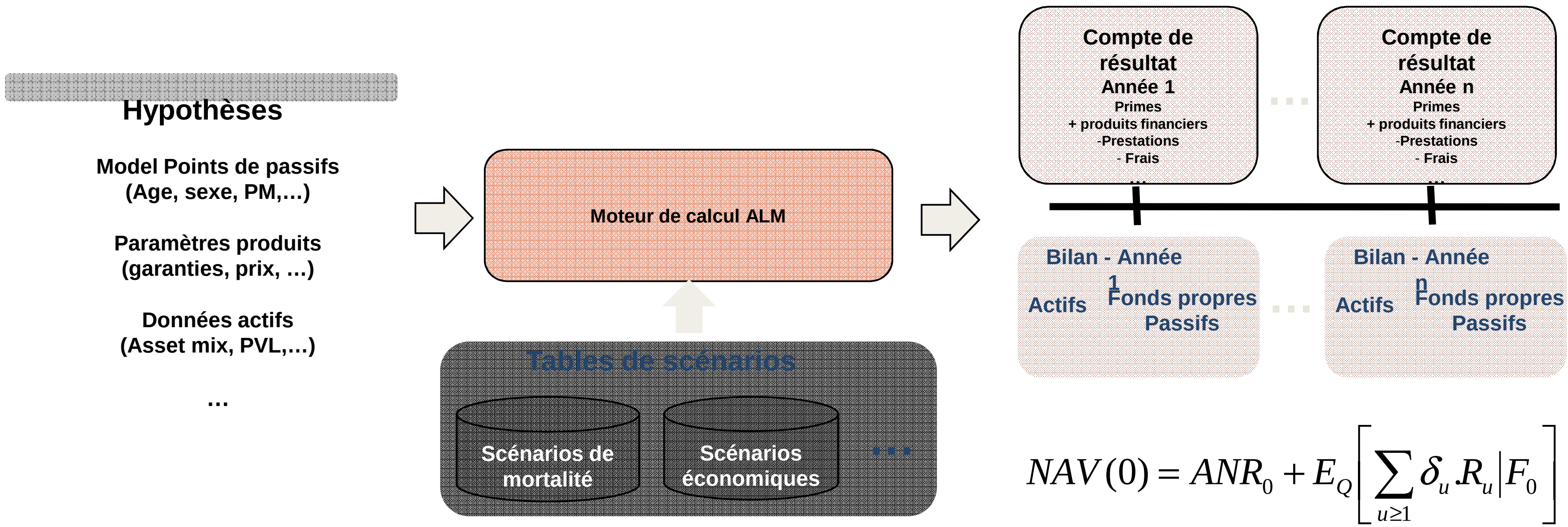
Corrélation des browniens

Sommaire

- Rappels : le capital économique Solvabilité
- La modélisation des risques
- La prise en compte des dépendances
- Techniques d’agrégation des risques
- Comparaison de l’agrégation des risques « formule standard » vs « modèle interne »
- ORSA et solvabilité à T années
- Robustesse d’estimation du capital économique

Structure d’un modèle BE « formule standard »

- Principe : projection des cash-flows définis par les données assurés, les paramètres des contrats, les données de l’Actif, les hypothèses non économiques (démographie…), et les hypothèses économiques (taux d’intérêt, rendements action)
- Remarque : modèle permettant de valoriser de manière « market consistent » les postes du bilan **en t=0 uniquement**

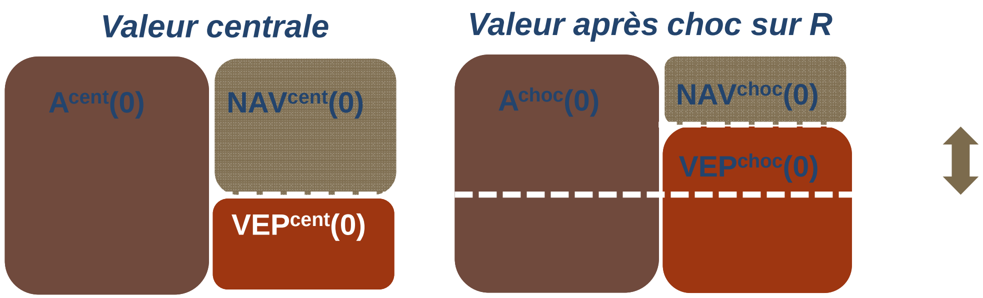


$$NAV(0) = ANR_0 + E_Q\left[\sum_{u\geq 1} \delta_u . R_u \middle| F_0\right]$$

L’approche bottom-up de la formule standard

Etapes de calcul

- L’approche formule standard repose sur trois étapes fondamentales :
  - Etape 1 : détermination d’un capital économique pour chaque « risque élémentaire » (ex. actions, taux, mortalité,…)
  - Etape 2 : agrégation des capitaux au sein de chaque module de risques (marché, vie, non-vie, …) -> agrégation intra-modulaire
  - Etape 3 : agrégation des capitaux des différents modules -> agrégation inter-modulaire
- Etape 1 : le capital économique correspond à la différence en t=0 entre la NAV centrale et la NAV choquée
  - Exemple calcul du capital associé au risque R :



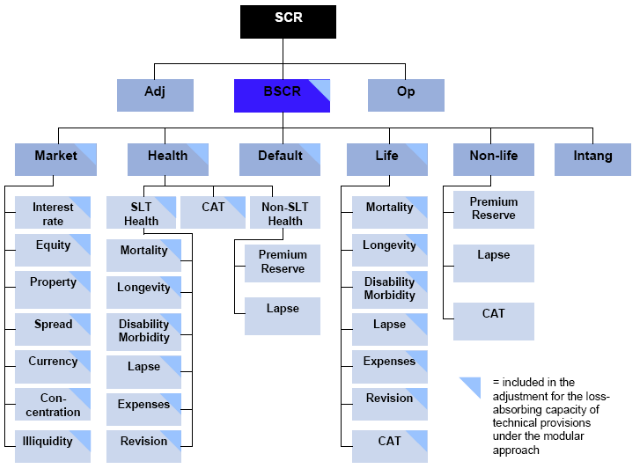
$$C_R = NAV^{cent}(0) - NAV^{choc}(0)$$

  - Les chocs instantanés sont homogènes à des déviations extrêmes (i.e. de seuil 0,5% ou 99,5% selon le « sens » du risque) sous la probabilité physique

L'approche bottom-up de la formule standard

Etapes de calcul

- Etape 2 et 3 : agrégation des capitaux à l'aide de matrices de corrélations



Agrégation inter-modulaire

Capital global (avant risque op et ajustements)

Capital associé au module « i »

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j)\in M^2} \rho_{i,j}^{M} . SCR_i . SCR_j}$$

Agrégation intra-modulaire

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j)\in R_m^2} \rho_{i,j}^{R_m} . C_i . C_j}$$

Capital associé au module « m »

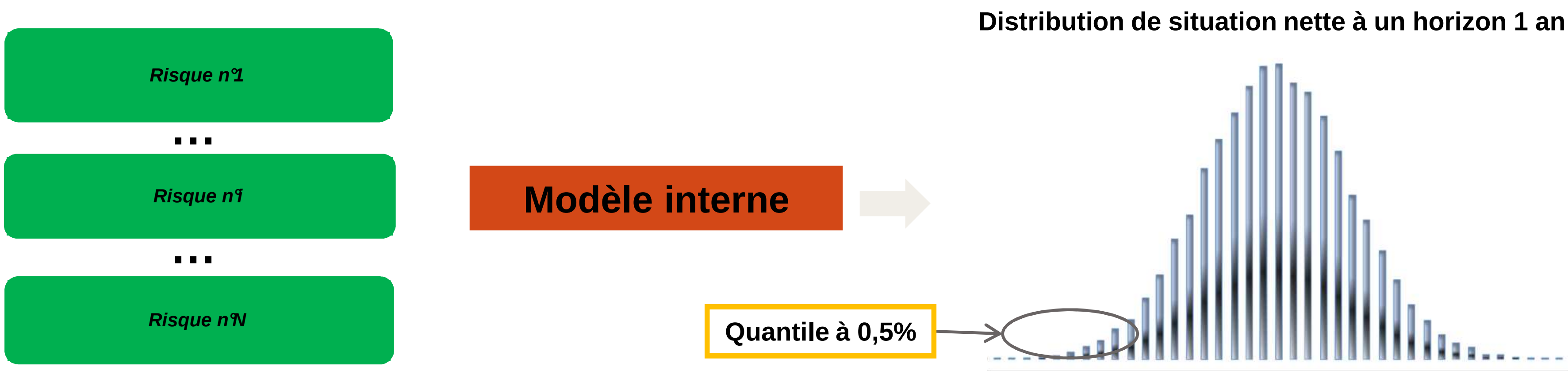
Capital associé au risque élémentaire « i »

- Remarques :
  - Calculs effectués en t=0 : approximation du critère SII « ruine économique en t=1 »
  - La diversification s'apprécie « a posteriori »
  - Possibilité de calibrer des paramètres de chocs et corrélations « entity specific »

Le modèle interne : une approche intégrée

Principe général

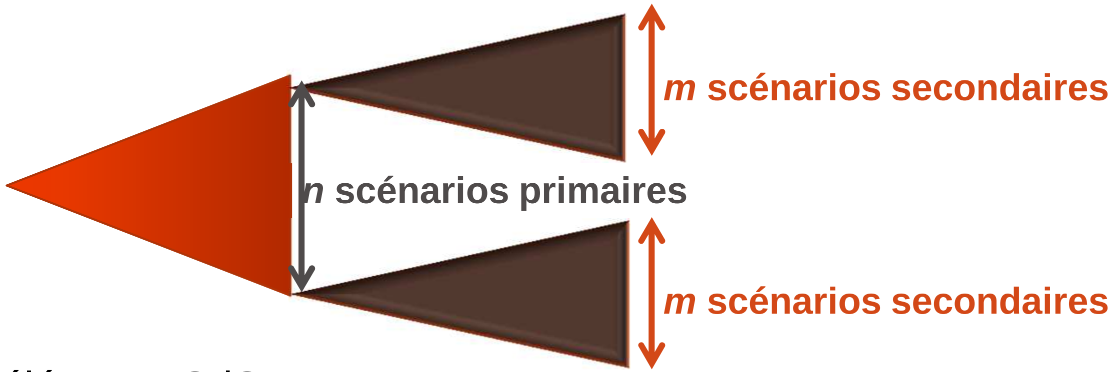
- Principes:
  - Calculer le capital économique revient à obtenir une distribution de situation nette = 1
  - L'actif est calculé en valeur de marché et la valeur économique des passifs à la date t correspond au « prix » de ces passifs vu en t
- Un modèle interne permet d'intégrer l'ensemble des risques de la compagnie afin de calculer la distribution de situation nette globale à horizon 1 an
  - Le modèle interne permet donc d'obtenir une distribution de bilans économiques en fin de première année
  - L'agrégation des risques est effectuée « automatiquement » au sein du modèle



Le modèle interne : une approche intégrée

Différentes méthodologies de modélisation

- Les Simulations dans les Simulations (SdS)
  - Principe : en fin de première année -> obtention du bilan économique pour chacun des n scénarios primaires. Pour cela, m nouveaux scénarios « market consistent » issus de chaque scénario primaire doivent être réalisés
  - Manière la plus directe pour obtenir la distribution de situations nettes à un horizon 1 an



- L'accélérateur SdS
  - Méthodologies permettant de calculer essentiellement les scénarios les plus adverses en termes de solvabilité
- Les Replicating portfolios
  - Recherche du portefeuille d'actifs qui réplique le mieux les cash-flows de passifs pour chaque simulation et chaque période future

Replicating Portfolios

Principes Généraux

- Un « portefeuille répliquant » (RP) est un portefeuille d'actifs qui reproduit les cash flows de passif pour chaque simulation et chaque date future
- Ainsi, pour chaque simulation et chaque date future, l'équation suivante est vérifiée :

Valeur du portefeuille répliquant = Valeur économique des Passifs

- Le RP peut être utilisé comme un proxy des passifs
  - La valeur du RP peut être déterminée rapidement à chaque date future grâce à l'utilisation de formules fermées -> pas besoin de projeter les passifs pour évaluer leurs valeurs économiques
- Le recourt aux RP permet de projeter le bilan -> technique très rapide

Replicating Portfolios

Mise en Œuvre (1/2)

- La procédure utilisée pour mettre en place le portefeuille répliquant est la suivante :
  - Etape 1 : construction de scénarios économiques
    - Selon les cas il s'agit de scénarios risque-neutre ou monde-réel
  - Etape 2 : sur la base des scénarios obtenus à l'étape 1 -> projections ALM pour obtenir les cash flows de passif pour chaque période de projection et chaque simulation
  - Etape 3 : sélection des actifs candidats (et des paramètres nécessaires à leur calibration)
  - Etape 4 : calcul de l'asset-mix du RP à partir d'une régression linéaire visant à minimiser l'écart entre les cash-flows du RP et les cash-flows du passif
    - Le calibrage peut être effectué à partir de VAN de cash-flows ou de cash-flows agrégés par « time buckets »
    - Des contraintes sont intégrées au programme d'optimisation de manière à garantir pour différents chocs une proximité entre la valeur du BE et celle du RP
  - Etape 5 : validations détaillées -> mesure de la qualité d'ajustement « RP/Passif »
    - Ces tests sont réalisés le plus souvent sur les VAN de cash flows
  - Etape 6 : calcul du capital économique
    - Les fonds propres de la compagnie sont calculés comme la différence entre la valeur de marché de l'actif et la valeur du portefeuille répliquant
    - Remarque : Les calculs sont effectués en appliquant des chocs sur les conditions économiques en date initiale t=0 ou en fin de première année pour chaque simulation primaire (calcul à chaque nœud)

Replicating Portfolios

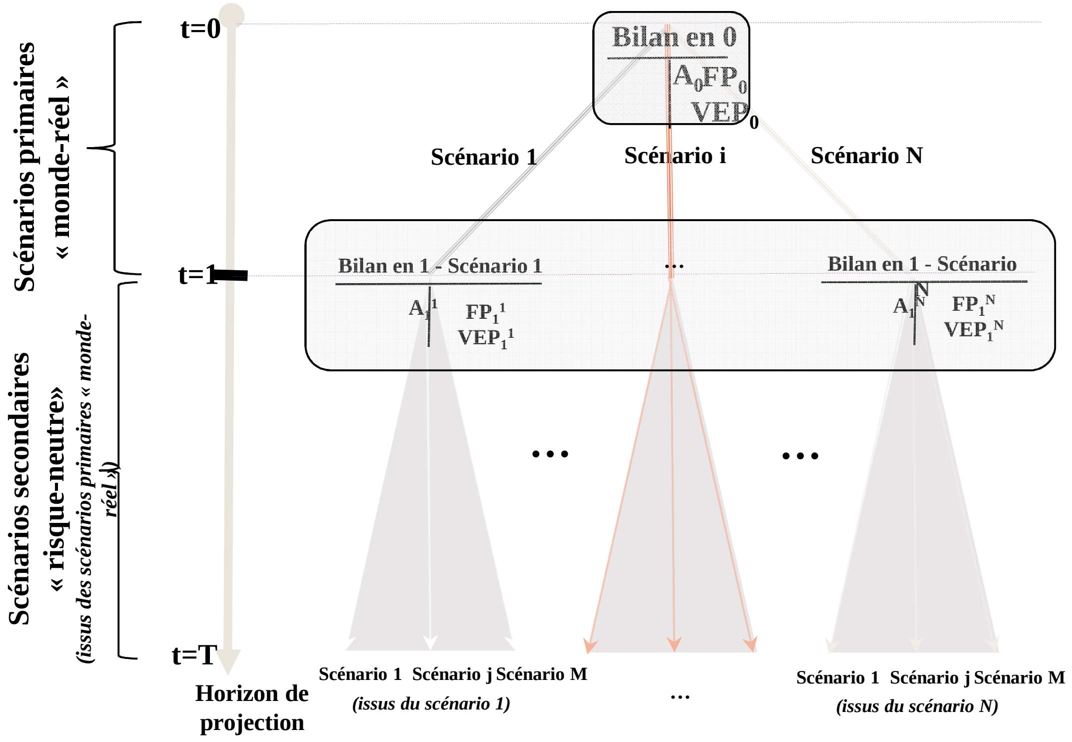
Remarques

- Lorsque le calibrage s'effectue à partir de cash-flows risque-neutre -> l'utilisation du RP en univers monde-réel pour le calcul du capital économique peut soulever des problèmes de robustesse
  - Ceci induit en général d'importantes erreurs de réplication car les résultats d'une régression linéaire ne se « transportent pas d'un univers à l'autre »

- Différents tests d'ajustement peuvent être menés :
  - Cas1 : sur les cash-flows du RP et ceux du passif
    - Pour chaque simulation, déroulement des cash-flows du RP et de ceux du passif jusqu'à l'horizon de projection -> obtention du couple des VAN
  - Cas 2 : sur la valeur de marché du RP et le Best Estimate des passifs
    - Pour différents chocs en première période (ou en t=0), calcul du BE à l'aide de simulations risque-neutres et de la valeur du portefeuille répliquant -> obtention d'un couple de valeurs pour chacun des chocs considérés
  - A partir du nuage de points obtenu, dans chacun des cas -> calcul du R^2 mesurant la qualité de l'ajustement
  - Remarque : le test 2 est beaucoup plus robuste
- La sélection des actifs candidats ne dépend pas d'une méthodologie automatisée, elle résulte de l'expertise de l'utilisateur qui doit choisir et paramétrer les « bons » actifs
- L'objectif étant d'estimer un quantile sur NAV -> il apparaît plus robuste de travailler directement sur les VAN de marges plutôt que les VAN de cash-flows de passifs
  - Un écart minime en termes de BE peut s'avérer significatif à l'échelle des fonds propres économique
- Question : comment agréger les risques non réplicables ?

La méthodologie SdS

Obtention de la distribution de situation nette à 1 an



- Sur la première période
  - Simulation de toutes les variables financières et techniques
- En fin de première période
  - Pour chaque simulation primaire :
    - Construction de scénarios secondaires conditionnés par le réalisé de première période
    - Calculs ALM basés sur chaque jeu de simulations secondaires jusqu'à un horizon fixé (par exemple pendant 30 ans)
  - Calcul des moyennes empiriques permettant l'estimation des valeurs économiques du passif à la fin de la première période
  - Détermination de la situation nette à la fin de la première période

La méthodologie SdS
Limites et pistes d'améliorations

- Temps de calcul machine très long
  - Complexité informatique en NxM
    - N = nombre de simulations de première période
    - M = nombre de simulations de seconde période

- Remarque : l'objectif d'un calcul SdS est de calculer le quantile à 0,5% de la distribution des fonds propres économiques de fin de première période
  - Ainsi pour un run basé sur 5000 simulations primaires, on retient la 25ième « pire valeur » de la NAV(1)

- Conclusion : il n'est donc pas nécessaire de disposer de toute la distribution des fonds propres économiques

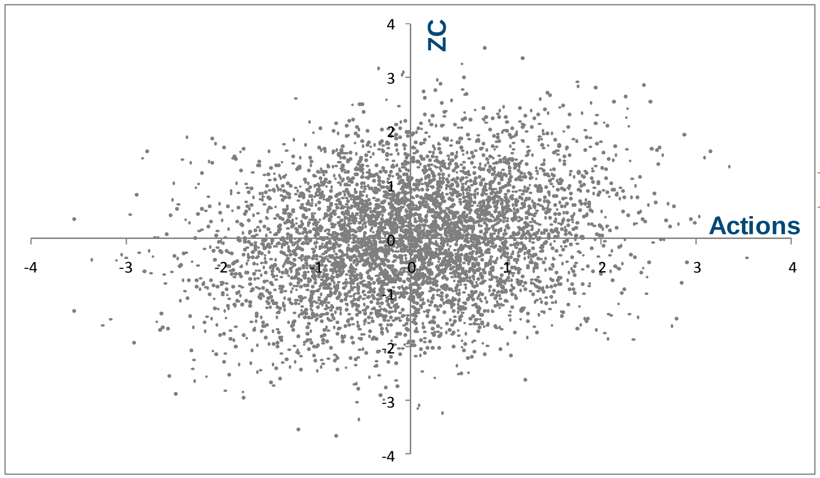
Idées clé

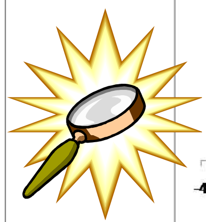
Principe de la méthode

- Construction d'une méthodologie de décision automatique « accélérateur SdS » permettant de simuler les scénarios primaires les plus adverses en termes de solvabilité

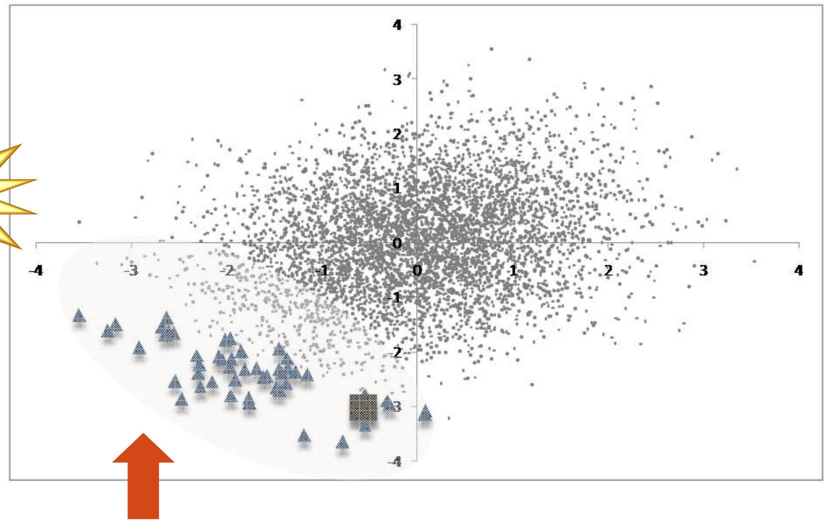
-> sans effectuer un jeu complet de simulations

Approche « SdS exhaustif »
- Toutes les situations sont calculées -





Approche « Accélérateur SdS »
- Calcul des scénarios sélectionnés -



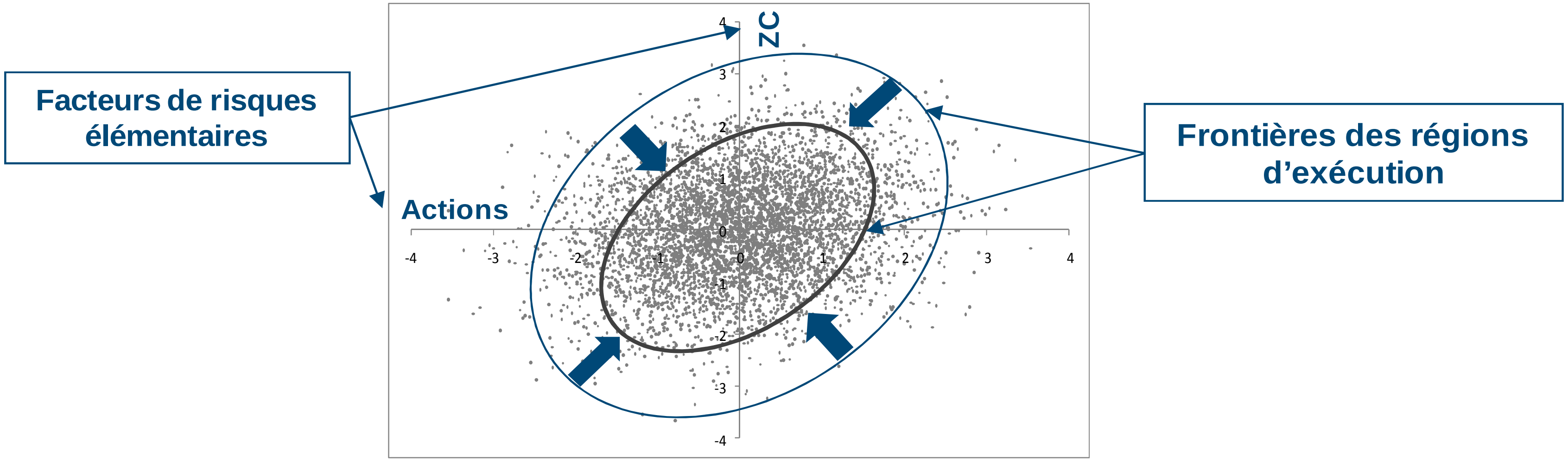
Région à explorer

Idées clé

Séquencement des calculs

Les étapes de la méthode :

- Extraction de facteurs de risque élémentaires (actions, taux, mortalité, …) véhiculant l'intensité du risque de chaque simulation primaire
- Construction d'une région de confiance associée à un seuil fixé
  - Lorsque les facteurs de risque sont à l'extérieur de la région de confiance définie, les simulations primaires sont effectuées
- Itérations sur le seuil de la région de manière à exclure à chaque étape un nombre de points fixé
  - L'algorithme s'arrête lorsque les « pires valeurs » de la NAV(1) sont stabilisées
- Amélioration de l'accélérateur grâce à un régionnement et à l'application de sensibilités



Sommaire

- Rappels : le capital économique Solvabilité
- La modélisation des risques
- La prise en compte des dépendances
- Techniques d’agrégation des risques
- Comparaison de l’agrégation des risques « formule standard » vs « modèle interne »
- ORSA et solvabilité à T années
- Robustesse d’estimation du capital économique

Extraction de facteurs de risques et calculs SdS

Extraction de facteurs de risques

- Objectif : partant des scénarios de première période -> extraction des facteurs de risque élémentaires (Actions, ZC, mortalité, …) pour chacun des scénarios
  - les facteurs de risque élémentaires sont des bruits gaussiens centrés réduits (correspondant par exemple aux accroissements des browniens dans les diffusions pour les facteurs économiques)
- Remarque : les facteurs de risque élémentaires peuvent être stockés au moment de la génération des scénarios ou déterminés a posteriori
  - Dans le cas d'un calcul a posteriori des facteurs élémentaires de risques, on procède en deux étapes:
    - Etape 1 : estimation des paramètres des diffusions
    - Etape 2 : extraction des aléas
- Exemple: extraction des facteurs de risque élémentaires à partir d'une table monde-réel de scénarios économiques:

Facteur de risque actions de la simulation primaire « p »

$$\varepsilon^{p}{}_{actions} = \frac{X_p - \hat{E}[X]}{\hat{\sigma}(X)} \quad ; \quad avec \quad X = \ln\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right)$$

Facteur de risque taux pour la maturité « m » et la simulation primaire « p »

$$^{m}\varepsilon^{p}{}_{ZC} = \frac{Y_m^p - \hat{E}[Y_m]}{\hat{\sigma}[Y_m]} \quad ; \quad Y_m = \frac{P(1,m)}{P(0,m+1)} - \frac{1}{P(0,1)}$$

Facteur de risque taux pour la simulation « p » (toutes maturités confondues)

$$\varepsilon^{p}{}_{ZC} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} {}^{m}\varepsilon^{p}{}_{ZC}$$

Extraction de facteurs de risques et calculs SdS

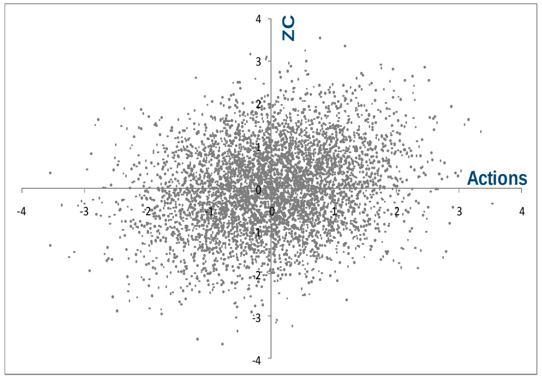
Extraction de facteurs de risques

- Après avoir extrait les aléas actions et taux pour chaque simulation, on dispose d'une matrice de bruits :

SIMULATION	CLASS	MEASURE	TERM	Y2008	Y2009	Y2010
1	ZCB	PRICE	1	0,962226	0,962521	0,966356
1	ZCB	PRICE	2	0,92648	0,925968	0,933091
...	...	...	...	...	...	...
1	ZCB	PRICE	29	0,308776	0,304557	0,324044
1	ZCB	PRICE	30	0,296473	0,292354	0,311346
1	EQUITY	RET_IDX	0	1	1,078132	1,672004
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
5000	ZCB	PRICE	1	0,962226	0,970687	0,972911
5000	ZCB	PRICE	2	0,92648	0,941293	0,945494
...	...	...	...	...	...	...
5000	ZCB	PRICE	29	0,308776	0,348016	0,36066
5000	ZCB	PRICE	30	0,296473	0,33473	0,347063
5000	EQUITY	RET_IDX	0	1	1,915461	2,032422

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon^{1}_{Action} & \varepsilon^{1}_{ZCB} \\ \dots & \dots \\ \varepsilon^{5000}_{Action} & \varepsilon^{5000}_{ZCB} \end{pmatrix}$$

Matrice de Bruits



- Construction de scénarios primaires :
  - il est possible, à partir d'un couple ($\varepsilon_{Actions}$, ε_{ZC}), de déduire un scénario primaire sous-jacent à l'aide des relations :

$$S_1 = S_0 . e^{\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}\varepsilon_{Actions}} \quad et \quad P(1, m-1) = P(0, m).\left(1 + \hat{r}(1)_m + \hat{\sigma}_m \varepsilon_{ZC}\right) \qquad (*)$$

- Notions de scénarios marginaux :
  - nous désignerons par scénarios marginaux du risque X, les simulations primaires pour lesquelles l'ensemble des aléas sont neutralisés excepté l'aléa spécifique à X
  - sous la modélisation précédente, la construction de scénarios marginaux repose sur les relations (*) et l'utilisation des bruits ci-dessous :
    - scénarios marginaux Actions -> ε_{ZC}=0
    - scénarios marginaux ZC -> $\varepsilon_{Actions}$=σ/2 (de manière à forcer un rendement égal à μ)

Extraction de facteurs de risques et calculs SdS

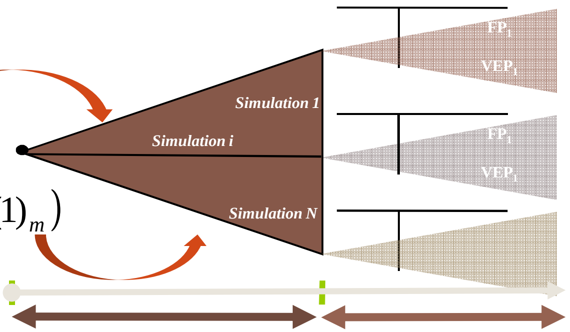
Calculs SdS

- Calcul SdS du capital global et des capitaux marginaux :
  - Capital global -> les simulations primaires contiennent l'ensemble des risques du modèle
  - Capital marginal au titre du risque *X* -> on utilise le jeu de scénarios marginaux permettant de neutraliser tous les aléas excepté l'aléa spécifique à X
- Exemple : ci-dessous un SdS marginal « actions »

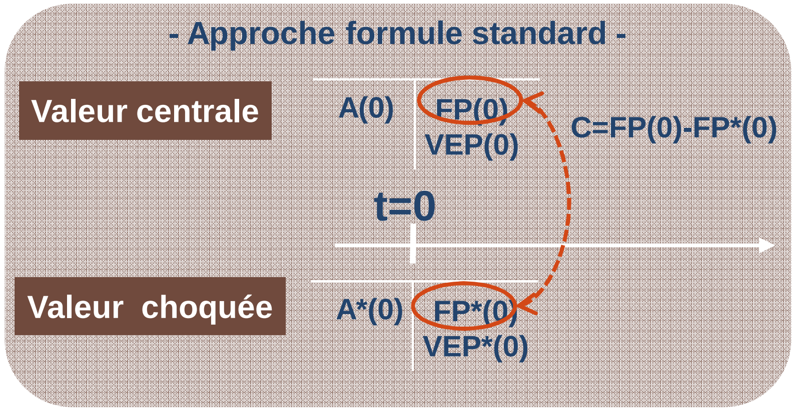
-> Seul l'aléa « actions » est projeté en première période
-> Le même scénario de taux est répété

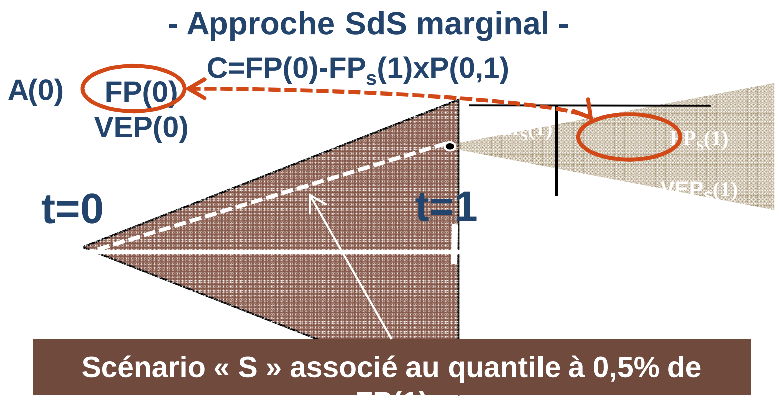
stochastique $S_1 = S_0 . e^{\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}\varepsilon_{Actions}}$

déterministe $P(1, m-1) = P(0, m).(1 + \hat{r}(1)_m)$



- Différence fondamentale entre SdS marginal et « formule standard » :





Extraction de facteurs de risques et calculs SdS

Calculs SdS

- Pour comparer objectivement les capitaux économiques « modèle interne » vs « formule standard » -> recours aux distributions de fonds propres économiques en *t=1* uniquement :

neutralisation des aléas

$$C = FP(1)_{centraux} - q_{0,5\%}\left(FP(1)\right)$$

quantile de la distribution de FP obtenue par SdS

- Cette approche permet :
  - Une modélisation conforme à l'optique « formule standard » qui compare à la même date (en *t=0*) les fonds propres économiques centraux et choqués
  - De se rapprocher de la définition du capital économique sous-jacente à la technique d'agrégation par formule standard -> pour démontrer rigoureusement cette relation, le capital doit correspondre à la différence entre l'espérance et le quantile d'une variable de risque

Analyse théorique de la méthodologie « formule standard »
Cas d'un risque stand-alone

- Objectif : déterminer dans quel cas le capital économique marginal SdS correspond à « l'approche chocs » QIS …

  … ou de manière équivalente : dans quel cas le quantile sur marginaux équivaut à la valeur des en le quantile du facteur de risque ?

- Formalisation : notons *X* le facteur de risque étudié et *f* la fonction « Fonds Propres »
  - Capital économique QIS :

$$C_{QIS} = FP_{centraux} - f\left(q_{0,5\%}(X)\right) \qquad \text{ou} \qquad C_{QIS} = FP_{centraux} - f\left(q_{99,5\%}(X)\right)$$

Quantile sur facteur de risque

  - Capital économique SdS :

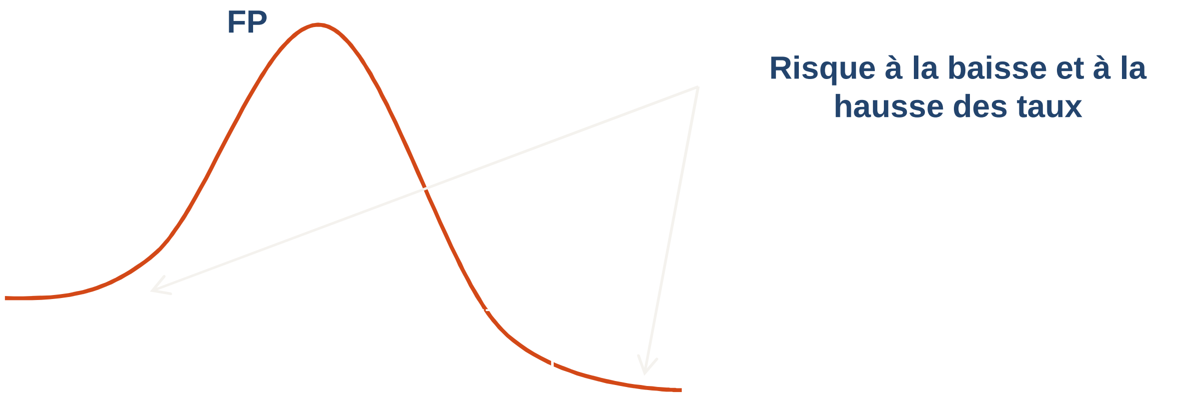
$$C_{SdS} = FP_{centraux} - q_{0,5\%}\left(f(X)\right)$$

Quantile sur FP

- Résultat :
  - Si f est croissante : $q_{0,5\%}\left(f(X)\right) = f\left(q_{0,5\%}(X)\right)$
  - Si f est décroissante : $q_{0,5\%}\left(f(X)\right) = f\left(q_{99,5\%}(X)\right)$
- Conclusion : sous l'hypothèse que les fonds propres économiques sont facteur de risque les deux approches sont équivalentes

Analyse théorique de la méthodologie « formule standard »
Cas d'un risque stand-alone

- Remarque : le résultat précédent reste vrai sous des hypothèses moins fortes
  - A titre d'exemple -> supposons que la fonction fonds propres :
    - soit décroissante au-delà du quantile à 99,5% du facteur de risque,
    - et prenne des valeurs plus élevées lorsque le facteur est inférieur au quantile à 99,5%
  - Sous ces hypothèses on a : $q_{0,5\%}\left(f\left(X\right)\right)=f\left(q_{99,5\%}\left(X\right)\right)$
- Ci-dessous une illustration dans le cas d'un portefeuille exposé à la hausse et à la baisse des taux :



- Conclusion : en d'autres termes lorsqu'un risque à la baisse (resp. à la hausse) est significativement prédominant par rapport à un risque à la hausse (resp. à la baisse), les approches « quantile sur FP » et « choc » sont équivalentes (sous réserve de décroissance des FP dans les extrêmes)

Analyse théorique de la méthodologie « formule standard »
Méthode d'agrégation des risques

- Objectif : déterminer le cadre théorique légitimant une agrégation des capitaux marginaux par matrice de corrélations
- Formalisation : supposons que la compagnie est exposée à deux risques *X* et *Y*
  - Rappel de la méthode QIS :
    - En notant C_X (resp, C_Y) le capital marginal au titre du risque X (resp, Y) on a

$$C_{global} = \sqrt{C_X^2 + C_Y^2 + 2.\rho_{X,Y}.C_X.C_Y} \qquad (*)$$

  - H1 : agréger au moyen du coefficient de corrélation linéaire impose de disposer d'une structure affine des FP, ie. de la forme : *FP= int + a.X+ b.Y*
  - H2 : pour établir l'égalité (*), il est nécessaire que les variables standardisées (i,e, centrées réduites) de FP, X et Y soient identiquement distribuées -> cette condition est assurée si *(X,Y)* est elliptique et si H1 est vérifiée
  - Sous H1 et H2, l'approche moyenne-variance de Markowitz conduit au résultat :

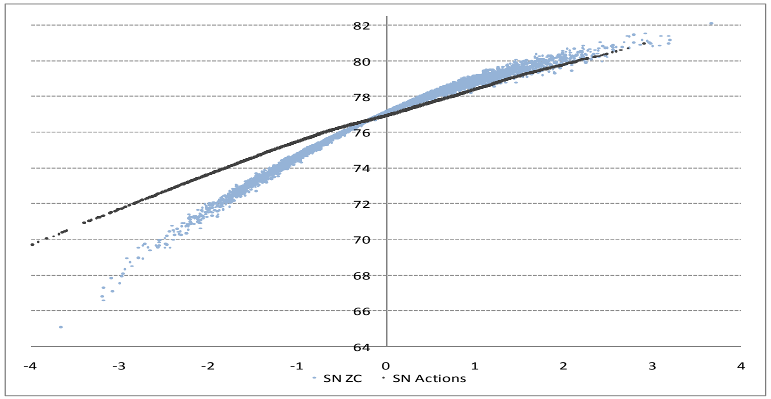
$$C_{global} = \sqrt{C_X^2 + C_Y^2 + 2.\rho_{X,Y}.sg(a.b).C_X.C_Y}$$

- Remarque : si *a* et *b* sont de même signe, on retrouve la relation (*)

SdS vs formule standard

Etude du profil des fonds propres

- Question : les FP sont-ils affines en les facteurs de risques actions et zéro-coupon ?
- En neutralisant alternativement le risque actions et ZC -> obtention des distributions marginales de FP
- Résultat : dans grand nombre de modèles internes, les profils des FP marginaux sont monotones en les facteurs de risques :
  - Remarque : lorsque ce n'est pas le cas l'hypothèse de prédominance est satisfaite



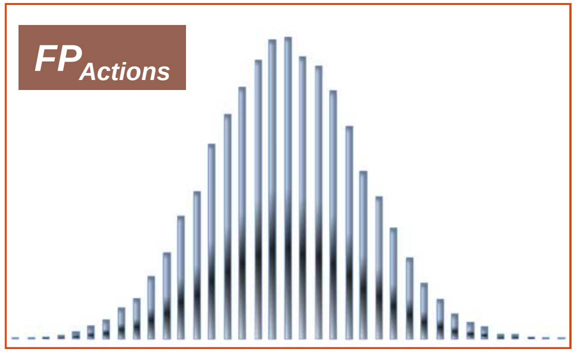
- En général les profils des FP marginaux ne sont pas affines

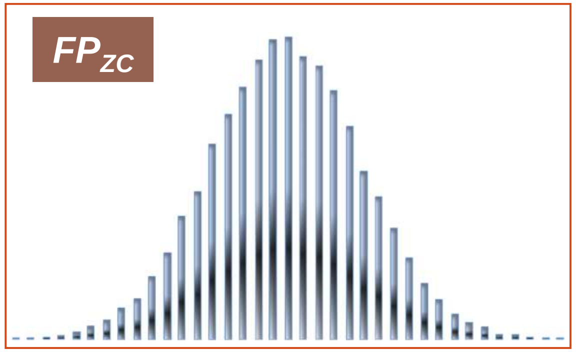
-> l'hypothèse H2 n'est donc pas vérifiée

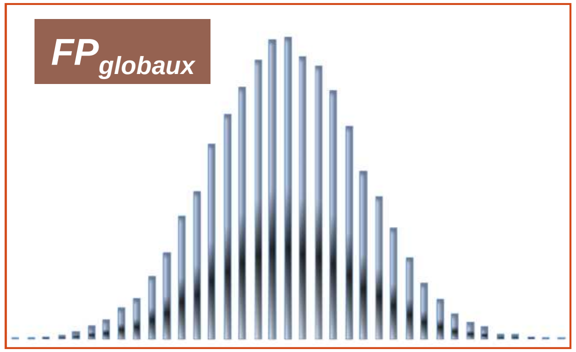
SdS vs formule standard

Calcul du capital global et des capitaux marginaux

- L'analyse des distributions issues du modèle interne permet de déterminer le capital global et les capitaux marginaux :







$C_{Actions}$ C_{ZC} C_{global}

$$C_{ag} = \sqrt{C_{Actions}^2 + C_{ZC}^2 + 2.\rho_{Actions,ZC}.C_{Actions}.C_{ZC}}$$

En général -> écarts substantiels

- Pourquoi la méthode d'agrégation est-elle mise en échec le plus souvent ?

-> la structure des FP est en général non-affine en les facteurs de risques

SdS vs formule standard

Analyse des écarts de la méthodologie d'agrégation

- L'analyse des fonds propres globaux conduit à la décomposition suivante :

$$FP_{globaux} = FP_{Actions} + FP_{ZC} + FP_{prod}$$

- Avec :

$$\left.\begin{aligned} FP_{Actions} &= f\left(\varepsilon_{Actions}\right) \\ FP_{ZC} &= g\left(\varepsilon_{ZC}\right) \end{aligned}\right\}$$

Fonctions FP monotones (ou sinon propriété de prédominance vérifiée) en les facteurs de risques

$$FP_{prod} = h\left(\varepsilon_{Actions}, \varepsilon_{ZC}\right) \Rightarrow$$

Fonction FP contenant des effets croisés de type « $\varepsilon_{Actions}$ x ε_{ZC} »

- Remarque : $FP_{globaux}$ est affine en le vecteur ($FP_{Actions}$, FP_{ZC}, FP_{prod}), Si ce dernier est elliptique, les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites et on peut appliquer la formule d'agrégation sur les variables ($FP_{Actions}$, FP_{ZC}, FP_{prod})

- Notons R la matrice de corrélation de l'ensemble de ces variables :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{FP_{Actions}, FP_{ZC}} & \rho_{FP_{Actions}, FP_{prod}} \\ \rho_{FP_{Actions}, FP_{ZC}} & 1 & \rho_{FP_{ZC}, FP_{prod}} \\ \rho_{FP_{Actions}, FP_{prod}} & \rho_{FP_{ZC}, FP_{prod}} & 1 \end{pmatrix}$$

SdS vs formule standard

Analyse des écarts de la méthodologie d'agrégation

- Possibilité de calculer un capital économique C_{prod} lié à la variable FP_{prod}
  -> on dispose donc d'un triplet de capitaux « stand-alone » : $\left(C_{Actions}, C_{ZC}, C_{prod}\right)$

- Observation fondamentale : une méthodologie QIS ne permet pas d'intégrer les effets croisés (termes figurant dans FP_{prod}) car elle revient à effectuer des stress-tests sur un facteur et à neutraliser les autres.

- Exemple : le cas du choc actions

$$\begin{aligned} FP_{globaux}^{centraux} - FP_{globaux}^{stress\ Actions} &= FP_{Actions}^{centraux} - FP_{Actions}^{stress\ Actions} + \underbrace{FP_{ZC}^{centraux} - FP_{ZC}^{stress\ Actions}} + \underbrace{FP_{prod}^{centraux} - FP_{prod}^{stress\ Actions}} \\ &= FP_{Actions}^{centraux} - FP_{Actions}^{stress\ Actions} \\ &= C_{Actions} \end{aligned}$$

- Formules d'agrégation sous-jacentes :
  - Approche QIS -> $C_{QIS} = \sqrt{C_{Actions}^2 + C_{ZC}^2 + 2.\rho_{FP_{Actions}, FP_{ZC}}.C_{Actions}.C_{ZC}}$
  - Intégration des termes croisés :

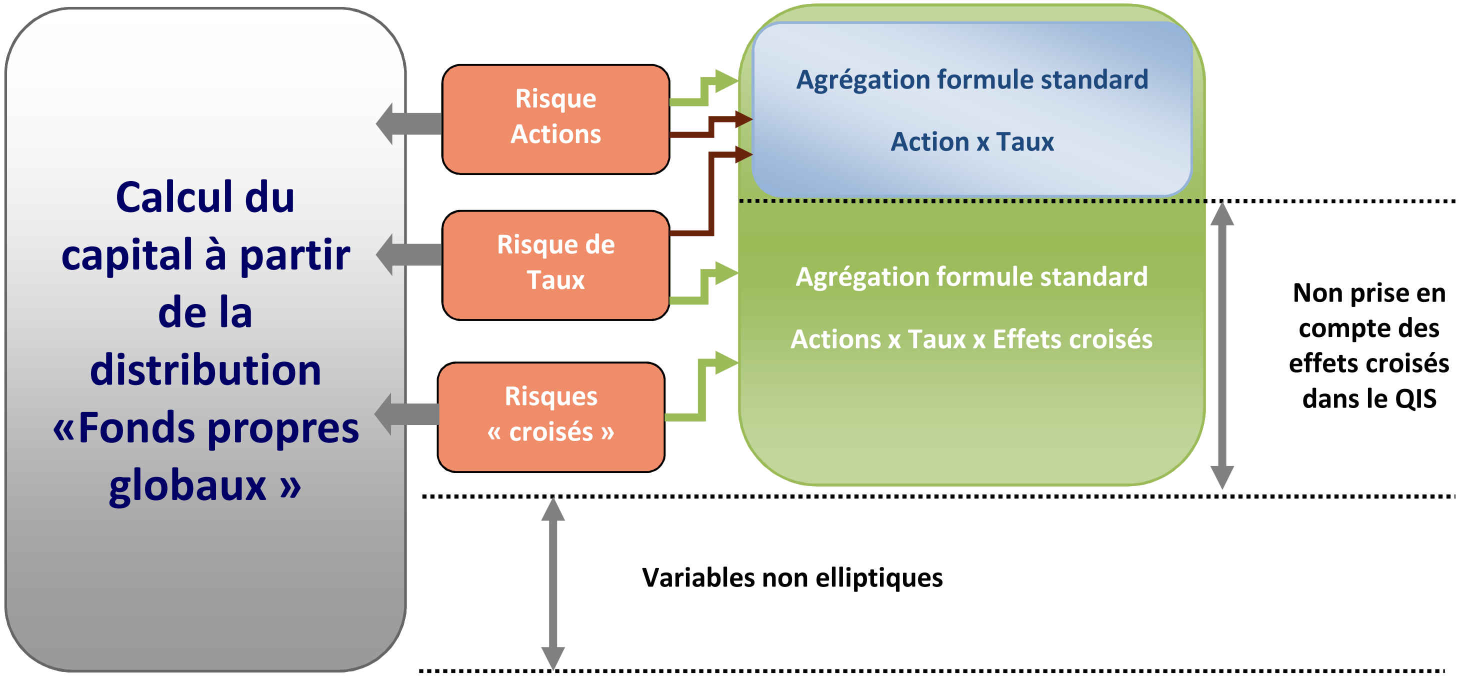
$$C_{global}^{AgRisk} = \sqrt{C_{Actions}^2 + C_{ZC}^2 + 2.\rho_{FP_{Actions}, FP_{ZC}}.C_{Actions}.C_{ZC} + \boxed{C_{prod}^2 + 2.\rho_{FP_{Actions}, FP_{prod}}.C_{Actions}.C_{prod} + 2.\rho_{FP_{ZC}, FP_{prod}}.C_{ZC}.C_{prod}}}$$

SdS vs formule standard

Analyse des écarts de la méthodologie d'agrégation

- Remarque : il peut subsister un écart entre le « capital modèle interne » et le capital agrégé global (incluant les effets croisés).
  - Cet écart résiduel peut provenir de la nature non elliptique du vecteur $(FP_{Actions}, FP_{ZC}, FP_{prod})$

- Le diagramme suivant permet de synthétiser l'analyse des écarts :



Sommaire

- Rappels : le capital économique Solvabilité
- La modélisation des risques
- La prise en compte des dépendances
- Techniques d'agrégation des risques
- Comparaison de l'agrégation des risques « formule standard » vs « modèle interne »
- ORSA et solvabilité à T années
- Robustesse d'estimation du capital économique

ORSA et solvabilité à T année

- Notations :

FP_t : Fonds propres économiques en date t

SCR_t : *Solvency Capital Requirement* en date t

$RS_t = \frac{FP_t}{SCR_t}$: Ratio de solvabilité en date t

- Contrainte de solvabilité dans un cadre mono-périodique (approche réglementaire)
  - *Approche sous-jacente:* estimation du montant de Fonds propres nécessaire aujourd'hui pour être couvert contre le risque de ruine économique à 1 an avec une probabilité supérieure à 99,5%
  - *Contrainte :* $Solvabilité\ réglementaire \Leftrightarrow \mathbb{P}(FP_1 \geq 0) \geq 99{,}5\%$

- Contrainte de solvabilité dans un cadre ORSA :
  - Adaptation pluriannuelle (contrainte sur ruine économique)
    - *Approche possible* : estimation du montant de fonds propres nécessaire aujourd'hui pour être couvert contre le risque de ruine économique, sur l'intégralité de l'horizon retenu, avec probabilité p
    - Contrainte : $Solvabilité\ à\ T\ années \Leftrightarrow \mathbb{P}(\cap_{t=1}^{T}\{FP_t \geq 0\}) \geq p$
  - Modification de la variable risquée sous-jacente (contraintes sur impasses de solvabilité annuelles)
    - *Approche possible* : estimation du montant de fonds propres nécessaire aujourd'hui pour être couvert contre une impasse de solvabilité réglementaire (annuelle), sur l'intégralité de l'horizon retenu, avec une probabilité p
    - Contrainte : $Solvabilité\ à\ T\ années \Leftrightarrow \mathbb{P}(\cap_{t=1}^{T}\{RS_t \geq 100\%\}) \geq p$

- Problématique -> difficulté de calculer le niveau de tolérance globale afférent à ces deux dernières approches

→ Approche plus pragmatique, vérification de la contrainte sur certains scénarios de stress déterministes

Sommaire

Robustesse d'estimation du capital économique

Nombre de simulations et robustesse d'estimation

- Problématique : mesurer la robustesse de l'estimation du capital économique

  -> Questions : 5000 simulations sont-elles suffisantes ? Combien faut-il de simulations ?

- Comment procéder ?
  - Procédure bootstrap de la distribution de FP -> obtention de 50 000 simulations
  - Constitution de 10 groupes de 5000 scénarios et détermination des capitaux économiques globaux et marginaux pour chacun des groupes
- Résultats : écarts par rapport à C, $C_{Actions}$ et C_{ZC} calculés sur l'échantillon global

	C_{SN}	$C_{Actions}$	C_{ZC}
Groupe 1	1,7%	3,3%	5,9%
Groupe 2	3,8%	4,1%	1,3%
Groupe 3	0,6%	5,0%	1,8%
Groupe 4	2,6%	0,8%	0,0%
Groupe 5	2,9%	1,0%	2,6%
Groupe 6	0,0%	4,3%	2,0%
Groupe 7	0,3%	3,5%	5,2%
Groupe 8	1,9%	1,5%	0,3%
Groupe 9	7,7%	1,4%	2,2%
Groupe 10	0,1%	0,0%	4,3%

Robustesse d'estimation du capital économique

Nombre de simulations et robustesse d'estimation

- Conclusion:
  - On constate des écarts significatifs sur le capital global (7,7% pour le Groupe 9) mettant en évidence l'insuffisance du nombre de scénarios pour le calcul du quantile (10 000 scénarios seraient nettement préférables)

- Pistes d'amélioration -> utilisation de la théorie des valeurs extrêmes TVE pour le calcul du quantile de niveau 0,5%