Techniques de valorisation de portefeuilles et de calcul de capital économique en assurance-vie

Partie 1 – Valorisation de portefeuilles

Cours ENSAE - Année 2013 – 2014

Matthieu Chauvigny

Contact

- Matthieu Chauvigny
  - Risk Management AXA France
  - Manager équipe Modèles Solvabilité 2
  - matthieu.chauvigny@axa.fr

Sommaire

- L'Embedded Value
- Zoom sur les aspects techniques
  - Les générateurs de scénarios économiques
  - Exemple de valorisation par formule fermée
  - Les Variable Annuities
  - L'accélération des calculs de valorisation
    - Les techniques de réduction de variance
    - Le flexing

Introduction

Comment interpréter l'Embedded Value ?

- Bilan d'une entreprise = photographie du Patrimoine de l'entreprise d'assurance à une date donnée
  - Actif = Ensemble des biens (incorporels, mobiliers, immobiliers) de l'entreprise
  - Passif = Ensemble des dettes (vis-à-vis des actionnaires ou des membres fondateurs pour la partie des Fonds Propres et vis-à-vis des assurés pour la partie Provisions)

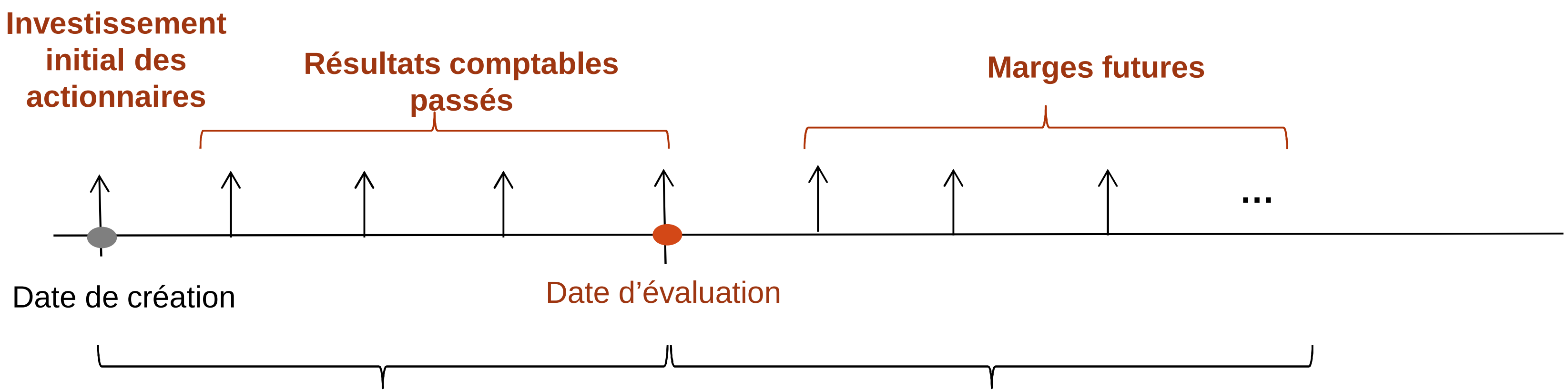
- Remarque : les fonds propres d'une société représentent la richesse accumulée par cette dernière
  - i.e. investissement initial des actionnaires + somme des résultats comptables enregistrés entre la date de création et la date d'évaluation

- Or, les contrats de la société considérée vont générer des résultats futurs qui ne figurent pas dans les fonds propres à la date d'évaluation (élément incorporel)

- Pour calculer la valeur d'une société, il convient donc d'ajouter la richesse passée à la richesse future, c'est précisément ce en quoi consiste l'Embedded Value

Introduction

Comment interpréter l'Embedded Value ?



Richesse passée	Richesse future
-> actif net réévalué	-> Valeur du portefeuille = PVFP (Present Value of Future Profits)
Retraitements	Valeur actuelle des marges futures

$$Valeur = \sum \frac{F_t}{(1+T_a)^t}$$

Marges

Taux d'actualisation

– Coût de blocage de la marge

Définitions

- L'Embedded Value correspond à la valeur des intérêts de l'actionnaire d'une compagnie d'assurance
- Concept utilisé depuis les années 90, adapté à l'assurance vie (très peu utilisé en non vie)
- Concept Européen majoritairement
- Grande hétérogénéité des méthodologies de calcul jusqu'au début des années 2000 :
  - Constitution d'un groupe de travail au sein du CFO Forum sur l'élaboration d'une méthodologie commune de calcul de l'EV
  - Premiers principes du CFO Forum publiés en 2004 (application au 31/12/2005)
  - Complétés par des dispositions sur les sensibilités à fournir (application 31/12/2006)
  - Nouveaux principes publiés en juin 2008 …
  - … Remplacés par des nouveaux principes publiés en octobre 2009 (application 31/12/2011). Autorisation d'une prime de liquidité

Définitions

- **Pourquoi calculer une Embedded Value ?**
  - Outil de **communication financière interne**
  - Base pour déterminer le prix d'une compagnie d'assurance dans le cadre de **transactions**
  - Outil de **communication financière externe :** aide les analystes à établir leur recommandations sur les titres d'assurance
  - Utilisé pour la comptabilité IFRS (annexe IFRS 7)

- **Dans quel environnement est calculée l'Embedded Value ?**
  - Avant la mise en place des principes du CFO Forum, calculs déterministes uniquement : on parlait d'EV traditionnelle
  - Depuis principes du CFO Forum, mix de calculs déterministes et stochastiques : on parle de EEV ou MCEV

Définitions

- L'Embedded Value est constituée des éléments suivants :
  - Actif Net Réévalué (ou ANR ou NAV)
  - Augmenté de la valeur de portefeuille (VIF, VBIF)
    - Diminuée du coût de blocage du capital (CoC)
- En environnement MCEV, la MCEV est la somme de :
  - VIF : il s'agit de la valeur générée par le stock de contrats.
  - Capital Requis : montant de capital que l'assureur est obligé de laisser en permanence pour exercer son activité. Il s'agit de l'assiette du coût de blocage du capital.
  - Free Surplus : il s'agit de la différence entre l'Actif Net réévalué et le Capital Requis. Ce montant pourrait être retiré de la compagnie par l'actionnaire à tout moment.
- Définition de la VIF en environnement MCEV. Il s'agit de la somme des éléments suivants :
  - PVFP : il s'agit de la valeur actuelle des profits futurs générés par le portefeuille de contrats calculée dans un scénario déterministe sans prime de risque.
  - TVFOG : il s'agit de la valeur temps des options et garanties financières.
  - CRNHR (Cost of Residual Non Hedgeable Risk): il s'agit du coût des risques résiduels non couvrables. C'est l'équivalent de la TVFOG mais pour les risques non couvrables.
  - CoC ou FCRC (Frictional Cost of Required Capital) : il s'agit du coût de blocage du capital requis

Valeur de portefeuille

- La valeur de portefeuille correspond à la valeur actuelle des résultats futurs générés par le portefeuille de contrats en stock à la date de valorisation :
  - On ne suppose pas de contrats vendus dans le futur
- Les résultats futurs sont obtenus en utilisant des modèles actuariels de projection (MoSes, Prophet, Excel, …)
- Les flux sont actualisés à la date de valorisation à l'aide du taux d'actualisation
  - En MCEV, utilisation du taux sans risque pour l'actualisation
- Ces modèles projettent le compte de résultat de la compagnie d'assurance

Valeur de portefeuille

- Pour obtenir ces comptes de résultat projetés, les modèles doivent être alimentés avec
  - Des données
  - Des paramètres techniques des contrats
  - Des hypothèses
- Données
  - Il s'agit des données police à la date de valorisation : données ligne à ligne ou plus ou moins agrégées (Model Point)
  - Principales données : âge, provision mathématique (PM), capital assuré, ancienneté, prime payée, échéance du contrat
  - Ces données sont extraites des systèmes de gestion de la compagnie

Valeur de portefeuille

- Paramètre techniques des contrats
  - Il s'agit de paramètres propres aux produits, contenus dans les notes techniques ou les conditions générales des contrats
    - Ex : taux technique ou taux garanti, chargement sur prime, chargement sur encours, % des produits financiers distribués, …
  - On utilise également les différentes conventions en vigueur avec les intermédiaires intervenants dans la commercialisation du contrat d'assurance (ex : rémunération des agents généraux ou des autres réseaux apporteurs d'affaires)
- Hypothèses
  - Différentes natures : hypothèses de sinistralité (sous forme de S/P ou de % d'abattement de tables de mortalité réglementaires), loi de rachat, hypothèses de frais, rendements financiers, taux d'actualisation
  - Elles doivent correspondre à une vision Best Estimate (i.e. centrale): pas de marge de prudence
  - Sont basées sur l'expérience de la compagnie ou des benchmarks de marché

Valeur de portefeuille

- Taux d'actualisation pour une EV traditionnelle
  - C'est le taux avec lequel on actualise les flux futurs projetés dans les modèles actuariels, pour obtenir la valeur de portefeuille (taux unique pour toute la durée de la projection)
  - On interprète ce taux comme étant le rendement que l'actionnaire requiert du fait de l'investissement risqué dans la compagnie d'assurance
  - Taux d'actualisation = taux sans risque + prime de risque
    - Taux sans risque = TEC10, TME, …
    - Prime de risque déterminée de manière relativement discrétionnaire

- Taux d'actualisation en univers Market Consistent
  - Dans un univers Market consistent, AOA => l'actionnaire requiert un taux de rendement égal au taux sans risque

Actif Net Réévalué

- Élément calculé sans modèle de projection
- S'appuie sur l'actif net comptable = valeur comptable des actifs – valeur de toutes les dettes envers tous les créanciers (assurés, Etat, …)
- Un certain nombre de retraitements sont effectués sur l'actif net comptable :
  - Prise en compte des plus ou moins-values latentes revenant à l'actionnaire : 100% des PVL / MVL des actifs en représentation des Fonds Propres + partage plus ou moins économique des PVL / MVL en face des provisions mathématiques
  - Reprise d'éléments considérés en French GAAP comme des provisions (i.e. appartenant aux assurés) mais revenant économiquement aux actionnaires (Réserve de Capitalisation)
  - Reprise de provisions comptables constituées en French GAAP mais correspondant à des risques modélisés par ailleurs dans la valeur de portefeuille :
    - Provision pour risque de taux
    - Provision pour garantie de table
    - …

Coût du capital

- Définition du capital requis
  - Pour exercer l'activité d'assurance, il est nécessaire pour l'actionnaire de maintenir dans la compagnie d'assurance un montant minimum de Fonds Propres : la marge de solvabilité (en vision Solvabilité I ≡ 4% des PM + 0,3% des capitaux sous risque)
  - L'actionnaire va donc devoir immobiliser (i.e. ne pas retirer) ce montant sur toute la durée de projection : ce montant va générer des produits financiers sur la base du taux de rendement des actifs de la compagnie
  - Or, l'actionnaire attend sur tous ses investissements le taux d'actualisation : il y a donc une perte pour l'actionnaire (coût d'opportunité), correspondant à la différence entre le taux de rendement des actifs la compagnie (net de frais de gestion financière et d'impôt) et le taux d'actualisation
  - Le coût du capital correspond à la valeur actuelle du coût défini précédemment sur toute la durée des projections

$$CoC = \sum_{k=1}^{N} \frac{(Tx\_rend\_actif(k) - Taux\_actu)}{(1+Taux\_actu)^k} \cdot MSR(k)$$

Coût du capital

- En univers Market Consistent
  - Pas de différence entre le taux de rendement des actifs de la compagnie et le rendement requis par l'actionnaire (AOA)
  - Coût du capital = coût de friction (impôt sur les sociétés et frais de gestion financière)
- La technique d'estimation du coût du capital peut également être utilisée pour valoriser les risques non financiers (cf nouveaux principes MCEV)

Valeur temps des options et garanties financières

- Les contrats d'assurance vie présentent généralement des garanties qui s'apparentent à des options aux sens financier du terme. Quelques exemples :
  - Garantie de la valeur de rachat
  - Participation aux bénéfices avec plancher au TMG (taux minimum garanti)
- Objectif de la MCEV = avoir une valorisation de ces éléments qui soit cohérente avec les prix observés sur les marchés financiers :
  - Utilisation de modèles de valorisation stochastique
  - Utilisation de projections risque-neutre calibrées sur des données de marché.
    - Courbes des taux initiales : taux réels et taux nominaux
    - Volatilités implicites sur les taux et les actions (swaptions pour les taux, calls/puts pour les actions). Calibrage sur des données spot
  - Pour certaines garanties / options -> possibilité d'utiliser des formules fermées (cf. exemple infra)
- La valeur temps des options et garanties financières est obtenue par différence entre :
  - La valeur du portefeuille stochastique (i.e. moyenne de la VAN des cash-flows au taux sans risque sur toutes les simulations stochastiques effectuées),
  - La PVFP ; cette valeur est calculée sur un scénario déterministe qui ne prend en compte que la valeur intrinsèque des options.

Sommaire

- L'Embedded Value
- Zoom sur les aspects techniques
  - Les générateurs de scénarios économiques
  - Exemple de valorisation par formule fermée
  - Les Variable Annuities
  - L'accélération des calculs de valorisation
    - Les techniques de réduction de variance
    - Le flexing

Les générateurs de scénarios économiques

Introduction

- Une table de scénarios économiques contient pour **chaque simulation** et sur **l'horizon de projection**, les évolutions :
  - Des courbes des taux nominaux et réels,
  - Des indices « actions » (avec et hors dividende),
  - Du taux de dividende « actions »,
  - De l'indice d'inflation,
  - Des facteurs d'actualisation ou déflateurs (si la table est market consistent)
- Remarque : la table peut également comporter d'autres types de drivers
  - Spread de crédit, prix d'obligations risquées, probabilités de défaut, taux de change, grandeurs macro-économiques, …
- Qu'est ce qu'une table market consistent ?

  -> table permettant de retrouver les **prix de marchés** des actifs modélisés :
  - La table doit refléter les conditions économiques du moment :
    - ✓ **courbes des taux** réels et nominaux, **volatilités implicites** des différents drivers (actions, taux, inflation,…)
  - La table est pourvue de **facteurs d'actualisation** (ou déflateurs) rendant martingales les prix actualisés,
    - ✓ Un tel cadre théorique repose à la fois sur une hypothèse d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) et de complétude du marché

Les générateurs de scénarios économiques

Exemple d'une table

Dates de projections

Déflateurs

Prix des ZC nominaux

Prix des ZC réels

Taux dividende « actions »

Indice « actions » avec div.

Indice « actions » hors div.

Indice d'inflation

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	TERM	Y2010	Y2011	Y2012	Y2013	Y2014
1	EUR	VALN	DEF	0	1	0,938718	0,482895	0,37104	0,331211
1	EUR	ZCB	PRICE	1	0,962226	0,962521	0,966356	0,970687	0,972911
1	EUR	ZCB	PRICE	2	0,92648	0,925968	0,933091	0,941293	0,945494
1	EUR	ZCB	PRICE	3	0,89163	0,890322	0,900345	0,91196	0,91791
1	EUR	ZCB	PRICE	4	0,857651	0,855665	0,868206	0,882813	0,89029
1	EUR	ZCB	PRICE	5	0,824615	0,822035	0,836746	0,853946	0,862763
1	EUR	ZCB	PRICE	28	0,321604	0,317286	0,33726	0,361805	0,374754
1	EUR	ZCB	PRICE	29	0,308776	0,304557	0,324044	0,348016	0,36066
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0,296473	0,292354	0,311346	0,33473	0,347063
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	0,976441	0,97801	0,980674	0,981538	0,982851
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	0,953355	0,956456	0,961497	0,963066	0,96552
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	0,930847	0,935287	0,942405	0,944557	0,948084
1	EUR	ILZCB	PRICE	4	0,908857	0,914424	0,923365	0,926078	0,93064
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	0,887297	0,893822	0,904438	0,907714	0,913275
1	EUR	ILZCB	PRICE	28	0,542748	0,559491	0,585708	0,596404	0,612387
1	EUR	ILZCB	PRICE	29	0,532381	0,54899	0,575058	0,585654	0,60153
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0,522177	0,538645	0,564543	0,575035	0,590793
1	EUR	EQUITY	RNY_PC	0	2,54164	2,65054	0,865443	0,626716	0,69516
1	EUR	EQUITY	RET_IDX	0	1	1,078132	1,672004	1,915461	2,032422
1	EUR	EQUITY	GTH_IDX	0	1	1,050764	1,60084	1,81908	1,91592
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1	1,01047	1,032085	1,040525	1,046663

Sommaire

- L’Embedded Value
- Zoom sur les aspects techniques
  - Les générateurs de scénarios économiques
  - Exemple de valorisation par formule fermée
  - Les Variable Annuities
  - L’accélération des calculs de valorisation
    - Les techniques de réduction de variance
    - Le flexing

Introduction

Notations et hypothèses (1/2)

- Objectif : calculer la valeur temps du coût d'option d'un produit d'épargne en euros avec taux minimum garanti (TMG) et clause de participation aux bénéfices (PB)
- Caractéristiques du contrat : à chaque date, le taux servi à l'assuré correspond au maximum entre le TMG et une quote-part du taux de rendement de la compagnie diminué des chargements sur encours
- Le calcul du coût d'option s'effectue police par police
  - ou par regroupement de polices par âge, par niveau de TMG et par génération de souscription
- Notations :
  - x : âge de l'assuré à la date initiale
  - PM(0) : provision mathématique de l'assuré à la date initiale
  - TMG : taux minimum garanti (discret)
  - r_g : taux (continu) minimum garanti, on a donc $r_g = \ln(1+TMG)$
  - tx_rdt(t) : taux (continu) de rendement de l'actif en période t
  - tx_pb : taux de PB
  - tx_ch : taux (continu) de chargement sur encours
  - tx_servi(t) : taux (continu) servi en période t
  - p_y : probabilité à l'âge y de ne pas décéder dans l'année
  - tx_rcht(n) : taux de rachat annuel structurel pour une police d'ancienneté *n*

Introduction

Notations et hypothèses (2/2)

- Règle de PB :

  Taux servi en t = Max {TMG ; taux de PB x taux de rendement de l'actif en t – taux de chargement}

- Sous les notations précédentes, ceci conduit au calcul :

$$e^{tx\_servi(t)} - 1 = \max\left\{e^{r_g} - 1; tx\_pb.\left(e^{tx\_rdt(t)} - 1\right) - \left(e^{tx\_ch} - 1\right)\right\}$$

- Hypothèse fondamentale
  - Nous supposons que sous la probabilité risque-neutre, la valeur de l'actif A(t) de la compagnie suit la dynamique ci-dessous :

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = f\left(t-1,t\right).dt + \sigma.dW\left(t\right)$$

  - Où *f(t-1,t)* représente le taux forward un an de la période *t* et σ la volatilité de l'actif

- Le taux de rendement de l'actif en t s'écrit :

$$tx\_rdt(t) = \ln\left(\frac{A(t+1)}{A(t)}\right) = f\left(t-1,t\right) - \sigma^2/2 + \sigma.\varepsilon \quad ; \quad \varepsilon \approx N\left(0,1\right)$$

Introduction
Etapes de calculs

- Le calcul de la valeur temps du coût d'option repose sur plusieurs étapes :
  - Etape1 : pour chaque période de projection t, détermination d'une Fair Value de passif pour une garantie de terme *t* en absence de décès et de rachats
  - Etape2 : calcul de la Fair Value de passif totale par pondération des éléments précédents à l'aide des probabilités de rachat et de mortalité
  - Etape3 : détermination de la valeur temps du coût d'option

Fair Value de passif pour une garantie de terme t
Introduction

- En l’absence de décès et de rachats, la provision mathématique de l’assuré en date t se déduit de la provision en date t-1 capitalisée au facteur :

$$e^{tx\_servi(t)} = 1 + \max\left\{e^{r_g} - 1; tx\_pb.\left(e^{tx\_rdt(t)} - 1\right) - \left(e^{tx\_ch} - 1\right)\right\}$$

- Ce facteur peut se réécrire :

$$e^{tx\_servi(t)} = e^{r_g} + tx\_pb.\max\left\{e^{tx\_rdt(t)} - \frac{e^{tx\_ch} + e^{r_g} - 2 + tx\_pb}{tx\_pb}; 0\right\}$$

- Par conséquent, la PM en période t vérifie donc en l’absence de rachats et de décès l’équation :

$$PM(t) = PM(0).\prod_{k=1}^{t} e^{tx\_servi(k)}$$

$$= PM(0).\prod_{k=1}^{t}\left[e^{r_g} + tx\_pb.\max\left\{e^{tx\_rdt(k)} - \frac{e^{tx\_ch} + e^{r_g} - 2 + tx\_pb}{tx\_pb}; 0\right\}\right]$$

Fair Value de passif pour une garantie de terme t

Valorisation (1/2)

- La Fair Value L_t en date 0 d'une garantie de terme t correspond à l'espérance sous la probabilité risque-neutre de la variable PM(t) actualisée :

$$L_t = E_Q\left[e^{-r_f(t).t}.PM(t)\right]$$

$$= PM(0).E_Q\left[e^{-r_f(t).t}.\prod_{i=1}^{t}\left[e^{r_g} + tx\_pb.\max\left\{e^{tx\_rdt(i)} - \frac{e^{tx\_ch} + e^{r_g} - 2 + tx\_pb}{tx\_pb};0\right\}\right]\right]$$

- Où $r_f(t)$ correspond au taux zéro-coupon de maturité t, i.e :

$$P(0,t) = e^{-r_f(t).t} = e^{-f(0,1)}.e^{-f(1,2)}...e^{-f(t-1,t)} = \prod_{i=1}^{t} e^{-f(i-1,i)}$$

- En remarquant que les rendements de l'actif sont par construction indépendants les uns des autres, on aboutit à une expression simplifiée de L_t :

$$L_t = PM(0).\prod_{i=1}^{t} E_Q\left[e^{-f(i-1,i)}.\left[e^{r_g} + tx\_pb.\max\left\{e^{tx\_rdt(i)} - \frac{e^{tx\_ch} + e^{r_g} - 2 + tx\_pb}{tx\_pb};0\right\}\right]\right]$$

Fair Value de passif pour une garantie de terme t
Valorisation (2/2)

- Par recours à une formule de type Black-Scholes, on obtient :

$$L_t = PM(0).\prod_{i=1}^{t}\left\{e^{r_g - f(i-1,i)} + tx\_pb.\left[\phi\left(d_1(i)\right) - e^{-f(i-1,i)}.\frac{e^{tx\_ch} + e^{r_g} - 2 + tx\_pb}{tx\_pb}.\phi\left(d_2(i)\right)\right]\right\}$$

Avec : $d_1(i) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{tx\_pb}{e^{tx\_ch} + e^{r_g} - 2 + tx\_pb}\right) + f(i-1,i) + \sigma^2/2}{\sigma}$; $d_2(i) = d_1(i) - \sigma$

Fair Value totale et valeur temps de l'option

- La Fair Value totale du passif notée L_{stoch} s'obtient en pondérant les éléments L_t à l'aide des probabilités de rachat et de mortalité

$$L_{stoch} = \sum_{t=1}^{T} L_t \times \left(pr\_dc_t + pr\_rcht_t \right) + L_T \times \left(1 - \sum_{t=1}^{T} \left(pr\_dc_t + pr\_rcht_t \right) \right)$$

- Où :
  - *T* : le terme du contrat
  - *Anc* : ancienneté du contrat en date initiale
  - pr_dc_t : la probabilité de décéder en période t
  - pr_rcht_t : la probabilité de racheter en période t
- Avec :

$$pr\_dc_t = \left(1 - p_{x+t}\right) \prod_{k=1}^{t-1} p_{x+k} \prod_{k=1}^{t-1} \left(1 - tx\_rcht(Anc + k)\right)$$

$$pr\_rcht_t = tx\_rcht(Anc + t) \prod_{k=1}^{t} p_{x+k} \prod_{k=1}^{t-1} \left(1 - tx\_rcht(Anc + k)\right)$$

- En notant L_{EC} la valeur intrinsèque de la Fair Value totale du passif (provenant du modèle « équivalent certain » ou en faisant tendre la volatilité vers 0), la valeur temps de l'option est égale à :

  Valeur Temps = L_{stoch} - L_{EC}

Sommaire

- L’Embedded Value
- Zoom sur les aspects techniques
  - Les générateurs de scénarios économiques
  - Exemple de valorisation par formule fermée
  - Les Variable Annuities
  - L’accélération des calculs de valorisation
    - Les techniques de réduction de variance
    - Le flexing

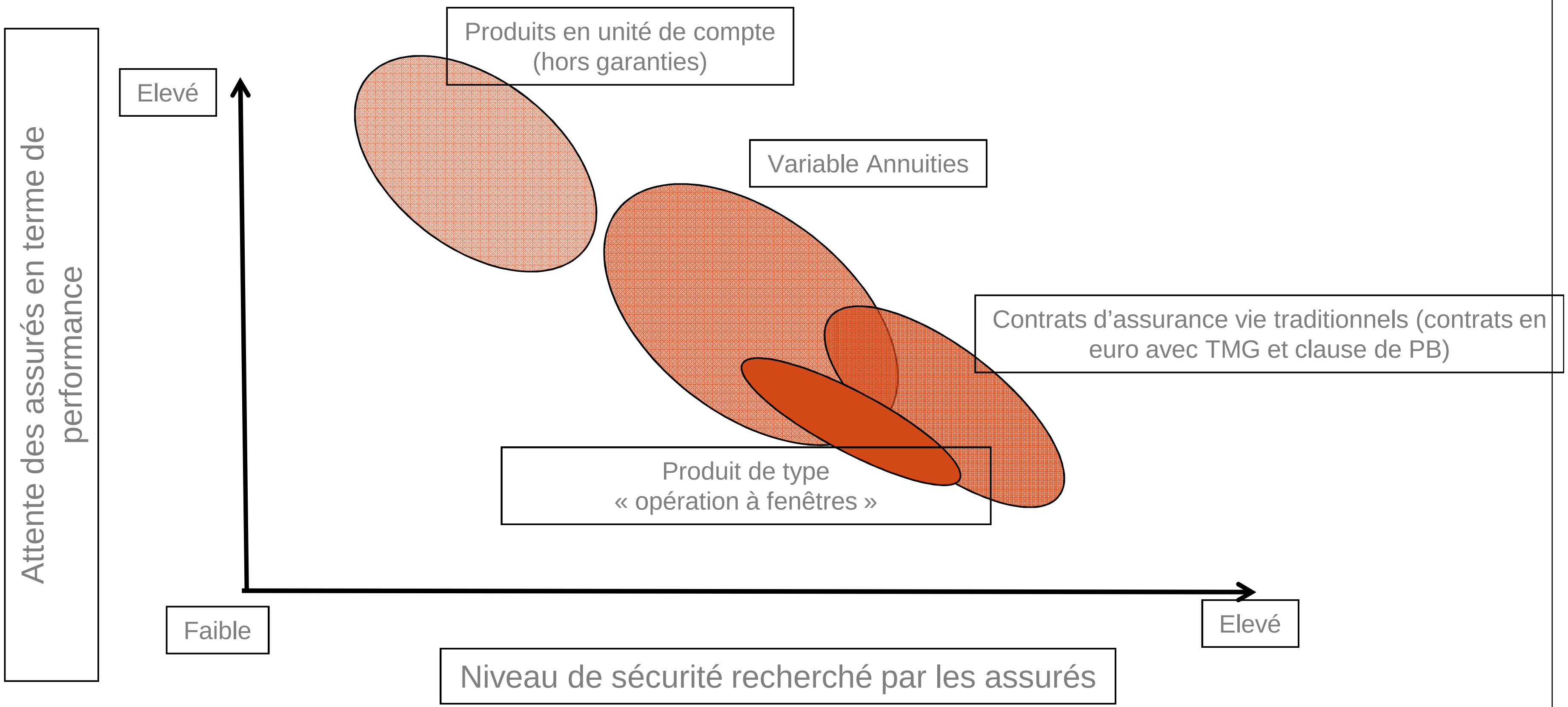
Introduction

Qu’est ce qu’un produit « Variable Annuities » ?

- Contrat en unités de compte
- Assorti de différentes garanties permettant de « sécuriser » l’investissement
  - Des garanties couramment évoquées sous le nom de GMxB
    - Garantie en cas de décès (GMDB – Guaranteed Minimum Death Benefits)
    - Garantie de capital au terme (GMAB – Guaranteed Minimum Accumulation Benefits)
    - Garantie de revenu minimum à une date fixée (GMIB – Guaranteed Minimum Income Benefits)
    - Garantie de rachats minimum (GMWB – Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits)
- Initialement développé sur le marché nord-américain
- Ces produits ne sont pas complètement nouveau sur le marché européen de l’assurance :
  - Contrat en unités de compte avec garanties plancher
  - Contrat avec option de conversion en rentes
  - « Opérations à fenêtre » avec capital garanti au terme
- Une innovation en matière de garantie

Introduction

Le positionnement des variable annuities



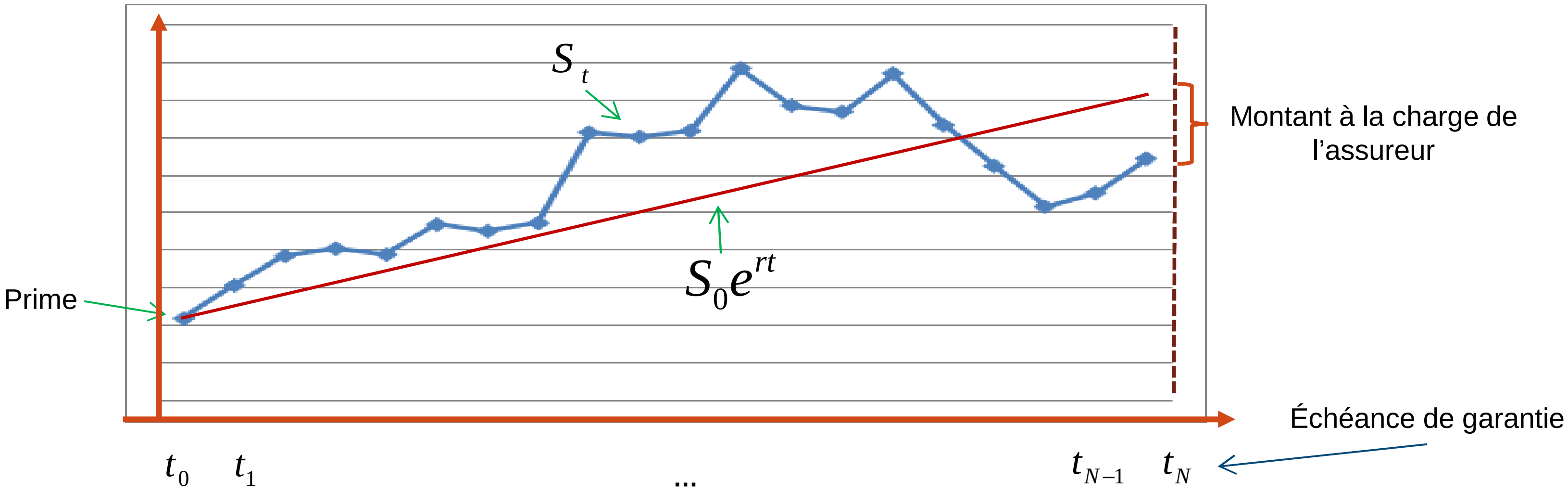
Description des principales garanties
Garantie en cas de décès - GMDB

- Guaranteed Minimum Death Benefit (GMDB)
  - La garantie se déclenche au décès du souscripteur
- Différentes « variantes »
  - Premium Return
    - Capital versé = Maximum {somme des primes versées ; la valeur du fonds}
  - Rising-Floor (roll-up)
    - Capital versé = Maximum {somme des primes versées revalorisées à un taux fixe prédéterminé et garanti; la valeur du fonds}
  - Look-Back (ratchet)
    - Capital versé = Maximum {valeur la plus élevée du fonds (généralement sur l'ensemble des dates anniversaires) ; valeur du fonds}
  - Mix
    - Valeur la plus élevée entre le Rising-Floor et le Look-Back

Description des principales garanties

Garanties en cas de vie - GMAB

- Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB)
  - Garantie d'un capital minimum en cas de vie
    - Elle garantit au souscripteur un plancher sur son investissement sur une période donnée
    - Le payoff : $Max\left(S_{t_0}, S_{t_N}\right)$ ou $Max\left(S_{t_0} e^{r.(t_N - t_0)}, S_{t_N}\right)$ ou $\underset{i=0,\ldots,N}{Max}\left(S_{t_i}\right)$



Description des principales garanties
Garanties en cas de vie – GMIB

- Guaranteed Minimum Income Benefit (GMIB)
  - Garantie de revenu minimum en cas de vie
    - Elle garantit une rente viagère indépendamment de la performance des marchés
      - Remarque : certains produits garantissent également la table de mortalité à la souscription
    - Cette « option » peut être exercée:
      - À partir d'un certain nombre d'années après la souscription (généralement 10)
      - Après un certain âge (généralement 70 ans)

- Exemple de traduction optionnelle d'une GMIB garantissant un taux technique *i* :
  - Payoff de l'option en T date de conversion :

Valeur du fonds en date de conversion

Annuité économique

si les taux au moment de la conversion sont « faibles » -> l'assureur prend en charge « la différence »

$$G(T) = \frac{S(T)}{\sum_{j \geq 1} {}_j p_R \cdot \frac{1}{(1+i)^j}} \left(\sum_{j \geq 1} {}_j p_R \cdot D(T, T+j) - \sum_{j \geq 1} {}_j p_R \cdot \frac{1}{(1+i)^j} \right)^+$$

Rente garantie

Courbe des taux en date de conversion

Annuité garantie

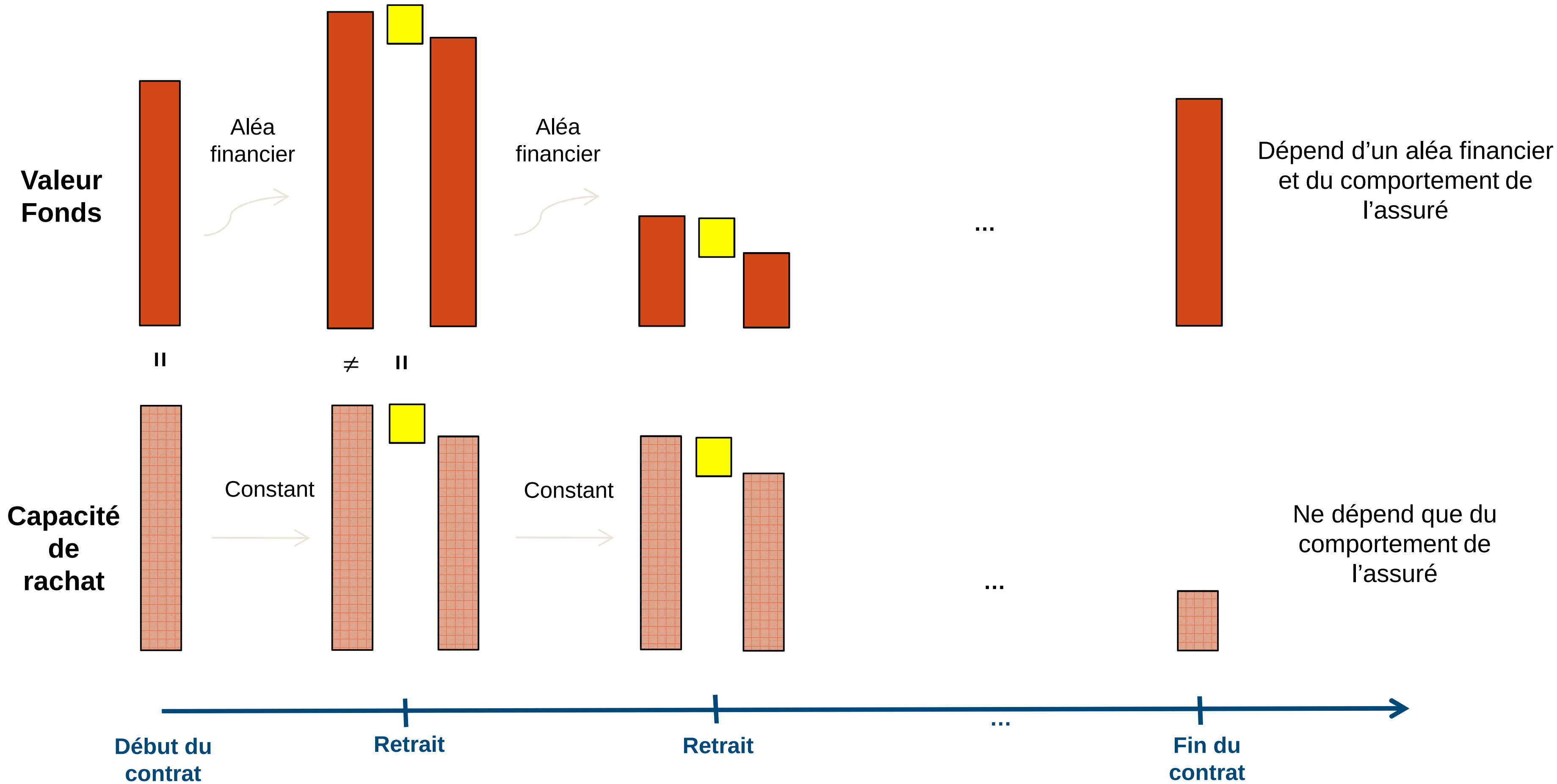
Description des principales garanties

Garanties en cas de vie - GMWB

- Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit (GMWB)
  - Garantie de retraits minimum
  - Possibilité de retirer g% par an des sommes versées
    - g est en général fixe les premières années puis devient croissant
    - Pénalités en cas de rachats supérieurs à g
  - Retraits garantis quelle que soit la performance des actifs
  - Garantie limitée dans le temps
- Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit for life (GMWB for life)
  - Garantie de retraits sur toute la vie du contrat

Description des principales garanties

Zoom sur la garantie de retraits minimum (GMWB)



- A la fin de ce contrat, l'assuré reçoit le maximum entre sa capacité de rachat et la valeur du fonds

Principes de pricing
Cartographie des techniques de pricing

- Le tableau ci-dessous présente les techniques de pricing employées selon les garanties:

Garantie	Technique de Pricing	Niveau de difficulté
GMDB	Utilisation de formules fermées de type B&S pondérées par des taux de mortalité	Faible
GMWB	Simulations Hamilton-Jacobi-Bellman et différences finies	Moyen Elevé
GMIB	Formules fermées de type B&S / Simulations	Moyen
GMAB	Formules fermées de type B&S / Simulations	Faible

- Les garanties GMWB :
  - Nécessitent une mise en œuvre relativement élaborée au niveau du pricing

Sommaire

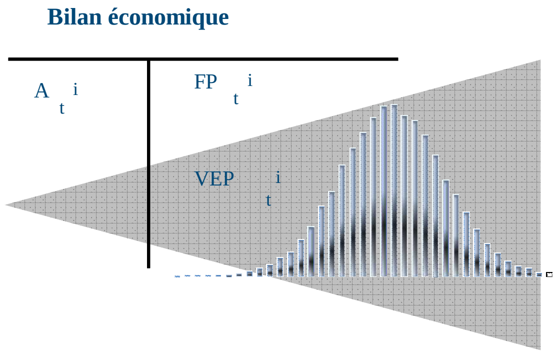
- L'Embedded Value
- Zoom sur les aspects techniques
  - Les générateurs de scénarios économiques
  - Exemple de valorisation par formule fermée
  - Les Variable Annuities
  - L'accélération des calculs de valorisation
    - Les techniques de réduction de variance
    - Le flexing

Introduction

Problématique et objectif

- Le bilan économique se calcule à partir d'une projection des actifs et passifs en portefeuille :
  - Les cash-flows sont projetés et actualisés à la date d'évaluation du bilan
  - Le bilan économique est déterminé par la **moyenne des cash-flows actualisés**

- Ce calcul est d'autant plus précis qu'un grand nombre de projections est utilisé
  - Plus la variance de la variable aléatoire « VAN des résultats » est faible, plus l'estimateur est robuste
  - Des techniques mathématiques utilisées lors de la génération des scénarios économiques permettent de **réduire la variance de l'estimateur** de l'espérance de la VAN des résultats



Réduction de variance

Augmenter la robustesse du calcul Monte-Carlo
Diminuer le nombre de simulations risque-neutre

Présentation générale des méthodes

La génération des lois uniformes

- Problématique : la simulation de variables aléatoires dans une mise en œuvre de type Monte-Carlo repose sur la génération de lois uniformes dans [0;1]

- Un générateur de nombres aléatoires est un algorithme permettant de produire des séquences déterministes de nombres « imitant » le hasard

- Il existe deux types de générateurs de nombres aléatoires de loi uniforme :
  - Les générateurs **pseudo-aléatoires**
  - Les générateurs **quasi-aléatoires**

- Propriétés fondamentales que doit satisfaire un générateur :
  - « Qualité » de l'uniformité de la suite
  - Période associée très élevée (cf. infra)
  - Equi-répartition multidimensionnelle
  - Efficacité (temps de calcul induit très faible)

Les nombres pseudo-aléatoires
Introduction

- Structure d'un générateur pseudo-aléatoire :

$$U_k = g(s_k) \quad avec \quad s_k = f(s_{k-1})\ ;\ s_0 \in S\ ;\ f : S \to S$$

Loi uniforme générée

Fonction de sortie

Fonction de transfert
= dynamique du générateur

Graine du générateur

- La fonction « f » caractérise la dynamique du générateur
- La fonction « g » permet de « convertir » les nombres aléatoires générés

- Remarque : l'espace des états « S » étant fini, l'algorithme ne peut produire qu'un nombre fini de valeurs distinctes -> les générateurs pseudo-aléatoires sont périodiques
- Exemple : les générateurs congruentiels
  - Ces générateurs reposent sur l'algorithme suivant :
  - Choix d'une graine X_0
  - Calcul récursif : $X_{n+1}=k.X_n+p \; mod \; m$

- Le générateur pseudo-aléatoire actuel le plus performant est le générateur Mersenne Twister

Les nombres pseudo-aléatoires
Le générateur Mersenne Twister

- Le générateur Mersenne Twister (MT19937) est implémenté dans les logiciels MATLAB, Scilab, R, …

- MT19937 a été conçu afin d'améliorer les générateurs congruentiels standards :
  - **Période très élevée** : $2^{19937}-1$ (Nombre premier de Mersenne, $\sim 10^{6001}$)
  - Equi-répartition sur **623 dimensions**
  - Efficace
    - Ne nécessite pas d'effectuer des divisions euclidiennes -> **algorithme très rapide**

- MT19937 présente néanmoins les inconvénients suivants :
  - Nécessite une longue graine (624 chiffres)
    - Des algorithmes permettent toutefois de simplifier son obtention en s'appuyant sur une unique graine

Les nombres quasi-aléatoires

Introduction

- Principe : les générateurs quasi-aléatoires permettent de produire des séquences particulièrement bien réparties dans $[0,1]^d$

- La discrépance permet de mesurer la qualité de l'équi-répartition d'une suite $(u_k)_{k=1,\ldots,n}$ à valeurs dans $[0,1]^d$:

$$D_n^*(u) = \sup_{a\in[0,1]^d} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{d} \mathbf{1}_{\{u_k^i < a^i\}} - \prod_{i=1}^{d} a^i \right|$$

- Les générateurs quasi-aléatoires sont à discrépance faible, i.e. ils vérifient :

$$D_n^*(u) = O\left(\frac{\log^d(n)}{n} \right)$$

- Exemples de générateurs quasi-aléatoires : les suites de Van Der Corput, Halton, Fauré, Sobol, …

Les nombres quasi-aléatoires
Principe de génération et exemple

- Principe de génération de nombres quasi-aléatoires :
  - Conversion des entiers naturels dans une base b
  - **Inversion de la décomposition** afin d'obtenir des réalisations dans [0;1]
- Exemple : structure d'une suite $(X_n)_{n=0,\dots,k}$ de Van Der Corput de base b
  - Conversion des entiers naturels n jusqu'à k (taille de la suite) dans la base b :

$$n = \sum_{i \geq 0} a_i . b^i$$

  - Inversion par rapport à la virgule décimale des nombres obtenus en base b :

$$X_n = \sum_{i \geq 0} a_i . b^{-i-1}$$

Les nombres quasi-aléatoires
Généralisation en dimension d

- Suite de Halton en dimension *d* (*i=1…d*) :
  - Pour *p* premier, la décomposition p-adique de *n* est: $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_r p^r$
  - En notant p_i le *i*-ème nombre premier, et $\Phi_p(n) = \frac{a_0}{p} + \ldots + \frac{a_r}{p^r}$, on pose: $u_n^i = \Phi_{p_i}(n)$
- Exemple en dimension 2 :

n	Dimension 1 (p=2)			Dimension 2 (p=3)		
1	$1 = 1x2^0$	$\phi_2(1)=1/2$	$u_{1,1} = 0,5$	$1 = 1x3^0$	$\phi_3(1)=1/3$	$u_{2,1} = 0,33333$
2	$2 = 0x2^0 + 1x2^1$	$\phi_2(2)=1/4$	$u_{1,2} = 0,25$	$2 = 2x3^0$	$\phi_3(2)=2/3$	$u_{2,2} = 0,66666$
3	$3 = 1x2^0 + 1x2^1$	$\phi_2(3)=1/2+1/4$	$u_{1,3} = 0,75$	$3 = 0x3^0 + 1x3^1$	$\phi_3(3)=1/9$	$u_{2,3} = 0,11111$
…	…	…	…	…	…	…

- Parmi les suites quasi-aléatoires, les suites de Sobol constituent un des outils les plus performants

La méthode de Monte-Carlo

Principe

- Objectif : on cherche à estimer la quantité *E(Y)*

- Mise en œuvre -> simulations de *Y* puis calcul de la moyenne empirique sur l'échantillon obtenu

- Base théorique : la loi des grands nombres $Y_i \ iid \ , \bar{y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}(Y)$

- L'erreur d'estimation commise dépend:
  - De la **variance** ***V(Y)*** de la variable aléatoire Y considérée
  - Du **nombre** ***n*** de réalisations de Y considérées

- Ce résultat découle du théorème central limite:

$$\frac{\bar{y} - \mathbf{E}(Y)}{\sqrt{\frac{\mathbf{V}(Y)}{n}}} \xrightarrow{Loi} \mathbf{N}(0,1)$$

$$q_{1-\frac{\alpha}{2}}(N(0,1)) \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{V}(Y)}{n}}$$

$$\bar{y} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}(N(0,1)) \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{V}(Y)}{n}} \qquad \bar{y} \qquad \bar{y} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}(N(0,1)) \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{V}(Y)}{n}}$$

Intervalle de confiance à 1-α

Les techniques de réduction de variance usuelles

Méthode 1 – Variables antithétiques

- Hypothèse fondamentale : *Y* s’obtient à partir d’un aléa de base *X* -> *Y=f(X)*

- On utilise des distributions symétriques : l’aléa *X* admet un opposé X^- (*X* et X^- sont parfaitement corrélés, négativement)

- *Y* et Y^- sont également souvent corrélés négativement (l’hypothèse de monotonie de la fonction est suffisante)

- Mise en œuvre : les simulations sont effectuées par paires, les tirages de chaque paires étant négativement corrélés -> réduction de la variance

Les techniques de réduction de variance usuelles

Méthode 2 – Variable de contrôle

- Principe : recours à une variable *Z* corrélée avec *Y*, et dont la moyenne est connue
- Soit une variable Z, avec : $$\begin{cases} \mathbf{Cov}(Z,Y) \neq 0 \\ \mathbf{E}[Z] = \mu_Z \end{cases}$$
- Soit l'estimateur de *E(Y)* : $$\overline{Y}_{VC} = \overline{Y} + c\left(\overline{Z} - E[Z]\right)$$
  - Sa variance est un trinôme en *c* vérifiant :

$$\mathbf{V}(\overline{Y}_{VC}) = \mathbf{V}(Y) + c^2\mathbf{V}(Z) + 2c\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$$

  - Le minimum est atteint en c* satisfaisant : $$c^* = -\frac{\mathbf{Cov}(Y,Z)}{\mathbf{V}(Z)}$$
  - Pour une variance égale à:

$$\mathbf{V}\left(\overline{Y}_{VC}\right) = \boxed{\frac{\mathbf{V}(Y)}{n}} - \boxed{\frac{\mathbf{Cov}^2(Z,Y)}{n.\mathbf{V}(Z)}}$$

Variance estimateur MC

Facteur d'amélioration

Sommaire

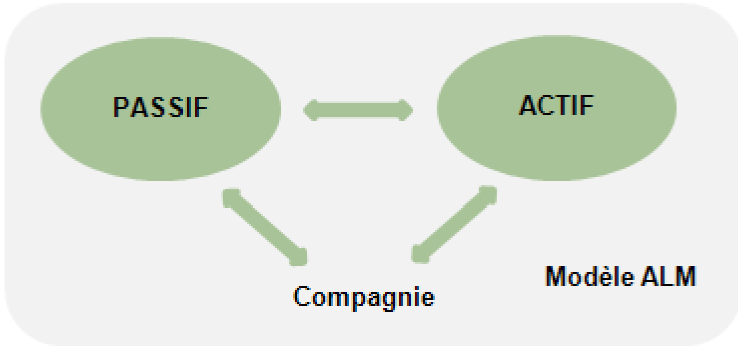
- L'Embedded Value
- Zoom sur les aspects techniques
  - Les générateurs de scénarios économiques
  - Exemple de valorisation par formule fermée
  - Les Variable Annuities
  - L'accélération des calculs de valorisation
    - Les techniques de réduction de variance
    - Le flexing

Introduction

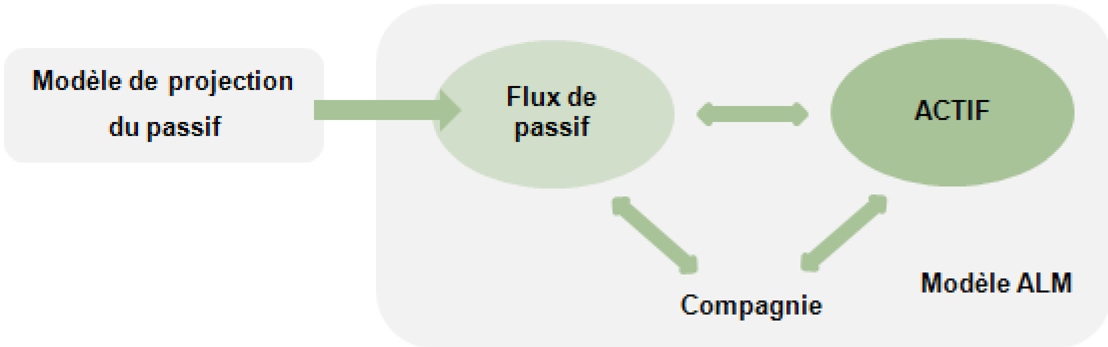
- L'une des problématiques principales dans la conception / utilisation d'un modèle ALM est le temps de calcul induit
- Objectif du flexing: proposer une solution alternative à la modélisation ALM standard afin de réduire les temps de calcul
  - Dans une modélisation ALM standard, la projection du passif est l'étape la plus consommatrice de temps car la projection des flux est effectuée police par police.
  - Le flexing est une méthode permettant de réduire les temps de calcul en :
    - générant les flux de passifs sur un seul scénario déterministe en utilisant un modèle de passif seul pour un nombre restreint de « poches » de polices
    - ajustant dynamiquement ces flux en fonction de scénarios financiers spécifiques

Introduction

Méthode de projection ALM standard



Méthode de projection avec flexing des flux de passif



Principe du flexing

- Le flexing repose sur le fait que les interactions Actif-Passif se font exclusivement par l'intermédiaire de deux mécanismes:
  - la participation aux bénéfices
  - le comportement dynamique des assurés

    (rachats dynamiques, arbitrages, versements libres de primes…)
- Participation aux bénéfices:

  Pour chaque période et chaque trajectoire:
  - Définition d'un taux de PB cible (par exemple, le taux sans risque de maturité 10 ans).
  - Selon la production financière de la période, incorporation d'un taux de PB compris entre 0 et le taux de PB cible.
- Rachats dynamiques (comportement dynamique le plus souvent modélisé):

  Pour chaque période et chaque trajectoire:
  - Comparaison du taux servi à la période précédente avec un taux de référence (par ex., un taux basé sur l'historique du TME)
  - Si la différence entre le taux servi et le taux de référence dépasse un certain seuil, déclenchement des rachats dynamiques (qui viennent s'ajouter aux rachats

    structurels)

Principe du flexing

- Etapes du flexing:
  - Constitution de poches de passif (groupes de polices) homogènes au niveau de la clause de PB et des paramètres intervenant dans la clause de PB (TMG, chargements sur encours)
  - Pour chacune de ces poches, génération d'une table de cash-flows à l'aide d'un modèle classique de projection des passifs (Moses, Prophet, ...)

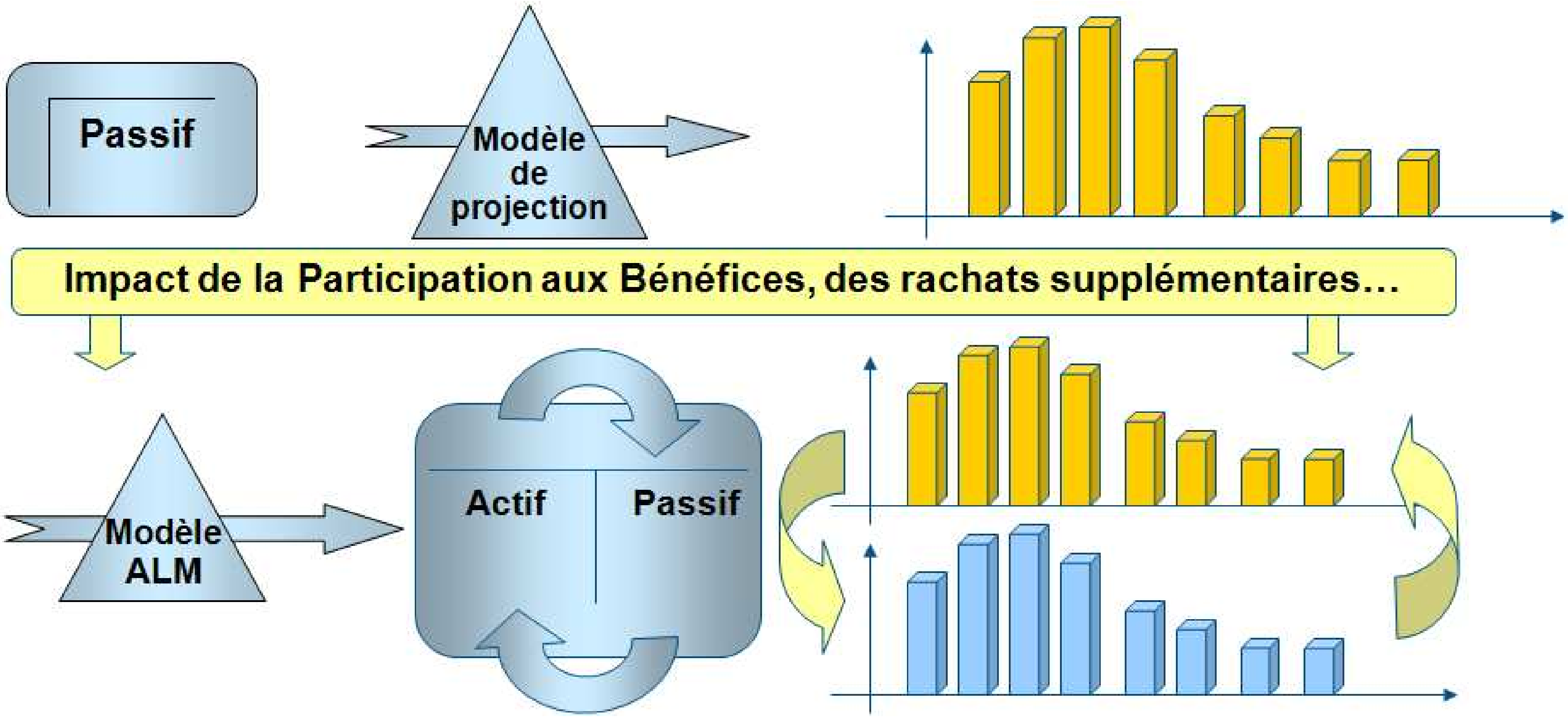
    Pour chaque poche, la table contient le déroulé des variables suivantes:
    - PM
    - Prestations par nature (décès, rachats, maturités, …)
    - Nombre de polices
    - Intérêts crédités
    - ...

    Ces cash-flows sont simulés sans PB
  - Incorporation de ces flux de passif dans le modèle ALM
  - Pour chaque simulation et chaque période, ajustement (flexing) de ces flux à l'aide de « ratios de flexing » pour tenir compte:
    - de la participation aux bénéfices,
    - du comportement dynamique des assurés

    qui sont calculés dans le modèle ALM et fonction de l'actif

Principe du flexing

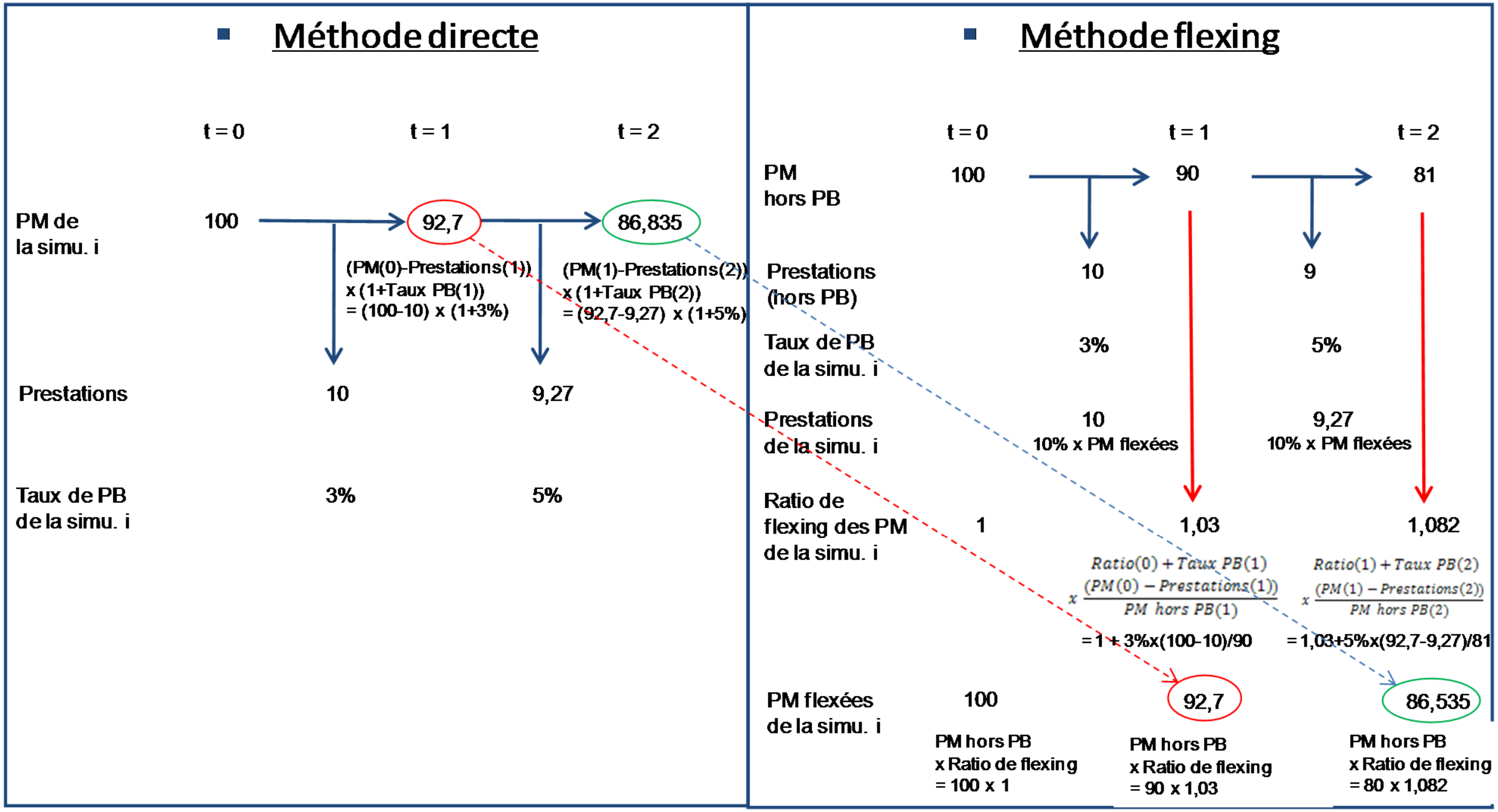
- Modèle basé sur la technique des ajustements :



Ajustements et simulations de l'évolution réelle du passif

Principe du flexing

- Illustration :
  - produit d'épargne avec Primes = 0, Prestations annuelles = 10% des PM, TMG = 0 sur 2 périodes



Sommaire

- Annexes
  - Exemples de contrats d’assurance vie

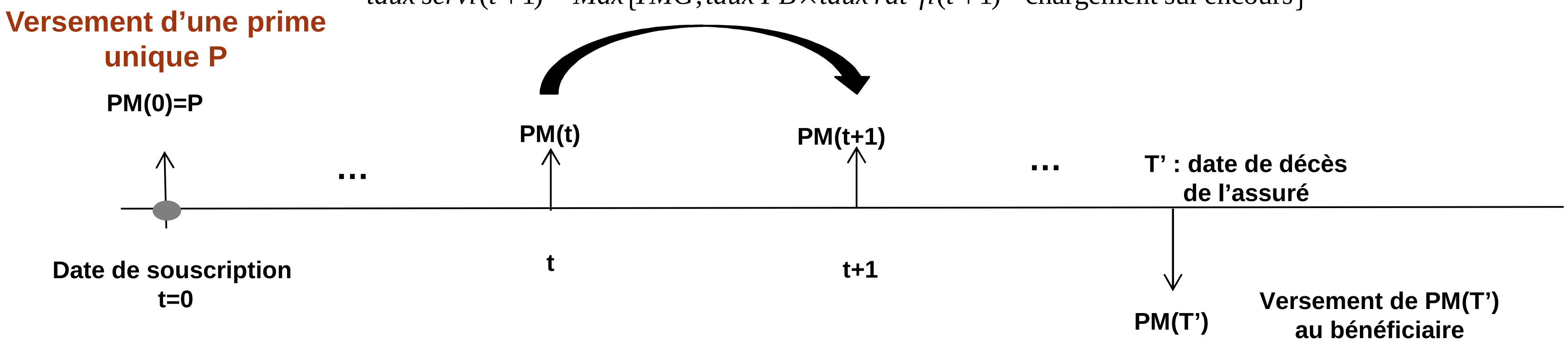
Quelques exemples de contrats d’assurance-vie (1/6)

Les contrats d’épargne en euros

- Principe : l’épargne de l’assuré (la provision mathématique) est placée sur un fonds (le fonds euros) et capitalise chaque année à un taux dépendant de la production financière de l’assureur
  - En cas de décès de l’assuré, de rachat du contrat, d’arrivée au terme du contrat -> la provision mathématique est versée à l’assuré ou au bénéficiaire (moyennant certaines pénalités en cas de rachat)
  - L’investissement de l’assuré est protégé -> la provision mathématique est toujours au moins égale aux investissements de l’assuré (somme des primes versées durant la vie du contrat)
  - Le contrat peut être assorti de garanties supplémentaires (ex. taux minimum garanti, taux de participation aux bénéfices supérieur au taux réglementaire égal à 85%, …)
- Exemple de fonctionnement d’un contrat en euros avec TMG et prime unique :

$$PM(t+1) = PM(t) \times \left(1 + taux\ servi(t+1)\right)$$

$$taux\ servi(t+1) = Max\left\{TMG ; taux\ PB \times taux\ rdt\ \ fi(t+1) - \text{chargement sur encours}\right\}$$



Quelques exemples de contrats d'assurance-vie (2/6)

Les contrats d'épargne en euros

- Valeur économique des passifs (également dénommée Best Estimate des passifs) en t=0 :
  - Sous les notations de l'exemple développé dans la partie « Exemple de valorisation par formule fermée »

$$BE_0 = E_{\pi \otimes Q}\left[e^{-\int_0^D r_u du} PM(D) 1_{D<T} + e^{-\int_0^T r_u du} PM(T) 1_{D \geq T} \right] = \int \left(E_Q\left[e^{-\int_0^D r_u du} PM(D) \right] 1_{D<T} + E_Q\left[e^{-\int_0^T r_u du} PM(T) \right] 1_{D \geq T} \right) d\pi(D)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} E_Q\left[e^{-\int_0^t r_u du} PM(t) \right] \left(pr\_dc_t + pr\_rcht_t \right) + \left(1 - \sum_{t=1}^{T} \left(pr\_dc_t + pr\_rcht_t \right) \right) E_Q\left[e^{-\int_0^T r_u du} PM(T) \right]$$

π : la probabilité afférente aux risques techniques (i.e mortalité et rachat)

Q : la probabilité risque-neutre

D : la loi de la durée de vie du contrat à la date de valorisation

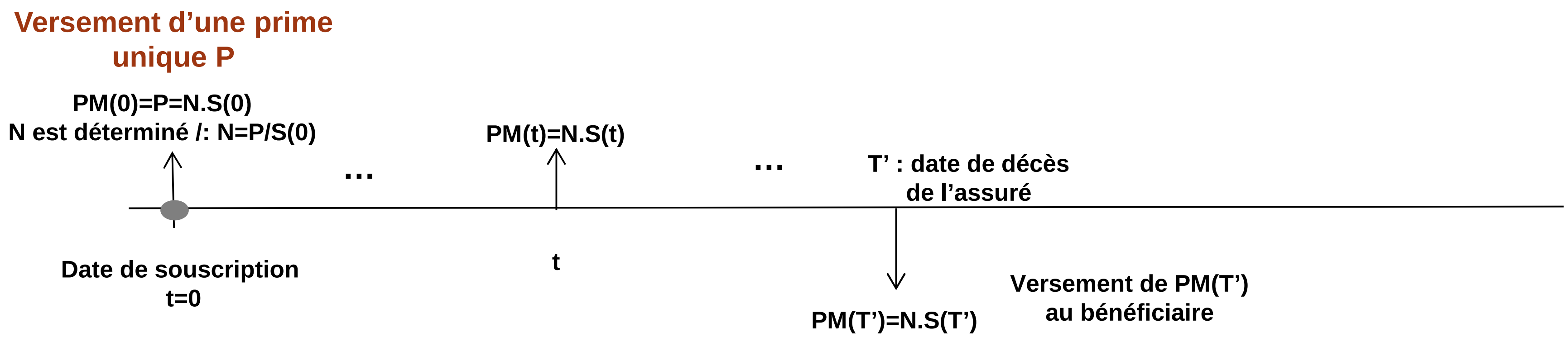
T : le terme du contrat

- Remarque 1 : le calcul d'un Best Estimate en assurance-vie repose sur des hypothèses centrales de sinistralité (tables de mortalité et de rachat centrales) et un pricing sous la probabilité risque-neutre pour les risques financiers
  - Dans le cas où le contrat présente des options et garanties financières détenues par les assurés le pricing risque-neutre peut être délicat et peut nécessiter le recours à des simulations de Monte Carlo
- Remarque 2 : dans l'exemple ci-dessus BE(0) > PM(0) (optionalités liées au contrat)

Quelques exemples de contrats d'assurance-vie (3/6)

Les contrats en Unités de Compte (UC)

- Principe : l'épargne de l'assuré (la provision mathématique) correspond à un portefeuille d'actifs financiers (exprimé en nombre de parts de supports de type SICAV, FCP, …) et évolue selon les mouvements observés sur les marchés
  - En cas de décès de l'assuré, de rachat du contrat, d'arrivée au terme du contrat -> la provision mathématique est versée à l'assuré ou au bénéficiaire (moyennant certaines pénalités en cas de rachat)
  - L'investissement de l'assuré est soumis aux aléas financiers -> la provision mathématique peut devenir inférieure aux investissements de l'assuré (somme des primes versées)
  - Le contrat peut être assorti de garanties supplémentaires (cf. les contrats de type Variable Annuities)
- Exemple de fonctionnement d'un contrat UC à prime unique :
  - Notons S(t) la valeur du support UC en t et supposons que les frais de gestion financière sont nuls (ce qui se traduit par la constance du nombre de parts sur l'horizon de vie du contrat)



Quelques exemples de contrats d'assurance-vie (4/6)

Les contrats en Unités de Compte (UC)

- Valeur économique des passifs (également dénommée Best Estimate des passifs) en t=0 :
  - Sous les mêmes notations que dans l'exemple précédent :

$$BE_0 = E_{\pi\otimes Q}\left[e^{-\int_0^D r_u du} PM(D) \right] = \int E_Q\left[e^{-\int_0^D r_u du} N.S(D) \right] d\pi(D)$$

$$= \int N.S(0) d\pi(D) = N.S(0)\int d\pi(D) = N.S(0)$$

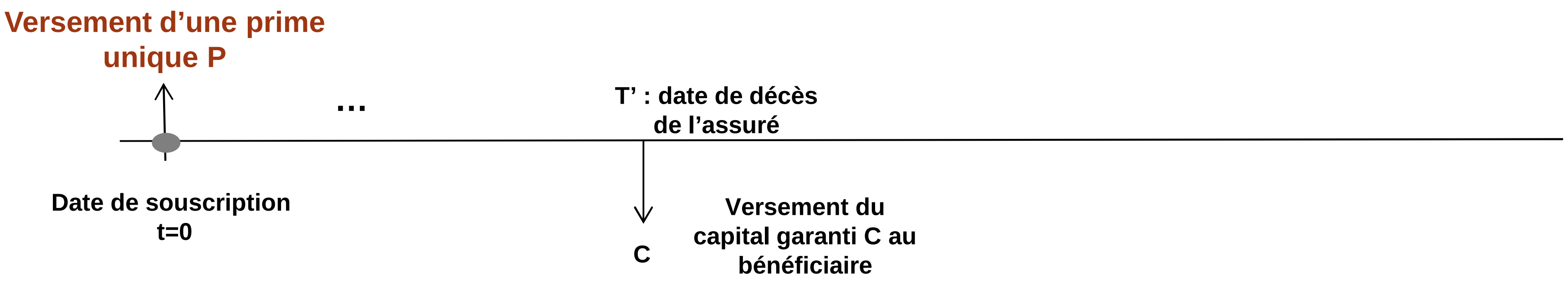
$$= P$$

- Remarque : dans l'exemple ci-dessus **BE(0) = PM(0)** (pas d'optionalité liée au contrat)

Quelques exemples de contrats d'assurance-vie (5/6)

Les contrats de type « temporaire décès »

- Principe : en cas de décès de l'assuré un capital garanti est versé au bénéficiaire
  - Le capital garanti est fixe durant toute la vie du contrat (néanmoins certains contrats proposent de clauses de ré-indexation du capital garanti)
- Exemple de fonctionnement d'un contrat « temporaire décès » à prime unique :
  - Notons P la prime unique versée par l'assuré au moment de la souscription,



$$BE_0 = E_{\pi \otimes Q}\left[e^{-\int_0^D r_u du} C.1_{D<T} \right] = \int C.E_Q\left[e^{-\int_0^D r_u du} \right] 1_{D<T} d\pi(D) = C \int P(0,D).1_{D<T} d\pi(D) = C \sum_{t=1}^{T} P(0,t).pr\_dc_t$$

Quelques exemples de contrats d'assurance-vie (6/6)

Les contrats de type « temporaire décès »

- Remarque : BE_0 n'est pas nécessairement égal à P
  - Cela dépend du taux technique et de la table de mortalité considérés pour la tarification
- Plus précisément :

Approche « valorisation économique » : hypothèse de mortalité d'expérience

Approche « tarification » : hypothèse de mortalité suffisamment conservatrice (mortalité réglementaire a minima)

Différence d'hypothèse de mortalité

$$BE_0 = C\sum_{t=1}^{T} P(0,t).pr\_dc_t \qquad P = C\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+i)^t}.pr\_dc_t^{tarif}$$

Différence d'actualisation

Approche « valorisation économique » : actualisation avec la courbe des taux $(P(0,t))_t$

Approche « tarification » : actualisation avec une hypothèse de taux technique « i »