Apunte para rendir final Matematica I plan 2003

Sucesiones

Una sucesión es una lista de objetos dispuestos en orden. Pueden ser finita o infinita.
En general S_n denota el elemento n-ésimo o término n-ésimo de la sucesión y se llama **término general de la sucesión**.
Una fórmula del tipo $S_n=2\text{n}, n\geqslant 1$ se llama explícita porque indica exactamente qué valor tiene cualquier elemento de la sucesión.
Una fórmula del tipo $t_1=3;\ t_n=t_n-1+5 \quad si \quad n\geqslant 2$ se llama recursiva o recurrente.

	Aritméticas	Geométricas
N-ésimo elemento	$a_n=a_1 + (n-1)d$	$a_n=a_1 * r^{n-1} \quad n\geqslant 1$
Sumatoria de los primeros *n* elementos	$S_n=\frac{n(2\text{a}_1+(n+1)d)}{2}$	$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

Inducción Inversa

Si tengo una relación lineal homogénea de grado 2 $a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} \quad con \ condiciones \ iniciales \ a_1 \ y \ a_2$.

Hay que sacar la ecuación característica de la relación de recurrencia de forma $x^2-r_1 x-r_2=0$ (*).

Entonces se sabe que $\begin{matrix}(s_1)^2=r_1 s_1+r_2 \\ (s_2)^2=r_1 s_2+r_2\end{matrix}$ son las raices de (*), y se las ponen en las formulas a continuación.

Si $s_1 = s_2$	Si $s_1 \neq s_2$
Se tiene que $a_n = \mu s^n + \gamma n s^n$; por lo tanto, tengo que encontrar $\begin{matrix}a_1=\mu s+\gamma s \\ a_2=\mu s^2+\gamma 2 s^2\end{matrix}$	Se tiene que $a_n = \mu s_1^n + \gamma s_2^n$; por lo tanto, tengo que encontrar $\begin{matrix}a_1=\mu s_1+\gamma s_2 \\ a_2=\mu s_1^2+\gamma s_2^2\end{matrix}$

Combinatoria

Variaciones (Importa el orden)	Permutaciones	Combinaciones (No importa el orden)
$V_{n,m}=\frac{n!}{(n-m)!}$ Ej: se tiene 20 personas y se eligen un presidente, secretario y tesorero	$P_n=n!$ Formas de ordenar sin reposición. Se preguntan cuantas maneras diferentes pueden disponerse las letras de la palabra BANANA $\frac{P_6}{P_1*P_2*P_3} = \frac{\# P_{\#} todas\, las\, letras}{P_{\#} letra\, n_0 \ * \ P_{\#} letra\, n_1 \ * ...}$. Es decir, las permutaciones de todas las letras, sobre el producto de las permutaciónes de las letras A, B y C.	$C_{n,m}=\binom{n}{m}=\frac{V_{n,m}}{P_n}=\frac{n!}{(n-m)! \ * \ m!}$

Matrices

Suma de matrices
Producto de matrices (el producto de matrices no es conmutativo)

Propiedades del producto de matrices

Sean A, B y C matrices tales que las operaciones indicadas están definidas. Entonces:

1. A.(B.C) = (A.B).C (el producto de matrices es asociativo)
2. A.(B+C) = A.B + A.C y (A+B).C = A.C+B.C (el producto de matrices es distributivo con respecto a la suma)
3. Sea I_n la matriz diagonal nxn cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1. La llamaremos matriz identidad nxn.
   Si A es una matriz pxq entonces $I_p . A=A . I_q=A$
4. Si c es un escalar, c(A.B) = (cA).B = A.(cB)

5. Si A es una matriz cuadrada nxn, definimos en forma recursiva:
$A^0 = I_n \;;\; A^k = A^{k-1} . A \;\; para \; k = 1,2,3,...$
Entonces si s y t son enteros no negativos, $A^s . A^t = A^{s+t} \;\; y \;\; (A^s)^t = A^{s.t}$ (pero en general no es cierto que $(A.B)^k = A^k . B^k$)

Matriz traspuesta

Sea A una matriz, se llama matriz traspuesta de A a la matriz que se obtiene intercambiando las filas por las columnas de A.

Una matriz simétrica es una matriz cuadrada A tal que $A^T = A$
Una matriz antisimétrica es una matriz cuadrada tal que $A^T = -A$

Propiedades
Si c es un número real y A y B son matrices para las que están definidas las operaciones indicadas:
1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(A.B)^T = B^T . A^T$
4) $(c.A)^T = c.A^T$

Matriz Inversa

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$
Decimos que A es no singular o invertible si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que $A.B = B.A = I_n$
por lo tanto, si A es invertible, existe una única matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$, dicha matriz B es la matriz inversa de A y la denotaremos A^{-1}
Si A es una matriz nxn, es invertible si y sólo si el rango de A es n.
Si A es una matriz nxn, el sistema de ecuaciones lineales A.X = B tiene solución única para todo B si y sólo si A es invertible.

Determinantes

Cada matriz cuadrada A tiene asociado un número llamado determinante de A que se denota |A| o det(A)
Si $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ el determinante de A se define de la siguiente manera:
|A| = $a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$

Ejemplo
A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ |A| = det(A)=3.(-3)-2.(-2)= -9+4 = -5

Si analizamos en general, cuando una matriz A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es invertible, llegaremos a la conclusión de que esto sucede si y sólo si $det(A) \neq 0$

En una matriz $A \in \mathbb{R}^{nxm}$ se puede afirmar que:
- *n* = rango de los coeficientes.
- *m* = rango de la matriz ampliada.
- Si *m* > *n*, entonces esta matriz no tiene solución (**incompatible**).
- Si *m* = *n*, entonces tiene una única solución (**compatible determinada**).
- Si *m*< *n*, entonces tiene infinitas soluciones (**compatible indeterminada**).

Geometría

$$\begin{gathered} Si \;\; me \;\; dan \;\; algo \;\; de \;\; forma: \\ Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E \\ Si \; A = B > 0 \;\; entonces \;\; esto \;\; es \;\; una \;\; Circunsferencia. \\ Si \; A \neq B > 0 \;\; entonces \;\; esto \;\; es \;\; una \;\; Elipse. \\ A \, o \, B = 0 \;\; entonces \;\; esto \;\; es \;\; una \;\; Parábola. \\ A \, o \, B < 0 \;\; entonces \;\; esto \;\; es \;\; una \;\; Hipérbola. \end{gathered}$$

Recta

Forma general: $Ax + By + C = 0$ Forma explícita: $y = mx + b$ pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ordenada al origen: $b=(-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}*x_1)+y_1$ Distancia entre dos puntos: $d(P1, P2)=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$.
Si dos rectas son perpendiculares: $m_1 m_2 = -1$.

Circunferencia

Centro (α, β) ; Forma explícita $r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$;Forma general $\begin{matrix} Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \\ A=B=1\,; C=-2\alpha\,; D=-2\beta\,; E=\alpha^2+\beta^2-r^2 \end{matrix}$.

Si quisiera comprobar que una ecuación característica es una circunferencia compruebo que $C^2+D^2-4\text{AE}\geq 0$.

Parábola

Para *x*	Para *y*
P(*x,y*) está en la parábola con foco F(*p*,0) y directriz *x*= -*p* si satisface: $y^2=4\text{px}$ Si *p* > 0 la parábola es (Si *p* < 0 la parábola es)	P(*x,y*) está en la parábola con foco F(0,*p*) y directriz y= -*p* si satisface: $x^2=4\text{py}$ Si *p* > 0 la parábola es U Si *p* < 0 la parábola es ∩
Si el vértice es $V(\alpha, \beta)$ y el eje es una recta paralela al eje coordenado *x* $(x-\alpha)^2=4\text{p}(y-\beta)$	Si el vértice es $V(\alpha, \beta)$ y el eje es una recta paralela al eje coordenado *y* $(y-\beta)^2=4\text{p}(x-\alpha)$

Elipse

Para *x*	Para *y*
E(*x,y*) está en el elipse con foco $F(\pm c, 0)$ y vértice $V(\pm a, 0)$ si satisface: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	E(*x,y*) está en el elipse con foco $F(0, \pm c)$ y vértice $V(0, \pm a)$ si satisface: $\frac{(y-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(x-\beta)^2}{b^2}=1$
Donde $b^2=a^2-c^2$	

Hipérbola

Para *x*	Para *y*
P(*x,y*) está en el elipse con foco $F(\pm c, 0)$, vértice $V(\pm a, 0)$ y recta $y=\pm\frac{b}{a}x$ si satisface: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	P(*x,y*) está en el elipse con foco $F(0, \pm c)$ y vértice $V(0, \pm a)$ y recta $y=\pm\frac{a}{b}x$ si satisface: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
Donde $b^2=a^2-c^2$	