ANALISIS MATEMATICO I
(Informática)

Clases Teóricas
Parte I: Conceptos básicos y funciones
(primer semestre 2000)

R. Rossignoli
Universidad Nacional de La Plata

(Versión preliminar)

1.1 Conceptos básicos

1.1.1 Clasificación de números

Comenzaremos con una muy breve reseña de los tipos de números.

$$\text{Números enteros}: \begin{cases} 1,2,3\ldots & \text{enteros positivos o naturales} \\ -1,-2,-3\ldots & \text{enteros negativos} \\ 0 & \end{cases}$$

La suma y producto de números enteros es otro número natural. Su cociente, en cambio, no es necesariamente entero. Los cocientes de números enteros constituyen los *números racionales:*

$$\text{Números racionales}: \{\frac{m}{n},\ \ m,n \text{ enteros},\ \ n\neq 0\}$$

Ejemplos: $\frac{1}{2}$, $\frac{15}{14}$, $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$.
Todo número entero es racional pues $n=\frac{n}{1}$. El producto y cociente de números racionales es racional:

$$\frac{m}{n}\frac{m'}{n'}=\frac{mm'}{nn'},\quad \frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{mn'+m'n}{nn'},\quad n\neq 0,\ n'\neq 0$$

Los números racionales se expresan por medio de desarrollos decimales finitos o periódicos:

$$\frac{1}{2}=0,5\qquad \frac{1}{3}=0,333\ldots$$

Los números *irracionales* son aquellos que no pueden ser escritos como un cociente de números enteros, y su expresión decimal se caracteriza por un desarrollo infinito no periódico. De su existencia se tenía conocimiento ya en la antigüedad griega. Por ejemplo, las raíces de polinomios con coeficientes enteros o racionales pueden ser números irracionales, y puede demostrarse que $\sqrt{n}$, con n natural, es o bien entero o bien irracional. Ejemplos:

$$\sqrt{2}=1,414\ldots,\quad \pi=3,14159\ldots,\quad e=2,71828\ldots$$

(recordemos que geométricamente, $\sqrt{2}$ es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, y π la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro; el número $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots$ juega un rol importantísimo en el análisis matemático, como veremos más adelante).
Los irracionales son "muchos más" que los racionales, en el sentido de que no puede establecerse una correspondencia uno a uno entre racionales e irracionales. Notemos que los números

$$1,101100111000\ldots,\qquad 1,20220222022220\ldots$$

son también *irracionales.* En una clasificación más moderna, los irracionales pueden dividirse a su vez en computables y no computables, siendo los primeros todos aquellos para los cuales existe un "algoritmo" para calcularlos con un grado de precisión arbitraria.

El conjunto de los **números reales** (denotado por $\Re$) es el formado por la *unión* de los racionales y los irracionales. Posee ciertas propiedades básicas fundamentales que veremos más adelante. Trabajaremos en lo sucesivo siempre con números *reales.*

Recordemos muy brevemente las propiedades fundamentales de la suma y producto de números reales:

	Suma	Producto
Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a(bc)=(ab)c$
$\exists$ de elem. neutro	$a+0=0+a=a$	$a.1=1.a=a$
$\exists$ de inverso	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$aa^{-1}=a^{-1}a=1\ \ (a\neq 0)$
Conmutativa	$a+b=b+a$	$ab=ba$
Distributiva	a(b+c)=ab+ac	

A partir de estas se deducen todas las propiedades aritméticas restantes. La resta $a-b$ se *define* como $a+(-b)$, y la división a/b como $a.b^{-1}$, con $b\neq 0$. La división por 0 *no está definida.* Se deduce también que $(-a)(-b)=ab$, $(-a)b=-ab$, $a.0=0.a=0$.

1.1.2 Desigualdades

Postulado 1: Todo número real a es o bien positivo, o bien negativo, o bien 0. Estas posibilidades son mutuamente excluyentes. Además, si a es negativo, entonces $-a$ es positivo:

$$a \in \Re \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & \text{(positivo)} \\ a < 0 & \text{(negativo)} \\ a = 0 & \end{cases} \qquad a < 0 \;\Rightarrow\; -a > 0$$

Ejemplos: $2 > 0$, $-1 < 0$, $-\pi < 0$. Como $-2 < 0 \Rightarrow -(-2) = 2 > 0$.
En la representación geométrica de los números reales por medio de una recta, los números positivos están ubicados a la derecha de 0, y los negativos a la izquierda de 0.

Postulado 2: Dados dos números reales positivos, su suma y su producto son positivos:

$$\text{Si } a > 0, \quad b > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b > 0 \\ ab > 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $2 > 0$, $3 > 0 \Rightarrow 3 + 5 > 0$, $2.3 > 0$,

Orden entre dos números: Dados dos números reales a y b, se dice que a es mayor que b ($a > b$) si $a - b$ es positivo ($a - b > 0$). Análogamente, se dice que a es menor que b ($a < b$) si $a - b$ es negativo ($a - b < 0$). Es decir,

$$a > b \;\Leftrightarrow\; a - b > 0, \qquad a < b \;\Leftrightarrow\; a - b < 0$$

Notemos que $a > b$ es equivalente a $b < a$. En la representación geométrica de los reales, $a > b$ si a está ubicado a la derecha de b.
Ejemplos: $4 > 3$, $4 > -8$, $-3 > -4$, $-4 < -3$, $-3.5 < \pi$.
A partir de estos postulados se deducen todas las propiedades bien conocidas. Por ejemplo:
Si $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow ab > 0$, pues por el post. 1, $-a > 0$, $-b > 0$ y por el post. 2, $(-a)(-b) = ab > 0$.
Si $a > 0$, $b < 0 \Rightarrow ab < 0$, pues $-a > 0$ y entonces, $-a.b = -(a.b) > 0$, de donde $a.b < 0$.

Regla 0: Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c$.
(el signo de una desigualdad se conserva si se suma un mismo número arbitrario a ambos miembros)
Dem.: $a - b = a + c - c - b = a + c - (b + c) > 0$, de donde $a + c > b + c$.
Ejemplo: Si $x - 2 > \pi \Rightarrow x - 2 + 2 > \pi + 2$, de donde $x > \pi + 2$.

Regla 1: Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$.
Dem.: Como $a - b > 0$, $b - c > 0 \Rightarrow$ (por post. 2) $(a - b) + (b - c) > 0$, es decir, $a - b + b - c = a - c > 0$, de donde $a > c$.

Regla 2: Si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$
(el signo de una desigualdad se *conserva* al multiplicarla por un número *positivo*)
Dem.: Como $a - b > 0$ y $c > 0 \Rightarrow$ (por post. 2) $(a - b)c > 0$, es decir, $ac - bc > 0$, de donde $ac > bc$.
Ejemplo: Si $2x > 1 \Rightarrow \frac{1}{2}2x > \frac{1}{2}1$, es decir, $x > \frac{1}{2}$.

Regla 3: Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$
(el signo de una desigualdad se *invierte* al multiplicarla por un número *negativo*).
Dem.: Como $a - b > 0$ y $c < 0 \Rightarrow -c > 0$ y $(a - b)(-c) > 0$, es decir $-ac + bc > 0$, de donde $bc > ac$, o sea, $ac < bc$.
Ejemplos: $3 > 2$ pero $3(-1) < 2(-1)$, o sea, $-3 < -2$. $\;-3 < -2$, pero $-3(-1) > -2(-1)$, o sea, $3 > 2$.
Si $-2x > 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}(-2)x < -\frac{1}{2}1$, o sea, $x < -\frac{1}{2}$.

La notación

$$a \geq b$$

significa que a es mayor o igual que b. Análogamente, $a \leq b$ significa que a es menor o igual que b.
Ejemplos: $2 \geq 0$, $-2 \leq -1$, $2 \geq 2$, $-1 \leq -1$.
Las 4 reglas anteriores permanecen válidas si reemplazamos $>$ por $\geq$ y $<$ por $\leq$.

1.1.3 Valor Absoluto

Definición:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $|2| = 2$, $|0| = 0$, $|-2| = 2$. Por el post. 1, vemos que

$$|a| \geq 0 \quad \forall\, a$$

ya que si $a < 0$, $-a > 0$. Además,

$$|a| = |-a|, \qquad a \leq |a|$$

ya que si $a \geq 0$, $|a| = a$ y si $a < 0$, $|a| = -a > 0 > a$. Ejemplos: $2 \leq |2| = 2$, $-2 \leq |-2| = 2$.

Veamos a continuación algunos ejemplos de ecuaciones que contienen $|x|$:
1) Resolver $|x| = 2$.
Las raíces son obviamente $x = \pm 2$. Si $x > 0$, $|x| = x = 2$, y si $x < 0$, $|x| = -x = 2$, de donde $x = -2$.

2a) Resolver $|x - 2| = 1$.
Si $x - 2 > 0$, $|x - 2| = x - 2 = 1$, de donde $x = 3$.
Si $x - 2 < 0$, $|x - 2| = -(x - 2) = 1$, de donde $x - 2 = -1$, o sea, $x = 2 - 1 = 1$. Normalmente se escribe

$$|x - 2| = 1 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = \pm 1$$

de donde se obtienen inmediatamente las soluciones $x = 3$ y $x = 1$.
2b) Resolver

$$|x - b| = a, \qquad \text{con } a > 0$$

Si $x - b > 0$, $|x - b| = x - b = a$, de donde $x = b + a$.
Si $x - b < 0$, $|x - b| = -(x - b) = a$, de donde $x - b = -a$, o sea, $x = b - a$. Podemos escribir

$$x - b = \pm a$$

de donde se obtienen inmediatamente las soluciones $x = b \pm a$, es decir, $x = b + a$ o $x = b - a$.
Si $a < 0$, no existe ninguna solución, mientras que si $a = 0$, la única solución es $x = b$.
Notemos que $|a - b|$ puede interpretarse como la *distancia* entre a y b. Así, $|x - b| = a$, con $a > 0$, *es el conjunto de números situados a una distancia* a de b, es decir $x = b \pm a$.
Ejemplos: $|1 - 3| = |-2| = 2$, $|5 - (-2)| = |7| = 7$.

3a) Resolver $x + |x| = 2$.
Debemos considerar las posibilidades $x \geq 0$ y $x < 0$.
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y entonces, $2x = 2$, de donde $x = 1$.
Si $x < 0$, $|x| = -x$ y entonces $x - x = 2$, es decir $0 = 2$ (absurdo). Esto implica que x no puede ser negativo. Por lo tanto la única solución es $x = 2$.

3b) Resolver $2x + |x| = 2$.
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y entonces $2x + x = 2$, o sea, $3x = 2$, de donde $x = \frac{2}{3}$.
Si $x < 0$, $|x| = -x$ y entonces $2x - x = 2$, o sea, $x = 2$, lo que es absurdo pues hemos supuesto $x < 0$. Por lo tanto la única solución es $x = 2/3$.

3c) Resolver $\frac{1}{2}x + |x| = 2$.
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y entonces $\frac{1}{2}x + x = 2$, o sea, $\frac{3}{2}x = 2$, de donde $x = \frac{4}{3}$.
Si $x < 0$, $|x| = -x$ y entonces $\frac{1}{2}x - x = 2$, o sea, $-\frac{1}{2}x = 2$, de donde $x = -4$. Por lo tanto en este caso existen dos soluciones: $x = \frac{4}{3}$ y $x = -4$.

4) Resolver $x^2 = |x|$.
En este caso $x = 0$ es obviamente una solución.
Si $x > 0$, $|x| = x \neq 0$ y podemos dividir la ecuación por x, obteniendo $x = 1$.
Si $x < 0$, $|x| = -x \neq 0$ y podemos también dividir por x, obteniendo $x = -1$.
Existen pues 3 soluciones: $x = 0$ y $x = \pm 1$.

Recordemos que $a^2 = a.a > 0$ y que $(-a)^2 = (-a)(-a) = a.a = a^2$, de modo que

$$a^2 = (-a)^2 = |a|^2$$

La *raíz cuadrada* de un número $b > 0$ la definiremos, por convención, como aquel número *positivo* a tal que $a^2 = b$:

$$\sqrt{b} = a \quad \Rightarrow a^2 = b, \;\; a > 0$$

Ejemplo: $\sqrt{4} = 2$ (y no -2). Obtenemos entonces

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

ya que si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$, y si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a = |a|$.
Ejemplo: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$. $\quad \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = |3|$.
La ecuación $x^2 = 2$ es pues equivalente a $\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$, es decir, $|x| = \sqrt{2}$, de donde $x = \pm\sqrt{2}$.

Teorema 1: $|ab| = |a||b|$
Dem.: $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$.
El resultado es obvio ya que $|ab|$ no depende del signo de a o b. Ejemplos:
$|2.3| = |6| = 6 = 2.3 = |2||3|$, $\quad |(-2).(-3)| = |6| = 6 = |-2||-3|$, $\quad |(-2)3| = |-6| = 6 = |-2||3|$.
Ejemplo: Resolver $|-2x| = 4$.
Obtenemos $|-2x| = |-2||x| = 2|x|$, de donde $2|x| = 4$, es decir, $|x| = 2$, o sea, $x = \pm 2$.

Teorema 2: $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a| \leq |b|$
Dem.: Si $|a| \leq |b| \Rightarrow |a||a| \leq |b||a|$ y $|a||b| \leq |b||b|$, de donde $a^2 = |a|^2 \leq |b|^2 = b^2$. Análogamente, si $|a| > |b| \Rightarrow a^2 > b^2$. Por lo tanto, si $a^2 \leq b^2$ necesariamente $|a| \leq |b|$.
Esto implica que si ambos miembros de una desigualdad son *positivos* o nulos, la misma se conserva si tomamos las raíces de ambos miembros o si los elevamos al cuadrado.
Ejemplo: Como $4 > \pi \Rightarrow 2 > \sqrt{\pi}$ y $16 > \pi^2$.
Notemos, sin embargo, que no ocurre lo mismo si alguno de los miembros (o ambos) es negativo: $2 > -3$, pero $4 = 2^2 < (-3)^2 = 9$, pues $|2| < |-3| = 3$.

Teorema 3: $|a + b| \leq |a| + |b|$ $\quad$ (Desigualdad Triangular)
Dem.: Partiendo de la desigualdad $ab \leq |ab| = |a||b|$, obtenemos,

$$\begin{array}{rcl} 2ab & \leq & 2|a||b| \\ a^2 + b^2 + 2ab & \leq & a^2 + b^2 + 2|a||b| \\ (a+b)^2 & \leq & (|a| + |b|)^2 \end{array}$$

de donde, por el teorema anterior, $|a + b| \leq |a| + |b|$. La igualdad se cumple obviamente cuando a y b poseen el mismo signo ($a \geq 0$ y $b \geq 0$ o $a \leq 0$ y $b \leq 0$).
Notemos que también $|a - b| \leq |a| + |b|$
pues $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$. Ejemplos: $|2 + 3| = |5| = |2| + |5|$, $\quad |2 - 3| = |-1| = 1 \leq |2| + |-3| = 5$, $\quad |x - 4| \leq |x| + 4$.

Teorema 4: $\sqrt{|ab|} \leq \frac{|a|+|b|}{2}$.

Dem.: Como $(|a| - |b|)^2 \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| & \geq & 0 \\ |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| & \geq & 4|a||b| \\ (|a| + |b|)^2 & \geq & 4|ab| \end{array}$$

de donde $|a| + |b| \geq \sqrt{4|ab|} = 2\sqrt{|ab|}$. El teorema demuestra que el *promedio geométrico* $\sqrt{ab}$ de dos números positivos a, b es menor o igual que el promedio aritmético $\frac{a+b}{2}$. A partir de la demostración vemos también que el signo igual rige únicamente en el caso $|a| = |b|$.
Ejemplos: $4 = \sqrt{2.8} < \frac{2+8}{2} = 5$, $\sqrt{2} < \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.

1.1.4 Intervalos

El conjunto de números que satisfacen $a < x < b$ se denomina *intervalo abierto* entre a y b y se denota por (a, b). El conjunto de números que satisfacen $a \leq x \leq b$ se denomina *intervalo cerrado* entre a y b y se denota por $[a, b]$:

$$(a,b) = \{x \text{ t.q. } a < x < b\}, \qquad [a,b] = \{x \text{ t.q. } a \leq x \leq b\},$$

También se definen los conjuntos semicerrados $[a,b) = \{x \text{ t.q. } a \leq x < b\}$ y $(a,b] = \{x \text{ t.q. } a < x \leq b\}$. Los intervalos infinitos como $x > a$ o $x < a$, se denotan a veces como (a, ∞) y $(-\infty, a)$ respectivamente, y $x \geq a$, $x \leq a$, como $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$.

Ejemplo 1) Determinar el intervalo de valores de x que satisfacen $2 < 2x + 1 < 3$.
Tenemos $2 - 1 < 2x < 3 - 1$, es decir $1 < 2x < 2$, de donde $\frac{1}{2} < x < 1$. El intervalo es pues $(\frac{1}{2}, 1)$.
Ejemplo 2) Idem para $2 < -2x + 1 < 3$.
Tenemos $1 < -2x < 2$, de donde $-\frac{1}{2} > x > -1$, es decir, $-1 < x < -\frac{1}{2}$. El intervalo es $(-1, -\frac{1}{2})$.

Determinemos ahora el conjunto de números que satisfacen $|x| \leq a$, con $a > 0$.
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y obtenemos $0 \leq x \leq a$.
Si $x < 0$, $|x| = -x > 0$, obteniendo $0 < -x \leq a$ o sea, $-a \leq x < 0$.
El conjunto total es pues el intervalo $-a \leq x \leq a$, es decir, el *intervalo cerrado* $[-a, a]$. Por lo tanto,

$$|x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a \quad (a > 0)$$

o sea, $x \in [-a, a]$. Análogamente,

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \quad (a > 0)$$

El conjunto de números que satisfacen $|x| < a$ es pues el *intervalo abierto* $(-a, a)$.
Geométricamente, como $|x| = |x - 0|$, $|x| \leq a$ es el conjunto de números situado a una distancia menor o igual a a del origen 0. Notemos que si $a < 0$, no existe ningún x que satisfaga $|x| \leq a$, mientras que si $a = 0$, $|x| \leq a = 0$ es satisfecha sólo por $x = 0$.
De igual forma,

$$|x - b| \leq a \;\; \Leftrightarrow -a \leq x - b \leq a \qquad (a > 0)$$

de donde $b - a \leq x \leq b + a$, es decir $x \in [b - a, b + a]$. Análogamente,

$$|x - b| < a \;\; \Leftrightarrow -a < x - b < a \qquad (a > 0)$$

de donde $b - a < x < b + a$, o sea, $x \in (b - a, b + a)$.

Ejemplo 3: Determinar el intervalo de valores de x que satisfacen $|x - 2| \leq 1$.
Obtenemos $-1 \leq x - 2 \leq 1$, de donde $1 \leq x \leq 3$. El intervalo es $[1, 3]$.
Ejemplo 4) Idem para $|-2x + 1| < 2$.
Tenemos $-2 < -2x + 1 < 2 \Rightarrow -3 < -2x < 1$, de donde $\frac{3}{2} > x > -\frac{1}{2}$, es decir, $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$. El intervalo es $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Consideremos ahora el conjunto de números que satisfacen $|x| \geq a$, con $a > 0$.
Si $a \leq 0$, $|x| \geq a$ es satisfecha $\forall\, x$, de modo que el caso no trivial corresponde a $a > 0$.
Si $x > 0$, $|x| = x$ y obtenemos $x \geq a$. Si $x < 0$, $|x| = -x$ y obtenemos $-x \geq a$, o sea, $x \leq -a$. El conjunto total es pues la *unión* de los conjuntos $x \geq a$ y $x \leq -a$, es decir, $x \in [-\infty, -a] \cup [a, \infty]$:

$$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a, \;\text{ o }\; x \leq -a \quad (a > 0)$$

Análogamente,

$$|x| > a \Rightarrow x > a, \;\text{ o }\; x < -a \quad (a > 0)$$

es decir, $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$. Geométricamente, $|x| \geq a$ son los puntos situados a una distancia mayor o igual a a del origen. Notemos que es absurdo escribir $-a \geq x \geq a$, con $a > 0$, pues ambas desigualdades no pueden ser satisfechas simultáneamente. En general,

$$|x - b| \geq a \quad \Rightarrow \quad x - b \geq a \;\text{ o }\; x - b \leq -a \quad (a > 0)$$

que implica $x \geq b + a$ o $x \leq b - a$, es decir, $x \in (-\infty, b - a] \cup [b + a, \infty)$.

Ejemplo 5) Determinar los x que satisfacen $|x-1|>1$.
Obtenemos $x-1>1$ o $x-1<-1$, de donde $x>2$ o $x<0$. El conjunto es pues $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.
6) Idem para $|-2x-1|\geq 1$.
Obtenemos $-2x-1\geq 1$ o $-2x-1\leq -1$, es decir, $-2x\geq 2$ o $-2x\leq 0$, de donde $x\leq -1$ o $x\geq 0$. El conjunto es pues $(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$.

Consideremos ahora algunos ejemplos adicionales de desigualdades que contienen $|x|$.
1) Hallar el conjunto de valores de x que satisfacen $(x-3)(x+1)>0$.
Si el producto es positivo $\Rightarrow$ o bien ambos términos son positivos o bien ambos negativos. En el primer caso, debe cumplirse

$$x-3>0 \ \text{y}\ x+1>0$$

de donde $x>3$ y $x>-1$, es decir $x>3$, pues ambas condiciones deben cumplirse *simultáneamente* (podemos ver esto también escribiendo $(3,\infty)\cap(-1,\infty)=(3,\infty)$, donde $\cap$ denota la intersección). En el segundo caso,

$$x-3<0 \ \text{y}\ x+1<0$$

de donde $x<3$ y $x<-1$, es decir $x<-1$ ($(-\infty,-1)\cap(-\infty,3)=(-\infty,-1)$).
El conjunto total de valores es pues $x<-1$ o $x>3$, es decir, $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.

2) Idem para $(x-3)(x+1)\leq 0$.
Por el problema anterior sabemos que la respuesta es el conjunto complementario $-1\leq x\leq 3$, es decir, el intervalo $[-1,3]$. Veámoslo en forma directa. Para que el producto sea ≤ 0, deben ser un término positivo (o 0) y el otro negativo (o 0). Entonces,

$$x-3\leq 0 \ \text{y}\ x+1\geq 0, \quad \text{o} \quad x-3\geq 0 \ \text{y}\ x+1\leq 0$$

En el primer caso, obtenemos $x\leq 3$ y $x\geq -1$, de donde $-1\leq x\leq 3$. En el segundo, $x\geq 3$ y $x\leq -1$, lo que es imposible. Por lo tanto el conjunto es $-1\leq x\leq 3$.

3) Idem para $x^2-2x\leq 3$.
Tenemos $x^2-2x-3\leq 0$. Como $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ (pues las raíces de $x^2-2x-3=0$ son $x=3$ y $x=-1$), el problema se reduce a $(x-3)(x+1)\leq 0$, que es el ejemplo anterior.

4) Idem para $|x+1|\leq|x|$.
Si $x\geq 0$, $|x|=x\Rightarrow|x+1|\leq x$. En tal caso $x+1\geq 0$ y por tanto, $x+1\leq x$, es decir $1\leq 0$, lo que es absurdo. Por lo tanto x no puede ser positivo o nulo.
Si $x<0$, $|x|=-x\Rightarrow|x+1|\leq -x$.
En tal caso, si $x+1\geq 0$, o sea, $x\geq -1$, $\Rightarrow|x+1|=x+1\leq -x$, de donde $2x+1\leq 0$, es decir, $x\leq -\frac{1}{2}$.
Obtenemos pues $-1\leq x\leq -\frac{1}{2}$.
Si $x+1<0$, o sea $x<-1$, $\Rightarrow|x+1|=-(x+1)\leq -x$, es decir, $-1\leq 0$. La desigualdad se cumple en este caso para todo $x<-1$.
El conjunto total es pues $x\leq -\frac{1}{2}$, es decir, el intevalo $(-\infty,-\frac{1}{2}]$.
Podemos obtener el mismo resultado rápidamente de la siguiente forma: Como $|x|\geq 0$, $|x+1|\geq 0$, podemos elevar al cuadrado, obteniendo $(x+1)^2\leq x^2$, de donde $2x+1\leq 0$, es decir, $x\leq -\frac{1}{2}$.

5) Idem para $|x+1|\leq|x|+1$.
La desigualdad es satisfecha obviamente $\forall\ x$ por el teorema 3 (desigualdad triangular). Puede comprobárselo directamente considerando los casos $x\geq 0$, $-1\leq x\leq 0$ y $x<-1$.

1.2 Funciones

1.2.1 Introducción

Sea D un conjunto de números. Una función f definida en D es una asociación que asigna a *cada* elemento x de D un número $f(x)$. D se denomina **dominio** de la función. Ejemplos:

$$f(x) = x^2, \quad D = \Re$$

es la función que asigna a cada número real el cuadrado del mismo y

$$f(x) = |x|, \quad D = \Re$$

la que asigna a cada número real el valor absoluto del mismo. Las funciones pueden ser arbitrarias y estar definidas de muchas formas. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es una función con dominio real que asigna a x el valor 1 si x es racional y 0 si es irracional.
El domino puede ser cualquier tipo de conjunto de números reales. Las funciones anteriores pueden estar definidas en cualquier subconjunto de los reales. En cambio

$$f(x) = 1/x, \quad x \neq 0$$

no tiene sentido para $x = 0$, pues la división por 0 no está definida. El **dominio natural** es el mayor conjunto de números reales en el cual la función tiene sentido. Así, el domino natural de $f(x) = 1/x$ es $x \neq 0$, es decir, todos los reales distintos de 0 (denotado a veces como $\Re_0$). El dominio natural de $f(x) = \sqrt{x}$ es $x \geq 0$, es decir, $D = [0, \infty)$, pues $\sqrt{x}$ no está definida para $x < 0$ (dentro del conjunto de números reales).

Ejemplo: Hallar el dominio natural de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
Debe cumplirse $1 - x^2 \geq 0$, es decir, $x^2 \leq 1$, de donde $|x| \leq 1$, o sea $-1 \leq x \leq 1$. El dominio natural es pues $D = [-1, 1]$.

No obstante, en muchos casos prácticos resulta útil definir la función sólo en un cierto subconjunto del dominio natural, que llamaremos dominio de interés. En lugar de f y x puede utilizarse también cualquier letra o símbolo que resulte más apropiada en el contexto pertinente. Por ejemplo, la velocidad de un objeto móvil será una cierta función del tiempo t, que puede escribírsela como $v(t)$. Análogamente,

$$A(r) = \pi r^2$$

es la función que relaciona el área de una circunferencia con su radio r. En este caso el dominio de interés es $r > 0$, aunque el dominio natural es $\Re$.

Ejemplo 1: Hallar la función que expresa el área de una circunferencia en términos del perímetro p de la misma. Como $p = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{2\pi}$ y $\pi r^2 = \pi(\frac{p}{2\pi})^2 = \frac{p^2}{4\pi}$. Por lo tanto,

$$A(p) = \frac{p^2}{4\pi}, \quad p > 0$$

Ejemplo 2: Hallar la función que expresa el área de un cuadrado en términos del perímetro p del mismo.
Como $A = l^2$ y $p = 4l$, donde l es la longitud del lado del cuadrado $\Rightarrow l = p/4$ y $A = (p/4)^2$, es decir,

$$A(p) = \frac{p^2}{16}, \quad p > 0$$

(Notemos que como $\pi < 4$, $4\pi < 16$ y por lo tanto, $\frac{p^2}{4\pi} > \frac{p^2}{16}$ si $p \neq 0$. A igual perímetro, el área de la circunferencia es pues *mayor* que el área del cuadrado. Puede demostrarse que para un dado perímetro, el mayor área posible se consigue justamente para la circunferencia, lo que puede resultar obvio para algunos lectores por cuestiones de simetría o curvatura. Notemos también que en todos los casos el área es una función *cuadrática* de una longitud (el radio, lado o perímetro)).

1.2.2 Suma, producto y composición de funciones:

Sean D_f y D_g el dominio natural de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. Su suma y producto se define obviamente como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x)g(x)$$

siendo el dominio natural de ambas el conjunto $D = D_f \cap D_g$. El dominio natural del cociente

$$(f/g)(x) = (f.\frac{1}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

es obviamente $D = D_f \cap D_{1/g}$, donde $D_{1/g} = \{x \text{ t.q. } x \in D_g \text{ y } g(x) \neq 0\}$ es el dominio de $1/g(x)$.
La *composición* de funciones se define como

$$(f_\circ g)(x) = f(g(x))$$

y su dominio natural es el conjunto de números de D_g tales que $g(x) \in D_f$, es decir, $D = \{x \text{ t.q. } x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$.

Ejemplo: Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$, $\Rightarrow D_f = [0, \infty)$, $D_g = \Re_0$ y

$$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 1, \quad D = (0, \infty)$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{x}(\frac{1}{x^2} - 1), \quad D = (0, \infty)$$

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x^2} - 1}, \qquad D = \{x \text{ t.q. } x > 0,\ x \neq 1\} = (0,1) \cup (1, \infty)$$

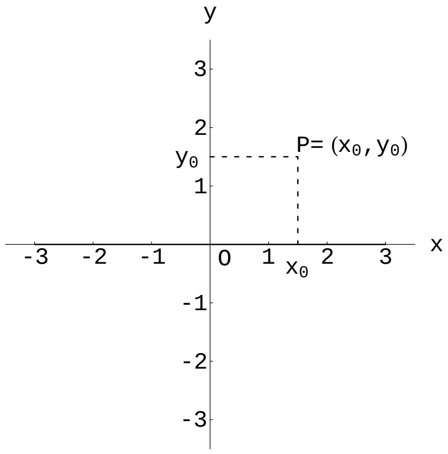
$$(f_\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}, \quad D = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

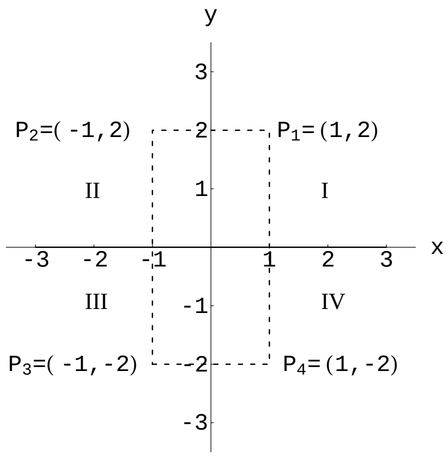
En el último caso el dominio son los x tales que $g(x) \geq 0$, es decir, $\frac{1}{x^2} \geq 1$. Si $x \neq 0$, obtenemos la condición $x^2 \leq 1$, es decir $-1 \leq x \leq 1$, con $x \neq 0$, que es el dominio indicado.

1.2.3 Representación gráfica de funciones

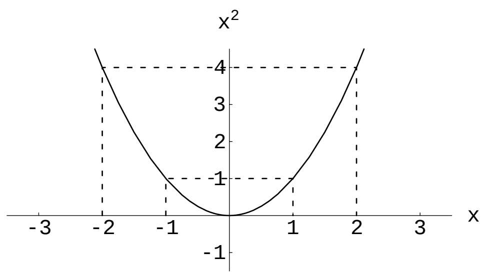
Para representar puntos en el plano trazaremos dos ejes perpendiculares, que se cortarán en un punto llamado *origen* (O). El eje horizontal se denomina usualmente eje x y el vertical eje y. Dado un punto P del plano, la perpendicular desde P hasta el eje x intersecta a este en un punto x_0 denominado *abscisa*, mientras que la perpendicular desde P hasta el eje y intersecta a este en un punto y_0 denominado *ordenada*. El punto determina de este modo un par de números (x_0, y_0) denominados *coordenadas cartesianas* del punto. Análogamente, todo par de números reales (x_0, y_0) determina de esta forma un punto $P = (x_0, y_0)$ del plano (ver figura izq.)

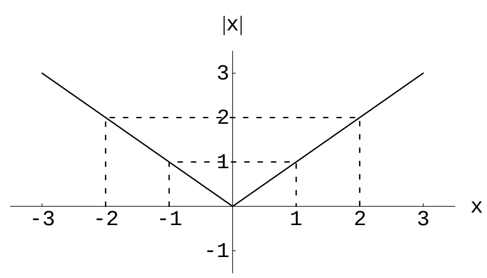
Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes. En el cuadrante I, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, en el II, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, en el III, $x_0 < 0$, $y_0 < 0$ y en el IV, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. En la fig. derecha se representan los puntos $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (-1, -2)$ y $P_4 = (1, -2)$, situados en los cuadrantes *I*, *II*, *III* y *IV* respectivamente.





La **gráfica** de una función $f(x)$ *es el conjunto de puntos* $(x, f(x))$ con $x \in D$. En la figura se representa gráficamente las funciones x^2 y $|x|$. Veremos a lo largo del curso diversas técnicas que permitirán predecir y analizar en detalle el gráfico de una función. Por el momento las gráficas pueden realizarse en forma aproximada a partir de una tabla o conjunto de valores $(x, f(x))$, para algunos $x \in D$. En particular, si $0 \in D$, el punto $(0, f(0))$ es aquel donde la gráfica corta al eje y (pues $x = 0$), mientras que las raíces de la ecuación $f(x_0) = 0$ determinan los puntos $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 0)$ donde la gráfica cortará al eje x. Podemos ver también que para las funciones de la figura $f(x) = f(-x)$ y que tanto x^2 como $|x|$ toman valores arbitrariamente grandes para x grande.





No toda función da lugar a una curva continua fácilmente representable como las anteriores (veremos luego el significado preciso de continuidad). En particular, la función $f(x) = 1$ si x es racional y 0 si es irracional, no es continua *en ningun punto.* Si bién la representación gráfica tendría el aspecto visual de dos rectas horizontales ($f(x) = 1$ y $f(x) = 0$), estas no estarían "llenas", pues faltan los puntos con abscisa irracional en la superior y los de abscisa racional en la inferior. Nos ocuparemos en lo sucesivo de funciones continuas en un cierto intervalo, con la posible excepción de un número finito (o discreto) de puntos.

Si conocemos la gráfica de $f(x)$, es muy fácil realizar el gráfico de las funciones $f(x)+a$, $f(x-a)$, $af(x)$, $f(x/a)$, con a constante, no siendo necesario realizar un nuevo estudio de las mismas, como veremos a continuación.

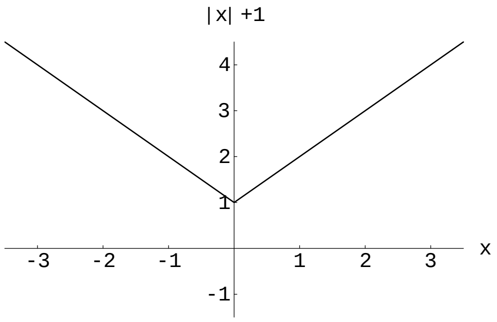
Traslaciones:
La gráfica de la función

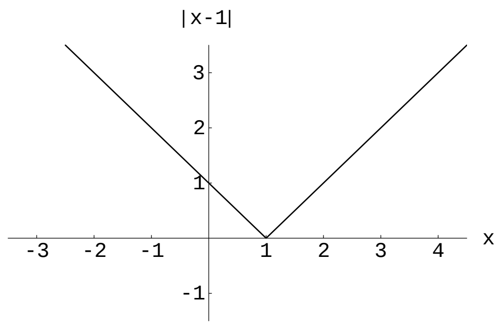
$$g(x) = f(x) + a$$

es la **traslación vertical** de la gráfica de $f(x)$ en una cantidad a (hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$). El dominio natural de g es obviamente el mismo que el de f: $D_g = D_f$.
La gráfica de

$$g(x) = f(x - a)$$

corresponde a una **traslación horizontal** de la gráfica de $f(x)$ en una magnitud a (hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$), pues $g(x + a) = f(x)$. En este caso, el dominio natural también es trasladado. Por ejemplo, si $D_f = [b, c] \Rightarrow D_g = [b + a, c + a]$ (pues debe cumplirse $b \leq x - a \leq c$, de donde $b + a \leq x \leq c + a$).
La gráfica de $g(x) = f(x - a) + b$ corresponde entonces a una traslación horizontal de magnitud a y vertical de magnitud b, de la gráfica de f. En la figura, se muestran las gráficas de $|x| + 1$ y $|x - 1|$.

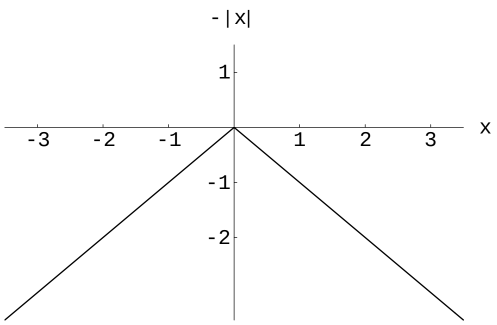


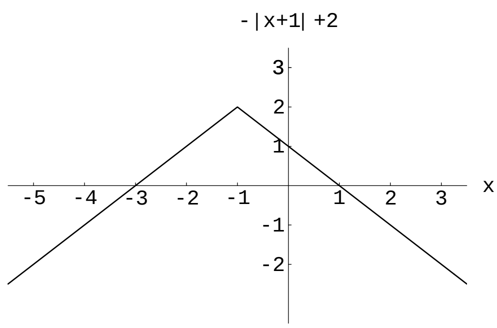


Reflexiones:
La gráfica de

$$g(x) = -f(x)$$

es la gráfica de $f(x)$ **reflejada respecto del eje** x (o sea, “invertida”). En este caso $D_f = D_g$.
Se muestran en la figura las gráficas de $-|x|$ y $-|x + 1| + 2$. La última es la gráfica de $|x|$ a) invertida respecto del eje x, b) trasladada horizontalmente 1 unidad hacia la izquierda ($x + 1 = x - (-1)$) y c) trasladada verticalmente hacia arriba 2 unidades.

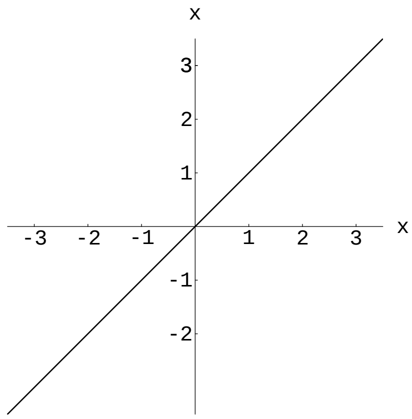


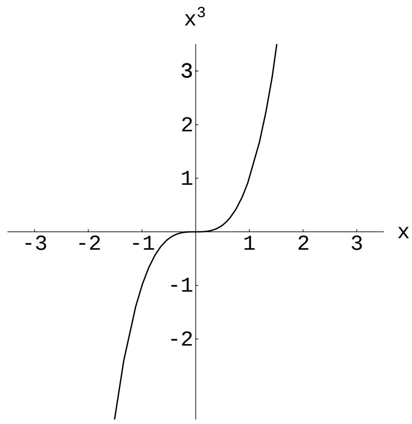


La gráfica de

$$g(x) = f(-x)$$

es la gráfica de $f(x)$ **reflejada respecto del eje** y (el eje vertical), pues $g(-x) = f(x)$. En este caso, si $D_f = [b, c]$, $D_g = [-c, -b]$ (pues debe cumplirse $b \leq -x \leq c$, de donde $-c \leq x \leq -b$).
Si $f(-x) = f(x)$, se dice que la función es *par*, y su gráfica resulta *simétrica* respecto del eje y. Por ejemplo $f(x) = x^2$, y $f(x) = |x|$ son funciones pares (pues $(-x)^2 = x^2$, $|-x| = |x|$). Si $f(-x) = -f(x)$ se dice que la función es *impar*. En este caso la gráfica resulta “antisimétrica” respecto del eje y, es decir, de signo opuesto. Por ejemplo, $f(x) = x$, y $f(x) = x^3$ son funciones impares.





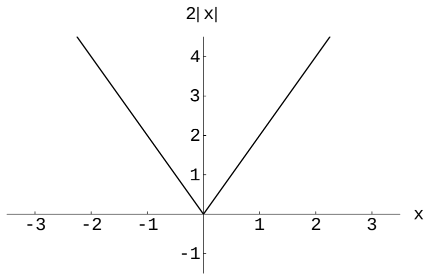
Dilataciones:
La gráfica de

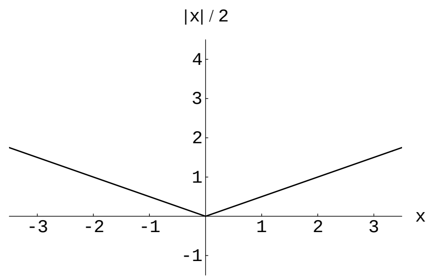
$$g(x) = af(x), \quad a > 0$$

es la **dilatación vertical** de magnitud a de la gráfica de $f(x)$. Si $a > 1$, es una dilatación propiamente dicha, mientras que si $0 < a < 1$, corresponde a una *contracción*. En este caso $D_g = D_f$.
La gráfica de

$$g(x) = f(x/a) \quad a > 0$$

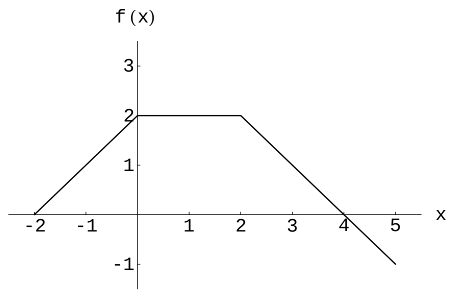
corresponde a una **dilatación horizontal** de magnitud a de la gráfica de $f(x)$, pues $g(ax) = f(x)$. Si $a > 1$, es una dilatación propiamente dicha mientras que si $0 < a < 1$ corresponde a una *contracción*. En este caso el dominio natural resulta también dilatado (o contraído). Por ejemplo, si $D_f = [b, c]$, $\Rightarrow$ $D_g = [ab, ac]$ (pues debe cumplirse $b \leq x/a \leq c$, o sea, $ab \leq x \leq ac$).
Se muestra en la figura la gráfica de $2|x|$, que es la gráfica de $|x|$ dilatada verticalmente. y la de $|x|/2$, que es la de $|x|$ contraída verticalmente. Puede verse también esta última como una dilatación horizontal de la gráfica de $|x|$, pues $|x|/2 = |x/2|$.



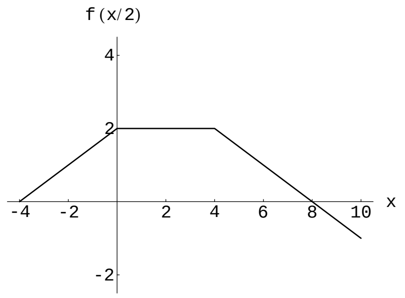


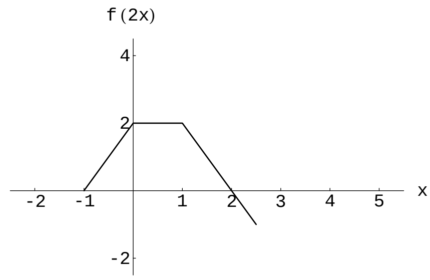
Ejemplo: Consideremos la función de dominio $D = [-2, 5]$, definida por

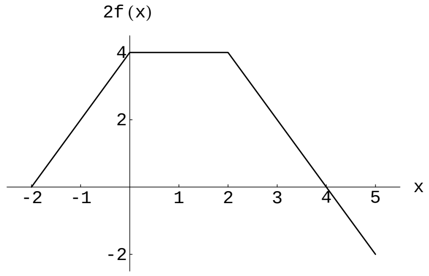
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & -2 \leq x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 2 \\ -x + 4 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

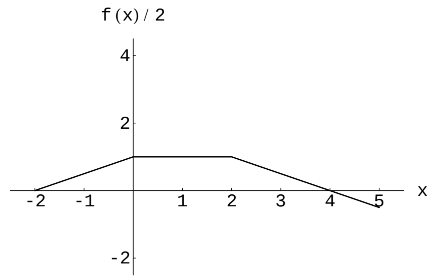


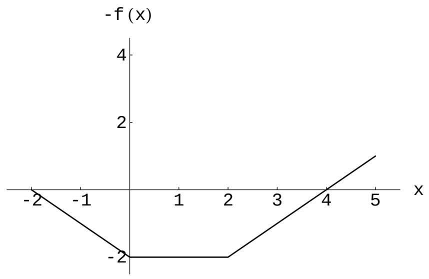
Mostraremos a continuación algunas gráficas relacionadas. Notemos que $f(2x) = f(x/(1/2))$ corresponde a una contracción horizontal, con dominio $D = [-1, \frac{5}{2}]$, mientras que $f(x/2)$ a una dilatación horizontal, con dominio $D = [-4, 10]$.

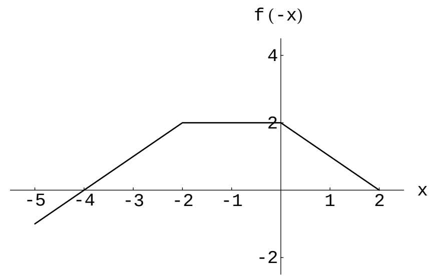












1.2.4 Funciones lineales y rectas

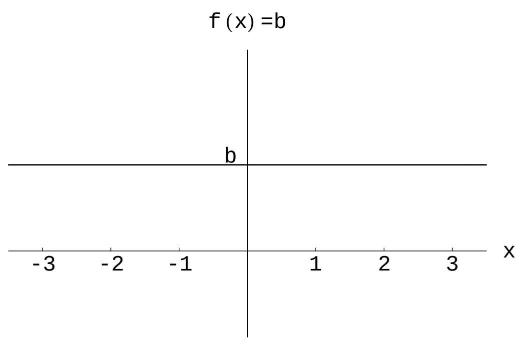
Una función lineal de x es una función de la forma

$$f(x) = ax + b, \quad x \in \Re$$

Caso $a = 0$: Si $a = 0$, obtenemos *la función constante*

$$f(x) = b, \ \ x \in \Re$$

cuya gráfica es obviamente una *recta horizontal.*



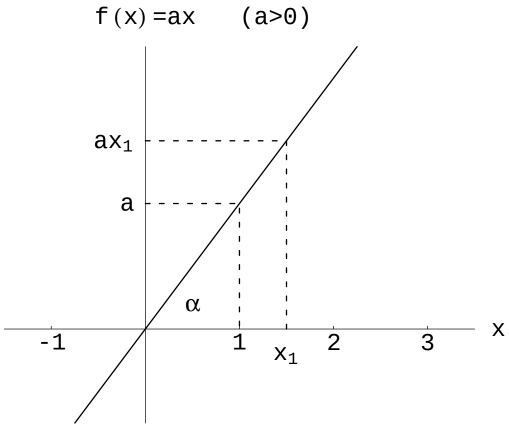
Consideremos ahora $a \neq 0$ y $b = 0$, es decir,

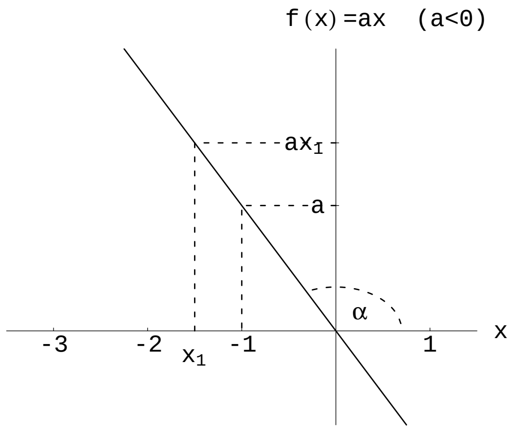
$$f(x) = ax, \quad a \neq 0, \quad x \in \Re$$

La gráfica de esta función es una *recta* que pasa por el origen, ya que $f(0) = 0$ y el cociente $f(x)/x = a$ es *constante* $\forall x \neq 0$ (ver figura). La constante a se denomina **pendiente**, pues determina la inclinación de la recta, es decir el ángulo α que forma la recta con el eje horizontal. Geométricamente, vemos que la *tangente* de dicho ángulo coincide con a:

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a, \quad x \neq 0$$

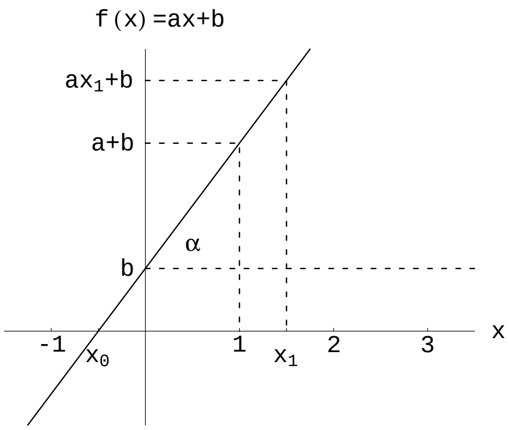
Si $a > 0 \Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, mientras que si $a < 0$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.



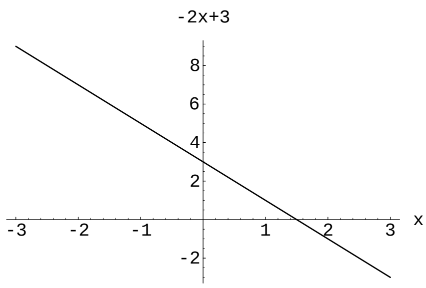


Consideremos ahora el caso general con $a \neq 0$, $b \neq 0$. La gráfica será la de la función *ax trasladada* verticalmente en una cantidad b, es decir, una recta que pasa por el punto $(0, b)$ (pues $f(0) = b$). La constante b es entonces la *ordenada al origen*, es decir el punto donde la recta interseca el eje y. Además, la recta interseca el eje x en un punto x_0 donde $f(x_0) = 0$, es decir

$$ax_0 + b = 0, \quad \Rightarrow x_0 = -b/a$$



Para graficar una recta basta con determinar dos puntos de la misma (por ejemplo, $(0, b)$ y $(x_0, 0)$).
Ejemplo: graficar $f(x) = -2x + 3$. Se trata de una recta de pendiente negativa $a = -2$ y ordenada al origen $b = 3$. Cruza al eje x en $x_0 = -3/(-2) = 3/2$. Dos puntos de la misma son $(0, 3)$ y $(3/2, 0)$.



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Una recta queda completamente determinada dando dos puntos distintos de la misma. Determinemos entonces la función lineal cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$ (si $x_1 = x_2$, se trata de una recta vertical cuya ecuación veremos en breve). Se debe satisfacer el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

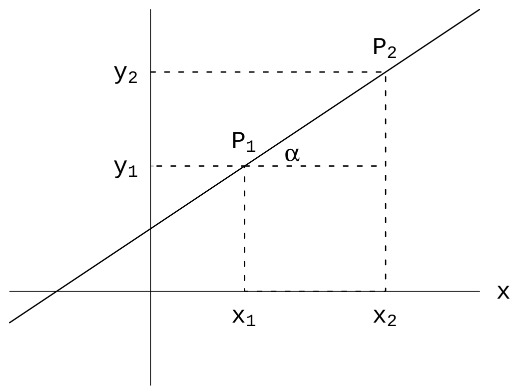
$$\begin{cases} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{cases}$$

Restando, obtenemos

$$a(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$

de donde

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2 \tag{1}$$



La ecuación (1) nos da la pendiente $a = \tan(\alpha)$ de la recta que pasa por P_1, P_2. Obviamente no depende del orden en que tomemos los puntos. Finalmente, de $ax_1 + b = y_1$ obtenemos

$$b = -ax_1 + y_1$$

La función $f(x)$ puede escribirse pues como $f(x) = ax - ax_1 + y_1$, es decir,

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1$$

o equivalentemente, como $f(x) = a(x - x_2) + y_2$, con a dado por (1).

Ejemplo: Determinar la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-2, -7)$. Obtenemos

$$a = \frac{2 - (-7)}{1 - (-2)} = \frac{9}{3} = 3$$

La función es pues

$$f(x) = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1$$

Puede obtenerse el mismo resultado resolviendo el sistema de ecuaciones $\{\begin{smallmatrix} a+b=2 \\ -2a+b=-7 \end{smallmatrix}$, cuya solución es $a = 3$, $b = -1$.

1.2.5 Funciones cuadráticas y parábolas

Consideremos ahora una función *cuadrática* de x, es decir,

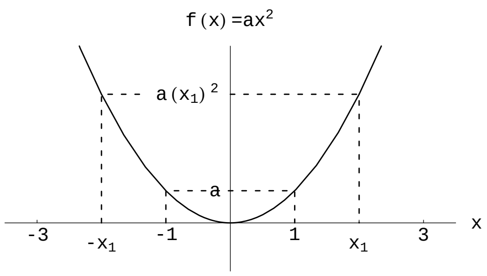
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

La gráfica de este tipo de funciones se denomina *parábola*. Comenzaremos tratando el caso más sencillo $b = c = 0$, o sea,

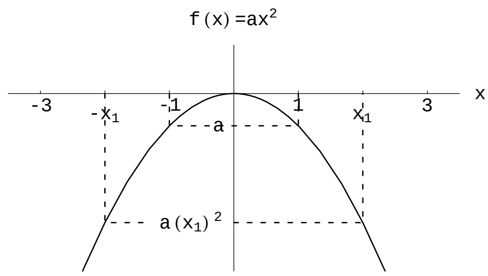
$$f(x) = ax^2, \;\; a \neq 0$$

En este caso $f(x)$ es una función *par* ($f(x) = f(-x)$), con $f(0) = 0$ y, si $x \neq 0$, $f(x) > 0$ si $a > 0$ y $f(x) < 0$ si $a < 0$ (ver figura). Si $a > 0$, resulta entonces una parábola hacia arriba y si $a < 0$ hacia abajo, en ambos casos con *vértice* en el origen (mínimo absoluto de la función si $a > 0$ y máximo absoluto si $a < 0$). $|a|$ determina la "abertura" de la parábola (cuanto mayor sea $|a|$, la parábola resulta más cerrada pues crece más rápidamente en valor absoluto).

$a > 0$



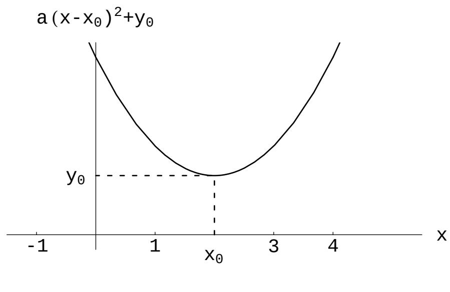
$a < 0$



El caso general se resuelve *completando cuadrados*. Recordando que $(d+e)^2 = (d+e)(d+e) = d^2 + 2de + e^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + 2(\frac{b}{2a})x) + c & (2)\\ &= a(x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c & (3)\\ &= a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c & (4)\\ &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c & (5)\\ &= a(x - x_0)^2 + y_0, \quad x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} & (6) \end{aligned}$$

La gráfica corresponde pues a una parábola *trasladada horizontalmente* en x_0 y *verticalmente* en y_0, es decir *con vértice en* (x_0, y_0). Si $a > 0$, la parábola posee en *mínimo* en el vértice, es decir en $x = x_0$, mientras que si $a < 0$, la parábola posee un *máximo* en el vértice, con $f(x_0) = y_0$.



Se deduce también por medio de este método la conocida fórmula para resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (7)$$

cuyas raíces, si son reales, representan los puntos donde la parábola cruza el eje x (las raíces complejas corresponden al caso de que la parábola no cruza el eje x). En efecto, por medio de (6) podemos reescribir

(7) como

$$a(x-x_0)^2+y_0=0 \Rightarrow (x-x_0)^2=-y_0/a, \quad a\neq 0$$

de donde

$$x=x_0\pm\sqrt{-y_0/a}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{8}$$

Las raíces son reales si $b^2-4ac>0$, es decir, si $y_0/a<0$.

Ejemplo: Graficar $f(x)=-x^2+2x+2$.

$$f(x)=-(x^2-2x)+2=-(x^2-2x+1-1)+2=-((x-1)^2-1)+2=-(x-1)^2+3$$

por lo que la gráfica de $f(x)$ corresponde a una parábola hacia abajo con vértice en $(x_0,y_0)=(1,3)$, que cruza el eje x en $x=1\pm\sqrt{3}$. Podemos verificar el resultado utilizando las fórmulas (6) (aunque no es recomendable recordarlas; sólo es necesario recordar el procedimiento). En este caso $a=-1$, $b=2$, $c=2$ y $x_0=\frac{-b}{2a}=1$, $y_0=-\frac{b^2}{4a}+c=3$.

Ejemplo 2: Hallar la función cuya gráfica es la parábola con vértice en $(x_0,y_0)=(-1,-2)$ que pasa por $(0,0)$.
Por (6), la parábola es de la forma

$$f(x)=a(x-(-1))^2+(-2)=a(x+1)^2-2$$

Para determinar a, utilizamos la condición $f(0)=0$, es decir $a-2=0$, de donde $a=2$. La función es pues $f(x)=2(x+1)^2-2$.

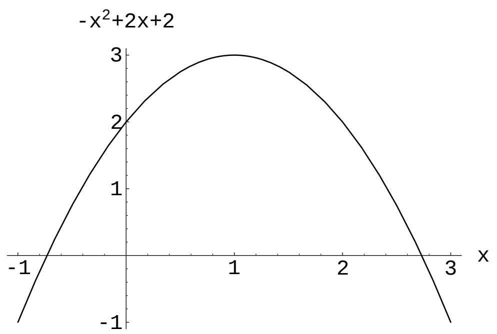
Ejemplo 3: La altura de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba está dada en función del tiempo por

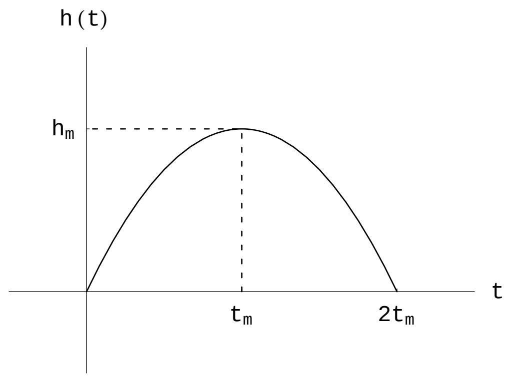
$$h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \qquad 0\leq t\leq t_f$$

donde $g>0$ es la aceleración de la gravedad y $v_0>0$ la velocidad inicial. Graficar $h(t)$ y determinar a) la altura máxima h_m y b) el tiempo t_f para el cual el proyectil cae nuevamente al suelo. Obtenemos

$$h(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t=-\frac{1}{2}g(t^2-2\frac{v_0}{g}t)=-\frac{1}{2}g(t^2-2\frac{v_0}{g}t+\frac{v_0^2}{g^2}-\frac{v_0^2}{g^2})=-\frac{1}{2}g(t-\frac{v_0}{g})^2+\frac{v_0^2}{2g}$$

La gráfica corresponde pues a una parábola hacia abajo con vértice en $(t_m,h_m)=(\frac{v_0}{g},\frac{v_0^2}{2g})$. La altura máxima es pues $h_m=\frac{v_0^2}{2g}$, y se alcanza al tiempo $t_m=\frac{v_0}{g}$. Las raíces de $h(t)=0$ son $t=0$ (instante inicial) y $t=\frac{2v_0}{g}=2t_m$, que es el instante final t_f en el cual el proyectil case nuevamente al suelo.





1.2.6 Potencias

Recordemos que

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ veces}}, \quad n \text{ natural.}$$

Se satisface obviamente

$$x^{n+m} = x^n x^m.$$

Las potencias de exponentes nulos, negativos y racionales se definen de forma que la propiedad anterior continúe siendo válida. Por ejemplo, si $x \neq 0$,

$$x^n = x^{0+n} = x^0 x^n, \ \Rightarrow x^0 = 1$$

$$1 = x^0 = x^{-n+n} = x^{-n} x^n, \ \Rightarrow x^{-n} = 1/x^n$$

Para $x > 0$, tenemos además

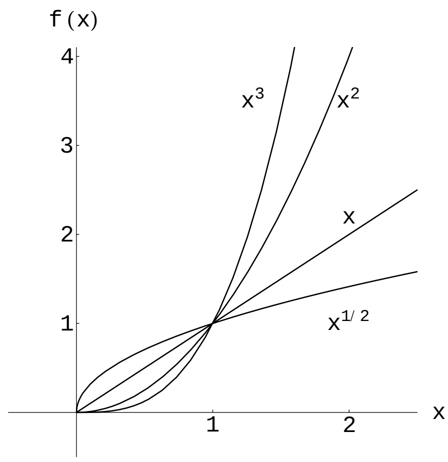
$$x = x^{n/n} = x^{\overbrace{1/n+\ldots+1/n}^{n \text{ veces}}} = \overbrace{x^{1/n} \ldots x^{1/n}}^{n \text{ veces}} = (x^{1/n})^n, \ \Rightarrow x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{m/n} = x^{\overbrace{1/n+\ldots+1/n}^{m \text{ veces}}} = \overbrace{x^{1/n} \ldots x^{1/n}}^{m \text{ veces}} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m$$

lo que nos permite definir x^q para cualquier q racional si $x > 0$. Mas adelante estudiaremos estas funciones en detalle y las extenderemos para todo exponente real. Por el momento, comentamos algunos casos y comportamientos típicos.

Consideremos la gráfica de x^n, con $n \geq 1$ natural. La función es par si n es par e impar si n es impar, por lo que su gráfica será simétrica si n es par (y antisimétrica si n es impar) respecto del eje y. Para $x > 1$, multiplicando por x^{n-1} obtenemos $x^n > x^{n-1}$, de modo que cuanto más grande sea n, la función será cada vez mayor, creciendo más rápidamente al aumentar x. Por otro lado, para $0 < x < 1$, multiplicando por x^{n-1} obtenemos $0 < x^n < x^{n-1}$. La función se hace en esta región más pequeña al aumentar n, creciendo más lentamente con x para x cercano a 0.

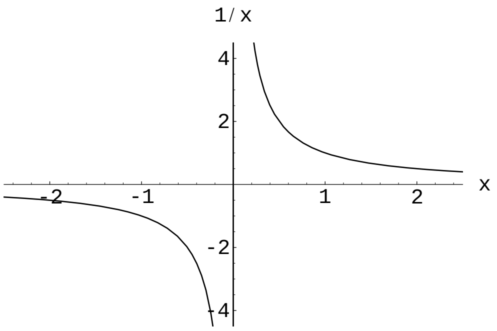
Consideremos ahora $\sqrt{x}$ (o sea, $x^{1/2}$). Si $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1$. Multiplicando por $\sqrt{x}$ obtenemos $x > \sqrt{x}$. La raíz cuadrada permanece pues menor que x para $x > 1$, creciendo más lentamente al aumentar x. En cambio, si $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < 1$. Multiplicando por $\sqrt{x}$ obtenemos $0 < x < \sqrt{x}$. La raíz es pues mayor que x para $0 < x < 1$, creciendo más rápidamente con x para x cercano a 0. En general, para n natural, al aumentar n, $x^{1/n}$ crece cada vez más lentamente para $x > 1$ y más rapidamente para x cercano a 0. Se muestran en la figura las gráficas comparadas de $\sqrt{x}$, x, x^2 y x^3 en el dominio $x \geq 0$.

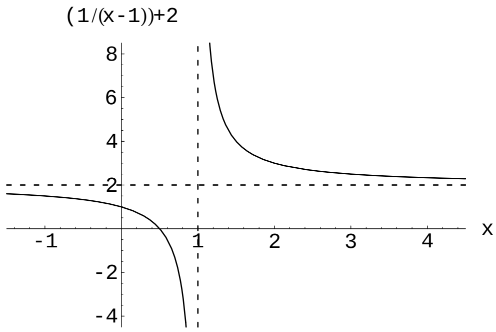


La gráfica de la función

$$f(x) = 1/x, \quad x \neq 0$$

(o sea, $f(x) = x^{-1}$, con $x \neq 0$) se denomina **hipérbola**. Para x grande, $1/x$ tiende a 0, por lo que la función se aproxima al eje horizontal cuando x crece. Lo mismo ocurre cuando x es grande y negativo. Por otro lado, cuando x se acerca a 0 siendo positivo, la función toma valores arbitrariamente grandes positivos, mientras que si x se acerca a 0 siendo negativo, toma valores arbitrariamente grandes pero negativos. Los ejes coordenados constituyen pues las *asíntotas* de la hipérbola. Se obtiene el gráfico de la figura izq.





La gráfica de $f(x) = a/x$, con $a > 0$, es una hipérbola dilatada verticalmente u horizontalmente en una cantidad a (pues $a/x = 1/(x/a)$), con $f(1) = a$. La gráfica de

$$f(x) = a/(x - x_0) + y_0, \quad x \neq x_0$$

es la de la hipérbola a/x trasladada verticalmente y_0 unidades y horizontalmente x_0 unidades, y sus asíntotas son las rectas $y = y_0$ y $x = x_0$ (véase la próxima sección para la representación de rectas verticales). En la fig. derecha se muestra el caso $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ con dominio natural $x \neq 2$ (o sea, $D = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$).

1.2.7 Curvas en el plano

Hemos visto que toda función corresponde a una cierta curva en el plano, que se caracteriza por tener un sólo valor de y por cada x del dominio (dentro del dominio toda recta vertical la cruza una sóla vez). Existen muchas curvas del plano que no satisfacen esta propiedad. Una recta *vertical*, por ejemplo, no corresponde a la gráfica de ninguna función $f(x)$. Discutiremos brevemente como representar analíticamente curvas arbitrarias en el plano. Sea $F(x, y)$ una expresión donde aparecen x e y, y consideremos la ecuación

$$F(x, y) = 0 \tag{9}$$

El conjunto de puntos (x, y) que satisface la ecuación, si es no vacio, se denomina **gráfica** de la ecuación, o directamente *curva*. Ejemplo: Si $F(x, y) = y - f(x)$, la gráfica de la ecuación

$$y - f(x) = 0, \quad x \in D$$

es decir, $y = f(x)$, es la gráfica de la función $f(x)$, pues es el conjunto de puntos $(x, y) = (x, f(x))$, con $x \in D$. Sin embargo, no toda ecuación de la forma (9) corresponde a la gráfica de una función. La gráfica puede corresponder a varias funciones simultáneamente o a rectas verticales. Por ejemplo, la gráfica de

$$(y - f(x))(y - g(x)) = 0$$

con $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un mismo dominio D, es la gráfica simultánea de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, pues la expresión se anula para $y = f(x)$ o $y = g(x)$. Una recta *vertical* corresponde a la ecuación

$$x - x_0 = 0$$

es decir, $x = x_0$, con x_0 el punto donde la recta interseca el eje x, pues el conjunto de números que la satisface son todos los (x_0, y), con $y \in \Re$ arbitrario.

En general, los x que satisfacen $F(x, 0) = 0$ son los puntos donde la gráfica corta al eje x, mientras que los y que satisfacen $F(0, y) = 0$ son aquellos donde la gráfica corta al eje y.

Ecuación general de la recta: Si $F(x, y) = ax + by + c$, con a y b no simultáneamente nulos, entonces la gráfica de la ecuación

$$ax + by + c = 0$$

es una recta. En efecto, si $b \neq 0$, podemos despejar y, obteniendo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \qquad b \neq 0$$

que corresponde a una recta de pendiente $-\frac{a}{b}$ y ordenada al origen $-\frac{c}{b}$. Podemos escribir en este caso la ecuación también como

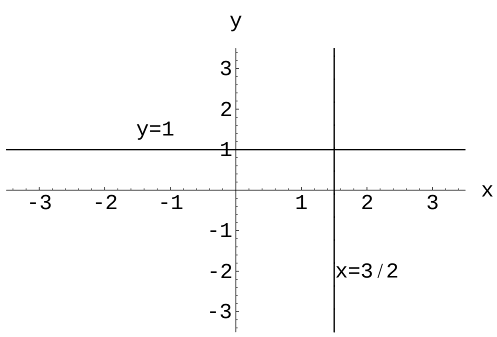
$$y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0)$$

donde $(x_0, y_0) = (x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ es un punto arbitrario de la recta. Si $a = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$, que corresponde a una recta *horizontal* de ordenada $y_0 = -\frac{c}{b}$.

Si $b = 0 \Rightarrow a \neq 0$ y podemos despejar x, obteniendo

$$x = -\frac{c}{a}$$

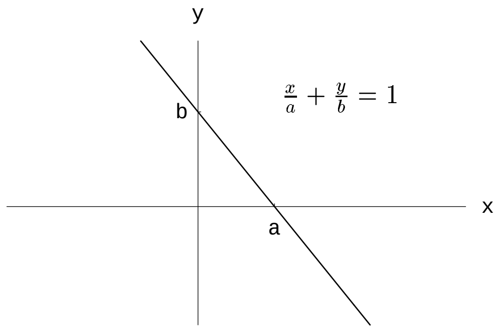
que corresponde a una *recta vertical* de abscisa $-\frac{c}{b}$. En la figura, se muestran las rectas $x = \frac{3}{2}$ y $y = 1$. El gráfico simultáneo de ambas rectas corresponde a la ecuación $(x - \frac{3}{2})(y - 1) = 0$.



Ejemplo: graficar

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, \ \ b \neq 0$$

Como la ecuación es lineal en x e y, la gráfica corresponde a una recta. Si $y = 0$, $\Rightarrow x = a$, y si $x = 0$, $y = b$, por lo tanto la gráfica es la de una recta que interseca al eje x en $x = a$ y al eje y en $y = b$.



Las expresiones para traslaciones y dilataciones de curvas adquieren un aspecto simétrico en x e y si la curva es expresada por medio de una ecuación del tipo (9).
Traslaciones: La curva definida por

$$F(x - x_0, y - y_0) = 0$$

es la curva $F(x, y) = 0$ **trasladada** horizontalmente una cantidad x_0 y verticalmente una cantidad y_0, pues $F((x + x_0) - x_0, (y + y_0) - y_0) = F(x, y)$.
Ejemplo: La ecuación de una parábola de eje vertical con vértice en el origen es $y = ax^2$, con $a \neq 0$. La ecuación general de una parábola de eje vertical con vértice en (x_0, y_0) puede escribirse entonces en la forma $y - y_0 - a(x - x_0)^2 = 0$, es decir,

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2, \quad a \neq 0$$

Reflexiones: La curva definida por

$$F(-x, y) = 0$$

es la curva $F(x, y) = 0$ reflejada respcto del eje y, pues $F(-(-x), y) = F(x, y)$. Analogamente, la curva definida por

$$F(x, -y) = 0$$

es la curva $F(x, y) = 0$ reflejada respcto del eje x, pues $F(x, -(-y)) = F(x, y)$.
Por ejemplo, si $y - y_0 - x^2 = 0$ es la ecuación de una parábola hacia arriba con vértice en $(0, y_0)$, $-y - y_0 - x^2 = 0$, es decir, $y = -x^2 - y_0$, es la ecuación de una parábola hacia abajo con vértice en $(0, -y_0)$.

Dilataciones: La curva definida por

$$F(x/a, y/b) = 0, \quad a > 0, \quad b > 0$$

es la curva $F(x, y) = 0$ *dilatada horizontalmente* en un cantidad a y *verticalmente* en una cantidad b, pues $F((ax)/a, (by)/b) = F(x, y)$. Si $a > 1$, $b > 1$, es una dilatación propiamente dicha, mientras que si $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, corresponde a una contracción. Si $a > 1$ y $0 > b > 1$, corresponde obviamente a una dilatación horizontal y una contracción vertical.

Finalmente, la curva determinada por la ecuación

$$F(y, x) = 0$$

corresponde a la curva $F(x, y)$ reflejada respecto de la recta $y = x$ (la bisectriz del primer y tercer cuadrantes), pues x e y se hallan intercambiados.

Ejemplo 1: La ecuación

$$x = ay^2, \quad a \neq 0,$$

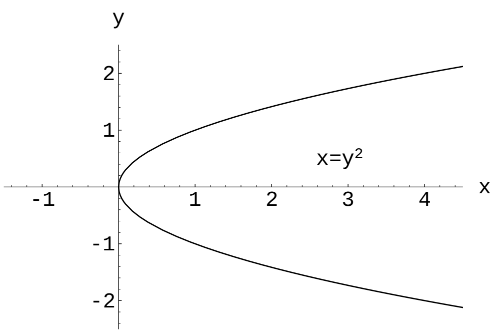
corresponde a una parábola de eje **horizontal** con vértice en el origen, hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$. La curva corresponde a la gráfica de dos funciones: despejando y, obtenemos $y^2 = x/a$, o sea $y = \pm\sqrt{x/a}$. La rama superior e inferior de la parábola de eje horizontal corresponden pues a la gráfica de las funciones

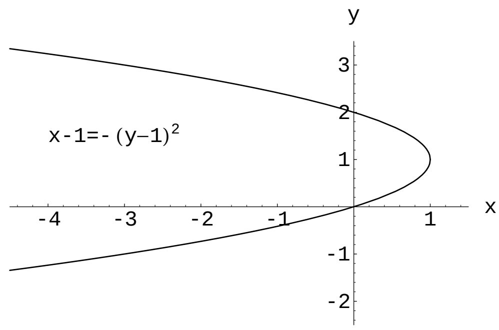
$$f_+(x) = \sqrt{x/a}, \quad f_-(x) = -\sqrt{x/a}, \qquad x/a \geq 0$$

Ejemplo 2: La ecuación general de una parábola de eje *horizontal* y vértice en (x_0, y_0) es $x - x_0 - a(y - y_0)^2 = 0$, o sea,

$$x - x_0 = a(y - y_0)^2 = 0, \quad a \neq 0$$

La rama superior corresponde a la gráfica de la función $f_+(x) = y_0 + \sqrt{(x - x_0)/a}$, y la inferior a la de $f_-(x) = y_0 - \sqrt{(x - x_0)/a}$, con $(x - x_0)/a \geq 0$. En la figura se muestran dos parábolas de eje horizontal.





Ejemplo 3: Hallar la ecuación de una parabola de eje horizontal con vértice en $(1, 2)$ que pasa por $(2, 4)$. La ecuación es de la forma

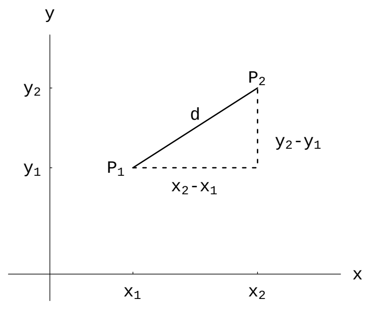
$$x - 1 - a(y - 2)^2 = 0$$

Como $(x, y) = (2, 4)$ la satisface, $\Rightarrow 2 - 1 - a(4 - 2)^2 = 1 - 4a = 0$, de donde $a = \frac{1}{4}$. La ecuación es pues $x - 1 - (y - 2)^2/4 = 0$.

1.2.8 Distancia entre dos puntos

Consideremos dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. Por el teorema de Pitágoras, la distancia entre ellos estará dada por (ver figura)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



La distancia no depende obviamente del orden de los puntos (es decir, de cual llamamos 1 y cual 2), lo que se refleja en la invariancia frente a una permutación de los índices 1 y 2. Si $(x_1, y_1) = (0, 0)$, la fórmula anterior da la distancia de P_2 al origen,

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Si $y_1 = y_2$, los dos puntos se hallan sobre una recta horizontal y

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

1.2.9 Circunferencia

Los puntos del plano situados a una distancia $r > 0$ del origen deben satisfacer la ecuación $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, es decir,

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{10}$$

La gráfica de esta ecuación corresponde pues a una *circunferencia* de radio r y centro en el origen $(0, 0)$.

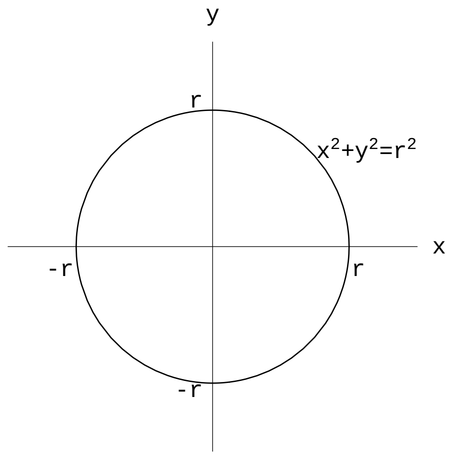
Analogamente, la ecuación

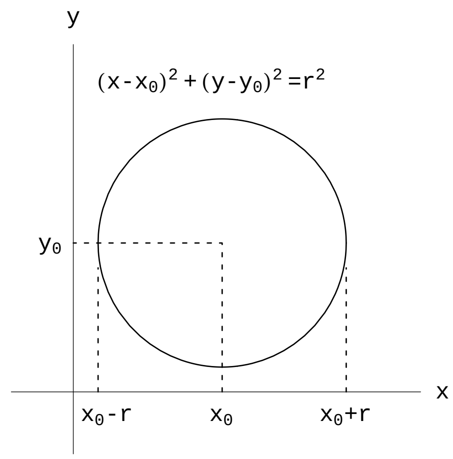
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{11}$$

corresponde a una circunferencia de radio $r > 0$ y centro en (x_0, y_0). Esto puede verse considerando a la gráfica de (11) como la traslación de la gráfica de (10), o directamente notando que la distancia de (x, y) a (x_0, y_0) es $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Despejando y en función de x, vemos que el semicírculo superior corresponde a la gráfica de la función

$$f_+(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, \qquad |x - x_0| \leq r$$

y el inferior a $f_-(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$, con el mismo dominio.





Ejemplo: Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(-1, -1)$ que pasa por el origen. La ecuación es $(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = r^2$, o sea,

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

Como $(0, 0)$ debe satisfacer la ecuación, $1 + 1 = r^2$, de donde $r = \sqrt{2}$. Esta es obviamente la distancia desde $(-1, -1)$ al origen $(0, 0)$.

Ejemplo: Indicar que tipo de curva representa la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$$

Completando cuadrados, obtenemos

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 11 = (x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 11 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 16$$

de modo que la ecuación representa una circunferencia de radio $r = \sqrt{16} = 4$ con centro en $(-1, 2)$.
En general, como

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{a^2 + b^2}{4}$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

corresponde, si $a^2 + b^2 - 4c > 0$, a una circunferencia con centro en $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ y radio $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c}$.

1.2.10 Elipse

Si dilatamos una circunferencia de radio 1 (con centro en el origen) en una cantidad $r > 0$ tanto horizontal como verticalmente, obtenemos una circunferencia de radio r. En efecto, si

$$F(x,y) = x^2 - y^2 - 1$$

$F(x/r, y/r) = (x^2/r^2) + (y^2/r^2) - 1$ y por lo tanto, $F(x/r, y/r) = 0$ se convierte en

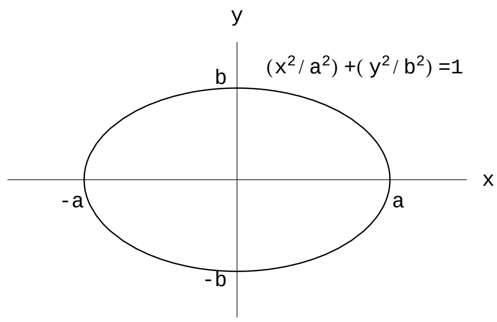
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

es decir, $x^2 + y^2 = r^2$.

La **elipse** corresponde a una *dilatación distinta* en los ejes horizontal y vertical. La ecuación de una elipse con centro en el origen estará dada pues por $F(x/a, y/b) = 0$, con $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, es decir,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a y b constituyen los semiejes de la elipse (si $x = 0 \Rightarrow y = \pm b$, y si $y = 0$, $x = \pm a$).



La parte superior e inferior de la elipse representan la gráfica de las funciones $f_\pm = \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $|x| \leq a$. La ecuación de una elipse con centro en (x_0, y_0) estará dada por

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de una elipse de semieje horizontal $a = 1$ y semieje vertical $b = 2$, con centro en el origen.
La ecuación es

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ejemplo: Determinar que curva representa la ecuación

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

Dado que $x^2 - 2x + 2y^2 - 4y - 6 = (x-1)^2 - 1 + 2((y-1)^2 - 1) - 6 = (x-1)^2 + 2(y-1)^2 - 9 = 0$, la ecuación puede escribirse como $(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 9$, o sea,

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{9/2} = 1$$

que corresponde a una elipse con centro en $(1,1)$, semieje horizontal $a = \sqrt{9} = 3$ y semieje vertical $b = \sqrt{9/2} = 3/\sqrt{2}$. En general,

$$x^2 + dy^2 + ax + by + c = 0, \qquad d > 0$$

representa, si $\gamma^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4d} - c > 0$, una elipse con centro en $(\frac{-a}{2}, -\frac{b}{2d})$, semieje horizontal γ y semieje vertical $\gamma/\sqrt{d}$, pues $x^2 + dy^2 + ax + by + c = (x + \frac{a}{2})^2 + d(y + \frac{b}{2d})^2 - \gamma^2$ y la ecuación se reduce a

$$\frac{(x - \frac{a}{2})^2}{\gamma^2} + \frac{d(x - \frac{b}{2d})^2}{\gamma^2} = 1$$

Otras curvas: Consideremos finalmente una ecuación del tipo

$$\frac{x^n}{r^n} + \frac{y^n}{r^n} = 1, \quad r > 0$$

con n natural y *par*. Para $n > 2$, la curva corresponde a una *deformación* de la circunferencia de radio r con centro en $(0, 0)$, tornándose "más cuadrada" a medida que n aumenta. Se muestra en la figura izq. el caso $n = 4$. En general, la ecuación

$$\frac{|x|^q}{r^q} + \frac{|y|^q}{r^q} = 1, \qquad r > 0,$$

representa, si $q > 2$, a una curva de aspecto más "cuadrado" que la circunferencia (que corresponde al caso $q = 2$), mientras que si $0 < q < 2$ comienzan a aparecer "puntas" en los ejes coordenados, como puede apreciarse para $q = 1/2$ (fig. derecha). Veremos en el próximo capítulo diversas técnicas que permitirán determinar y predecir en detalle estas características.