Matemática 3 – Curso 2018

<u>Práctica 4</u>: Variables aleatorias continuas. Funciones de distribución de probabilidad uniforme, exponencial, normal

1) El tiempo total, medido en unidades de 100 horas, que un adolescente utiliza su estéreo en un período de un año es una v.a. continua *X* con f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que en un período de un año el adolescente utilice su estéreo
a) menos de 120 horas
b) entre 50 y 100 horas

2) Suponga que la distancia X entre un blanco puntual y un disparo dirigido al punto, en un juego de tiro al blanco accionado por monedas, es una v.a. continua con f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0.75(1 - x^2) & \text{-}1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

a) Calcular $P(X > 0)$
b) Calcular $P(-0.5 \le X \le 0.5)$
c) Calcular $P(X < -0.25 \text{ ó } X > 0.25)$
d) Hallar la F.d.a. de X.

3) Considere la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

a) Evalúe *k*
b) Encuentre *F*(*x*)
c) Evalúe P(0.3 < X <0.6) utilizando *F*(*x*)

4) Para las variables aleatorias de los ejercicios anteriores hallar su esperanza y desviación estándar.

5) Para la v.a. del ejercicio 1), sea la v.a. *Y* el número de kilowatts-hora que el adolescente gasta al año; se tiene que $Y = 60X^2 + 39X$. Calcule la esperanza de *Y*. Explique qué propiedad utiliza.

6) Una barra de 12 pulgadas, que está sujeta por ambos extremos, debe someterse a un creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa.
Sea X: "distancia desde el extremo izquierdo en el que ocu rre la rotura" y suponga que la f.d.p. de X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} x\left(1 - \frac{x}{12}\right) & 0 < x < 12 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular:
a) la F.d.a de X
b) P(X ≤ 4) ; P(X > 6) ; P(4 < X < 6)
c) E(X)
d) la probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas del punto esperado de ruptura.

7) La cantidad de café diaria, en litros, que sirve una máquina que se localiza en el vestíbulo de un aeropuerto es una v.a. X con distribución uniforme continua en (7, 10).
Encuentre la probabilidad de que en un día dado la cantidad de café que sirve esta máquina sea
a) a lo sumo 8.8 litros.
b) más de 7.4 litros, pero menos de 9.5 litros.
c) al menos 8.5 litros.
d) Hallar E(X) y V(X).

8) La variable Z tiene distribución normal estándar.
a) Calcular las siguientes probabilidades:
a1) $P(Z \leq 2.24)$
a2) $P(Z > 1.36)$
a3) $P(0 < Z < 1.5)$
a4) $P(0.3 < Z < 1.56)$
a5) $P(-0.51 < Z < 1.54)$
b) Hallar los valores de z que verifiquen:
b1) $P(Z > z) = 0.5$
b2) $P(Z < z) = 0.8485$
b3) $P(Z < z) = 0.0054$
b4) $P(-z < Z < z) = 0.90$

9) Si X es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros: $\mu=10$ y $\sigma^2=36$
Calcular: a) $P(X > 6.4)$
b) $P(4.2 < X < 16)$
c) $P(X \leq 8.14)$

10) En la elaboración de un determinado medicamento en forma de comprimido interviene 1 producto químico cuya cantidad sigue aproximadamente una distribución normal con media 3 grs y desviación estándar 0.05 grs.
a) Calcular la probabilidad de que un comprimido pese más de 3.025 grs.
b) Un comprimido se considera defectuoso cuando su peso difiere de la media en más de 0.075 grs.
Calcular la proporción de comprimidos defectuosos que se fabrican.
c) Estos comprimidos se envasan en cajas de 10 unidades. Si un envase contiene 2 o más comprimidos defectuosos se elimina del mercado. Determinar el porcentaje de cajas que se retiran del mercado.
(Sugerencia: considere X: "nº de comprimidos defectuosos en una caja")

11) Un estudio de cierto sistema de computadoras revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de 3 segundos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?

12) El número de visitas a un sitio web sigue un proceso de Poisson con una razón de 3 por minuto.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita?
b) Si transcurren dos minutos sin una visita, ¿cuál es la probabilidad que se dé una visita en el siguiente minuto?

13) El tiempo en horas empleado diariamente en transporte por los trabajadores de una gran ciudad es una v.a. continua con densidad exponencial con media 0.25.

a) Calcular la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.
b) Si los trabajadores emplean al menos una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?
c) Hallar el tiempo mínimo que emplea el 50% de los trabajadores que más tiempo pierden en transporte.

14) Cierto tipo de componente puede ser comprado nuevo o viejo. El 50% de los componentes nuevos duran más de 5 años, pero solo 30% de los usados duran más de 5 años. ¿Sería posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente?. Explique.

Matemática 3 – Curso 2018

<u>Práctica 5</u>: Distribución conjunta, suma y promedios de variables aleatorias. Ley de los grandes números. Teorema Central del Límite.

1) Se analizaron las longitudes y los anchos de la bandeja de plástico rectangular para un CD que está instalada en una computadora personal. Las mediciones se redondearon al milímetro mas cercano.
Sean X: “la longitud medida” e Y: “ el ancho medido”.
La f.d.p. conjunta de (X , Y) está dada por

Y \ X	***129***	***130***	***131***
15	0.12	0.42	0.06
16	0.08	0.28	0.04

a) Determine la probabilidad de que la cubierta del CD tenga una longitud de 129 mm.
b) Determine la probabilidad de que una cubierta de CD tenga ancho de 16 mm.
c) Hallar las distribuciones marginales de X e Y.
d) Hallar E(X), E(Y), V(X), V(Y).

2) En el ejercicio anterior, calcule la f.d.p. condicional $p_{Y/X}$ (y/x = 130)
¿Son X e Y independientes?. Explique.

3) Un software puede hacer llamadas a dos subrutinas A y B. En una ejecución elegida al azar, sean
X: “número de llamadas hechas a la subrutina A”
Y: “número de llamadas hechas a la subrutina B”
La f.d.p. conjunta de (X , Y) esta dada por

	Y		
X	1	2	3
1	0.15	0.10	0.10
2	0.10	0.20	0.15
3	0.05	0.05	0.10

a) Determine las f.d.p. marginales de X e Y
b) Determine E(X), E(Y), V(X), V(Y)
c) Determine cov(X , Y)
d) ¿Son X e Y independientes?. Explique.

4) Con referencia al ejercicio anterior
a) Determine E(X+Y)
b) Determine V(X+Y) y σ_{X+Y}
c) Determine P(X+Y = 4)
d) Suponga que cada ejecución de la subrutina A tarda 100 ms y que cada ejecución de la

subrutina B tarda 200 ms.

d1) Determine el número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.

d2) Encuentre la desviación estándar del número medio de milisegundos de todas las llamadas realizadas a las dos subrutinas.

5) Dos computadoras trabajan en forma independiente.
Sean X: "número de fallas semanales de la computadora 1" e
Y: "número de fallas semanales de la computadora 2".
Las distribuciones están dadas por

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.25	0.25	0.30	0.20

y	0	1	2	3
$p(y)$	0.15	0.20	0.40	0.25

a) Determine $P(X = Y)$, es decir ambas computadoras tienen el mismo número de fallas

b) Determine $P(X > Y)$, es decir el número de fallas de la computadora 1 es mayor que el de la computadora 2.

6) El tiempo de vida de cierto componente, en años, tiene una función de densidad $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$, 0 si $x \leq 0$. Están disponibles dos de dichos componentes, cuyos tiempos de vida son independientes. Tan pronto como falle el primer componente, éste se reemplaza por el segundo. Sean las variables aleatorias:
X: "tiempo de vida del primer componente" e Y: "tiempo de vida del segundo componente"

a) Determine $P(X \leq 1 , Y \leq 1)$

b) Determine $E(X)$, $E(Y)$

c) Determine $E(X+Y)$

7) Una instalación de luz tiene dos focos A y B. La duración del foco A se puede considerar una v.a. X con distribución normal con media 800 hs. y desviación estándar de 100 hs. La duración del foco B se puede considerar una v.a. Y con distribución normal con media 900 hs. y desviación estándar de 150 hs. Suponga que las duraciones de los focos son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el foco B dure más que el foco A?.
(Sugerencia: piense cómo interpreta el evento $\{Y – X > 0\}$ y qué distribución tiene Y - X)

b) Otra instalación de luz tiene solo un foco. Se pone uno del tipo A y cuando se funde se instala otro de tipo B. ¿Cuál es la probabilidad de que el la duración total de ambos sea mayor que 2000 hs?.
(Sugerencia: piense cómo interpreta el evento $\{Y+X > 2000\}$ y qué distribución tiene Y + X)

8) El peso de un caramelo pequeño tiene una distribución normal con media 2.835 gramos y desviación estándar de 0.2835 gramos. Suponga que se colocan 16 caramelos en un paquete y que los pesos de éstos son independientes.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza del peso neto del paquete?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45.5 gramos?

9) El tiempo para que un sistema automatizado localice una pieza en un almacén, tiene una distribución normal con media de 45 segundos y desviación estándar de 30 segundos. Suponga que se hacen pedidos independientes por 10 piezas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 60 segundos? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo total necesario para localizar las 10 piezas sea mayor que 600 segundos?

b) Enuncie la propiedad teórica que utiliza para resolver el inciso anterior.

10) El centro de cálculo de una universidad dispone de un servidor para gestionar las páginas web personales de profesores y alumnos. Supongamos que la cantidad de memoria ocupada por una de estas páginas puede considerarse como una variable aleatoria con una media de 1.3 MB y una desviación estándar de 0.3. Si el servidor va a gestionar un total de 500 páginas, calcular aproximadamente la probabilidad de que la cantidad total de memoria necesaria supere los 660 MB.
(Sugerencia: considerar las v.a. X_i: "cantidad de memoria ocupada por la página i", i=1,2,…,500)

11) El tiempo de vida (en horas) de un componente electrónico viene determinado por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2ke^{-\frac{x}{5}} & x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

a) Calcular k y la función de distribución acumulada asociada.
b) ¿Qué porcentaje de componentes de este tipo duran entre 2 y 10 horas?. ¿Y más de un día?. Determinar la esperanza y la varianza.
c) Si se consideran 40 componentes del tipo anterior, obtener aproximadamente la probabilidad de que la vida media de los 40 componentes esté comprendida entre 2 y 10 horas.
(Sugerencia: considere las v.a. X_i :" duración en horas del componente electrónico i" , i = 1, 2, ..,40)

12) La resistencia a la ruptura de un remache tiene un valor medio de 10000 lb/pulg^2 y una desviación estándar de 500 lb/pulg^2.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia promedio a la ruptura de la muestra, para una muestra de 40 remaches, sea entre 9900 y 10200?
b) Si el tamaño de la muestra hubiera sido 15 en lugar de 40, ¿podría calcularse la probabilidad pedida en la parte a) a partir de la información dada?

13) Si el 3% de las válvulas manufacturadas por una compañía son defectuosas, hallar la probabili dad de que en una muestra de 100 válvulas:
i) 0, ii) más de 5, iii) entre 1 y 3 , sean defectuosas.
a) Use la aproximación normal a la binomial.
b) Use la distribución binomial y haga el cálculo con la ayuda de un software de matemática (o una calculadora).

14) Una máquina fabrica piezas cuyas longitudes se distribuyen según una normal de media 32 y desviación estándar 0.3 milímetros, considerándose aceptables aquellas cuya medida se encuentra dentro del intervalo (31.1, 32.6).
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza fabricada por esta máquina sea defectuosa?
b) Calcular la probabilidad de que un lote de 500 piezas contenga más de 15 defectuosas.
(Sugerencia: considere la v.a. Y: "nº de piezas defectuosas en el lote", piense qué distribución tiene X.)