# Matemática 3 – Curso 2018

**Práctica 6:** Estimación puntual

**1)** Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño *n* tomada de una población $X$ , que $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$ . Sean

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Dos estimadores de $\mu$ . ¿Cuál es el mejor estimador de $\mu$ ?. Explique su elección.

**2)** Sea $X_1, X_2, ........, X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ . Considere los siguientes estimadores de $\mu$ :

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{X_1 + X_2 + ......+ X_7}{7} \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2} \qquad \hat{\Theta}_3 = \frac{2X_1 - X_7 + X_3}{3}$$

a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?
b) Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.
c) ¿Cuál estimador es el "mejor"?. ¿En qué sentido es mejor?

**3)** Sea $X_1, X_2, ........, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n*.

a) Demuestre que $\overline{X}^2$ es un estimador sesgado de $\mu^2$ .
b) Determine la magnitud del sesgo de este estimador.
c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño *n* de la muestra?.

**4)** El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan: 2 , 5 , 3 , 3 , 7 desconexiones accidentales.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de $\lambda$ . ¿El estimador es insesgado?, ¿es consistente?
b) Obtenga la estimación de $\lambda$ a partir de la muestra dada.
c) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encuentre la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.

**5)** a) Sea $X_1, X_2, ........, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$ . Hallar un estimador de máxima verosimilitud (E.M.V.) de *p.*

b) Se selecciona una muestra aleatoria de *n* chips fabricados por cierta compañía. Sea *X* = el número entre los *n* que tienen defectos y *p* = P(el chip tiene defecto). Supongamos que solo se observa *X* ( el número de chips con defectos).

$b_1$) Si *n* = 100 y *x* = 5, ¿cuál es la estimación de *p*?

$b_2$) Si *n* = 100 y *x* = 5, ¿cuál es el E.M.V. de la probabilidad $(1-p)^6$, de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?

**6)** Denotemos por *X* la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y supongamos que la f.d.p. de *X* es:

$$f(x) = \begin{cases} (2\theta+1)x^{2\theta}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & c.c \end{cases} \qquad \text{donde } \theta > -\frac{1}{2}$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información:

0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

a) Utilice el método de los momentos para obtener un estimador de $\theta$ y luego calcule la estimación para esta información.

b) Obtenga el E.M.V. de $\theta$ y luego calcule la estimación para la información dada.

**7)** Sea $X_1, X_2, ........, X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Hallar los estimadores de $\mu$ y $\sigma^2$ por el método de momentos. ¿Los estimadores son insesgados?

b) Hallar los estimadores de $\mu$ y $\sigma^2$ por el método de máxima verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?

c) Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg$^2$):

392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375.

Si se supone que la resistencia al corte esta normalmente distribuida, estime la verdadera media de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.

d) Estime la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.

# Matemática 3 – Curso 2018

**<u>Práctica 7</u>**: Intervalos de Confianza

1) Un proceso novedoso para elaborar gasolina ecológica toma biomasa en la forma de sacarosa y la convierte en gasolina usando reacciones catalíticas. En un paso en un proceso de la planta piloto, un ingeniero químico mide la salida de cadenas de carbono de longitud tres. Nueve corridas con el mismo catalizador dieron los rendimientos (en galones)

0.63 2.64 1.85 1.68 1.09 1.67 0.73 1.04 0.68

Suponga que el rendimiento tiene una distribución normal.

a) ¿Qué puede afirmar el ingeniero químico con 95% de confianza acerca del error máximo, si usa la media muestral para estimar el verdadero rendimiento medio?

b) Obtenga un intervalo de confianza del 95% para el verdadero rendimiento medio del proceso de la planta piloto.

2) Se calculan tres intervalos de confianza para la media de la fuerza de corte (en ksi) de pernos de anclaje de un tipo dado, todos de la misma muestra.

Los intervalos son: ( 4.01, 6.02 ) ; ( 4.20 , 5.83 ) y (3.57 , 6.46 ).

Los niveles de los intervalos son 90%, 95% y 99%. ¿Qué intervalo tiene cada nivel?. Justifique.

3) En una muestra aleatoria de 100 baterías producidas por cierto método, el promedio del tiempo de vida fue de 150 horas y la desviación estándar de 25 horas.

**a)** Determine un intervalo de confianza de 95% para la media del tiempo de vida de las baterías producidas por este método.

**b)** Un ingeniero afirma que la media del tiempo de vida está entre 147 y 153 horas. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?.

4) Las siguientes mediciones se registraron para el tiempo de secado, en horas, de cierta marca de pintura látex:

3.4 2.5 4.8 2.9 3.6 2.8 3.3 5.6 3.7 2.8 4.4 4.0 5.2 3.0 4.8

Suponiendo que las mediciones representan una muestra aleatoria de una población normal, encuentre un intervalo de confianza de nivel 99% para la media de los tiempos de secado.

5) Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es $\sigma_1^2 = 1.5$, mientras que para la fórmula 2 es $\sigma_2^2 = 1.2$. Se prueban dos muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 15$ y $n_2 = 20$. Los octanajes promedio observados son $\bar{x}_1 = 89.6$ y $\bar{x}_2 = 92.5$.

a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en el octanaje promedio.

b) Si tomamos $n_1 = n_2$, ¿qué tamaño de muestra se necesitaría para que la longitud del intervalo se reduzca a la mitad del encontrado en a)?

6) Se comparan las resistencias de dos clases de hilo. Cincuenta piezas de cada clase de hilo se prueban bajo condiciones similares. La marca A tiene una resistencia a la tensión promedio de 78.3 kg con una desviación estándar de 5.6 kg; en tanto que la marca B tiene una resistencia a la tensión promedio de 87.2 kg con una desviación estándar de 6.3 kg. Construya un intervalo de confianza de 95% para la diferencia de las medias poblacionales.

7) Una determinada empresa de material fungible puede adquirir los cartuchos de tóner de impresora de dos proveedores distintos. Con el fin de determinar a qué proveedor comprar se toma una muestra de tamaño 12 de cada uno de los proveedores obteniendo los siguientes resultados (número de hojas impresas):

Proveedor A: $\bar{x}_A = 5459$ $s_A^2 = 33703$ Proveedor B: $\bar{x}_B = 5162$ $s_B^2 = 199928$

Si suponemos que las poblaciones son normales con varianzas iguales construir un intervalo de confianza de nivel 95% para la diferencia entre el número medio de hojas que imprime el cartucho de cada proveedor.

8) Dos empresas competidoras (A y B) en un mismo sector han puesto en marcha, casi simultaneamente, páginas de internet para la venta electrónica. Se han elegido al azar ocho clientes que han visitado la página A y, de manera independiente, otros ocho que han visitado la B y se han medido el tiempo (en minutos) de la duración de la visita de cada cliente. Los resultados fueron los siguientes:

Página A: 2.3 3.5 4.2 3.2 4.4 2.1 1.6 5.3

Página B: 1.3 2.3 4.4 3.7 2.8 6.5 3.6 4.5

Suponer que los datos provienen de poblaciones normales.

Construir un intervalo de confianza de nivel 99% para la diferencia entre los tiempos medios.

9) Una muestra de 10 camiones diesel fue operada tanto caliente como fría para calcular la diferencia en el ahorro de combustible. Los resultados, en millas/galón, se presentan en la tabla siguiente

| **Camión** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **caliente** | 4.56 | 4.46 | 6.49 | 5.37 | 6.25 | 5.90 | 4.12 | 3.85 | 4.15 | 4.69 |
| **frío** | 4.26 | 4.08 | 5.83 | 4.96 | 5.87 | 5.32 | 3.92 | 3.69 | 3.74 | 4.19 |

Determine un intervalo de confianza de 98% para la diferencia en la media del millaje entre motores calientes y fríos. Asuma que la muestra de las diferencias entre motores calientes y fríos es aproximadamente normal

10) Para los datos del ejercicio 4)
   a) construya un intervalo de confianza de 99% para la varianza del tiempo de vida real de estas baterías.
   b) construya un intervalo de confianza de 99% para la desviación estándar del tiempo de vida real de estas baterías.

11) Para los datos del ejercicio 8) hallar un intervalo de confianza de nivel de 95% para el cociente de las varianzas de los tiempos de visita.

12) Un fabricante de calculadoras electrónicas está interesado en estimar la fracción de unidades defectuosas que se producen. Una muestra aleatoria de 800 calculadoras incluye 18 defectuosas. Calcule un intervalo de confianza de nivel 99% para la verdadera fracción de unidades defectuosas.

13) a) Suponga que se quiere estimar qué porcentaje de todos los conductores excede el límite de velocidad de 80 km/h en cierto tramo del camino. ¿Qué tan grande debe ser la muestra para tener al menos 99% de confianza de que el error de su estimación es a lo sumo de 3.5%?.
   b) ¿Cómo se vería afectado el tamaño de la muestra requerida, si se sabe que el porcentaje a estimar es a lo sumo de 40%?.

14) En una prueba del efecto de la humedad en conexiones eléctricas, se probaron 100 conexiones eléctricas bajo condiciones húmedas y 150 en condiciones secas. Veinte de las primeras fallaron y solo diez de las segundas no pasaron la prueba. Determine un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre las proporciones de las conexiones que fallaron, húmedas y secas.

## Matemática 3 – Curso 2018

**Práctica 8**: Test de Hipótesis

Para cada uno de los ejercicios, modelice la situación y responda las siguientes preguntas:
a) ¿cuál es la hipótesis nula y cuál es la alternativa?
b) ¿cuál es el estadístico que utiliza y qué distribución tiene bajo H0?
c) ¿cuál es la zona de rechazo? Dibújela.
d) ¿cuál es su conclusión para los datos observados? Recuerde responder en relación al enunciado.
e) ¿Puede dar una idea del p-valor? ¿es exacto o aproximado?

1) Para cada una de las siguientes aseveraciones, exprese si es una hipótesis estadística legítima y por qué:
   a) H: $\sigma > 0$  b) H: $s \leq 0.20$  c) H: $\overline{X} - \overline{Y} = 5$  d) H: $\sigma_1 / \sigma_2 < 1$  f) $\mu \leq 0.1$

2) Sea el estadístico de prueba Z con una distribución normal estándar cuando $H_0$ es verdadera. Dé el nivel de significancia en cada una de las siguientes situaciones:

a) $H_1$: $\mu > \mu_0$ , región de rechazo $z \geq 1.88$

b) $H_1$: $\mu < \mu_0$ , región de rechazo $z \leq -2.75$

c) $H_1$: $\mu \neq \mu_0$ , región de rechazo $z \geq 2.88$ o $z \leq -2.88$

3) Se supone que una máquina que llena cajas de cereal está calibrada, por lo que la media del peso de llenado es de 340 gr.

Sea $\mu$ la media verdadera del peso de llenado. Suponga que en una prueba de hipótesis $H_0$: $\mu = 340$ contra $H_1$: $\mu \neq 340$, el p-valor es 0.30.

a) ¿Se debe rechazar $H_0$ con base en esta prueba?. Explique

b) ¿Puede concluir que la máquina está calibrada y decir que la media del peso de llenado es de 340 gr?. Explique.

4) Un proceso de fabricación produce cojinetes de bola con diámetros que tienen una distribución normal y una desviación estándar de $\sigma = 0.04$ cm. Los cojinetes de bola que tienen diámetros que son muy pequeños o muy grandes son indeseables. Para poner a prueba la hipótesis nula de que $\mu = 0.5$ cm se selecciona al azar una muestra de 25 y se encuentra que la media muestral es 0.51

**a)** Establezca las hipótesis nula y alternativa tales que el rechazo de la hipótesis nula implicará que los cojinetes de bola son indeseables.

b) Con $\alpha = 0.02$ , ¿cuál es el valor crítico para el estadístico de prueba?. Realice el test.

5) Cuando está operando adecuadamente, una planta química tiene una media de producción diaria de por lo menos 740 toneladas. La producción se mide en una muestra aleatoria simple de 60 días. La muestra tenía una media de 715 toneladas por día y desviación estándar de 24 toneladas por día. Sea $\mu$ la media de la producción diaria de la planta. Un ingeniero prueba que $H_0$: $\mu \geq 740$ contra $H_1$: $\mu < 740$.

a) Determine el p-valor

b) ¿Piensa que es factible que la planta esté operando adecuadamente o está convencido de que la planta no funciona en forma adecuada?. Explique su razonamiento.

6) Pruebe la hipótesis de que el contenido medio de los envases de un lubricante específico es de 10 litros, si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son:

10.2 9.7 10.1 10.3 10.1 9.8 9.9 10.4 10.3 9.8

Utilice un nivel de significancia de 0.01 y suponga que la distribución del contenido es normal.

7) Para determinar el efecto del grado de combustible en la eficiencia del combustible, 80 nuevos automóviles de la misma marca, con motores idénticos, fueron conducidos cada uno durante 1000 millas. Cuarenta de los automóviles funcionaron con combustible regular y otros 40 con combustible de grado Premium; los primeros tenían una media de 27.2 milla/galón, con desviación estándar de 1.2 milla/galón. Los segundos tenían una media de 28.1 milla/galón y una desviación estándar de 2.0 milla/galón. ¿Puede concluir que este tipo de automóvil tiene mejor millaje con combustible Premium? Utilice el p-valor.

8) Se probó la velocidad en cierta aplicación de 50 chips nuevos de computadora, con otra cantidad igual de diseño viejo. La velocidad promedio, en MHz, de los nuevos chips fue de

495.6, y la desviación estándar de 19.4. La velocidad promedio de los chips viejos fue de 481.2, y la desviación estándar fue de 14.3.

a) ¿Se puede concluir que la media de la velocidad de los nuevos es mayor que la de los chips viejos?. Establezca las hipótesis nula y alternativa adecuadas y después encuentre el p-valor.

b) Una muestra de 60 chips aún más viejos tenía velocidad promedio de 391.2 MHz, con desviación estándar de 17.2 MHz. Alguien afirma que los nuevos chips tienen tienen una velocidad promedio mayor a 100 MHz que los más viejos. ¿Los datos proporcionan evidencias convincentes para esta afirmación? . Establezca las hipótesis nula y alternativa y después determine el p-valor.

9) Se considera usar dos marcas diferentes de pintura látex. El tiempo de secado en horas se mide en especímenes de muestras del uso de las dos pinturas. Se seleccionan 15 especímenes de cada una y los tiempos de secado son lo siguientes:

**Pintura A:**

3.5, 2.7, 3.9, 4.2, 3.6, 2.7, 3.3, 5.2, 4.2, 2.9, 4.4, 5.2, 4.0, 4.1, 3.4

**Pintura B:**

4.7, 3.9, 4.5, 5.5, 4.0, 5.3, 4.3, 6.0, 5.2, 3.7, 5.5, 6.2, 5.1, 5.4, 4.8

Suponga que el tiempo de secado se distribuye normalmente con $\sigma_A = \sigma_B$, y que ambos tiempos de secado son independientes.

a) Encuentre un intervalo de confianza para la diferencia de las medias $\mu_A - \mu_B$ de nivel 95%.

b) Utilice el intervalo usado en a) para hacer un test para decidir si las medias difieren.

10) Se estudia el flujo de transito en dos intersecciones transitadas entre las 4 P.M. y las 6 P.M. para determinar la posible necesidad de señales de vuelta. Se descubrió que en 21 días laborales hubo en promedio 247.3 automóviles que se aproximaron a la primera intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda, mientras que en 11días laborales hubo en promedio 254.1 automóviles que se aproximaron a la segunda intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda. Las desviaciones estándar muestrales correspondientes son $s_1 = 15.2$ y $s_2 = 18.7$

Suponga que las distribuciones son normales y que hay independencia entre ambas muestras. Pruebe la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra la alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ con nivel de significancia $\alpha = 0.01$

11) La directiva de una compañía de taxis está tratando de decidir si debe cambiar de neumáticos normales a neumáticos radiales para mejorar el ahorro de combustible. Se equiparon cada uno de los diez taxis con uno de los dos tipos de neumáticos y se condujeron en una trayectoria de prueba. Sin cambiar de conductores, se seleccionó el tipo de neumáticos y se repitió la trayectoria de prueba. El ahorro de combustible (en milla/galón) para los diez automóviles es:

| | **Automóvil** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **radial** | 32.1 | 36.1 | 32.3 | 29.5 | 34.3 | 31.9 | 33.4 | 34.6 | 35.2 | 32.7 |
| **normal** | 27.1 | 31.5 | 30.4 | 26.9 | 29.9 | 28.7 | 30.2 | 31.8 | 33.6 | 29.9 |

Asuma que la diferencia en ahorro de combustible entre ambos neumáticos es aproximadamente normal.

a) Debido a que el cambio de neumáticos en la flota de taxis es caro, la directiva no quiere cambiar a menos que una prueba de hipótesis proporcione evidencias de que mejorará el millaje. Establezca la hipótesis nula y alternativa adecuadas, y encuentre el p-valor.
b) Un análisis costo-beneficio muestra que será provechoso cambiar a neumáticos radiales si la media de la mejora del millaje es mayor a dos millas /galón. Establezca la hipótesis nula y alternativa adecuadas, y encuentre el p-valor, para una prueba de hipótesis diseñada como base de la decisión de cambiar.

12) El departamento de seguridad de un gran edificio de oficinas quiere probar la hipótesis nula de que $\sigma = 2.0$ minutos para el tiempo que tarda un guardia en realizar su rondín contra la hipótesis alternativa de que $\sigma \neq 2.0$ minutos. ¿Qué se puede concluir con un nivel de significancia de 0.01, si una muestra aleatoria de tamaño $n = 31$ da como resultado $s = 1.8$ minutos?. Asuma que la muestra proviene de una distribución normal.

13) Con referencia al ejercicio 10) use el nivel de significancia de 0.05 para probar la afirmación de que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre 4 P.M. y 6 P.M. en la segunda intersección.

14) Un taller acaba de recibir una maquina nueva y busca ajustarla correctamente. Según el técnico vendedor de la máquina, la maquina está ajustada para que no produzca más de 4% de piezas defectuosas. Al tomar una muestra de 350 piezas producidas, encuentra 10 defectuosas. La empresa no puede permitirse un nivel de defectuosos mayor de 5%. Razonar que tipo de test se debe realizar con el fin de determinar si la maquina se encuentra mal ajustada, y realizar dicho contraste. (tomar $\alpha = 0.05$).

15) En una muestra de 100 lotes de un producto químico comprado al distribuidor A, 70 satisfacen una especificación de pureza. En una muestra de 70 lotes comprada al distribuidor B, 61 satisfacen la especificación. ¿Puede concluir que una proporción mayor de los lotes del distribuidor B satisface la especificación?. Utilice el p-valor.