Ejemplo resuelto

Dada la función $f(x)=\begin{cases} bx^2+9x, & x\le 1 \\ 15x-3, & x>1 \end{cases}$

1) Encontrar *b* para que *f* sea continua
2) Estudiar si f es o no derivable en x=1.

Solución

1) Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.
Como cada tramo de esta función es un polinomio, el punto que queda para analizar es x=1.
Para que sea continua en tal punto deben existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$ y coincidir.

Existirá el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si existen los límites laterales por izquierda y por derecha y ambos son iguales.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} bx^2+9x = b+9$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 15x-3=12$$

igualando $b+9=12$, resulta $b=3$

Con $b=3$ los límites laterales coinciden, entonces existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=12$.

La función evaluada en 1 debe dar el mismo valor, $f(1)=3.1^2+9.1=12$.
Con el valor $b=3$ la función es continua en x=1 y, en este caso, en todo su dominio que es $\mathbb{R}$

2) La función $f(x)=\begin{cases} 3x^2+9x, & x\le 1 \\ 15x-3, & x>1 \end{cases}$ tiene una expresión a izquierda de 1 y otra a derecha de 1. Para ver si es o no derivable en **x=1**, se calculan (***por definición***) las derivadas laterales $f'_-(1)$ y $f'_+(1)$.
$f(x)$ será derivable en x=1 ***si y sólo si*** ambas existen y coinciden,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3(1+h)^2+9(1+h)-\left[3.1^2+9.1\right]}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{3h^2+15h}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(3h+15)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(3h+15)=15=f'_-(1).$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{15(1+h)-3-\left[15.1-3\right]}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{15+15h-3-15+3}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{15h}{h}=\lim_{h\to 0^+}15=15=f'_+(1).$$

Las derivadas laterales existen y son iguales $f'_-(1) = f'_+(1) = 15,$ luego es $f'(1) = 15.$ Esta función es derivable en x=1.

....

Ejercicios

1) Encontrar k para que la función $g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\ 9x}{sen\ kx}, & x \neq 0 \\ 6, & x = 0 \end{cases}$

sea continua en $x = 0.$

2) a) Encontrar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} bx + 21, & x < -1 \\ ax^2 - 6x, & -1 \leq x \leq 3 \\ bx - 27, & x > 3 \end{cases} \quad \text{sea continua}$$

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = -1$ y en $x = 3$

3) Hallar la ecuación de la recta L tangente a $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en el punto de abscisa $x = 10.$