



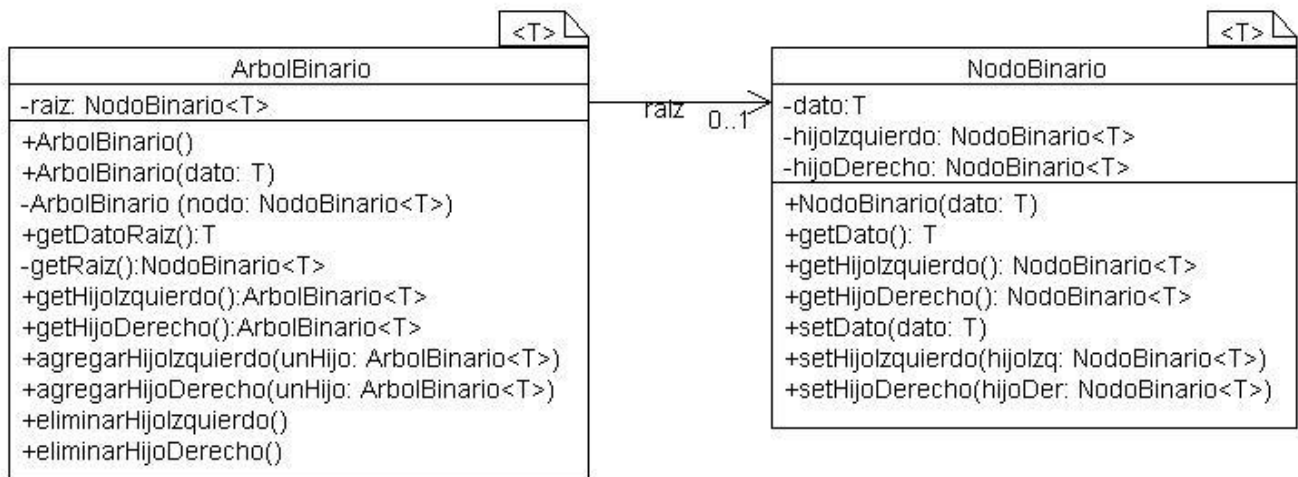
Práctica 4 Árboles Binarios

Objetivos

- Representar árboles binarios e implementar las operaciones de la abstracción
- Realizar distintos tipos de recorridos sobre árboles binarios
- Describir soluciones utilizando árboles binarios

Ejercicio 1

Considere la siguiente especificación de la clase **ArbolBinario** (con la representación hijo izquierdo e hijo derecho).



El constructor **ArbolBinario()** inicializa un árbol binario vacío, es decir, la raíz en null.

El constructor **ArbolBinario(T dato)** inicializa un árbol que tiene como raíz un nodo binario. Este nodo tiene el dato pasado como parámetro y ambos hijos nulos.

El constructor **ArbolBinario (NodoBinario<T> nodo)** inicializa un árbol donde el nodo pasado como parámetro es la raíz. (Notar que **NO** es un método público).

El método **getRaiz():NodoBinario<T>**, retorna el nodo ubicado en la raíz del árbol. (Notar que **NO** es un método público).

El método **getDatoRaiz():T**, retorna el dato almacenado en el **NodoBinario** raíz del árbol.

Los métodos **getHijoIzquierdo():ArbolBinario<T>** y **getHijoDerecho():ArbolBinario<T>**, retornan los hijos izquierdo y derecho respectivamente de la raíz del árbol. Tenga en cuenta que los hijos izquierdo y derecho del **NodoBinario** raíz del árbol son **NodosBinarios** y usted debe devolver **ArbolesBinarios**, por lo tanto debe usar el constructor privado **ArbolBinario (NodoBinario<T> nodo)** para obtener el árbol binario correspondiente.

El método **agregarHijoIzquierdo(ArbolBinario<T> unHijo)** y **agregarHijoDerecho(ArbolBinario<T> unHijo)** agrega un hijo como hijo izquierdo o derecho del árbol. Tenga presente que **unHijo** es un **ArbolBinario** y usted debe enganchar un **NodoBinario** como hijo. Para ello utilice el método privado **getRaiz**.

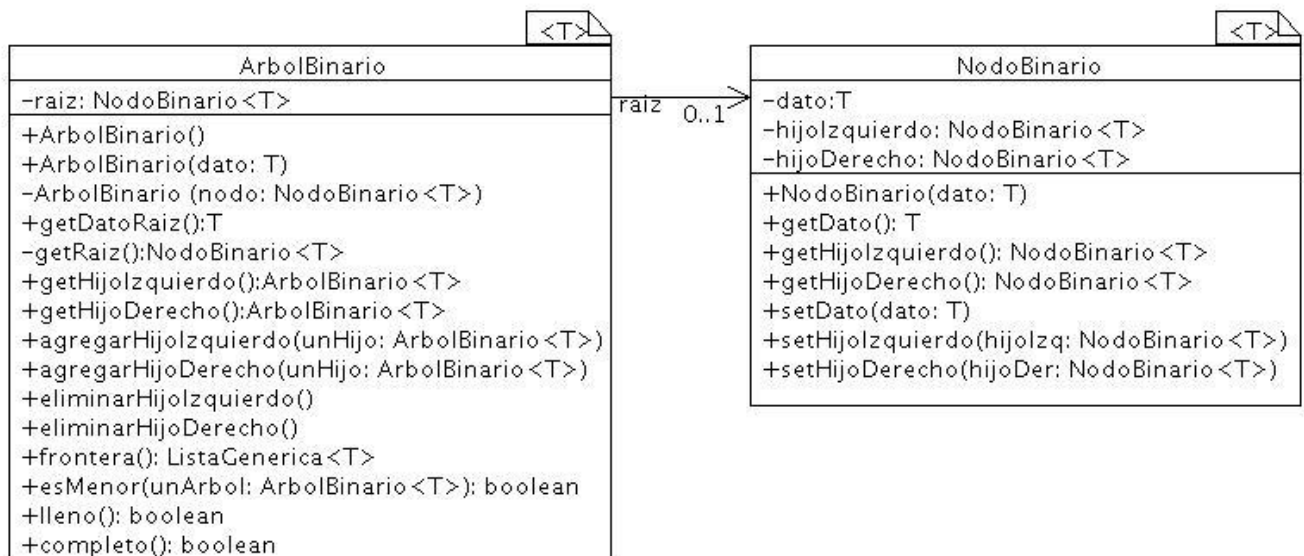
El método **eliminarHijoIzquierdo()** y **eliminarHijoDerecho()**, eliminan el hijo correspondiente **NodoBinario** raíz del árbol receptor.

a) Analice la implementación en JAVA de las clases **ArbolBinario** y **NodoBinario** brindadas por la cátedra.



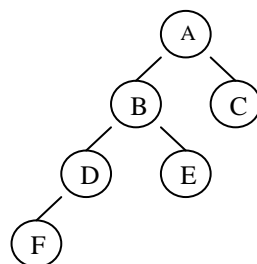
Ejercicio 2

Agregue a la clase **ArbolBinario** los siguientes métodos y constructores:



Con el fin de que gradualmente vaya realizando implementaciones cada vez mas complejas, para cada uno de los incisos solicitados se indica la complejidad en la siguiente escala: inicial y medio.

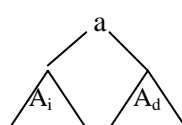
- a) **frontera(): ListaGenerica<T>**. Se define **frontera** de un árbol binario, a las hojas de un árbol binario recorridos de izquierda a derecha.



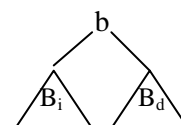
La lista deberá devolver:
 F,E,C

- b) **esMenor(ArbolBinario<T> unArbol): boolean**. Se define una relación de orden entre árboles binarios de enteros no nulos de la siguiente forma:

$$A < B \quad \begin{cases} a < b; \\ a = b \text{ y } A_i < B_i \\ a = b \text{ y } A_i = B_i \text{ y } A_d < B_d \end{cases}$$



árbol A



árbol B



UNLP. Facultad de Informática.

Algoritmos y Estructuras de Datos Cursada 2014

donde a y b son los datos almacenados en los nodos raíces y, Ai, Ad, Bi y Bd son los subárboles izquierdos y derechos.

- c) **lleno(): boolean.** Devuelve true si el árbol es lleno. Un árbol binario es lleno si tiene todas las hojas en el mismo nivel y además tiene todas las hojas posibles (es decir todos los nodos intermedios tienen dos hijos).
- d) **completo(): boolean.** Devuelve true si el árbol es completo. Un árbol binario de altura h es completo si es lleno hasta el nivel (h-1) y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

Ejercicio 3

Modelizar e implementar en Java la siguiente situación. Considere un árbol binario no vacío con dos tipos de nodos: nodos **MIN** y nodos **MAX**. Cada nodo tiene un valor entero asociado. Se puede definir el valor de un árbol de estas características de la siguiente manera. Si la raíz es un nodo **MIN**, entonces el valor del árbol es igual al mínimo valor entre: (i) El entero almacenado en la raíz. (ii) El valor correspondiente al subárbol izquierdo, si el mismo no es vacío. (iii) El valor correspondiente al subárbol derecho, si el mismo no es vacío. Si la raíz es un nodo **MAX**, entonces el valor del árbol es igual al máximo valor entre los valores nombrados anteriormente.

Ejercicio 4

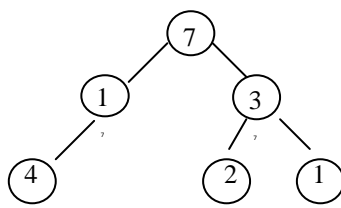
Implemente la clase **ArbolDeExpresion** como subclase de **ArbolBinario**. Incorpore un método de clase llamado **convertirPostfija(String exp): ArbolDeExpresion<T>**, que convierta una expresión aritmética en formato postfijo, en un árbol de expresión. El método recibirá la expresión postfija a convertir (como una cadena de caracteres sin blancos) y devolverá el árbol de expresión correspondiente. Esta expresión es sintácticamente válida, y está compuesta por números de un solo dígito o variables de una sola letra y los operadores binarios +, -, *, y /.

Defina una clase **TestConversion** con su método **main(String[] args)** el cual recibirá un String representando la expresión postfija. Luego utilice el método de clase **convertirPostfija(args)** de la clase **ArbolDeExpresion**, para obtener el árbol de expresión correspondiente. Finalmente, realice un recorrido postorden imprimiendo cada elemento del árbol (al solo efecto de verificar si se obtuvo el String postfijo original).

Ejercicio 5

Se define el valor de trayectoria pesada de una hoja de un árbol binario como la suma del contenido de todos los nodos desde la raíz hasta la hoja multiplicado por el nivel en el que se encuentra. Implemente un método que, dado un árbol binario, devuelva el valor de la trayectoria pesada de **cada una de sus hojas**. Considere que el nivel de la raíz es 1.

Para el ejemplo siguiente: trayectoria pesada de la hoja 4 es: $(4*3) + (1*2) + (7*1) = 21$





Anexo Ejercicios Parciales

Ejercicio 1

Una red binaria completa es una red que posee una topología de árbol binario completo (vea la Fig. 1 como ejemplo).

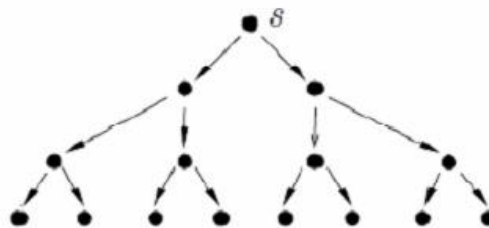


Figura 1. Ejemplo de una red binaria completa.

Los nodos que conforman una red binaria completa tienen la particularidad de que todos ellos conocen cual es su retardo de reenvío. El retardo de reenvío se define como el periodo comprendido entre que un nodo recibe un mensaje y lo reenvía a sus dos hijos.

Implemente un algoritmo que calcule el mayor retardo posible en el camino que realiza un mensaje desde la raíz hasta llegar a las hojas en una red binaria completa.

Ejercicio 2

Implemente el método **sumaElementosProfundidad (int p)** en la clase ArbolBinario que devuelva la suma de todos los nodos del árbol que se encuentren a la profundidad pasada como argumento.

Ejercicio 3

Dado un árbol binario "a" compuesto por personajes. Donde ningún personaje es dragón y princesa a la vez, y a su vez un personaje puede no ser ninguna de las dos cosas.

Se denominan nodos accesibles a aquellos nodos tales que a lo largo del camino del nodo raíz del árbol hasta el nodo (ambos inclusive) no se encuentra ningún dragón.

Implementar un método iterativo de costo lineal que encuentre una princesa accesible lo más cerca posible de la raíz del árbol dado "a", suponiendo que algún nodo accesible de "a" contiene una princesa.

<u>Juego</u>
- ArbolBinario <Personaje> personajes
+princesaMasCercana (): boolean

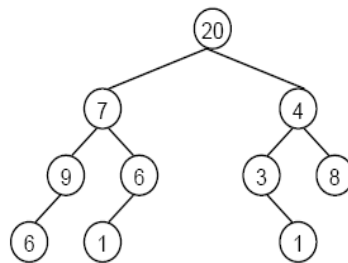
<u>Personaje</u>
- String nombre;
+esDragon (): boolean +esPrincesa (): boolean



Ejercicio 4

Implemente un método que realice un recorrido que llamaremos **recorrido_guiado**, que permita recorrer un árbol de forma que, en cada iteración, se selecciona el nodo mas pequeño de entre todos los disponibles en ese momento, independientemente de en que rama se encuentre. Se entiende por nodo disponible aquel nodo cuyo padre ya ha sido procesado (excluyendo el nodo raíz).

Ejemplo de este recorrido:



Para este árbol, el método **recorrido_guiado** debe imprimir en consola: 20, 4, 3, 1, 7, 6, 1, 8, 9, 6

Ejercicio 5

Implemente la operación **trayectoriaPesada(ab: Arbol Binario) : Lista** // Retorna el valor de la trayectoria pesada de cada una de las hojas del árbol binario ab

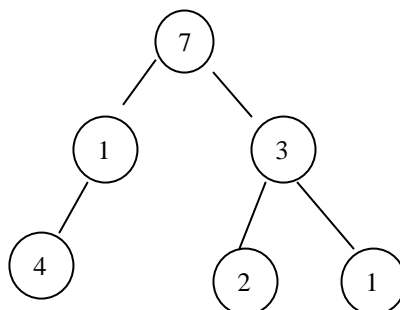
Se define el valor de la trayectoria pesada de una hoja de un árbol binario como la suma del contenido de todos los nodos desde la raíz a la hoja multiplicada por el nivel en el que se encuentra.

Ejemplo:

Trayectoria Pesada hoja 4 es $4*2 + 1*1 + 7*0 = 9$

Trayectoria Pesada hoja 2 es $2*2 + 3*1 + 7*0 = 7$

Trayectoria Pesada hoja 1 es $1*2 + 3*1 + 7*0 = 5$





UNLP. Facultad de Informática.

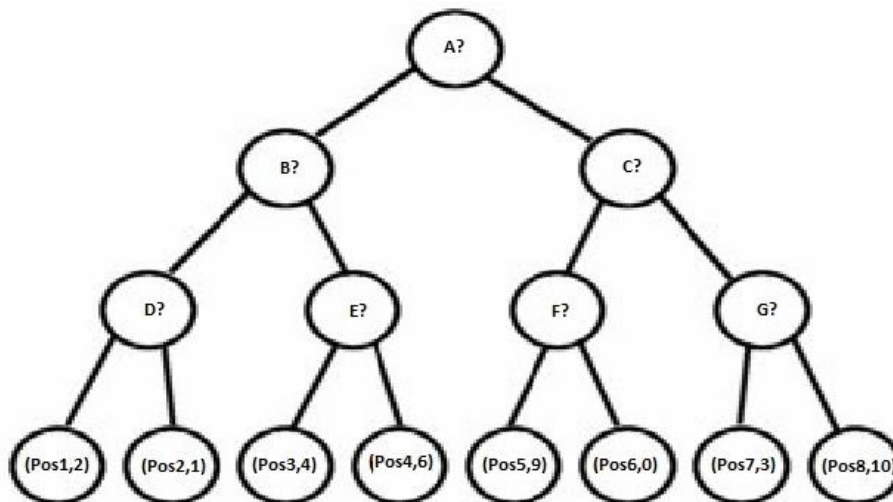
Algoritmos y Estructuras de Datos Cursada 2014

Ejercicio 6

Un árbol de decisión binario ponderado es un árbol binario en donde los nodos que no son hojas representan disyuntivas que pueden resolverse mediante una respuesta positiva o negativa y las aristas son las posibles alternativas resultantes de la resolución de la disyuntiva. Las hojas en este tipo de árboles representan los resultados posibles a los cuales se puede arribar a través de tomar un conjunto de decisiones. Así mismo, dichos resultados tienen asociados un coeficiente de acierto comprendido en el intervalo $[0,10]$, donde 0 representa el peor resultado posible y 10 el mejor resultado esperable. Implementar un método que dado un camino de decisiones a tomar retorne los 3 mejores resultados esperables.

Nota: El camino de decisiones pasado como parámetro existe en el árbol y es uno tal que siempre permite retornar los 3 mejores resultados.

Ejemplo: Dado el camino de decisiones $A?, C?$ para el árbol binario de decisión de la figura, el resultado del método a implementar será $Pos8, Pos5, Pos7$.



EJERCICIOS OPCIONALES

Ejercicio 1 - El sistema numérico de Stern-Brocot

La **ACM** International Collegiate Programming Contest es una competencia internacional, en donde alumnos universitarios de carreras informáticas participan en equipos. Los problemas que deben resolver son muy variados, y en muchos de ellos, son necesarios los conceptos vistos en la materia. Este es un ejercicio del estilo de los que se deben resolver en las competencias. El enunciado no sufrió ningún cambio, fue extraído y traducido del libro *Programming Challenges, The Programming Contest Training Manual*, Skiena S., Revilla M., Springer, 2002.



UNLP. Facultad de Informática.
Algoritmos y Estructuras de Datos
Cursada 2014

El *árbol de Stern-Brocot* supone un bello método para construir el conjunto de todas las fracciones no negativas $\frac{m}{n}$, donde m y n son números primos entre sí. La idea es comenzar con dos fracciones $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$ y, a continuación, repetir la siguiente operación tantas veces como se desee:

- Insertar $\frac{m+m'}{n+n'}$ entre dos fracciones adyacentes $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$

Por ejemplo, el primer paso da como resultado una nueva entrada entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$.

$$\frac{0}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{0}$$

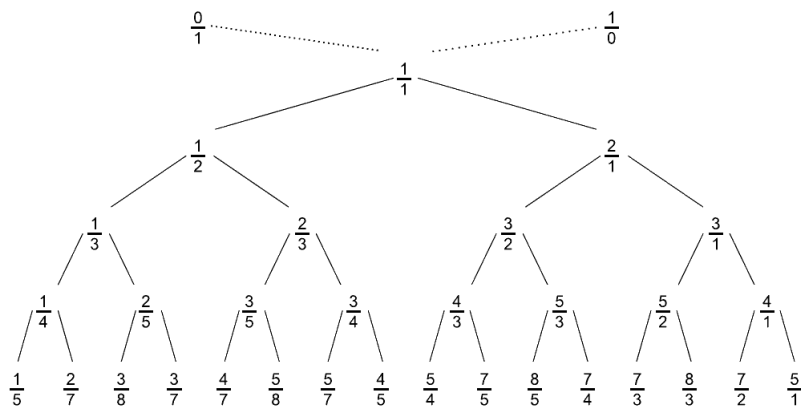
y el siguiente da dos más:

$$\frac{0}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{0}$$

La siguiente entrada cuatro más:

$$\frac{0}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{0}$$

La matriz completa es una estructura de árbol binario infinito, cuyos niveles superiores presentan este aspecto:



Esta construcción conserva el orden, por lo que no es posible que la misma fracción aparezca en dos lugares diferentes.

De hecho, podemos denominar al *árbol de Stern-Brocot* como un *sistema numérico* para la representación de números racionales, ya que cada fracción positiva reducida aparece una sola vez. Utilicemos las letras "L" y "R" para determinar el descenso por el árbol, hacia la izquierda o hacia la derecha, desde su punto más alto hasta una fracción en concreto; de esta forma, una cadena de L's y R's identifica de forma única cualquier lugar del mismo.



UNLP. Facultad de Informática.

Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2014

Por ejemplo, LRRL significa que descendemos hacia la izquierda desde $\frac{1}{1}$ hasta $\frac{1}{2}$, después hacia la derecha hasta $\frac{2}{3}$, después hacia la derecha hacia $\frac{3}{4}$, y finalmente, hacia la izquierda hasta $\frac{5}{7}$. Podemos considerar que LRRL es una representación de $\frac{5}{7}$.

Cualquier fracción positiva se puede representar de esta manera con una cadena única de L's y R's.

En realidad no todas las fracciones se pueden representar así. La fracción $\frac{1}{1}$ corresponde a una cadena vacía.

La denominaremos I, ya que es una letra que se parece al número 1 y puede significar "identidad".

El objetivo del problema es representar en el *sistema numérico de Stern-Brocot* una fracción racional positiva.

Entrada

La entrada puede contener varios casos de prueba. Cada caso constará de una línea que contiene dos enteros positivos, m y n, donde m y n son números primos entre sí. La entrada terminará con un caso de prueba, en el que el valor tanto para m como para n sea 1, caso que no debe ser procesado.

Salida

Por cada caso de prueba de la entrada, mostrar una línea que contenga la representación de la fracción proporcionada en el *sistema numérico de Stern-Brocot*.

Ejemplo de entrada

5 7
878 323
1 1

Ejemplo de salida

LRRL
RRLRRLRLLLLRLRRR