ANALISIS MATEMATICO I
(Informática)

Clases Teóricas
Parte II:
Derivación, Funciones Trigonométricas, Análisis de Funciones
(primer semestre 2000)

R. Rossignoli
Universidad Nacional de La Plata

(Versión preliminar)

2.3.1 Regla de la Cadena

Consideremos ahora la derivada de la función compuesta

$$k(x) = f(g(x))$$

Asumimos g derivable en un cierto dominio D y f derivable en los valores que toma g. Mostraremos que

$$k'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{1}$$

Usualmente, llamando $u = g(x)$, se escribe lo anterior como

$$\frac{d}{dx}f(u) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \tag{2}$$

Demostración:

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(u+s(h)) - f(u)}{h}$$

donde $u = g(x)$ y $s(h) = g(x+h) - g(x)$. Notemos que

$$\lim_{h\to 0} s(h) = \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0$$

pues al ser $g(x)$ derivable, es continua. Sea

$$\phi(s) = \frac{f(u+s) - f(u)}{s} - f'(u)$$

tal que

$$f(u+s) - f(u) = [f'(u) + \phi(s)]s$$

Dado que f es derivable,

$$\lim_{s\to 0}\phi(s) = \lim_{s\to 0}\frac{f(u+s) - f(u)}{s} - f'(u) = f'(u) - f'(u) = 0$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(u+s(h)) - f(u)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f'(u) + \phi(s(h))]s(h)}{h} = \lim_{h\to 0}[f'(u) + \phi(s(h)]\lim_{h\to 0}\frac{s(h)}{h}$$

con

$$\lim_{h\to 0}[f'(u) + \phi(s(h))] = f'(u) + \lim_{s\to 0}\phi(s) = f'(u) = f'(g(x))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

lo que conduce al resultado (1).

El mismo puede obtenerse en forma más directa si suponemos que $s(h) \neq 0 \ \forall \ h$ suficientemente cercano a 0 (pero $\neq 0$), lo que es ciertamente válido cuando $g'(x) \neq 0$. En tal caso, podemos escribir

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(u+s(h)) - f(u)}{h}\frac{s(h)}{s(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(u+s(h)) - f(u)}{s(h)}\frac{s(h)}{h} = \lim_{s\to 0}\frac{f(u+s) - f(u)}{s}\lim_{h\to 0}\frac{s(h)}{h} \\ &= f'(u)g'(x) \end{aligned} \tag{3}$$

Si existen valores de h arbitrariamente pequeños en los que $s(h) = g(x+h) - g(x) = 0$ (como ocurre por ejemplo cuando $g(x)$ es la función constante $g(x) = c$), y $g(x)$ es derivable, entonces $g'(x) = 0$, pues

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in S}}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in S}}\frac{0}{h} = 0$$

donde S es el conjunto de valores no nulos de h donde $s(h) = 0$. Por lo tanto, utilizando la primera demostración (que vale aún si $s(h) = 0$), obtenemos en este caso $k'(x) = f'(g(x))0 = 0$, lo que puede también obtenerse directamente del cociente incremental para k.

Por medio de esta regla es posible derivar expresiones complicadas, aplicándola sucesivas veces si es necesario.

Ejemplo 1:

$$((x^2+2)^2)' = 2(x^2+2)(x^2+2)' = 2(x^2+2)2x = 4x(x^2+2)$$

En este caso, hemos llamado $u = g(x) = x^2+2$, $f(u) = u^2$, con $f'(u) = 2u$, $g'(x) = 2x$. Podemos comprobar el resultado desarrollando el cuadrado: $((x^2+2)^2)' = (x^4+4+4x^2)' = 4x^3+8x = 4x(x^2+2)$. Si el exponente es grande, es por su puesto mucho más comodo aplicar la regla de la cadena:

$$((x^2+2)^{98})' = 98(x^2+2)^{97}2x = 196x(x^2+2)^{97}$$

En general, para $n \geq 1$ natural, obtenemos

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

Si $g(x) = 1/x$, $x \neq 0$, entonces

$$((\frac{1}{x})^n)' = n(\frac{1}{x})^{n-1}(-\frac{1}{x^2}) = -n(\frac{1}{x})^{n-1}(\frac{1}{x})^2 = -n(\frac{1}{x})^{n+1}$$

es decir, recordando que $x^{-n} = 1/x^n$,

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

lo que muestra que la fórmula $(x^n)' = nx^{n-1}$ vale también para $n < 0$.

Ejemplo 2:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+2}}}\left(\frac{x^2+1}{x^4+2}\right)' = \sqrt{\frac{x^4+2}{x^2+1}}\frac{2x(x^4+2)-4x^3(x^2+1)}{2(x^4+2)^2} = \frac{-x(x^4+2x^2-2)}{\sqrt{(x^4+2)^3(x^2+1)}}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}\frac{d}{dx}(x^2+\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}(2x+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}(x^2+1)) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}})\end{aligned}$$

2.4 Velocidad y aceleración

Históricamente, la noción de derivada surgió de la necesidad de definir la velocidad de un objeto móvil en forma precisa. Sea $s(t)$ el espacio recorrido en función del tiempo t de un objeto que se mueve a lo largo de una recta. La velocidad media entre t_0 y t_0+h es el espacio recorrido en ese intervalo de tiempo dividido el tiempo transcurrido:

$$\bar{v}(t_0, t_0+h) = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$$

Resulta entonces natural definir la *velocidad instantánea* en $t = t_0$, $v(t_0)$, como el límite del cociente anterior para $h \to 0$:

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = s'(t_0)$$

La velocidad es pues la *derivada* del espacio recorrido $s(t)$ respecto al tiempo. Si el espacio aumenta con el tiempo, la pendiente de la curva $s(t)$ es positiva, lo que corresponde a una velocidad *positiva* $v(t) > 0$. Si disminuye, la pendiente es negativa y $v(t) < 0$, lo que indica una velocidad en sentido contrario. En notación corriente, se escribe lo anterior como

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

En forma análoga, se define la *aceleración* como

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

es decir, $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

Ejemplo 1: Consideremos un objeto moviéndose sobre una recta. Si el espacio recorrido en función del tiempo está dado por

$$s(t) = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

con v_0 y a constantes, hallar la velocidad y aceleración. Obtenemos

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 + gt, \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = g$$

Corresponde pues a un movimiento con aceleración *constante* g y velocidad variable v_0+gt, que aumenta con el tiempo si $g > 0$ y disminuye si $g < 0$. Si $g = 0$, la velocidad es constante: $v(t) = v_0$.

Ejemplo 2: Si el radio de un círculo aumenta a razón de 1 cm/seg, cuanto aumenta el área por segundo?
Tenemos $\frac{dr}{dt} = 1$ (tomando como unidad de longitud el cm y tiempo el seg). Como $A(r) = \pi r^2$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} = 2\pi r(t)\frac{dr}{dt} = 2\pi r(t) = 2\pi\, t$$

donde hemos supuesto $r(0) = 0$, en cuyo caso $r(t) = t$ (pues $\frac{dr}{dt} = 1$). Para $t = 1$ seg, $\frac{dA}{dr} = 2\pi \approx 6,28$ cm^2/seg. Notemos que la velocidad de crecimiento del área *aumenta* con el tiempo.

Ejemplo 3: Consideremos dos objetos situados inicialmente en un mismo punto. Si uno de ellos se mueve hacia arriba con velocidad v_y y el otro hacia la derecha con velocidad v_x, hallar la velocidad de variación de la distancia s entre ellos.
Midiendo la posición de ambos objetos desde el punto inicial obtenemos

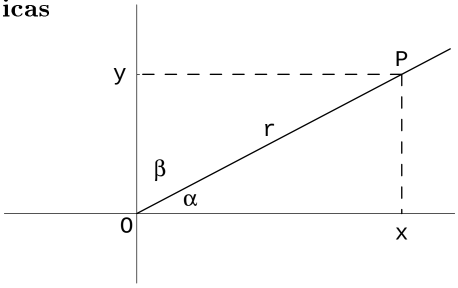
$$s(t) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)}, \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{2x(t)dx/dt + 2y(t)dy/dt}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(y)}} = \frac{x(t)v_x + y(t)v_y}{s(t)}$$

Si por ejemplo v_x y v_y son ambas constantes, tenemos $x(t) = v_x t$, $y(t) = v_y t$, y

$$s(t) = \sqrt{v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2} = t\sqrt{v_x^2+v_y^2}, \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{v_x^2 t + v_y^2 t}{t\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

2.5 Funciones Trigonométricas

2.5.1 Propiedades básicas



Consideremos una semi-recta con origen en $O = (0,0)$, que forma un ángulo α con la horizontal. Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera sobre dicha semi-recta, con $P \neq O$. La distancia de P al origen es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. El seno y coseno de α se definen como

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$$

El seno y coseno dependen sólo del ángulo y no de la elección del punto sobre la semi-recta: Si P' está en la semi-recta $\Rightarrow P' = (cx, cy)$, con $c > 0$. En tal caso $r' = \sqrt{(cx)^2 + (cy)^2} = c\sqrt{x^2+y^2} = cr$ y

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cy}{cr} = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{cx}{cr} = \frac{x}{r}$$

Conociendo $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, y r, podemos determinar las coordenadas del punto como $x = r\cos\alpha$, $y = r\operatorname{sen}\alpha$.

En lo sucesivo mediremos los ángulos en *radianes*, por razones que serán aparentes más adelante. Definimos el número π como *el área de un círculo de radio* 1. Por definición, el ángulo llano (180^o) corresponde a π *radianes*. En general,

$$\alpha^o = \frac{\alpha}{180}\pi \ \text{ radianes}$$

de modo que 90^o equivalen $\frac{\pi}{2}$ radianes, 180^o a π radiantes, 270^0 a $\frac{3\pi}{2}$ radianes y 360^o a 2π radianes.

A partir de la definición vemos inmediatamente que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = 1$$

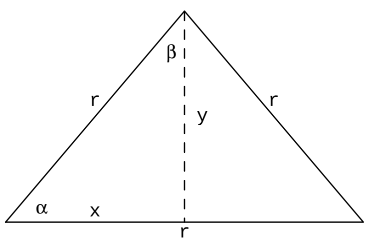
$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Notemos que $\operatorname{sen}\alpha > 0$ si $0 < \alpha < \pi$ (pues $y > 0$) y $\operatorname{sen}\alpha < 0$ si $\pi < \alpha < 2\pi$ (pues $y < 0$)
Análogamente, $\cos\alpha > 0$ si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ($x > 0$) y $\cos\alpha < 0$ si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ($x < 0$).
En la figura, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Pero $\cos\beta = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha$, y $\operatorname{sen}\beta = \frac{x}{r} = \cos\alpha$, por lo que el seno y coseno se hallan relacionados por

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha), \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$$

Algunos valores notables se resumen en la siguiente tabla:

α	x	y	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$
0	r	0	0	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}r/2$	$r/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$r/\sqrt{2}$	$r/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$r/2$	$\sqrt{3}r/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	0	r	1	0
π	$-r$	0	0	-1
$3\pi/2$	0	$-r$	-1	0



Para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45^o), $x = y$, por lo que $r = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}y$, o sea, $x = y = r/\sqrt{2}$.
Para $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60^o) o $\frac{\pi}{6}$ (30^o), podemos considerar el triángulo equilátero de la figura, donde $x = r/2$, $y = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = r\sqrt{3}/2$, con $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$.

El ángulo $\alpha + 2\pi$, o en general, $\alpha + 2n\pi$, con $0 \leq \alpha < 2\pi$ y n entero, corresponde al mismo punto $P = (x, y)$, por lo que resulta natural definir

$$\text{sen}(\alpha + 2n\pi) = \text{sen}(\alpha), \qquad \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos(\alpha), \qquad \text{n entero}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

Notemos también que el punto $(x, -y)$ corresponde al ángulo $-\alpha$ (o $2\pi - \alpha$), por lo que

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Asimismo, el punto $(-x, -y)$ corresponde al ángulo $\alpha + \pi$, por lo que

$$\text{sen}(\alpha + \pi) = -\text{sen}(\alpha), \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$

Para $x \neq 0$ ($\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 3\pi/2$) se define la *tangente* como

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

mientras que para $y \neq 0$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$), se define la *cotangente* como

$$\text{cotan}\,\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

con $\text{cotan}\,\alpha = 1/\tan\alpha$ en los ángulos donde ambas están simultáneamente definidas. Obtenemos

$$\tan(-\alpha) = -\tan\,\alpha, \;\; \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha, \qquad \text{cotan}(-\alpha) = -\text{cotan}\,\alpha, \;\; \text{cotan}(\alpha + \pi) = \text{cotan}\,\alpha$$

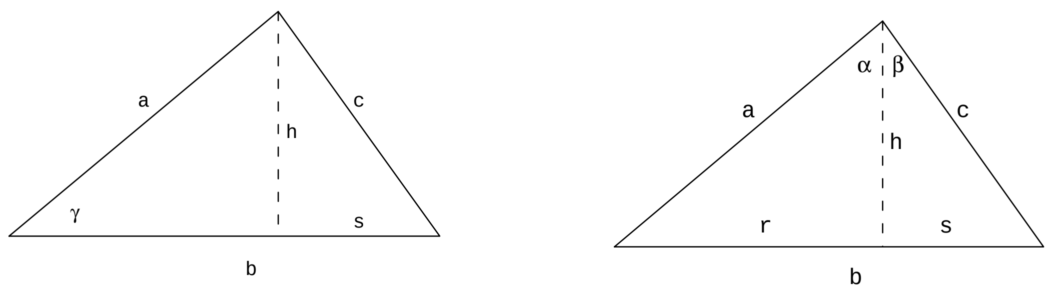
$$\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1, \qquad \text{cotan}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} - 1$$

2.5.2 Fórmulas de adición

Por su utilidad en la deducción de la derivada del seno y coseno, mostraremos que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta \tag{4}$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha \tag{5}$$



Para obtener (4), recordemos primero el teorema del coseno: A partir de la fig. izquierda, donde $h = a\,\text{sen}\gamma$, $s = b - a\cos\gamma$, obtenemos

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + s^2 = (a\,\text{sen}\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2 = a^2\text{sen}^2\gamma + b^2 + a^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Apliquemos ahora el teorema anterior para obtener b, utilizando el esquema de la fig. derecha. Tenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\alpha + \beta) \tag{6}$$

Por otro lado, dado que $b = r + s$, con $r = a\,\text{sen}\alpha$, $s = c\,\text{sen}\beta$,

$$b^2 = (a\,\text{sen}\alpha + c\,\text{sen}\beta)^2 = a^2\text{sen}^2\alpha + c^2\text{sen}^2\beta + 2ac\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = a^2 + c^2 - a^2\cos^2\alpha - c^2\cos^2\beta + 2ac\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

Como $h = a\cos\alpha = c\cos\beta \Rightarrow a^2\cos^2\alpha = c^2\cos^2\beta = ac\cos\alpha\cos\beta$ y por tanto,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta) \tag{7}$$

Igualando (6) y (7) obtenemos finalmente la ecuación (4). La ecuación (5) se deduce de (4):

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos(-\beta)-\text{sen}(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)\text{sen}(-\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

A partir de (4)-(5) obtenemos las conocidas expresiones:

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}(2\alpha)=\text{sen}(\alpha+\alpha)=2\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

A partir de la primera de estas obtenemos

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2},\quad \text{sen}^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

Podemos verificar también que

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\tfrac{\pi}{2})\cos(\alpha)-\text{sen}(\tfrac{\pi}{2})\text{sen}(-\alpha)=\text{sen}(\alpha),\quad \text{sen}(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)=\text{sen}(\tfrac{\pi}{2})\cos(-\alpha)+\cos(\tfrac{\pi}{2})\text{sen}(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha+\pi)=\cos(\alpha)\cos(\pi)-\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\pi)=-\cos(\alpha),\quad \text{sen}(\alpha+\pi)=\text{sen}(\alpha)\cos(\pi)+\cos(\alpha)\text{sen}(\pi)=-\text{sen}(\alpha)$$

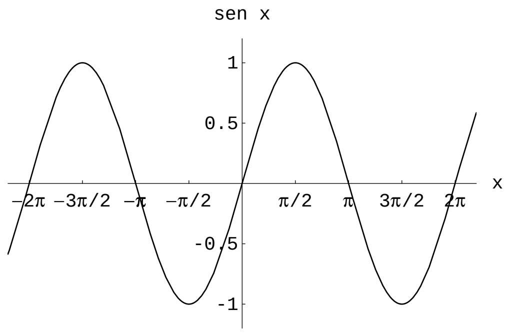
2.5.3 Funciones seno, coseno y tangente

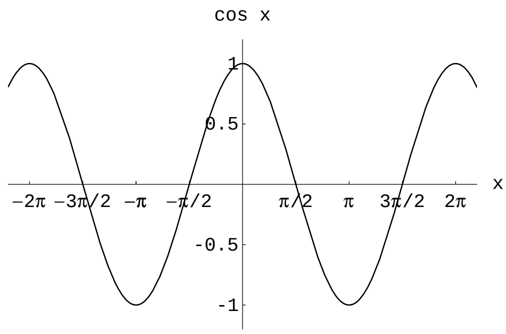
Se define la función $\text{sen}(x)$, con dominio $D=\Re$, como el *seno de x radianes*. Análogamente, la función $\cos(x)$, con $D=\Re$, se define como el *coseno de x radianes*. Veremos más adelante como es posible definir estas funciones sin basarse en consideraciones geométricas. Notemos que el seno de x grados estará dado entonces por la función $\text{sen}^*(x)=\text{sen}(\frac{\pi}{180}x)$ y el coseno de x grados por $\cos^*(x)=\cos(\frac{\pi}{180}x)$.

Las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ son funciones *periódicas*, con período 2π, pues

$$\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen}(x),\quad \cos(x+2\pi)=\cos(x)$$

La importancia de estas funciones en diversas aplicaciones reside precisamente en que permiten describir fenómenos periódicos, como ondas, oscilaciones, etc. (puede probarse que toda función periódica puede representarse por una suma (o serie) de senos y cosenos). Mostramos ahora las gráficas correspondientes.

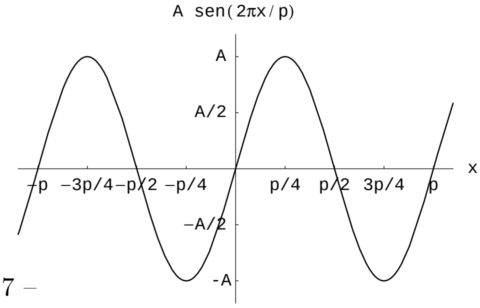




Dado que $\cos(x)=\cos(-x)=\text{sen}(\frac{\pi}{2}+x)$, la gráfica de $\cos(x)$ es la gráfica de $\text{sen}(x)$ trasladada en $-\pi/2$. Además, como $\text{sen}(-x)=-\text{sen}(x)$, $\cos(-x)=\cos(x)$, $\text{sen}(x)$ es una función *impar*, mientras que $\cos(x)$ una función *par*. En la próxima sección veremos en detalle la pendiente de estas gráficas, al calcular su derivada. Notemos que la gráfica de la función

$$f(x)=A\,\text{sen}(2\pi x/p),\quad A>0,\quad p>0$$

es la de $\text{sen}(x)$ dilatada horizontalmente en $p/(2\pi)$ y verticalmente en A. Corresponde pues a una función de *período p* (pues $f(x+p)=f(x)$) y *amplitud A*.



La función tangente se define obviamente por

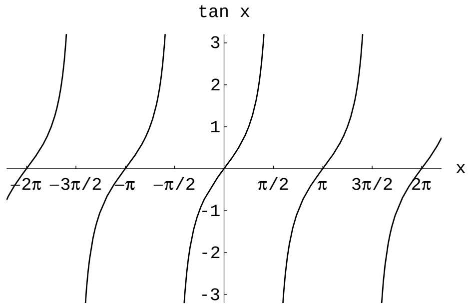
$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

siendo su dominio el indicado (no está definida en $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con n entero arbitrario). Notemos que los límites laterales en tales puntos son

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty,$$

y análogamente para $x \to (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{\pm}$. La tangente es una función periódica de *período* π:

$$\tan(x+\pi) = \tan(x)$$

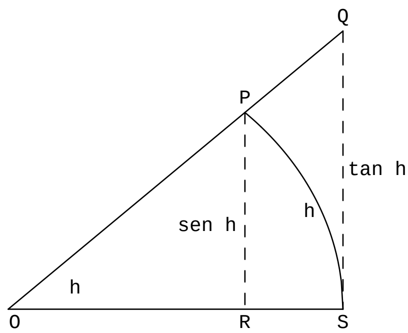


2.5.4 Límite fundamental

Demostraremos, a partir de consideraciones geométricas, que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \tag{8}$$

Este límite es necesario para obtener la derivada de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. Sabemos que $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen} h = 0$, pero el resultado (8) nos indica que $\operatorname{sen}(x)$ se anula "como x" para x cercano a 0, y no como x^2 o $\sqrt{x}$ por ejemplo. Para x cercano a 0, podemos incluso escribir $\operatorname{sen}(x) \approx x$, donde $\approx$ significa aproximadamente igual (pues estrictamente, $\operatorname{sen}(x) \neq x \;\forall\; x \neq 0$). El significado preciso de este tipo de aproximaciones lo veremos en detalle más adelante. Remarquemos que (8) es válido sólo cuando h es medido en radianes, es decir, para la función $\operatorname{sen}(x)$ tal como la hemos definido (en grados, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}^* h}{h} = \frac{\pi}{180}$).



En la figura, supondremos que las longitudes de los segmentos OP y OS son iguales a 1, es decir $\overline{OP} = \overline{OS} = 1$. Entonces $\overline{RP} = \overline{OP}\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} h$, $\overline{SQ} = \overline{OS}\tan h = \tan h$, y $\overline{OR} = \overline{OP}\cos h = \cos h$. El área del triángulo OPR es entonces $A_1 = \frac{1}{2}\cos h \operatorname{sen} h$, el área del sector circular OPS es $A_2 = \pi\frac{h}{2\pi} = \frac{1}{2}h$ (h es el ángulo en radianes) y el área del triángulo OQS es $A_3 = \frac{1}{2}\tan h$. Para $0 < h < \frac{\pi}{2}$ se satisface

$$A_1 < A_2 < A_3$$

o sea,

$$\tfrac{1}{2}\cos h \operatorname{sen} h < \tfrac{1}{2}h < \tfrac{1}{2}\tan h$$

Como $\operatorname{sen} h > 0$ en este intervalo, multiplicando la ecuación anterior por $2/\operatorname{sen} h$ y recordando que $\tan h = \operatorname{sen} h/\cos h$, obtenemos

$$\cos h < \frac{h}{\operatorname{sen} h} < \frac{1}{\cos h}$$

Tomando ahora el límite $h \to 0$,

$$\lim_{h\to 0^+} \cos h \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{\operatorname{sen} h} \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\cos h}$$

de donde, dado que $\lim\limits_{h\to 0^+} \cos h = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{\cos h} = 1$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{\operatorname{sen} h} = 1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} h}{h}} = \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{h}{\operatorname{sen} h}} = \frac{1}{1} = 1$$

Geométricamente, vemos a partir de la figura que cuando h tiende a 0, $\operatorname{sen} h$, h y $\tan h$ tienden a ser iguales, lo que implica que las áreas A_1, A_2 A_3 tienden también a ser iguales.

Para $h < 0$ obtenemos, sustituyendo $u = -h$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-u)}{-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} u}{-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$$

por lo que arribamos finalmente al resultado (8). A partir de (8) se deduce también

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tan h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h\cos h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h} = 1.1 = 1$$

Otro límite importante que se puede hallar de (8) es

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Puede obtenérselo de la siguiente forma:

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\operatorname{sen} h}{h}\operatorname{sen} h \frac{1}{\cos h + 1}$$

de modo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos h + 1} = -1.0.\tfrac{1}{2} = 0$$

Este límite indica que la diferencia $\cos(x) - 1$ se anula más rápidamente que x o $\operatorname{sen}(x)$ para x tendiendo a 0.

Ejemplos:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(2u)}{2u} = \lim_{w\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(w)}{w} = 2,$$

donde hemos sustituido $w = 2u$. En general, para $c \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(cx)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{c\operatorname{sen}(cx)}{cx} = \lim_{u\to 0} \frac{c\operatorname{sen} u}{u} = c$$

que se cumple también para $c = 0$. Análogamente, para n natural,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(cx^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{c\operatorname{sen}(cx^n)}{cx^n} = \lim_{u\to 0} \frac{c\operatorname{sen} u}{u} = c$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0.1 = 0$$

2.5.5 Derivada del seno, coseno y tangente

Mostraremos a continuación que

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(x) = \cos(x) \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\mathrm{sen}(x) \tag{10}$$

Para obtener las derivadas utilizaremos las fórmulas de adición:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x+h)-\mathrm{sen}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)\cos(h)+\cos(x)\mathrm{sen}(h)-\mathrm{sen}(x)}{h} \\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} + \mathrm{sen}(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \cos(x).1+\mathrm{sen}(x).0 = \cos(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(h)-\cos(x)}{h} \\
&= -\mathrm{sen}(x)\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = -\mathrm{sen}(x).1+\cos(x).0 = -\mathrm{sen}(x)
\end{aligned}$$

Podemos también obtener el resultado (10) directamente a partir de (9), recordando que $\cos(x) = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}-x)$ y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}-x) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\mathrm{sen}(x)$$

Podemos visualizar (9)-(10) a partir de las gráficas del seno y coseno, notando que en las regiones donde $\mathrm{sen}(x)$ crece ($-\frac{\pi}{2}+2n\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2n\pi$), $\cos(x) > 0$, mientras que donde $\mathrm{sen}(x)$ decrece ($\frac{\pi}{2}+2n\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2n\pi$), $\cos(x) < 0$. Los máximos ($x = \frac{\pi}{2}+2n\pi$) y mínimos ($x = \frac{3\pi}{2}+2n\pi$) de $\mathrm{sen}(x)$ corresponden a los puntos donde $\cos(x) = 0$. En $x = 0+2n\pi$, $\mathrm{sen}(x) = 0$, con $\cos(x) = 1$ (pendiente 1) mientras que en $x = \pi+2n\pi$, $\mathrm{sen}(x) = 0$, con $\cos(x) = -1$ (pendiente -1).

A partir de (9)-(10), obtenemos también

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x)-\mathrm{sen}(x)(-\mathrm{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cotan}(x) = \frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}(x)} = \frac{-\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(x)-\cos(x)\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)} = \frac{-1}{\mathrm{sen}^2(x)} = -\mathrm{cosec}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \tan(x)\sec(x)$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cosec}(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\mathrm{sen}(x)} = -\frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)} = -\mathrm{cotan}(x)\mathrm{cosec}(x)$$

Ejemplos:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen}^n(x) = \frac{du^n}{du}\frac{du}{dx} = n\,\mathrm{sen}^{n-1}(x)\cos x$$

donde $u = \mathrm{sen}(x)$.

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x) = \frac{d}{du}(\mathrm{sen}\,u)\frac{du}{dx} = \cos(\mathrm{sen}\,x)\cos x$$

donde $u = \mathrm{sen}(x)$.

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(1/x) = \frac{d}{du}\mathrm{sen}(u)\frac{du}{dx} = -\cos(1/x)/x^2$$

2.5.6 Ejemplos complementarios

a) Sea

$$g(x) = x^n \mathrm{sen}(1/x), \quad x \neq 0, \quad n > 0$$

1) Indicar si es posible definir $g(0)$ para que g resulte continua en $x = 0$.
Si $g(x)$ es continua en $x = x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Por lo tanto, si $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existe, $g(x)$ resultará continua en $x = x_0$ si definimos

$$g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

En el caso presente, $x_0 = 0$ y $\lim_{x\to 0} \mathrm{sen}(1/x) \nexists$, pues $\mathrm{sen}(1/x)$ oscila cada vez más rapido a medida que $x \to 0$ ($\mathrm{sen}(1/x) = 0$ si $x = \frac{1}{n\pi}$, con $n \neq 0$ entero, mientras que $|\mathrm{sen}(1/x)| = 1$ si $x = \frac{2}{n\pi}$, con n entero impar). Sin embargo, como $|\mathrm{sen}(1/x)| \leq 1 \ \forall \ x \neq 0$, tenemos $-|x^n| \leq x^n \mathrm{sen}(1/x) \leq |x^n|$ y por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} x^n \mathrm{sen}(1/x) = 0, \quad n > 0$$

Para $n > 0$, $g(x)$ resultará entonces continua en $x = 0$ si definimos

$$g(0) = 0$$

2) Determinar si $g(x)$ es derivable en $x = 0$, y en tal caso, indicar si $g'(x)$ es continua en $x = 0$.
Para $x \neq 0$,

$$g'(x) = (x^n \mathrm{sen}(1/x))' = nx^{n-1}\mathrm{sen}(1/x) - x\cos(1/x)/x^2 = nx^{n-1}\mathrm{sen}(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x)$$

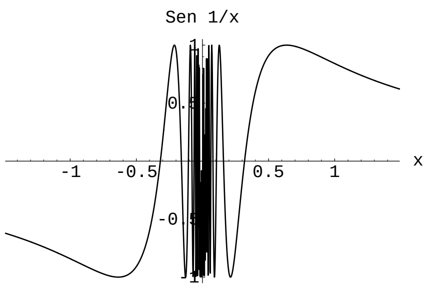
mientras que para $x = 0$,

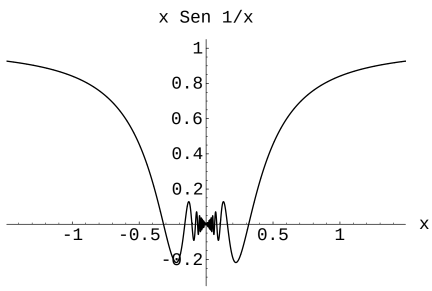
$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^n \mathrm{sen}(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1}\mathrm{sen}(1/h) = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ \nexists & n \leq 1 \end{cases}$$

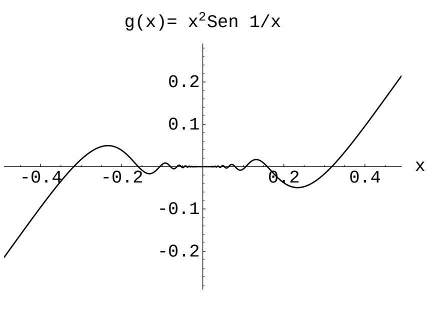
Por lo tanto, $g'(0)$ existe sólo para $n > 1$. Notemos sin embargo que

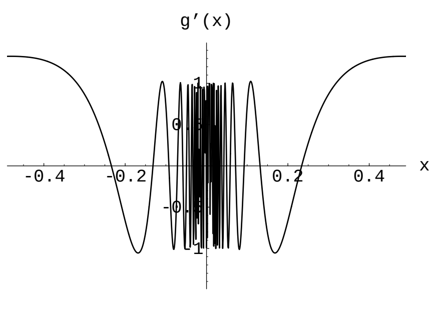
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}[nx^{n-1}\mathrm{sen}(1/x) - x^{n-2}\cos(1/x)] = \begin{cases} 0 & n > 2 \\ \nexists & n \leq 2 \end{cases}$$

dado que el límite del segundo término es 0 sólo si $n > 2$. Por lo tanto, $g'(x)$ es continua en $x = 0$ sólo si $n > 2$. El caso $n = 2$ (o $1 < n \leq 2$) es muy particular: $g'(x) \ \exists \ \forall \ x$, con $g'(0) = 0$, pero $\lim_{x\to 0} g(x) \nexists$, por lo que $g'(x)$ *no es continua* en $x = 0$. $g'(x)$ oscila rápidamente para $x \to 0$, sin tender a un límite, pero pasa por 0 para $x = 0$.









b) Analizar la continuidad y derivabilidad de

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \leq x_0 \\ g_2(x) & x > x_0 \end{cases}$$

en $x = x_0$, suponiendo que $g_1(x)$ y $g_2(x)$ *están definidas y son derivables* en $x = x_0$.
Como $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son derivables en $x = x_0$, ambas son *continuas* en ese punto. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = \lim_{x \to x_0^-} g_1(x) = g_1(x_0) = g(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0^+} g(x) = \lim_{x \to x_0^+} g_2(x) = g_2(x_0)$$

$g(x)$ será entonces continua en $x = x_0$ si

$$g_1(x_0) = g_2(x_0)$$

En tal caso, podemos analizar si $g(x)$ es derivable en x_0 (recordemos que si no es continua, no es derivable).
Tenemos

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{g_1(x_0+h) - g_1(x_0)}{h} = g_1'(x_0)$$
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{g_2(x_0+h) - g_2(x_0)}{h} = g_2'(x_0)$$

pues $g(x_0) = g_1(x_0) = g_2(x_0)$. $g(x)$ será entonces derivable en $x = x_0$ si

$$g_1'(x_0) = g_2'(x_0)$$

Este resultado es evidente: $g(x)$ es derivable si las pendientes de $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son iguales en $x = x_0$.
En tal caso, asumiendo que $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son derivables en su dominio, obtenemos

$$g'(x) = \begin{cases} g_1'(x) & x < x_0 \\ g_1'(x_0) = g_2'(x_0) & x = x_0 \\ g_2'(x) & x > x_0 \end{cases}$$

Si $g_1(x_0) \neq g_2(x_0)$ o $g_1'(x_0) \neq g_2'(x_0)$, $g'(x_0) \nexists$ y en tal caso

$$g'(x) = \begin{cases} g_1'(x) & x < x_0 \\ \nexists & x = x_0 \\ g_2'(x) & x > x_0 \end{cases}$$

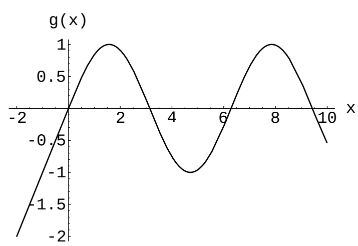
Las conclusiones anteriores siguen siendo válidas si en $x = x_0$ g_1 es derivable sólo por izquierda y g_2 sólo por derecha. En este caso debemos reemplazar $g_1'(x_0)$ y $g_2'(x_0)$ por $g_{1-}'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g_1(x_0+h) - g_1(x_0)}{h}$ y $g_{2+}'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g_2(x_0+h) - g_2(x_0)}{h}$ respectivamente.

Ejemplo 1): Analizar la derivabilidad y continuidad de

$$g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \text{sen}(x) & x > 0 \end{cases}$$

Tanto $g_1(x) = x$ como $g_2(x) = \text{sen}(x)$ son derivables $\forall x$, con $g_1'(x) = 1$, $g_2'(x) = \cos(x)$. Además, $g_2(0) = \text{sen}(0) = 0 = g_1(0)$, $g_2'(0) = \cos(0) = 1 = g_1'(0)$, por lo que $g(x)$ es continua y derivable en $x = 0$ (y por su puesto también para $x \neq 0$). Obtenemos

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$



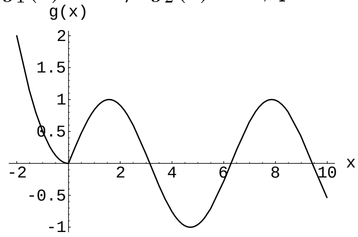
$g'(x)$ es también continua y derivable en $x = 0$, con $g''(0) = 0$.

2) Idem para

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x > 0 \end{cases}$$

En este caso $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \operatorname{sen}(x)$, con $g_1(0) = g_2(0) = 0$ pero $g_1'(0) = 0 \neq g_2'(0) = 1$, por lo que $g(x)$ *no es derivable* en $x = 0$. Obtenemos

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ \nexists & x = 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$



3) Idem para $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$. Si $x < 0$, $\operatorname{sen}(|x|) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, por lo que

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & x \geq 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & x < 0 \end{cases}$$

es decir, $f_1(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f_2(x) = \operatorname{sen}(x)$. $f(x)$ es obviamente continua en 0, *pero no es derivable en* $x = 0$ pues $f_1'(0) = -1 \neq f_2'(0) = 1$. Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \cos(x)\frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

4) Idem para

$$g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x^2)/x & x > 0 \end{cases}$$

En este caso $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \operatorname{sen}(x^2)/x$, pero $g_2(x)$ no está definida en $x = 0$, por lo que no podemos aplicar el razonamiento anterior. Es necesario calcular explícitamente los límites por derecha en $x = 0$. Obtenemos, escribiendo $\operatorname{sen}^2(x)/x = x(\operatorname{sen}(x)/x)^2$,

$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\,(\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x})^2 = 0.1 = 0 = g_1(0)$$

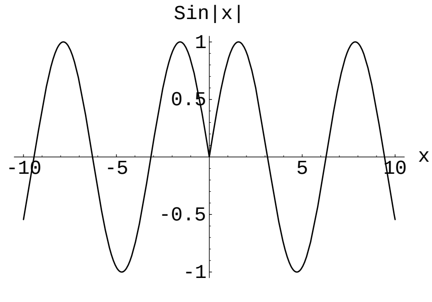
por lo que $g(x)$ es continua en $x = 0$. Por otro lado,

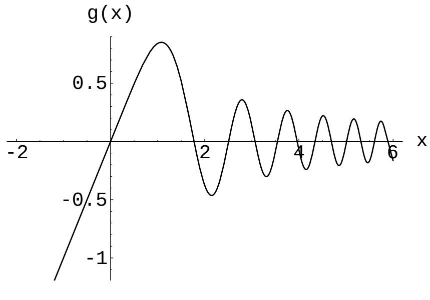
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h^2} = 1 = g_1'(0)$$

por lo que $g(x)$ resulta también derivable en $x = 0$. Obtenemos finalmente

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 2\cos(x^2) - \operatorname{sen}(x^2)/x^2 & x > 0 \end{cases}$$

que resulta continua en $x = 0$.





2.6 Análisis de Funciones

2.6.1 Máximos y Mínimos

Sea f una función definida en un dominio D. Un número $c \in D$ es un punto máximo de f si y sólo si

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall\, x \in D$$

Si la condición anterior se cumple dentro de un intervalo I (cerrado o abierto), con $c \in I \Rightarrow c$ es un punto máximo de f dentro de ese intervalo. Notemos que en un dado dominio o intervalo, puede haber más de un punto máximo, y que en el caso de un intervalo cerrado $I = [a.b]$, el mismo puede estar situado tanto en algún borde ($c = a$ o $c = b$ o dentro del intervalo ($a < c < b$). $f(c)$ se denomina valor máximo de f.

Analogamente, $d \in D$ es un punto mínimo de f si y sólo si

$$f(x) \geq f(d) \quad \forall\, x \in D$$

Los comentarios anteriores son también válidos para el mínimo. $f(d)$ se denomina valor mínimo de f en D. Ejemplos: Si

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

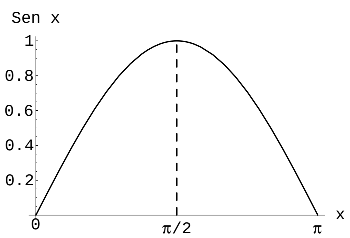
el punto máximo en este intervalo es $x = \pi/2$, mientras que los extremos del intervalo, $x = 0$ y $x = \pi$, son puntos mínimos. Si consideramos $D = \Re$, los puntos máximos son $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ y los mínimos $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, con n entero. Si

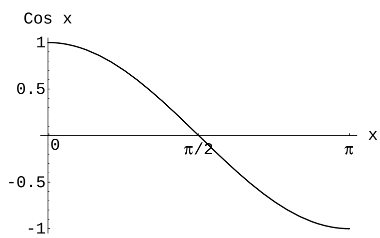
$$f(x) = \cos(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

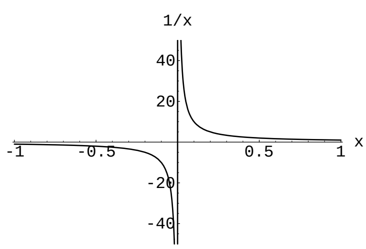
el punto máximo en el intervalo es $x = 0$ y el mínimo $x = \pi$, situados ambos en los extremos. Si

$$f(x) = 1/x, \quad x \neq 0$$

en este caso $f(x)$ *no posee* valor máximo ni mínimo en su dominio natural, pues $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. En otras palabras, no está acotada ni superior ni inferiormente.







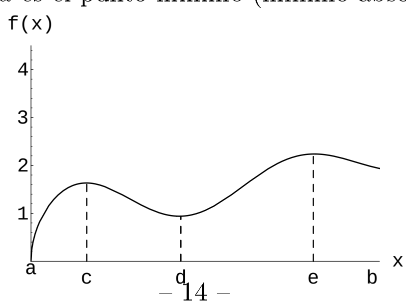
Las definiciones anteriores corresponden a máximos y mínimos *absolutos* en un cierto dominio D o intervalo I. Una función puede también poseer máximos y mínimos *locales* o relativos. Se dice que c es un máximo *local* o relativo de f si existe en D un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$, con $\delta > 0$, en el cual c es un punto máximo:

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall\, x \in (c - \delta, c + \delta)$$

Análogamente, d es un mínimo local o relativo si existe en D un intervalo $(d - \delta, d + \delta)$, con $\delta > 0$, en el que d es un punto mínimo:

$$f(x) \geq f(d) \quad \forall\, x \in (a', b')$$

En la figura, dentro del intervalo $[a, b]$, c es un máximo local de f, d un mínimo local, e el punto máximo (o máximo absoluto) mientras que a es el punto mínimo (mínimo absoluto).



2.6.2 Funciones continuas

Consideremos ahora funciones *continuas*. Los siguientes teoremas resultan geométricamente evidentes:

Teorema 1: Toda función contínua en un intervalo cerrado $[a, b]$ *posee un máximo y un mínimo en dicho intervalo.*

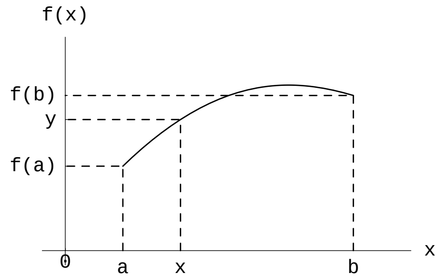
Notemos que toda función definida en un conjunto *finito* de puntos posee obviamente un valor máximo y un valor mínimo. Sin embargo, tal propiedad no es necesariamente válida si f está definida en un conjunto infinito de puntos, tal como un intervalo.
¿Puede existir una función definida $\forall x \in [a, b]$ que no tenga máximo? La respuesta es *si*, si $f(x)$ no es continua. Por ejemplo,

$$f(x) = \{^{1/x,\ \ x\neq 0}_{0,\ \ \ \ x=0}$$

esta definida $\forall\ x \in [-1, 1]$, incluso 0, pero no posee ni mínimo ni máximo en dicho intervalo, dado que toma valores arbitrariamente grandes, tanto positivos como negativos, cuando x se acerca a 0.
¿Puede existir una función *continua* que no tenga máximo o mínimo en un intervalo *abierto* (a, b)?
Si, por ejemplo $f(x) = 1/x$ no tiene máximo en $(0, 1)$, ni mínimo en $(-1, 0)$, pues $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} = \pm\infty$, pero es continua en $(0, 1)$ y $(-1, 0)$.

Teorema 2 (*Teorema del valor intermedio*): Sea f una función continua en $[a, b]$. Supongamos $f(a) < f(b)$. Entonces, $\forall\ y \in [f(a), f(b)]$ existe al menos algún $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$. Lo mismo ocurre $\forall y \in [f(b), f(a)]$ en el caso $f(b) < f(a)$.

En otras palabras, una función continua en $[a, b]$ *pasa por todos los puntos intermedios* entre $f(a)$ y $f(b)$, al menos una vez. Esto resulta geométricamente obvio ya que una función continua no puede tener saltos.



El teorema implica por ejemplo que una ecuación del tipo

$$f(x) = k$$

con $f(x)$ continua en $[a, b]$, *tendrá al menos una solución* en $[a, b]$ si encontramos dos puntos x_1, x_2 en $[a, b]$ tales que $f(x_1) < k < f(x_2)$. En tal caso el teorema asegura que existe al menos un x entre x_1 y x_2 para el cual $f(x) = k$.

Ejemplo: Determinar si existe solución de la ecuación

$$x + \mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

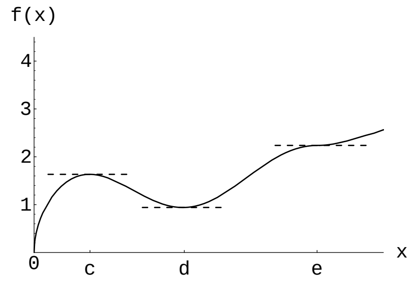
La respuesta es si, pues, si $f(x) = x + \mathrm{sen}(x) \Rightarrow 0 = f(0) < \frac{1}{2} < f(1) = 1 + \mathrm{sen}(1)$ (pues $\mathrm{sen}(1) > 0$) por lo que existe al menos un $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$.

2.6.3 Funciones derivables

Consideremos ahora funciones que además de ser continuas en $[a,b]$, sean *derivables* al menos en el intervalo abierto (a,b). Un punto $c \in (a,b)$ en el cual

$$f'(c) = 0$$

se denomina *punto crítico* de f. En $x = c$, la curva $y = f(x)$ posee pendiente nula, por lo que la recta tangente a la curva en dicho punto es *horizontal*. Resulta geométricamente evidente que si una función derivable posee un máximo o mínimo local en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$. Esto será probado rigurosamente a continuación. No obstante un punto crítico no necesariamente corresponde a un máximo o mínimo local. Por ejemplo, en la figura c, d y e son puntos críticos, en los que la pendiente es horizontal. Se observa que c es un máximo local, d un mínimo local, pero e no es ni mínimo ni máximo. Si el punto crítico no es ni mínimo ni máximo se lo denomina a veces punto de ensilladura.



Teorema 3: Sea f una función *derivable* en un intervalo abierto (a,b). Si f posee una máximo o mínimo local en $c \in (a,b)$, entonces

$$f'(c) = 0$$

Demostración: Si c es un máximo local, entonces para h suficientemente pequeño se cumple

$$f(c+h) \leq f(c)$$

por lo que $f(c+h) - f(c) \leq 0$. Por lo tanto, para $h > 0$,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad h > 0$$

mientras que para $h < 0$,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad h < 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

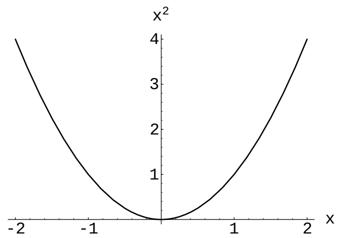
Como la función es derivable, los límites por derecha e izquierda deben ser iguales, por lo que la única posibilidad es que el límite sea 0,

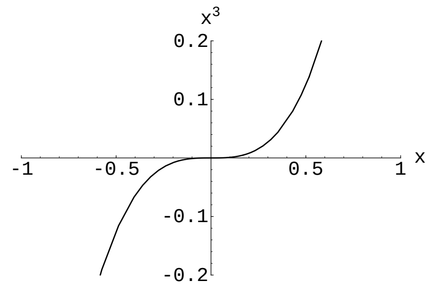
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

La demostración para el caso de que c sea un punto mínimo es similar.

Este teorema es muy importante ya que nos porporciona un método para determinar los posibles mínimos y máximos *relativos* de una función *derivable*: Debemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$, y luego determinar si las raíces c_i obtenidas corresponden a un máximo, mínimo, o punto de ensilladura. Para determinar el máximo o mínimo absoluto en un intervalo $[a,b]$, debemos además comparar $f(c_i)$ con los valores en los extremos $f(a)$, $f(b)$. Notemos que el máximo o mínimo absoluto puede estar situado en un extremo, en cuyo caso $f'(a)$ y $f'(b)$, si existen, no son necesariamente nulos.

Ejemplos:
Si $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, por lo que el único punto crítico es $x = 0$. Este corresponde a un mínimo relativo de f, que es también absoluto para $D = \Re$.
Si $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, por lo que el único punto crítico es $x = 0$. Sin embargo, $x = 0$ no es ni máximo ni mínimo relativo de f.
Si $f(x) = \text{sen}(x)$, $f'(x) = \cos(x)$. La ecuación $\cos(x) = 0$ posee como raíces $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, con n entero arbitrario. Para n par, estos puntos corresponden a los máximos de $\text{sen}(x)$ mientras que para n impar a los mínimos.





Sabemos que el mínimo de una parábola

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$$

se obtiene en el vértice $x = -\frac{b}{2a}$ (completando cuadrados, $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$). Podemos obtener este valor directamente resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$$

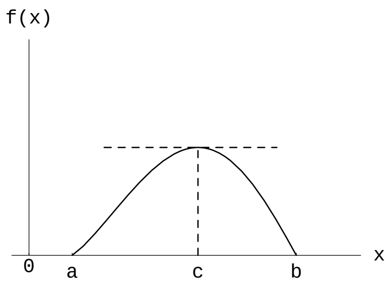
2.6.4 Teorema del valor medio

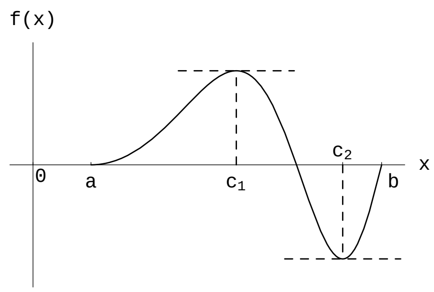
Teorema de Rolle: Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe al menos algún $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0$$

Demostración: Si f es constante, $\Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, por lo que cualquier $c \in (a, b)$ sirve. Si f no es constante, entonces $\exists \ x_0 \in (a, b)$ donde $f(x_0) \neq 0$. Si $f(x_0) > 0$, por el teorema 1 f poseerá un punto máximo c que estará en el *interior* del intervalo, ya que $f(a) = f(b) = 0$. Por lo tanto, por el teorema 3, $f'(c) = 0$, con $f(c) > 0$. Si $f(x_0) < 0 \Rightarrow f$ posee un punto mínimo c en el interior del intervalo donde $f(c) < 0$, $f'(c) = 0$.

En otras palabras, si f no es constante, o bien el mínimo o el máximo debe estar en el interior del intervalo. Notemos que en general pueden existir varios puntos c_i en los que $f'(c_i) = 0$, como se observa en la fig. derecha.





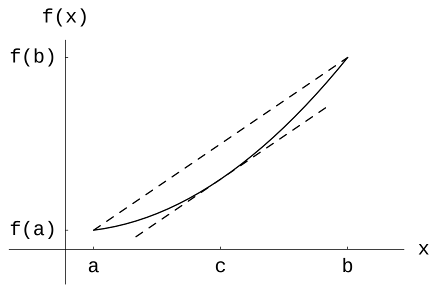
Teorema del valor medio: Sea otra vez f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $a > b$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

es decir,

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Notemos que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la *pendiente* de la recta que pasa por los puntos extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El teorema asegura entonces que existe al menos un punto $c \in (a,b)$ en el cual la pendiente de la curva $y = f(x)$ es igual a la de esa recta. En otras palabras, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ en el cual la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es *paralela* a la recta que pasa por los puntos extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Demostración: La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ es

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Consideremos la diferencia $g(x)$ entre la función y la recta anterior,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

Tenemos

$$g(a) = 0, \quad g(b) = 0$$

Por lo tanto, por el teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ donde

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

es decir,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Este teorema es importante por sus aplicaciones. Puede utilizarse para estimar o acotar incremento de funciones. Por ejemplo, si sabemos que $f'(x) \leq k \ \forall \ x \in (a,b)$, con $a < b$, entonces

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \leq k(b-a)$$

Notemos que si f es una función *lineal*, $f(x) = dx + e$, la gráfica de f es una recta y por lo tanto la igualdad anterior se cumple $\forall \ c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{db+e-(da+e)}{b-a} = \frac{d(b-a)}{b-a} = d = f'(c)$$

pues $f'(x) = d$ (constante).

Si consideramos una función del tiempo $s(t)$ que representa el espacio recorrido por un objeto sobre una recta, el teorema admite una interpretación sencilla. La cantidad

$$\bar{v}(t_a, t_b) = \frac{s(t_b)-s(t_a)}{t_b-t_a}$$

es la *velocidad media* entre t_a y t_b, es decir, el espacio recorrido $s(t_b)-s(t_a)$ dividido el tiempo transcurrido t_b-t_a. Por otro lado, $s'(t)=\frac{ds}{dt}$ es la *velocidad instantánea* $v(t)$ al tiempo t. El teorema implica entonces que existe un tiempo $t_c \in (t_a,t_b)$ en el cual la velocidad instantánea es igual a la velocidad media entre t_a y t_b.

$$v(t_c)=s'(t_c)=\bar{v}(t_a,t_b)$$

Por ejemplo, si se recorrieron 100 km en una hora, la velocidad media en ese intervalo es de 100 km/h, y el teorema asegura que en algún momento de ese intervalo la velocidad instantánea fue de 100 km/h.

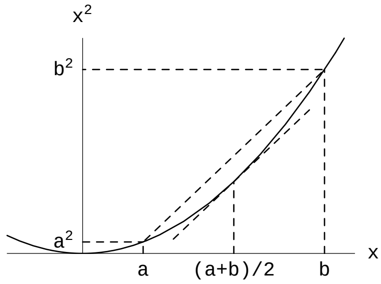
Ejemplo: Hallar $c=\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, con $f(x)=kx^2$ y $b>a$, $k\neq 0$. Obtenemos

$$f'(c)=2kc=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k\frac{b^2-a^2}{b-a}=k\frac{(b+a)(b-a)}{b-a}=k(b+a)$$

Por lo tanto,

$$c=\frac{b+a}{2}$$

El punto c es pues el promedio aritmético de a y b. Este resultado es bastante obvio, ya que $f'(x)=2kx$ es una función lineal. Interpretando $f(x)$ como espacio recorrido y $f'(x)$ como la velocidad, el resultado indica que la velocidad media entre a y b es igual a la velocidad instantánea en el instante medio $(a+b)/2$, ya que esta aumenta (o disminuye) linealmente.



2.6.5 Crecimiento y decrecimiento de funciones

Una función f es creciente en un intervalo I (cerrado o abierto) cuando *para todo par de números* $x_1<x_2$ *del intervalo* se cumple

$$f(x_1)\leq f(x_2)$$

La función es estrictamente creciente si se cumple

$$f(x_1)<f(x_2)$$

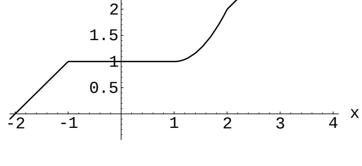
Análogamente, la función es decreciente en el intervalo si

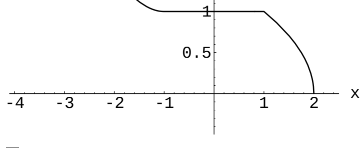
$$f(x_1)\geq f(x_2)$$

y es estrictamente decreciente si

$$f(x_1)>f(x_2)$$

Se muestra en la fig. izq. el gráfico de una función creciente (pero no estrictamente creciente) en $I=[-2,3]$ y en la fig. der. el de una función decreciente (pero no estrictamente decreciente) en $I=[-4,2]$.





Para funciones derivables vale el siguiente teorema:
Teorema 4 : Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Si $f'(x) > 0 \ \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.
Si $f'(x) < 0 \ \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$.
Si $f'(x) = 0 \ \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

El teorema es geométricamente obvio, ya que si $f'(x) > 0$, la pendiente de la curva $y = f(x)$ es positiva, indicando que f crece, si $f'(x) < 0$ la pendiente es negativa, indicando que f decrece, mientras que si $f'(x) = 0$ la pendiente es nula, lo que corresponde a una función constante.

El teorema puede demostrarse rigurosamente por medio del teorema del valor medio. Dados dos números $x_1 < x_2 \in [a, b]$, tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

con $c \in (x_1, x_2)$. Si $f'(x) = 0$ en el intervalo, $f'(c) = 0$ y por lo tanto $f(x_2) = f(x_1)$, por lo que la función es constante. Si $f'(x) > 0$ en el intervalo, $f'(c) > 0$, de donde $f(x_2) - f(x_1) > 0$, es decir, $f(x_2) > f(x_1)$, por lo que la función es estrictamente creciente. Si $f'(x) < 0$ en el intervalo, $f'(c) < 0$ y $f(x_2) < f(x_1)$, por lo que la función es estrictamente decreciente.

Ejemplo: Determinar las regiones en las que $f(x) = x^2$ es creciente y decreciente.
Como $f'(x) = 2x$, obtenemos $f'(x) > 0$ si $x > 0$ y $f'(x) < 0$ si $x < 0$, por lo que $f(x)$ es estrictamente creciente en cualquier intervalo $[0, b]$, con $b > 0$, y estrictamente decreciente en cualquier intervalo $[a, 0]$, con $a < 0$. Podemos decir entonces que $f'(x)$ es creciente en $[0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0]$.
Idem para $f(x) = x^3$.
Tenemos $f'(x) = 3x^2$, por lo que $f'(x) > 0 \ \forall\, x \neq 0$. La función $f(x)$ es pues estrictamente creciente en cualquier intervalo $[0, b]$, con $b > 0$ o $[a, 0]$, con $a < 0$. Podemos decir entonces que $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, \infty)$. El hecho de que $f'(x)$ se anule en $x = 0$ ($f'(0) = 0$) no impide que f sea estrictamente creciente aún en un intervalo que incluya el origen. Se cumple $x_1^3 < x_2^3 \ \forall\, x_1 < x_2$.

Corolario 1: Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con

$$f'(x) = g'(x)$$

en el intervalo. Entonces

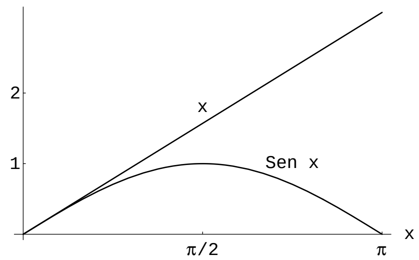
$$f(x) = g(x) + C$$

en el intervalo, con C una constante.
Demostración: La diferencia $h(x) = f(x) - g(x)$ satisface $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Por el teorema anterior, h es entonces constante, es decir, $h(x) = f(x) - g(x) = C$, por lo que $f(x) = g(x) + C$. Esta consecuencia será importante en el capítulo de integración.

Corolario 2: Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Si si se cumple que

$$f(a) \geq g(a) \ \text{ y } \ f'(x) \geq g'(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$$

entonces $f(x) \geq g(x) \ \forall\, x \in [a, b]$.
Demostración: Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$ y $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0 \ \forall\, x \in (a, b)$. Por lo tanto, $h(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo, con $h(x) \geq h(a) \geq 0 \ \forall\, x \in [a, b]$, es decir, $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo. Esta consecuencia es muy útil para probar desigualdades.
Ejemplo: Demostrar que $\operatorname{sen}(x) < x \ \forall\, x > 0$.
Si $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$, tenemos $f(0) = 0$ y $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0 \ \forall\, x \in (0, 2\pi)$, por lo que $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, 2\pi)$. Por lo tanto, $x > \operatorname{sen}(x) \ \forall\, x \in (0, 2\pi)$. Para valores más grandes de x la desigualdad es obvia ya que $\operatorname{sen}(x) \leq 1$.



2.6.6 Determinación de máximos y mínimos

Consideremos una función f definida en $[a,b]$, y sea $c \in (a,b)$. Si existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$, con $\delta > 0$, en el cual
1) $f(x)$ es *creciente* en $(c-\delta, c]$ y *decreciente* en $[c, c+\delta) \Rightarrow c$ es un *máximo local*, pues $f(x) \leq f(c)$ $\forall$ $x \in (c-\delta, c+\delta)$.
2) $f(x)$ es *decreciente* en $(c-\delta, c]$ y *creciente* en $[c, c+\delta) \Rightarrow c$ es un *mínimo local*, pues $f(x) \geq f(c)$ $\forall$ $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

Junto con el teorema 4, las condiciones anteriores permiten clasificar en la mayoría de los casos un punto crítico de una función derivable. Supongamos que f es derivable en (a,b) y sea $c \in (a,b)$ un punto crítico donde $f'(c) = 0$. Entonces, si existe $\delta > 0$ tal que
1) $f'(x) > 0$ si $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (c, c+\delta) \Rightarrow c$ es un *máximo local*, pues en tal caso f es estrictamente creciente en $(c-\delta, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, c+\delta)$.
2) $f'(x) > 0$ si $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (c, c+\delta) \Rightarrow c$ es un *mínimo local*, pues f es estrictamente decreciente en $(c-\delta, c]$ y estrictamente creciente en $[c, c+\delta)$.

En otras palabras, si $f'(x)$ pasa de ser *positiva a negativa* en $x = c$, se trata de un *máximo local*, mientras que si pasa de *negativa a positiva*, es un *mínimo local*. Si $f'(x)$ no cambia de signo en $x = c$, siendo positiva (o negativa) en $(c-\delta, c)$ y $(c, c+\delta)$, c no es ni mínimo ni máximo local.

Las condiciones anteriores son *suficientes*, aunque *no necesarias* para que $x = c$ sea un máximo o mínimo local. Por ejemplo, $f(x) = x^2(\text{sen}(1/x)+2)$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$, es continua y derivable en $x = 0$ (puede probar el lector que $f'(0) = 0$), donde posee un mínimo local y absoluto pues $f(x) > 0$ $\forall$ $x \neq 0$. Sin embargo, no existe ningún intervalo alrededor de 0 en el cual se cumplan las condiciones anteriores, ya que $f'(x)$ $(= 2x(\text{sen}(1/x)+2) - \cos(1/x)$ para $x \neq 0)$ oscila rápidamente alrededor de 0 para $x \to 0$, sin alcanzar un límite.

Si $f'(x)$ es continua en (a,b), sólo puede cambiar de signo en los puntos críticos. Para determinar el signo de f' entre dos puntos críticos pertenecientes a (a,b), basta entonces con evaluar $f'(x)$ en cualquier punto intermedio.

Finalmente, para determinar el *máximo y mínimo absoluto* de f dentro de un intervalo $[a,b]$, con f derivable en (a,b), debemos primero localizar los máximos y mínimos relativos c_i, d_i dentro del intervalo, y luego comparar los valores $f(c_i)$ $f(d_i)$ con los valores en los extremos, $f(a)$ y $f(b)$. Notemos que si el máximo o mínimo absoluto está en a o b no necesariamente se cumple que $f'(a) = 0$ o $f'(b) = 0$. Notemos también que si f' es continua en (a,b) (y f en $[a,b]$), y existe un sólo punto crítico c en (a,b), f' sólo puede cambiar de signo en $x = c$. Por lo tanto, si c es máximo relativo, este es necesariamente el máximo absoluto en $[a,b]$ (ya que entonces f es estrictamente creciente en $[a,c]$ y decreciente en $[c,b]$), mientras que si c es mínimo relativo, es necesariamente el mínimo absoluto.

Criterio de la derivada segunda: De las condiciones anteriores se desprende otro criterio suficiente (pero no necesario) para determinar si un punto crítico c es máximo o mínimo, que resulta conveniente cuando es fácil evaluar la derivada segunda de f en $x = c$.

Supongamos $f'(c) = 0$. Si $f''(c) > 0$, c es un *mínimo local*, mientras que si $f''(c) < 0$, c es un *máximo local*. Si $f''(c) = 0$, el criterio no decide.
Demostración: Dado que $f'(c) = 0$,

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Por lo tanto, si $f''(c) > 0$, para h suficientemente próximo a 0 tendremos $f'(c+h) > 0$ si $h > 0$ y $f'(c+h) < 0$ si $h < 0$, lo que implica que c es mínimo local. Por el contrario, si $f''(c) < 0$, para h suficientemente cercano a 0 tenemos $f'(c+h) < 0$ para $h > 0$ y $f'(c+h) > 0$ si $h < 0$, lo que implica que c es mínimo local. Para verificar que el criterio no decide si $f''(c) = 0$, notemos que para las funciones $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$, se cumple que $f'(0) = f''(0) = 0$. No obstante, $x = 0$ es un mínimo local (y absoluto) de x^4, máximo local (y absoluto) de $-x^4$, y no es ni mínimo ni máximo de x^3.

Si $f''(x)$ es continua en $x = c$, el teorema puede demostrarse también como sigue: En este caso existe un intervalo alrededor de c donde $f''(x)$ tiene el mismo signo que $f''(c)$. Por lo tanto, si $f''(c) > 0$, $f'(x)$ será estrictamente creciente en ese intervalo, lo que implica, dado que $f'(c) = 0$, que $f'(x)$ pasa de negativo a positivo, indicando que es un mínimo local. Si $f''(c) < 0$, $f'(x)$ pasa de positivo a negativo, indicando que es un máximo local.

Ejemplo 1: a) Hallar las regiones de crecimiento y decrecimiento, y los eventuales máximos y mínimos relativos de $f(x) = x^3 - 3x$, con $x \in \Re$. b) Hallar el máximo y mínimo absoluto de f en $[-\frac{3}{2}, 3]$
a) Obtenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Los puntos críticos en los que $f'(x) = 0$ son $x = \pm 1$. Además $f'(x) > 0$ si $x^2 > 1$, o sea, $x > 1$ o $x < -1$, y $f'(x) < 0$ si $-1 < x < 1$. La función es pues estrictamente creciente en $(-\infty, -1]$, estrictamente decreciente en $[-1, 1]$ y estrictamente creciente en $[1, \infty)$, de donde $x = -1$ es un máximo relativo y $x = 1$ un mínimo relativo.
Podemos arribar a la misma conclusión con el criterio de la derivada segunda, ya que $f''(x) = 6x$, con $f''(1) > 0$ y $f''(-1) < 0$.
b) Obtenemos $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{8}$, $f(3) = 18$. Por lo tanto, el máximo absoluto lo toma f en $x = 3$ y el mínimo absoluto en $x = 1$.

Ejemplo 2: Hallar el máximo o mínimo de

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Este problema había sido ya resuelto completando cuadrados. Tenemos $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$, con $y = f(x)$ una parábola de eje vertical. El vértice es $x = -\frac{b}{2a}$, que es el mínimo absoluto de f en $\Re$ si $a > 0$, y el máximo absoluto si $a < 0$.

Veamos como obtener el resultado anterior utilizando derivadas. Tenemos

$$f'(x) = 2ax + b = 2a(x + \frac{b}{2a})$$

El único punto crítico obtenido de $f'(x) = 0$ es $x = x_c = -\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, $f'(x) < 0$ si $x < x_c$ y $f'(x) > 0$ si $x > x_c$, de modo que f es estrictamente decreciente en $(-\infty, x_c)$, y estrictamente creciente en (x_c, ∞). El punto crítico es pues un mínimo local, y además absoluto en $\Re$. Si $a < 0$, $f'(x) > 0$ si $x < x_c$ y $f'(x) < 0$ si $x > x_c$, de modo que f es estrictamente creciente en $(-\infty, x_c)$, y estrictamente decreciente en (x_c, ∞). El punto crítico es pues un máximo local y absoluto en $\Re$.

En este caso es aúm más cómodo utilizar el criterio de la derivada segunda. Como $f''(x) = 2a$, el punto crítico es mínimo si $a > 0$ y máximo si $a < 0$.

Ejemplo 3: Hallar el rectángulo de perímetro mínimo para un área fija.
Si x e y son los lados del rectángulo, el perímetro p y el área A estarán dados por

$$p = 2x + 2y = 2(x + y), \quad A = xy$$

Despejando y, obtenemos $y = A/x$ y el perímetro queda expresado en términos de x por

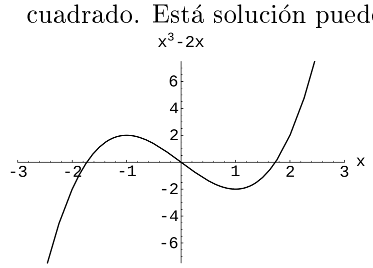
$$p(x) = 2(x + A/x)$$

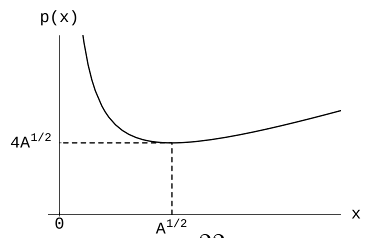
El dominio de interés de esta función es obviamente $x > 0$. Tenemos

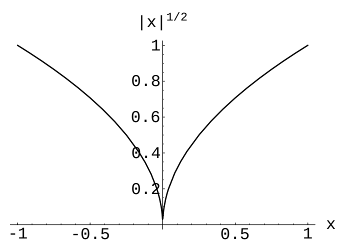
$$p'(x) = 2(1 - A/x^2) = \frac{2}{x^2}(x^2 - A)$$

La ecuación $p'(x) = 0$ tiene como solución $x = \sqrt{A}$ en los reales positivos. Además $p'(x) < 0$ si $x < \sqrt{A}$ y $p'(x) > 0$ si $x > \sqrt{A}$, de donde $x = \sqrt{A}$ es un mínimo local, que es también absoluto en $(0, \infty)$. Podemos llegar a la misma conclusión por el criterio de la derivada segunda: $p''(x) = 4A/x^3 > 0$ si $x > 0$, de modo que el único punto crítico es un mínimo.

El perímetro mínimo es pues $p(\sqrt{A}) = 4\sqrt{A}$, con $y = \sqrt{A} = x$, de modo que corresponde a un cuadrado. Está solución puede resultar al lector geométricamente evidente por cuestiones de simetría.







Ejemplo 4: Hallar el mínimo y máximo de $f(x) = \sqrt{|x|}$ en $[-1, 1]$. Tenemos $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ y $f(x) = \sqrt{-x}$ si $x < 0$, con

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \quad x < 0$$

que podemos resumir en

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

En $x = 0$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \infty, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = -\infty,$$

por lo que la derivada en $x = 0$ no existe. Notemos también que $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty$.

Notemos sin embargo que $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$, pues $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Además, $f'(x) > 0$ si $x > 0$ y $f'(x) < 0$ si $x < 0$. La función es pues estrictamente creciente para $x \geq 0$ y estrictamente decreciente para $x \leq 0$. Por lo tanto $x = 0$ es el mínimo absoluto de f en $[-1, 1]$, con $f(0) = 0$, mientras que $x = \pm 1$ son los puntos máximos en este intervalo, con $f(\pm 1) = 1$. En este caso el mínimo absoluto, si bien está dentro del intervalo, no es un punto en el que $f'(x) = 0$, pues f no es derivable en ese punto.

Ejemplo 5: **Distancia mínima de una curva al origen** Consideremos una curva $y = f(x)$, con $f(x)$ derivable en su dominio. La distancia desde un punto $P = (x, f(x))$ de la curva al origen es

$$d(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$$

Resulta más cómodo trabajar con la distancia al cuadrado,

$$d_2(x) \equiv d^2(x) = x^2 + f^2(x)$$

ya que un mínimo de $d^2(x)$ es necesariamente un mínimo de $d(x)$ (y viceversa) si $d(x) > 0$. Como $d_2'(x) = 2x + 2f(x)f'(x)$, los puntos críticos (y por ende el mínimo) de d_2 están determinados por la ecuación

$$x + f(x)f'(x) = 0. \tag{11}$$

que tiene un significado geométrico obvio: las soluciones de (11) son los puntos de la curva $y = f(x)$ en los que la recta normal pasa por el origen. La ecuación de la recta normal a la curva en $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Si la recta pasa por $(x, y) = (0, 0)$, entonces

$$-f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(-x_0)$$

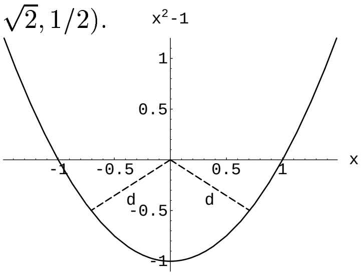
es decir, $x_0 + f(x_0)f'(x_0) = 0$, que es la ecuación (11) para $x = x_0$.

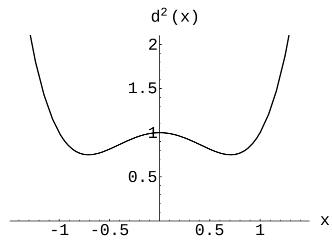
Consideremos por ejemplo la distancia mínima de la parábola $y = x^2 - 1$ al origen. En este caso

$$d_2(x) = d^2(x) = x^2 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - x^2 + 1$$

$$d_2'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1), \qquad d_2''(x) = 2(6x^2 - 1)$$

Las raíces de la ecuación $d_2'(x) = 0$ son $x = 0$ y $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Como $d_2''(0) = -2 < 0$, $d_2''(\pm 1/\sqrt{2}) = 4 > 0$, $x = 0$ es un máximo local, mientras que $x = \pm 1/\sqrt{2}$ son ambos mínimos locales y absolutos (ya que $d_2(x) = d_2(-x)$). La distancia mínima es $\sqrt{d_2(\pm 1/\sqrt{2})} = \sqrt{3/4}$, y los puntos más próximos $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$.





Consideremos ahora la distancia mínima de la parábola $y = x^2 - a$ al origen, con a arbitrario. Obtenemos

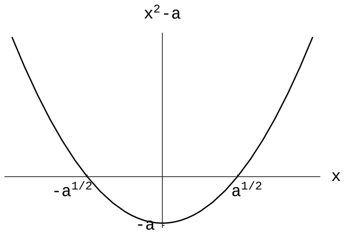
$$d_2(x) = d^2(x) = x^2 + (x^2 - a)^2 = x^4 - 2x^2(a - \frac{1}{2}) + a^2$$

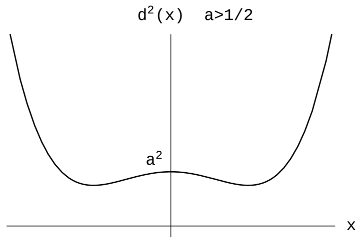
$$d_2'(x) = 4x(x^2 - (a - \frac{1}{2})), \qquad d_2''(x) = 4(3x^2 - (a - \frac{1}{2}))$$

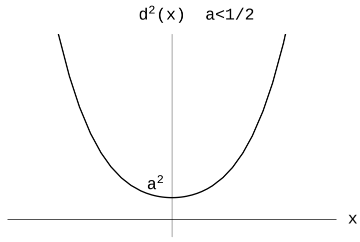
La ecuación $d_2'(x) = 0$ conduce a las soluciones $x = 0$ y $x = \pm x_c$, con $x_c = \sqrt{a - \frac{1}{2}}$ (real sólo si $a > 1/2$).

Si $a > 1/2$, $d_2''(0) < 0$, $d_2''(\pm x_c) < 0$, por lo que 0 es un máximo local mientras que $\pm x_c$ son mínimos locales y absolutos. La distancia mínima es $d_m = \sqrt{d_2(\pm x_c)} = \sqrt{a - \frac{1}{4}}$ y los puntos más próximos $(\pm x_c, 1/2)$.

Si $a \leq 1/2$, el único punto crítico real es $x = 0$, que es necesariamente el mínimo local y absoluto ($d_2''(0) > 0$ si $a < 1/2$). En este caso la distancia mínima es $|a|$ y el punto más próximo $(0, a)$. Si $a = 1/2$, $d_2''(0) = 0$, pero $d_2(x) = x^4 + \frac{1}{4}$, por lo que $x = 0$ es también mínimo local y absoluto.







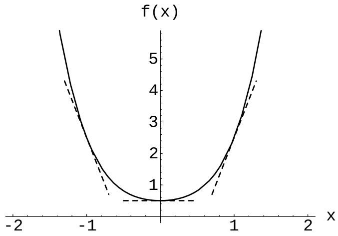
2.6.7 Concavidad

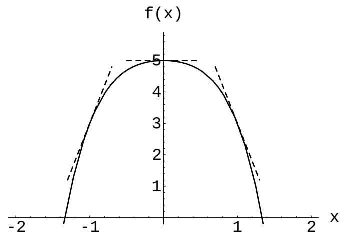
Geométricamente, se dice que una curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba (o convexa hacia arriba) cuando “se dobla hacia arriba”, y cóncava hacia abajo (o convexa hacia abajo) cuando “se dobla hacia abajo”. Si $f(x)$ es derivable y la pendiente de la curva, es decir, $f'(x)$, es *creciente* en un intervalo, la curva se dobla hacia arriba, y por lo tanto será cóncava hacia arriba en el mismo. Análogamente, será cóncava hacia abajo en un intervalo si $f'(x)$ es *decreciente* en el mismo.

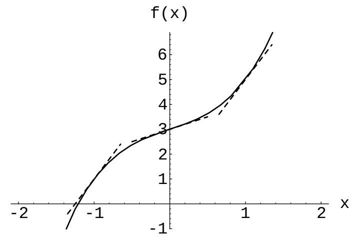
Si $f'(x)$ es derivable en (a, b), la curva será *cóncava hacia arriba* en (a, b) si $f''(x) \geq 0 \;\forall\; x \in (a, b)$, pues entonces $f'(x)$ será creciente en (a, b).

Análogamente, la curva será *cóncava hacia abajo* en (a, b) si $f''(x) \leq 0 \;\forall\; x \in (a, b)$, pues entonces $f'(x)$ será decreciente en (a, b).

Se muestra en la fig. izq. una función cóncava hacia arriba, en la central una función cóncava hacia abajo y en la der. una función cóncava hacia abajo si $x < 0$ y hacia arriba si $x > 0$







Una definición más general de concavidad es la siguiente:
Una función f es *cóncava hacia arriba* en un intervalo si $\forall\; a < b$ del intervalo, la recta que pasa por los puntos $(a, f(b))$ y $(b, f(b))$ *está por encima* de la curva $y = f(x)$ en el intervalo (a, b) (fig. izq.). La función será *cóncava hacia abajo* en un intervalo si $\forall\; a < b$ del mismo dicha recta *está por debajo* de la curva $y = f(x)$ en el intervalo (a, b) (fig. der.). La ecuación de la recta anterior es

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

La condición de concavidad hacia arriba se expresa pues por la condición

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)) \quad \text{para } a < x < b$$

y la de concavidad hacia abajo por

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \text{para } a < x < b$$

que deben cumplirse $\forall\; a < b$ del intervalo. Si reemplazamos $\geq$ por $>$ o $\leq$ por $<$ la curva se dice *estrictamente* cóncava hacia arriba o hacia abajo.

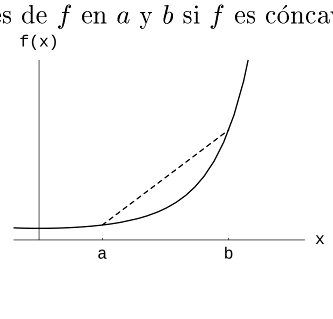
Si $x \in [a, b]$, podemos escribir $x = (1 - q)a + qb = q(b - a) + a$, con $0 \leq q \leq 1$ ($x = a$ si $q = 0$ y $x = b$ si $q = 1$). Las desigualdades anteriores pueden entonces reescribirse como

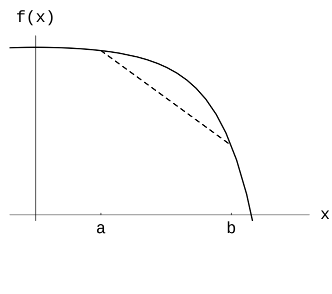
$$f((1 - q)a + qb) \begin{matrix}\leq\\ \geq\end{matrix} (1 - q)f(a) + qf(b), \quad 0 < q < 1$$

donde $\leq$ corresponde a cóncava hacia arriba y $\geq$ a cóncava hacia abajo. En particular, para $q = 1/2$,

$$f(\tfrac{a+b}{2}) \begin{smallmatrix}\leq\\ \geq\end{smallmatrix} \tfrac{f(a)+f(b)}{2}$$

El valor de la función en el punto medio $(a+b)/2$ entre a y b, es pues menor que el promedio $(f(a)+f(b))/2$ de los valores de f en a y b si f es cóncava hacia arriba, y mayor si f es cóncava hacia abajo.





Teorema 5: Sea f continua en un intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ y derivable en (α, β).
Si $f'(x)$ es creciente en (α, β) entonces f es cóncava hacia arriba en (α, β).
Si $f'(x)$ es decreciente en (α, β) entonces f es cóncava hacia abajo en (α, β).
En particular, si $f'(x)$ es derivable en (α, β), esto implica que f será cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$, $\forall\ x \in (\alpha, \beta)$.
Demostración: Para $\alpha < a < b < \beta$, sea

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Tenemos $h(a) = h(b) = 0$ y

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por el teorema del valor medio, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y por tanto

$$h'(x) = f'(x) - f'(c)$$

Supongamos que $f'(x)$ es creciente en (a, b). Si $a < x < c$ $f'(x) - f'(c) \leq 0$, por ser f' creciente, y por lo tanto $h'(x) \leq 0$ en (a, c), es decir, es decreciente en este intervalo. Como $h(a) = 0$, entonces $h(x) \leq 0$ para $x \in (a, c)$. Si $c < x < b$, $f'(x) - f'(c) \geq 0$, por ser f' creciente, y por lo tanto $h'(x) \geq 0$ en (c, b), es decir, es creciente en este intervalo. Como $h(b) = 0$, entonces $h(x) \leq 0\ \forall\ x \in (c, b)$. Por lo tanto, $h(x) \leq 0$ en (c, b), que es lo que se quería demostrar.

En forma análoga se demuestra que $h(x) \geq 0$ en (a, b) si $f'(x)$ es decreciente en (a, b).

Punto de Inflexión Un punto en el cual una función cambia su concavidad se denomina punto de inflexión. Si $f''(x)$ existe y es continua en un intervalo I, entonces una condición *necesaria* (aunque no suficiente) para que $x = c \in I$ sea un punto de inflexión es que

$$f''(c) = 0$$

Ejemplo 1: $f(x) = x^2$. Tenemos $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2 > 0\ \forall\ x$. Por lo tanto f es cóncava hacia arriba $\forall\ x$, sin puntos de inflexión.
Ejemplo 2: $f(x) = x^3$. Tenemos $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$, de modo que $f''(x) > 0$ si $x > 0$ y $f''(x) < 0$ si $x < 0$, con $f''(0) = 0$. Por lo tanto f es cóncava hacia arriba si $x > 0$, cóncava hacia abajo si $x < 0$, siendo 0 un punto de inflexión.
Ejemplo 3: $f(x) = x^4$. Tenemos $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. Obtenemos $f''(x) > 0\ \forall\ x \neq 0$, con $f''(0) = 0$. En este caso $x = 0$ no es un punto de inflexión pues $f''(x)$ no cambia de signo en $x = 0$. Notemos además que $f'(x)$ es creciente en $(-\infty, \infty)$, por lo que f es cóncava hacia arriba $\forall\ x$.

2.6.8 Límite para x grande

Para comprender el comportamiento de una función definida en $\Re$, debemos también conocer el comportamiento cuando x se hace grande, tanto positivo como negativo. Si $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes para todo x cuando x se hace grande positivo, entonces se dice que el límite de f para x tendiendo a $+\infty$ es $+\infty$. En términos rigurosos,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ M > 0\ \exists\ R > 0 \text{ t.q. si } x > R,\ f(x) > M$$

Por ejemplo, $f(x) = x$ toma valores arbitrariamente grandes cuando x aumenta, y lo mismo ocurre con $f(x) = x^r$, con $r > 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\ , \quad \lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty, \quad r > 0$$

Esto se puede demostrar rigurosamente como sigue: Si queremos que x^r, con $r > 0$, sea mayor que un número $M > 0$ arbitrario, basta tomar $x > R = M^{1/r}$, pues en tal caso $x^r > R^r = M$, al ser x^r una función estrictamente creciente. Usualmente se omite el signo $+$ en $+\infty$, de modo que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ equivale a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si f toma valores arbitrariamente grandes pero negativos cuando x se hace grande positivo, el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ es $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ M > 0\ \exists\ R > 0 \text{ t.q. si } x > R,\ f(x) < -M$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} -x^r = -\infty$$

Una función también puede aproximarse a un valor finito l cuando x toma valores grandes positivos. Por ejemplo, $f(x) = 1/x$ se acerca a 0 cuando x toma valores grandes. En estos casos se dice que el límite de f para $x \to +\infty$ es l. En términos rigurosos,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ R > 0 \text{ t.q. si } x > R,\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} 1/x^r = 0, \quad r > 0$$

que podemos demostrar rigurosamente como sigue: Si queremos que $|f(x)|$ sea menor que un número $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, basta tomar $R = 1/\varepsilon^{1/r}$, pues en tal caso $x^r > R^r = 1/\varepsilon$ y por lo tanto $|f(x)| = 1/x^r < 1/R^r < \varepsilon$.

Notemos también que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o $-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 1/f(x) = 0$.

Finalmente, hay funciones que no se aproximan a ningún valor cuando x se hace grande, y que tampoco son arbitrariamente grandes, en cuyo caso se dice que el límite para $x \to +\infty$ no existe. Por ejemplo $\operatorname{sen}(x)$ oscila entre -1 y 1 y por lo tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen}(x) \nexists$. Análogamente, $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x) \nexists$.
Una función como $x \operatorname{sen}(x)$ oscila con amplitud cada vez mayor al aumentar x en cuyo caso el límite tampoco existe: $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin(x) \nexists$.

En forma totalmente análoga se definen los límites para $x \to -\infty$, que indican el comportamiento de f cuando x es grande y negativo. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ M > 0\ \exists\ R > 0 \text{ t.q. si } x < -R,\ f(x) > M$$

Notemos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Ejemplos:

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & n \text{ par} \\ -\infty & n \text{ impar} \end{cases} \quad n > 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} 1/x^n = 0, \quad n > 0$$

Son válidas también las siguientes relaciones:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to 0^+} f(1/u), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{u\to 0^-} f(1/u)$$

con $u = 1/x$, ya que u se acerca a 0 por la derecha para $x \to \infty$ y por la izquierda para $x \to -\infty$. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}(1/x) = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u}\mathrm{sen}(u) = 1$$

Cuando se evalúan límites de polinomios o sumas de potencias, es conveniente tomar como factor común el término de grado más alto, que es el que más rápido crece para x grande:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^3(1-\frac{1}{x}) = +\infty$$

dado que $1/x \to 0$ para $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1+2/x^2)}{x^2(1+1/x^2)} = \lim_{x\to-\infty} x\frac{1+2/x^2}{1+1/x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2\sqrt{x}+4}{1-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+2/\sqrt{x}+4/x)}{x(1/x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2/\sqrt{x}+4/x}{1/x-3} = -3$$

En general, para dos polinomios $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$, con $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n(a_n + a_{n-1}/x + \ldots + a_0/x^n)}{x^m(b_m + b_{m-1}/x + \ldots + b_0/x^m)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & n > m,\ a_n/b_m > 0 \\ -\infty & n > m,\ a_n/b_m < 0 \\ a_n/b_n & n = m \\ 0 & m > n \end{cases}$$

de modo que el límite está determinado exclusivamente por el término de grado más alto de P_n y Q_m. También,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2(1-1/x+2/x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1-1/x+2/x^2)} = 0$$

ya que $|\sin(x)| \leq 1$, y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x)+2x^2}{x^2-x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(\sin(x)/x+2)}{x^2(1-1/x+2/x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)/x+2}{1-1/x+2/x^2} = 2$$

Notemos que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$. Sin embargo, para hallar los límites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x)$, o $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - g(x)$ necesitamos saber que tan rápido crecen f y g para x grande. Es **incorrecto** escribir cosas como $\infty - \infty = 0$, $\infty/\infty = 1$, ya que ∞ no es un número sino sólo un símbolo para el límite que indica que la función toma valores arbitrariamente grandes.
Por ejemplo, si $f(x) = x$, $g(x) = x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)/f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1/x - 1) = -\infty$.

Análogamente, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$, con $l \neq 0$ un número real (es decir finito), entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$ si $l > 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = -\infty$ si $l < 0$. Sin embargo, si $l = 0$, para hallar el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ es necesario saber que tan rápido crece $f(x)$ y que tan rápido decrece $g(x)$. Es **incorrecto** escribir $\infty.0 = 0$ o $\infty.0 = \infty$.
Por ejemplo, si $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g^2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

2.6.9 Trazado de gráficas

Estamos finalmente "en posición" para poder comprender, sin mayores problemas, el comportamiento de una función $f(x)$ continua y derivable en un cierto intervalo (con la posible excepción de algunos puntos aislados) y trazar la gráfica correspondiente. Para ello, debemos determinar:
1) Dominio natural.
2) Puntos críticos.
3) Regiones de crecimiento y decrecimiento.
4) Máximos y mínimos locales.
5) Límites para $x \to \pm\infty$, si f está definida para valores grandes de x.
6) Límites laterales en los puntos de discontinuidad, si los hubiése.
7) Máximos y mínimos absolutos.
8) Intersección de la curva con los ejes coordenados
9) Regiones donde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo y puntos de inflexión.

Notemos que la curva $y = f(x)$ corta el eje y obviamente en $y = f(0)$ (si f está definida en 0), y al eje x en las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ (si las hubiese). Para dibujar un gráfico manualmente, podemos complementar la información brindada por los 9 items anteriores con una pequeña tabla de valores $(x, f(x))$. Para gráficos por computadora, la información anterior es fundamental para localizar las zonas "de interés" de la función y determinar la escala del gráfico. Finalmente, notemos que si la función es par ($f(x) = f(-x)$) o impar ($f(x) = -f(-x)$), es suficiente analizar el caso $x \geq 0$ (el gráfico será simétrico o antisimétrico respecto del eje y).

Ejemplo 1:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

El dominio natural son todos los $x \neq 1$ ($D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$). Obtenemos

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

La ecuación $f'(x) = 0$ no posee raíces reales, por lo que f no presenta puntos críticos ni mínimos o máximos locales. Como $f'(x) < 0 \ \forall\ x \neq 1$, f es estrictam. decreciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$. Además

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+1/x}{1-1/x} = 1$$

de modo que la curva se acerca a la recta horizontal $y = 1$ para $x \to \pm\infty$ (por encima para $x \to \infty$ y por debajo para $x \to -\infty$, pues f es decreciente). También

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

de modo que la curva se acerca a la recta vertical $x = 1$ para $x \to 1$ (negativamente para $x \to 1^-$ y positivamente para $x \to 1^+$, ya que el numerador es positivo en $x = 1$). Como f toma valores arbitrariamente grandes (positivos y negativos) para $x \to 1$, la curva no posee tampoco máximo o mínimo absoluto en su dominio natural.

La curva corta al eje y en $f(0) = -1$, y al eje x en $x = -1$ (única raíz de $f(x) = 0$). Finalmente,

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

de modo que $f''(x) > 0$ si $x > 1$ y $f''(x) < 0$ si $x < 1$, por lo que la curva es cóncava hacia arriba si $x > 1$ y hacia abajo si $x < 1$. No existen puntos de inflexión que pertenezcan al dominio. Obtenemos pues el gráfico de la figura. Notemos que el gráfico es una hipérbola, ya que

$$f(x) = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

La curva $y = f(x)$ es pues la hipérbola $y = 1/x$ a) trasladada horizontalmente en 1, b) dilatada verticalmente en 2 y c) trasladada verticalmente en 1. En general, la gráfica de

$$f(x) = \frac{x-a}{x-b}, \quad a \neq b$$

será también una hipérbola, como el lector podrá fácilmente comprobar.

Ejemplo 2:

$$g(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

El dominio natural es nuevamente $x \neq 1$. Obtenemos

$$g'(x) = \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{-(x+3)}{(x-1)^3}$$

La ecuación $g'(x) = 0$ posee la única solución $x = -3$ (punto crítico). Como $g'(x) < 0$ si $x > 1$, $g'(x) > 0$ si $-3 < x < 1$ y $g'(x) < 0$ si $x < -3$, g es decreciente en $(-\infty, -3)$, creciente en $(-3, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$, siendo entonces $x = -3$ un mínimo local ($x = 1$ no es un máximo local pues f no está definida en $x = 1$). Dado que $g'(x)$ sólo puede cambiar de signo en $x = -3$ y $x = 1$ (punto crítico y punto de discontinuidad), para obtener los signos anteriores de $g'(x)$ basta con evaluarla en cualquier punto de los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, \infty)$. Además,

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1+1/x)}{x^2(1-1/x)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1+1/x)}{x(1-1/x)^2} = 0$$

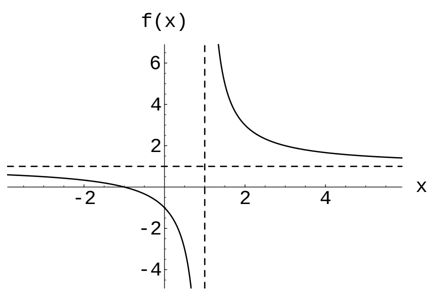
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$$

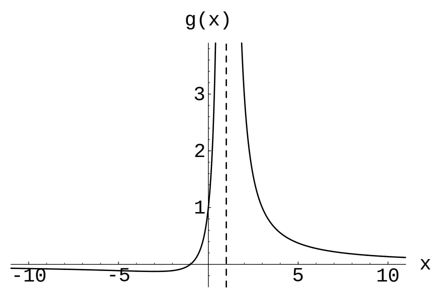
De modo que la curva se aproxima a la recta horizontal $y = 0$ para $x \to \pm\infty$ (por encima para $x \to \infty$ y por debajo para $x \to -\infty$, por ser f decreciente) y a la recta vertical $x = 1$ para $x \to 1$ (positivamente tanto para $x \to 1^+$ o $x \to 1^-$). Se concluye que f no posee máximo absoluto, mientras que $x = -3$ es mínimo absoluto (ya que $g(-3) = -\frac{1}{8} < \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$).

La curva corta al eje y en $y = g(0) = 1$, y al eje x en $x = -1$. Además

$$g''(x) = \frac{-(x-1)^3 + 3(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^6} = \frac{2(x+5)}{(x-1)^4}$$

con $g''(x) < 0$ si $x < -5$, $g''(x) > 0$ si $-5 < x < 1$ y $g''(x) > 0$ si $x > 1$, de modo que $g(x)$ es cóncava hacia abajo para $x < -5$, y hacia arriba si $-5 < x < 1$ o $x > 1$, con $x = -5$ un punto de inflexión. Además, $g''(3) > 0$, verificándose que $x = -3$ es un mínimo.





Ejemplo 3:

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

El dominio natural es $\Re$. Obtenemos

$$h'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

El único punto crítico es $x = 0$. Como $h'(x) > 0$ si $x < 0$ y $h'(x) < 0$ si $x > 0$, $h(x)$ crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$, siendo entonces $x = 0$ máximo local y absoluto en $\Re$. Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$$

$h(x)$ se aproxima al eje x para $\to \pm\infty$ (por encima). Vemos que la función no posee mínimo absoluto en $\Re$, aunque se mantiene por encima de 0 $\forall x$ (0 es la mínima cota inferior de f en $\Re$). La gráfica corta al eje y en $h(0) = 1$, y no corta al eje x. Además,

$$h''(x) = \frac{6(x^2 - 1/3)}{(1+x^2)^3}$$

con $h''(x) > 0$ si $x^2 > 1/3$ y $h''(x) < 0$ si $x^2 < 1/3$, por lo que h es cóncava hacia arriba para $x < -1/\sqrt{3}$ o $x > 1/\sqrt{3}$, y hacia abajo si $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$, con $\pm 1/\sqrt{3}$ puntos de inflexión. Además, $h''(0) < 0$, comprobándose que $x = 0$ es un máximo.

Ejemplo 4: Demostrar que

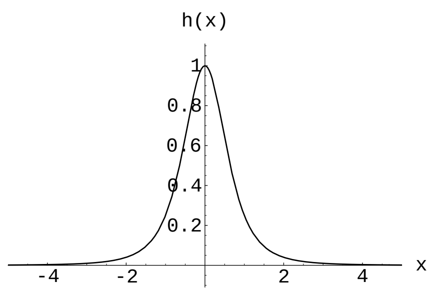
$$\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leq 3^{3/4}/4$$

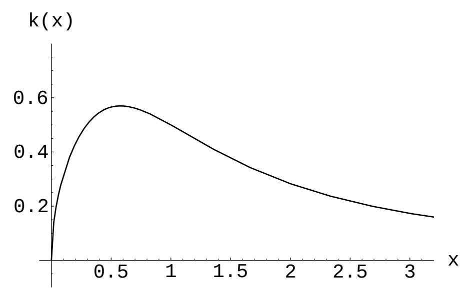
El dominio natural de $k(x) = \sqrt{x}/(1+x^2)$ es $x \geq 0$. Obtenemos

$$k'(x) = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(1+x^2)^2}$$

El único punto crítico en el dominio es pues $x = 1/\sqrt{3} \approx 0.58$. Como $k'(x) > 0$ si $0 < x < 1/\sqrt{3}$, y $k'(x) < 0$ si $x > 1/\sqrt{3}$, $x = 1/\sqrt{3}$ es un máximo local y absoluto en $[0, \infty)$. Se concluye que

$$k(x) \leq k(1/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{4} \approx 0.57$$





2.6.10 Regla de L'Hopital

Existe un método muy cómodo para determinar límites de la forma $0/0$, cuando las funciones involucradas son derivables. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{12}$$

y el límite

$$\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) \tag{13}$$

existe o es $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L'Hopital es válida también para límites laterales (reemplazando $\lim\limits_{x\to a}$ en (12)–(13) por $\lim\limits_{x\to a^+}$ o $\lim\limits_{x\to a^-}$) y para límites infinitos (reemplazando $\lim\limits_{x\to a}$ en (12)–(13) por $\lim\limits_{x\to +\infty}$ o $\lim\limits_{x\to -\infty}$). En cambio, la regla *no es válida* si el límite (13) *no existe*. En este caso el límite (12) puede existir, y debe hallárselo por otro método. Por otro lado, si el límite (13) continua siendo de la forma $0/0$, puede aplicarse la regla de L'Hopital nuevamente.

Dado que el límite (12) no depende de $f(a)$ o $g(a)$, podemos siempre suponer $f(a) = g(a) = 0$, en cuyo caso f y g resultan continuas en $x = a$. Si además $f'(x)$ y $g'(x)$ son continuas en $x = a$, con $g'(a) \neq 0$, entonces (13) es directamente $f'(a)/g'(a)$. La demostración en este caso es inmediata:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Para demostrar el caso general, es necesario utilizar el *Teorema del valor medio de Cauchy*:
Si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en $(a, b) \Rightarrow \exists\ c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \tag{14}$$

La demostración de (14) es sencilla: Sea

$$h(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$$

Como $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$, por el teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$:

$$h'(c) = g'(c)[f(b) - f(a)] - f'(c)[g(b) - g(a)] = 0$$

que es la ecuación (14). Si $g(b) \neq g(a)$ y $g'(c) \neq 0$, (14) puede reescribirse como

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{15}$$

que se reduce al teorema del valor medio para el caso $g(x) = x$.

Para demostrar (12), notemos primero que si el límite (13) existe o es $\pm\infty$, entonces existe un intervalo $I = (a - \delta, a)$, con $\delta > 0$, en el cual $f'(x)$ y $g'(x)$ existen, con $g'(x) \neq 0$ en el mismo. Para $x \in I$ podemos entonces aplicar (15) para $b = x$. Como $f(a) = g(a) = 0$, obtenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

con $c \in (x, a)$ (c depende de x y de a). Cuando x se aproxima a a, c se aproxima necesariamente a a. Por lo tanto, si $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)/g'(x)$ existe o es $\pm\infty$, $f'(c)/g'(c)$ se aproxima necesariamente a ese límite cuando $x \to a-$, es decir, $\lim\limits_{x\to a^-} f'(c)/g'(c) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)/g'(x)$. Lo mismo ocurre para el límite por la derecha (considerando en este caso un intervalo $I = (a, a + \delta)$, con $x \in I$) con lo que (14) queda demostrado.

Si bien hemos supuesto a finito, el caso $a = \pm\infty$ en (12)–(13) se deriva del anterior, dado que

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+}\frac{f(1/u)}{g(1/u)} = \lim_{u\to 0^+}\frac{-f'(1/u)/u^2}{-g'(1/u)/u^2} = \lim_{u\to 0^+}\frac{f'(1/u)}{g'(1/u)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

con $u = 1/x$, y análogamente para $x \to -\infty$ (en este caso $u \to 0^-$).

Cabe destacar finalmente que la regla de L'Hopital también es aplicable, con las mismas observaciones, a límites de la forma ∞/∞.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

Esto es una verificación pero no una demostración del límite fundamental $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$, pues para demostrar que $\frac{d \operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x)$ se utiliza este límite.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2)2x}{1} = 0$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2} = 0$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{32} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{32x^{31}}{1} = 32$$

Podemos obtener el resultado anterior directamente reconociendo el límite como la derivada de $f(x) = x^{32}$ en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{32} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 32$$

dado que $f'(x) = 32x^{31}$, con $f'(1) = 32$.

En muchos casos resulta sin embargo mucho más conveniente aplicar otros métodos. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^{20}(x)}{x^{20}} = (\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x})^{20} = 1^{20} = 1$$

Si hubiesemos optado por aplicar L'Hopital estrictamente, tendríamos que haber derivado 20 veces (es decir, aplicado la regla 20 veces) antes de obtener un límite finito.

Debe recordarse que el método es válido sólo si el límite del cociente de derivadas *existe*. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen}(x)/x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1/x)}{\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x)/x} = \frac{0}{1} = 0$$

En este caso el método de L'Hopital no es válido pues el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 \operatorname{sen}(1/x))'}{(\operatorname{sen}(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\cos(x)} = \frac{0 - \lim\limits_{x \to 0} \cos(1/x)}{1}$$

no existe.