Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2017
Redictado

Prof. Alejandra Schiavoni (ales@info.unlp.edu.ar)

Prof. Catalina Mostaccio (catty@lifia.info.unlp.edu.ar)

Prof. Pablo Iuliano (piuliano@info.unlp.edu.ar)

Árboles Binarios

Agenda

- Definición
- Descripción y terminología
- Representaciones
- Recorridos
- Aplicación: Árboles de expresión

Árbol Binario: Definición

- *Un árbol binario es una colección de nodos, tal que:*
  - *puede estar vacía*
  - *puede estar formada por un nodo distinguido R, llamado* ***raíz*** *y dos sub-árboles T_1 y T_2, donde la raíz de cada subárbol T_i está conectado a R por medio de una arista*

Descripción y terminología

- Cada nodo puede tener a lo sumo dos nodos hijos.
- Cuando un nodo no tiene ningún hijo se denomina ***hoja***.
- Los nodos que tienen el mismo nodo padre se denominan ***hermanos***.

Descripción y terminología

- Conceptos a usar:
  - ***Camino***: desde n_1 hasta n_k, es una secuencia de nodos n_1, n_2, ….,n_k tal que n_i es el padre de n_{i+1}, para $1 \leq i < k$.
    - La longitud del camino es el número de aristas, es decir k-1.
    - Existe un camino de longitud cero desde cada nodo a sí mismo.
    - Existe un único camino desde la raíz a cada nodo.
  - ***Profundidad***: de n_i es la longitud del único camino desde la raíz hasta n_i.
    - La raíz tiene profundidad cero.

Descripción y terminología

- ***Grado*** de n_i es el número de hijos del nodo n_i .
- ***Altura*** de n_i es la longitud del camino más largo desde n_i hasta una hoja.
  - Las hojas tienen altura cero.
  - La altura de un árbol es la altura del nodo raíz.
- ***Ancestro/Descendiente***: si existe un camino desde n_1 a n_2, se dice que n_1 es ancestro de n_2 y n_2 es descendiente de n_1.

Descripción y terminología

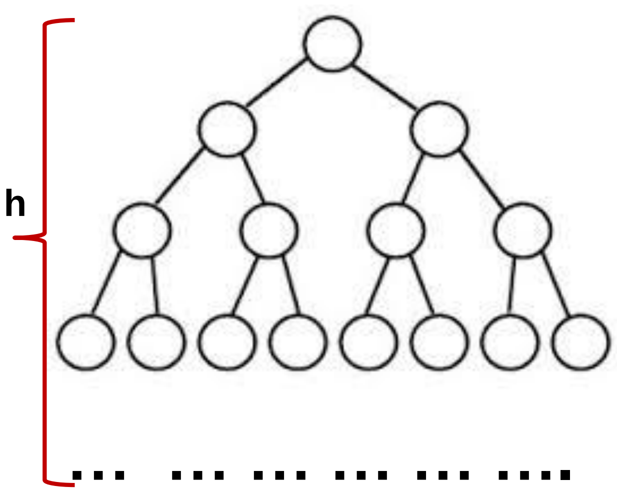
- ***Árbol binario lleno***: Dado un árbol binario T de altura ***h***, diremos que T es *lleno* si cada nodo interno tiene grado 2 y todas las hojas están en el mismo nivel (h).

  Es decir, recursivamente, T es *lleno* si :
  1.- T es un nodo simple (árbol binario lleno de altura 0), o
  2.- T es de altura h y sus sub-árboles son llenos de altura h-1.

Descripción y terminología

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario lleno***:

  Sea T un árbol binario lleno de altura ***h***, la cantidad de nodos N es $(2^{h+1} - 1)$



Nivel 0 → 2^0 nodos

Nivel 1 → 2^1 nodos

Nivel 2 → 2^2 nodos

Nivel 3 → 2^3 nodos

……

Nivel h → 2^h nodos

$$N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h$$

La suma de los términos de una serie geométrica de razón 2 es:

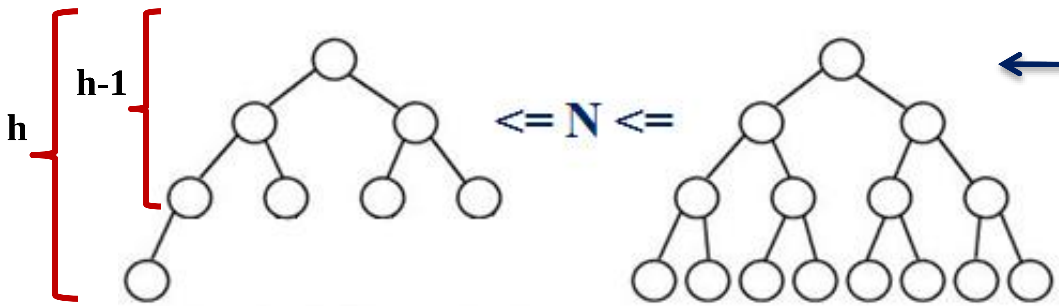
$$(2^{h+1} - 1)$$

Descripción y terminología

- ***Árbol binario completo***: Dado un árbol binario T de altura h, diremos que T es completo si es lleno de altura h-1 y el nivel h se completa de izquierda a derecha.

- ***Cantidad de nodos en un árbol binario completo***:

  Sea T un árbol binario completo de altura ***h***, la cantidad de nodos N varía entre (2^{h}) y $(2^{h+1} – 1)$



- Si el árbol es lleno
  N = $(2^{h+1}-1)$

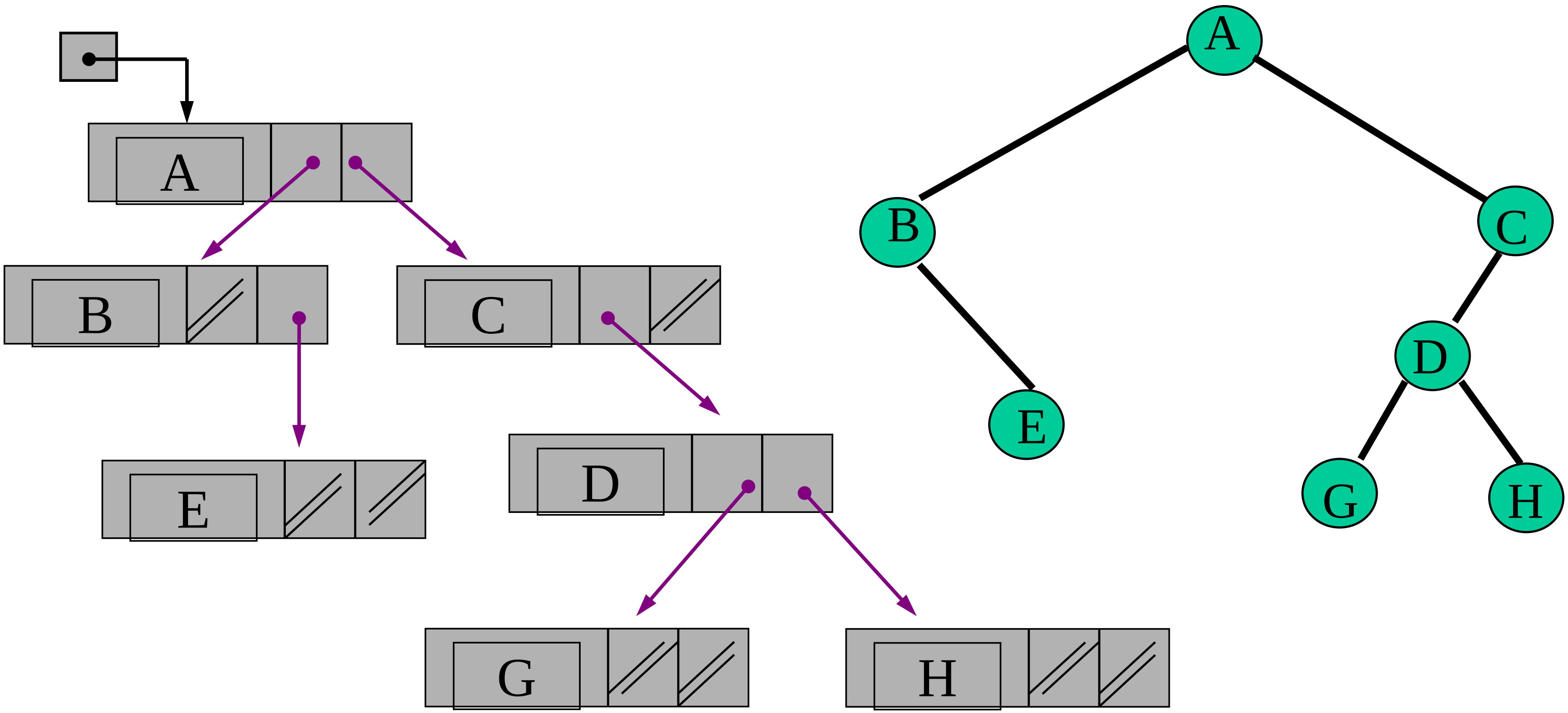
- Si no, el árbol es lleno en la altura *h-1* y tiene por lo menos un nodo en el nivel *h:*
  N = $(2^{h-1+1}-1)+1=(2^{h} -1 + 1)$

Representación Hijo Izquierdo - Hijo Derecho

✓ Cada nodo tiene:

- Información propia del nodo
- Referencia a su hijo izquierdo
- Referencia a su hijo derecho

Representación
Hijo Izquierdo - Hijo Derecho



Recorridos

- **Preorden**

  Se procesa primero la raíz y luego sus hijos, izquierdo y derecho.

- **Inorden**

  Se procesa el hijo izquierdo, luego la raíz y último el hijo derecho

- **Postorden**

  Se procesan primero los hijos, izquierdo y derecho, y luego la raíz

- **Por niveles**

  Se procesan los nodos teniendo en cuenta sus niveles, primero la raíz, luego los hijos, los hijos de éstos, etc.

Recorrido: Preorden

```
public void preorden() {
    imprimir (dato);
    si (tiene hijo_izquierdo)
        hijoIzquierdo.preorden();
    si (tiene hijo_derecho)
        hijoDerecho.preorden();
}
```

Recorrido: Por niveles

```
public void  porNiveles() {
      encolar(raíz);
       mientras (cola no se vacíe) {
         desencolar(v);
         imprimir (dato de v);
         si (tiene hijo_izquierdo)
                  encolar(hijo_izquierdo);
          si (tiene hijo_derecho)
                  encolar(hijo_derecho);
        }
}
```

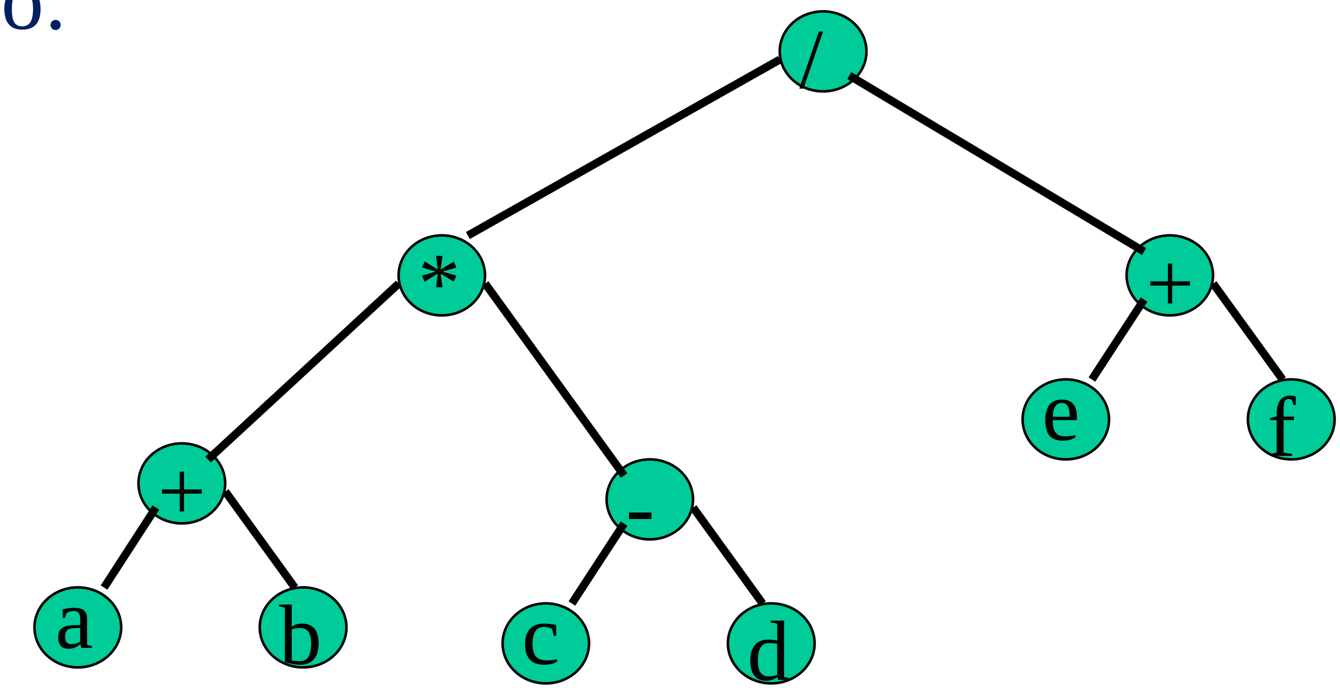
Árbol de Expresión

Es un árbol binario asociado a una expresión aritmética

- Nodos internos representan operadores
- Nodos externos (hojas) representan operandos

Árbol de Expresión

Ejemplo:



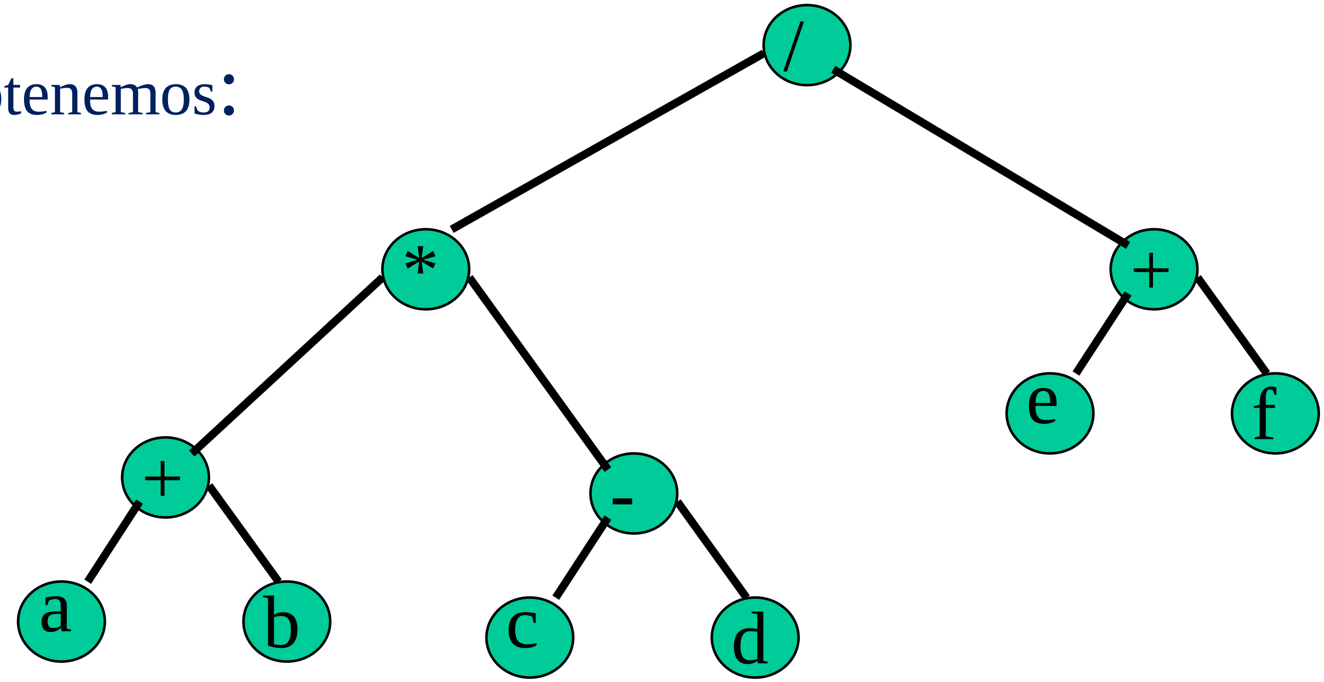
Árbol de Expresión

Aplicaciones:

- En compiladores para analizar, optimizar y traducir programas
- Evaluar expresiones algebraicas o lógicas
  - No se necesita el uso de paréntesis
- Traducir expresiones a notación sufija, prefija e infija

Árbol de Expresión

Recorriendo el árbol, obtenemos:



Inorden: (((a + b) * (c – d)) / (e + f))

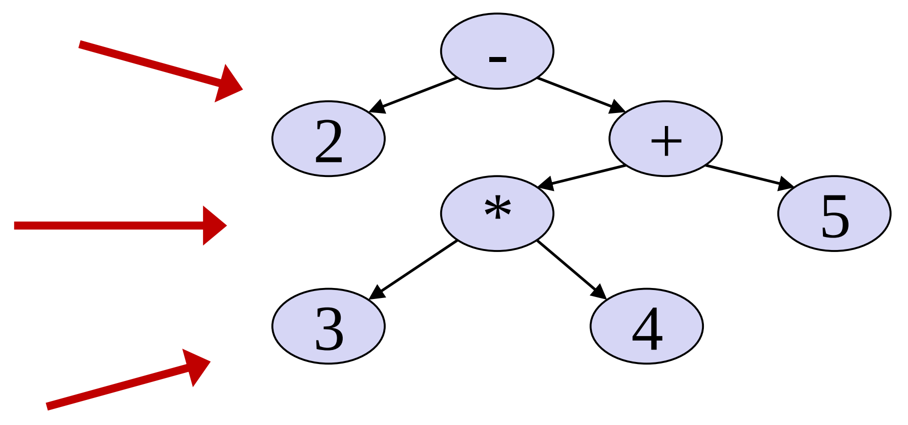
Preorden: /*+ab-cd+ef

Postorden: ab+cd-*ef+/

Construcción de un árbol de expresión

A partir de una:

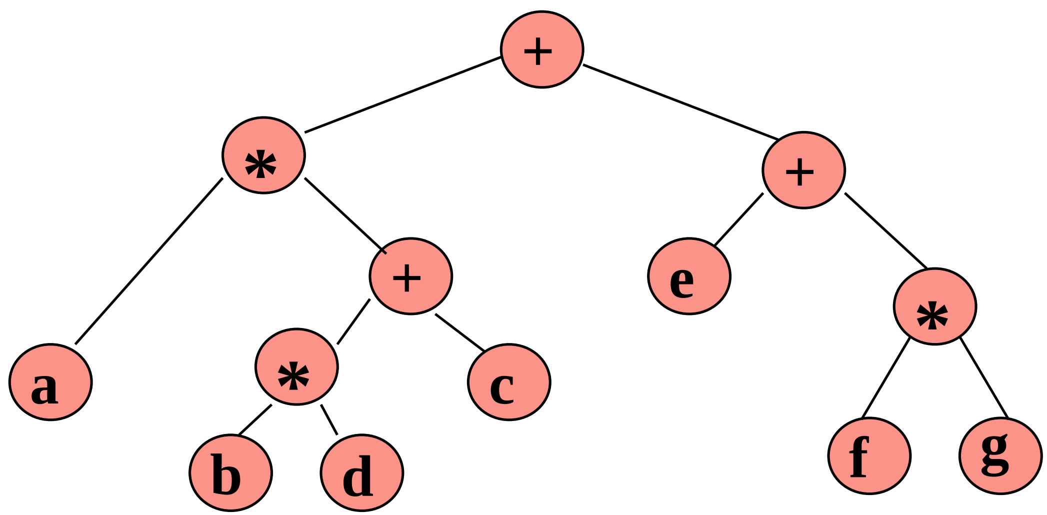
1) Expresión postfija
2) Expresión prefija
3) Expresión infija



Árboles binarios de expresión

Expresión algebraica :

a*(b*d +c) + (e+ f*g)



Expresión **prefija** → + * a + * b d c + e * f g

Expresión **postfija** → a b d * c + * e f g * + +

Expresión **infija** → ((a *((b * d) + c)) + (e + (f * g)))

1) Construcción de un árbol de expresión a partir de una expresión postfija

Algoritmo:

tomo un carácter de la expresión
<u>mientras</u> (existe carácter) <u>hacer</u>
<u>si</u> es un operando → creo un nodo y lo apilo.
<u>si</u> es un operador (lo tomo como la raíz de los dos últimos nodos creados)
→ - creo un nodo R,
- desapilo y lo agrego como hijo derecho de R
- desapilo y lo agrego como hijo izquierdo de R
- apilo R.
tomo otro carácter
<u>fin</u>

2) Construcción de un árbol de expresión a partir de una expresión prefija

Algoritmo:

ArbolExpresión (A: ArbolBin, exp: string)

si exp nulo → nada.
si es un operador → - creo un nodo raíz R
- ArbolExpresión (subArbIzq de R, exp (sin 1° carácter))
- ArbolExpresión (subArbDer de R, exp (sin 1° carácter))
si es un operando → creo un nodo (hoja)

3) Construcción de un árbol de expresión a partir de una expresión infija

Expresión infija

(i) *Se usa una pila y se tiene en cuenta la precedencia de los operadores*

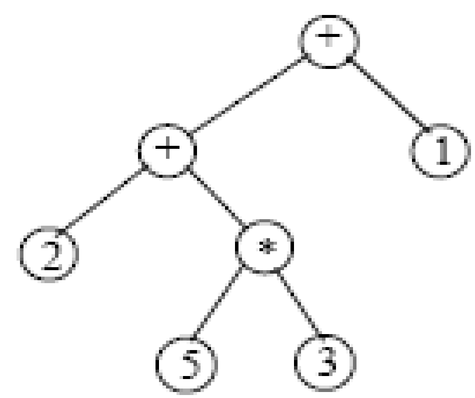
Expresión postfija

(ii) *Se usa la estrategia 1)*

Árbol de Expresión

2+5*3+1

253*+1+



-Convertir una expresión infija en árbol de expresión: se debe convertir la expresión infija en postfija (i) y a partir de ésta, construir el árbol de expresión (ii).

(i) Estrategia del Algoritmo para convertir <u>exp. infija en postfija</u> :

a) si es un operando → se coloca en la salida.

b) si es un operador → se maneja una pila según la prioridad del operador en relación al tope de la pila

operador con > prioridad que el tope –> se apila

operador con <= prioridad que el tope –> se desapila elemento colocándolo en la salida.

Se vuelve a comparar el operador con el tope de la pila

c) si es un "(" , ")"→ "(" se apila

")" se desapila todo hasta el "(", incluído éste

d) cuando se llega al final de la expresión, se desapilan todos los elementos llevándolos a la salida, hasta que la pila quede vacía.

Operadores ordenados de mayor a menor según su prioridad:

^ (potencia)

*, / (multiplicación y división)

+, - (suma y resta)

Los " (" siempre se apilan como si tuvieran la mayor prioridad y se desapilan <u>sólo</u> cuando aparece un ") " .

Ejercitación

Árbol binario de expresión

Ejercicio 1.

- ✓*Dada la siguiente expresión postfija :* ***I J K + + A B * C - **** *, dibuje su correspondiente árbol binario de expresión*
- ✓*Convierta la expresión* ***((a + b) + c * (d + e) + f) * (g + h)*** *en expresión prefija*

Ejercicio 2.

- ✓*Dada la siguiente expresión prefija :* **** + I + J K - C * A B*** *, dibuje su correspondiente árbol binario de expresión*
- ✓*Convierta la expresión* ***((a + b) + c * (d + e) + f) * (g + h)*** *en expresión postfija*