Corrigé 13

Exercice 1. On dit qu'un champ vectoriel $Y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ a un potentiel vecteur s'il existe un champ vectoriel $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ tel que $\text{rot}X = Y$.

(1) Montrer que si Y est $\mathcal{C}^1$ et a un potentiel vecteur, on a $\text{div}Y = 0$ et que si Y a un potentiel vecteur X, alors pour tout champ scalaire $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $X + \nabla f$ est aussi un potentiel vecteur pour Y.

(2) (difficile, pour réfléchir) Si $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ est $\mathcal{C}^1$ avec $\text{div}Y = 0$, sous quelles conditions sur Ω le champ Y a-t-il un potentiel vecteur ?

Démonstration. Pour le point (1), il suffit de vérifier que $\text{div}(\text{rot}X) = 0$ et $\text{rot}(\nabla f) = 0$. Pour le point (2), on peut en fait démontrer le résultat suivant (Lemma de Poincaré) : soit Ω un ouvert et $Y \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteur tel que $\text{div}Y = 0$. Si Ω est simplement connexe au sens des surfaces fermées (i.e. toute surface fermée contenue dans Ω est contractible), alors il existe $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tel que $Y = \text{rot}X$.

Une boule ou un domaine étoilé sont des exemples de domaine simplement connexes au sens des surfaces fermées. $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ est un exemple de domaine non simplement connexe au sens des surfaces fermées (mais il est simplement connexe au sens des lacets). En fait, on a une sorte de généralisation de la simple connexité aux objets de dimension supérieur (on ne considère plus des lacets (dimension 1), mais des surfaces (dimension 2)).

Il est nécessaire que le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est simplement connexe au sens des surfaces fermées : en fait, si on considère

$$\begin{aligned} f : \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto r^{-\frac{3}{2}}\,(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on a que $\text{div}f = 0$ et l'intégrale sur la sphère unitaire ($r = 1$) est

$$\iint_{S^2} f \cdot \nu d\sigma = \iint_{S^2} r^{\frac{1}{2}} d\sigma = \text{Aire}(S^2) \neq 0.$$

Puisque S^2 est une surface compact sans bord, pour tous le champ vectoriel $v \in C^1(\mathbb{R}^3)$, on a (thèoreme de Stokes)

$$\iint_{S^2} (\nabla \times v) \cdot \nu d\sigma = 0,$$

et donc f ne peut avoir un potentiel vecteur.

Let us sketch the proof of Poincaré's lemma. Take a point (x,y,z) in Ω and consider a circle $\partial D_{1,\epsilon}$ of radius ϵ with a normal $(1,0,0)$ centered at (x,y,z). Due to Gauss-Ostrogradski formula, since $\text{div}Y = 0$ and Ω is simply connected in terms of surfaces, the flux of Y through a surface S is the same for any S with boundary $\partial D_{1,\epsilon}$. This allows us to define

$$X_1(x,y,z) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi\epsilon} \iint_{S:\, \partial_S = \partial D_{1,\epsilon}} Y \cdot \nu \, d\sigma. \tag{1}$$

We then define X_2 and X_3 at (x,y,z) a similar way. What remains is to explicitly verify that the curl of $X = (X_1, X_2, X_3)$ is Y. □

Exercice 2. Soit $s \in \mathbb{R}$ et soit $X : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d$

$$X(u) = \frac{u}{\|u\|^s}.$$

Déterminer pour quel s on a $\text{div}X(u) = 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. En appliquant la règle pour la dérivée de la composition de fonctions et en se rappelant que

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^d u_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient que

$$\frac{\partial X_i(u)}{\partial u_i} = \frac{\|u\|^2 - s u_i^2}{\|u\|^{s+2}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, d.$$

On a alors en sommant sur i que

$$\operatorname{div}X(u) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial X_i(u)}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\|u\|^2 - su_i^2}{\|u\|^{s+2}}$$
$$\frac{d\|u\|^2 - s\sum_{i=1}^{d} u_i^2}{\|u\|^{s+2}} = \frac{d-s}{\|u\|^s}.$$

Ainsi, on a $\operatorname{div}X(u) = 0$ si et seulement si $s = d$. □

Exercice 3. Montrer que pour $n = 2, 3$ on a

$$\text{Aire}(S^{n-1}) = n\text{Vol}(B^n(1)).$$

Démonstration. For $n = 3$, by Gauss-Ostrogradski formula,

$$3\text{Vol}(B^3(1)) = 3\iiint_{B^3(1)} 1dxdydz = \iiint_{B^3(1)} \operatorname{div}(x,y,z)dxdydz = \oiint_{S^2} (x,y,z)\cdot \nu d\sigma.$$

Puisque que la normale canonique à la sphère unité en (x, y, z) est le vecteur (x, y, z) lui-même, où $x^2+y^2+z^2 = 1$, on obtient directement que

$$\oiint_{S^2} (x,y,z)\cdot \nu d\sigma = \oiint_{S^2} 1d\sigma = \text{Aire}(S^2),$$

d'où le résultat.

For $n = 2$, by Green-Riemann formula,

$$2\text{Vol}(B^2(1)) = 2\iint_{B^2(1)} 1\,dxdy = \iint_{B^2(1)} \operatorname{rot}(-y,x)\,dxdy =$$
$$= \oint_{S^1} (-y,x)\cdot\, ds = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta,\cos\theta)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta = 2\pi,$$

which is the length of the unit circle. □

Exercice 4. Trouvez un champ de vecteurs tangent à la sphère S^n pour n impair, c'est-à-dire tel que $X(u)\cdot u = 0$ pour tout $u \in S^n$, et tel que $X(u)$ n'est jamais 0.

Démonstration. On s'inspire de la dimension 2 où pour tout point $(u_1, u_2) \in S^1$, le point $(u_2, -u_1)$ est un vecteur tangent en (u_1, u_2) puisqu'on a bien que

$$(u_1, u_2)\cdot(u_2, -u_1) = 0.$$

On peut donc définir $X(u) = X(u_1, u_2) = (u_2, -u_1)$ et X n'est jamais nul sur S^1. Pour un n impaire quelconque on procède de même et on définit

$$X(u) = X(u_1, \ldots, u_{n+1}) = (u_2, -u_1, u_4, -u_3, \ldots, u_{n+1}, -u_n).$$

□

Exercice 5.

(1) Soit ∂D une courbe plane simple, positivement orientée et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, soit D le compact du plan délimité par ∂D. Montrer que

$$\text{Aire}(D) = \oint_{\partial D} x\ dy.$$

(2) Soit D un polygone avec n sommets $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$ marqués dans le sens antihoraire. Montrer que

$$\text{Aire}(D) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1}\end{pmatrix}.$$

Démonstration.

(1) On applique le théorème de la divergence dans le plan. On a

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \iint_D \text{div}(x,0)dxdy = \oint_{\partial D} (x,0) \cdot \nu d\sigma.$$

On a paramétrisé le bord de D avec une courbe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to \partial D$, et on a alors

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \oint_{\partial D} (x,0) \cdot \nu d\sigma \\
&= \int_0^1 (\gamma_1(t), 0) \cdot (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))dt \\
&= \int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2'(t)dt \\
&= \int_0^1 (0, \gamma_1(t)) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))dt \\
&= \oint_{\partial D} (0,x) \cdot ds.
\end{aligned}$$

(2) On utilise la formule démontrée au point (1) où on a paramétrisé chaque côté du polygone par la courbe

$$\begin{aligned}
\gamma_i : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto (x_i, y_i) + t(x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) &= \oint_{\partial D} (0,x) \cdot ds \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 (0, x_i + (x_{i+1} - x_i)t) \cdot (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i)dt \\
&= \sum_{i=1}^n x_i(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où on a utilisé que la deuxième somme est télescopique et vaut 0 puisque $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$.

□

<u>Exercice 6.</u>(Facteur intégrant) Soit $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et soit l'équation différentielle

$$F_2(x, u(x))u'(x) + F_1(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que s'il existe $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (avec $W(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$) tel que le champ de vecteurs

$$(WF_1, WF_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dérive d'un potentiel Φ sur $\mathbb{R}^2$ alors chaque solution $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$ de l'équation différentielle est donnée, sous forme impicite, par

$$\Phi(x, u(x)) = \ \textit{constante}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) En déduire, sous forme implicite, une solution de

$$4x\sin(xu(x)) + u(x)(x^2+1)\cos(xu(x)) + u'(x)((x^2+1)x\cos(xu(x)) = 0.$$

Démonstration. La solution précise de l'exercice se trouve dans le livre "Analyse avancée pour ingénieur", du Prof. Bernard Dacorogna.

(1) Puisque que $\nabla\Phi = (WF_1, WF_2)$, on a par la règle de dérivation d'une composition de fonctions que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Phi(x,u(x)) &= \nabla\Phi(x,u(x))\cdot(1,u'(x))\\ &= (WF_1(x,u(x)), WF_2(x,u(x)))\cdot(1,u'(x))\\ &= W(F_1(x,u(x)) + F_2(x,u(x))u'(x)) = 0\end{aligned}$$

puisque u est solution de l'équation. On a donc nécessairement que

$$\Phi(x,u(x)) = const.$$

Réciproquement, si

$$\Phi(x,u(x)) = const.$$

alors on a

$$0 = \frac{d}{dx}\Phi(x,u(x)) = W(F_1(x,u(x)), F_2(x,u(x)))\cdot(1,u'(x)) = W(F_1(x,u(x)) + F_2(x,u(x))u'(x))$$

et puisque $W \neq 0$ on a nécessairement que

$$F_1(x,u(x)) + F_2(x,u(x))u'(x) = 0.$$

Par conséquent, on a l'équivalence

$$F_1(x,u(x)) + F_2(x,u(x))u'(x) = 0 \iff \Phi(x,u(x)) = const.$$

(2) On choisit $W(x,y) = 1+x^2$, $F_1(x,y) = 4x\sin(xy)+y(x^2+1)\cos(xy)$, $F_2 = (x^2+1)x\cos(xy)$ et on trouve que le champ (WF_1, WF_2) dérive du potentiel $\Phi(x,y) = (1+x^2)^2\sin(xy)$. Par le point (1) on a alors

$$u \text{ est solution de l'équation} \iff (1+x^2)^2\sin(xy) = const.$$

$\square$