Série 7

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} z^k$ a pour anneau de convergence $A(0,\infty) = \mathbb{C}^*$.

Exercice 2. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \ .$$

Trouver son développement en série de Laurent en 0 :
- dans le disque $|z| < 1$;
- dans la couronne $1 < |z| < 2$;
- dans la couronne $|z| > 2$.

Exercice 3. Trouver le développement en série de Laurent en 0 de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} \ .$$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2}.$$

Exercice 5. Prouver que une fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre $N > 0$ en $z_* \in U$ si et seulement si N est le plus petit entier tel que $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ soit bornée au voisinage de z_*.

Exercice 6. Soit U un domaine contenant z_* et $f : U \setminus \{z_*\}$ holomorphe. Montrer que si pour tout $N \geq 1$, la fonction $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ n'est pas bornée au voisinage de z_*, alors f a une singularité essentielle en z_*.

Exercice 7. Montrer que si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre N en z_*, alors

$$|f(z)| \, |z - z_*|^{N-1} \underset{\substack{z \to z_* \\ \neq}}{\longrightarrow} +\infty \ .$$

Exercice 8. Soit U un domaine et soit $z_* \in U$. Démontrer le théorème suivant (Casorati-Weierstrass) : Si une fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ a une singularité essentielle en z_*, alors pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(z_n)_n$ avec $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_*$ telle que

$$f(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \ .$$