Série 4

Exercice 1. Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analytique dans $|z| < R$ et t.q. pour tout $\rho \in (0, R)$, $F(\rho)$ et $F(\rho e^{\frac{i\pi}{\sqrt{2}}})$ sont réels.

(1) Montrer que $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(2) montrer que F est constante.

Exercice 2. Calculer
$$\int_C (x^2 - iy^2)\ dz$$
où $C \subset \mathbb{C}$ est le demi-cercle supérieur paramétrisé par $z(t) = \cos t + i \sin t$ pour $t \in [0, \pi]$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que
$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\ dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\ \frac{dz}{z^2}\ .$$

Exercice 4. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et soit $\gamma \subset \Omega$ un chemin fermé. Montrer que
$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)\ dz$$
est un nombre imaginaire.

Exercice 5. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2) \leq 0$. Montrer que
$$|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|\ .$$

Exercice 6. Soit $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ t.q.
$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1\ .$$

(1) Montrer que la fonction
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$
est holomorphe dans le disque unitaire ouvert $\mathbb{D} = D(0, 1)$;
(2) Calculer $f'(z)$ dans $\mathbb{D}$;
(3) Montrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.

Exercice 7. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe t.q. $|f(z) - 1| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = 0$$
pour tous les chemins fermés $\gamma \subset \Omega$.

Exercice 8.

(1) Soit $H \in (0, \infty)$ et soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ deux chemins paramétrisés par $\gamma_1(t) = H(1 + i)t$ et
$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 2Ht & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2Hi(t - \frac{1}{2}) + H & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]\ . \end{cases}$$
Discuter si les valeurs des intégrales
$$\int_{\gamma_j} e^{iz^2}\ dz$$

pour $j = 1, 2$ sont égales.

(2) En comparant les deux intégrales précédentes et en utilisant que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déduire que

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$