# Série 3

**Exercice 1.** Trouver les fonctions analytiques $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ qui ont pour partie réelle ou imaginaire :

(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$ ;

(2) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$ ;

(3) $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$ ;

(4) $v(x,y) = \log(x^2+y^2) + x - 2y$.

**Exercice 2.** Trouver une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe en seulement un point.

**Exercice 3.** Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes.

(1) $f(x+iy) = x^2 + y^2 + 2ixy$ ;

(2) $f(z) = z\mathrm{Re}z$ ;

(3) $f(z) = e^z$ ;

(4) $f(z) = \bar{z}$ ;

**Exercice 4.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (au sens de fonctions de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$). Montrer que $f$ est holomorphe sur $U$ si et seulement si $\bar{\partial} f(z) = 0$ pour tout $z \in U$ et que dans ce cas $f'(z) = \partial f(z)$.

**Exercice 5.** Montrer que si $f : U \to V$ est bijective et holomorphe et si $f'$ ne s'annule pas sur $V$, alors la fonction inverse $f^{-1}$ est aussi holomorphe.

**Exercice 6.**

(1) Montrer qu'il n'existe aucun de fonction $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ t.q. $f(z^2) = z \ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ;

(2) Montrer qu'il n'existe pas de logarithme continu sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

**Exercice 7.** Trouver le rayon de convergence des séries suivantes :

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} z^n$

**Exercice 8.** Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série convergente avec rayon de convergence $R > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que pour $|z| < R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j+kn} z^{j+kn} = \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} uj} f(e^{\frac{2\pi i}{n} u} z) \ .$$