Corrigé 7

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} z^k$ a pour anneau de convergence $A(0,\infty) = \mathbb{C}^*$.

Démonstration. La partie régulière de la série est

$$\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!},$$

qui a pour rayon de convergence ∞. La partie singulière est donnée par

$$\sum_{k\geq 1} \frac{w^k}{k!},$$

où on a posé $w = 1/z$. Son rayon de convergence est ∞ également, et on en déduit que l'anneau de convergence de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} z^k$ est $A(0, 0, \infty)$, comme annoncé. □

Exercice 2. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} .$$

Trouver son développement en série de Laurent en 0 :
- dans le disque $|z| < 1$;
- dans la couronne $1 < |z| < 2$;
- dans la couronne $|z| > 2$.

Démonstration.
- pour tout $z \in D(0, 1)$, on a

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

- pour $R \in (1, 2)$, les coefficients a_k prennent la forme suivante (Théorème 201 dans le cours puis théorème des résidus)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,R)} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz = \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}, 1\right).$$

  Par définition, le résidu en 0 est le coefficient d'indice -1 dans la série de Laurent de $\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}$ en 0, que l'on peut déduire de la question précédente. On a alors $\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}, 0\right) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$ si $k \geq 0$ et 0 si $k < 0$. Pour le résidu en 1, on a un pôle simple qu'on peut calculer facilement avec le lemme 242 du cours : $\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}, 1\right) = \lim_{z\to 1} \frac{z^{-(k+1)}}{(z-2)} = -1$ pour tout k. On a donc

$$a_k = \begin{cases} -2^{-(k+1)} & k \geq 0, \\ -1 & k < 0. \end{cases} \tag{1}$$

- pour $R > 2$, le même raisonnement nous donne

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0,R)} \frac{1}{z^{k+1}} \frac{1}{(z-1)(z-2)} dz = \sum_{\zeta\in\{0,1,2\}} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}, \zeta\right).$$

  Le lemme 242 du cours donne $\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(k+1)}}{(z-1)(z-2)}, 2\right) = 2^{-(k+1)}$. Donc

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \geq 0, \\ -1 + 2^{-(k+1)} & k < 0. \end{cases} \tag{2}$$

□

Exercice 3. Trouver le développement en série de Laurent en 0 de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}\ .$$

Démonstration. On a

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z-i)(z+i)} = \frac{z}{(z-i)(z+i)} + \frac{5}{(z-2)(z-i)(z+i)}.$$

Le premier terme a deux pôles simples en $-i$ et i tandis que le deuxième terme a trois pôles simples en $-i, i$ et 2. On doit donc trouver séparément la série de Laurent en 0 sur $A(0,0,1)$, $A(0,1,2)$ et $A(0,2,\infty)$.

Sur $A(0,0,1)$, on fait apparaître le produit de deux séries géométriques dans le premier terme pour obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-i)(z+i)} &= z\left(-\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-iz)^k\right)\left(\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}(iz)^k\right)\\
&= z\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{k}(-i)^m i^{k-m}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} i^k\,\frac{1-(-1)^{k+1}}{2}\,z^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)z^k.
\end{aligned}$$

Similairement pour le deuxième terme,

$$\begin{aligned}
\frac{5}{(z-2)(z-i)(z+i)} &= \frac{5}{2}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}\right)\\
&= -\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-4)^m\\
&= -\frac{5}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{1-(-4)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1}}{5}\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} z^k\,\frac{1-(-4)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1}}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

et donc pour $z \in A(0,0,1)$, on a $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ avec $a_k = \sin(\frac{\pi k}{2}) - \frac{1-(-4)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1}}{2^{k+1}}$.

Pour $A(0,1,2)$, on pose $1 < R < 2$ et on obtient les coefficients b_k grâce au théorème 201 puis au théorème des résidus :

$$b_k = \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\frac{dz}{2\pi i} = \sum_{\zeta\in\{0,i,-i\}} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{k+1}}, \zeta\right).$$

On a alors grâce au lemme 242 que $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{k+1}}, i\right) = -(-i)^{k+2}$ and $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{k+1}}, -i\right) = -i^{k+2}$ et donc $b_k = a_k - (-i)^{k+2} - i^{k+2} = a_k + 2\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)$.

Similairement pour $A(0,2,\infty)$, on pose $R > 2$ et on a

$$c_k = \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\frac{dz}{2\pi i} = b_k + \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{k+1}}, 2\right)$$

avec $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{k+1}}, 2\right) = \frac{1}{2^{k+1}}$ pour tout k. □

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2}.$$

Démonstration. On a

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(e^{it}-a)(e^{-it}-a)} = \frac{1}{i}\oint \frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$

Si $|a| < 1$ c'est la formule de Cauchy pour la fonction $\frac{2\pi}{1-az}$ en a et l'intégrale est donc $\frac{2\pi}{1-a^2}$. Si $|a| > 1$ c'est la formule de Cauchy pour la fonction $-\frac{2\pi}{a(z-a)}$ en $\frac{1}{a}$ et l'intégrale est donc encore $\frac{2\pi}{a^2-1}$.

Donc, pour tout $a \neq \pm 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2} = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|}.$$

Puisque pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{1}{2}t^2,$$

l'intégrale diverge quand $a = 1$ car

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \cos t} \geq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} = \infty.$$

Similarly, since $0 \leq 1 + \cos t = 1 - \cos(t - \pi) \leq \frac{1}{2}(t - \pi)^2$, we have a non-intagrable singularity at $t = \pi$ when $a = -1$. $\square$

Exercice 5. Prouver que une fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre $N > 0$ en $z_* \in U$ si et seulement si N est le plus petit entier tel que $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ soit bornée au voisinage de z_*.

Démonstration. On suppose $z^* = 0$. Supposons qu'il existe $r > 0$, un entier naturel N et un réel $M > 0$ tels que $|z|^N |f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(0, r)$. Par le Théorème 201, on a alors pour tout $0 < \epsilon < r$ et pour tout $k < -N$

$$\begin{aligned}
|a_k| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\partial D(0,\epsilon)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(\epsilon e^{it})|}{\epsilon^{k+1}} \epsilon dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M}{\epsilon^{N+k}} dt = \frac{M}{\epsilon^{N+k}}.
\end{aligned}$$

Puisque $k + N < 0$ et la borne est valide pour tous $0 < \epsilon < r$, on a que $a_k = 0$ et donc 0 est un pôle au plus d'ordre N. Since N is the minimal one such that $|z|^N |f(z)|$ is bounded near zero, zero is a pole of order exactly N.

Let us now prove the reciprocal statement : let f have a pole of order N at zero. Consider its Laurent series at $A(0, 0, R)$, where R is small enough so that the annulus is fully contained inside U : $f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k z^k$. Obviously, $|z|^N |f(z)|$ is bounded near zero, while $|z|^{N-1} |f(z)| \geq |a_{-N}||z|^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k-N+1}||z|^k$ goes to infinity when $|z|$ goes to zero as long as $a_{-N} \neq 0$. $\square$

Exercice 6. Soit U un domaine contenant z_* et $f : U \setminus \{z_*\}$ holomorphe. Montrer que si pour tout $N \geq 1$, la fonction $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ n'est pas bornée au voisinage de z_*, alors f a une singularité essentielle en z_*.

Démonstration. A nouveau, on suppose $z^* = 0$. Supposons maintenant que 0 est un pôle d'ordre fini N. Il existe donc un $r > 0$ t.q. pour tout $z \in D(0, r)$

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k z^k,$$

et la fonction $z^N f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-N} z^k$ peut être completée en 0 en choisissant $z^N f(z)|_{z=0} = a_{-N}$. En particulier, elle est holomorphe et donc bornée dans un voisinage de 0, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi f ne peut avoir de pôle ni de singularité effaçable en 0 et doit donc y avoir une singularité essentielle, ce qui conclut la preuve.

Alternativement, on peut justifier qu'une fonction holomorphe avec une singularité en z_* a un développement en série de Laurent qui converge autour de z_* (voir remarque 205), et donc, par l'exercice prédédent, puisque f n'a ni une singularité effaçable, ni une singularité polaire, elle a forcément une singularité essentielle. $\square$

Exercice 7. Montrer que si une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre N en z_*, alors

$$|f(z)|\,|z - z_*|^{N-1} \underset{\substack{z \to z_* \\ \neq}}{\longrightarrow} +\infty\ .$$

Démonstration. Dans un voisinage de $z^* = 0$, on a

$$z^{N-1} f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k-N+1} z^k.$$

Comme la fonction entière $z^{N-1} f(z) - \frac{a_{-N}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-N+1} z^k$ converge dans le même voisinage, elle converge aussi en 0. Elle est donc bornée dans le voisinage choisi et on a donc

$$|z^{N-1}||f(z)| \geq \frac{|a_{-N}|}{|z|} - \left| \sum_{k=0} a_{k-N+1} z^k \right| \geq \frac{|a_{-N}|}{|z|} - M,$$

qui tend vers ∞ quand $z \to -0$, car $a_{-N} \neq 0$. $\square$

<u>Exercice 8.</u> Soit U un domaine et soit $z_* \in U$. Démontrer le théorème suivant (Casorati-Weierstrass) : Si une fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ a une singularité essentielle en z_*, alors pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(z_n)_n$ avec $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_*$ telle que

$$f(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w \, .$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $r > 0$ et $w \in \mathbb{C}$ t.q. $|f(z) - w| \geq r$ pour tous z dans un voisinage de z^*. On considère donc la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ qui est bornée dans ce voisinage de z^* et donc admet un prolongement en z^*. Comme f est non-bornée dans un voisinage de z^*, on a forcément $g(z^*) = 0$. La fonction g ayant donc un zéro d'ordre fini en z^*, on en déduit que $f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$ a un pôle de même ordre en z^*, ce qui contredit l'hypothèse que la singularité est essentielle. $\square$