Série 5

Exercice 1.(Formule intégrale de Schwarz). Soit f analytique dans $D(0, 1+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$.

(1) Montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z} f(e^{it})dt, \qquad z \in D(0,1) \ ;$$

(2) Montrer que pour tout $z \in D(0,1)$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1+e^{it}\bar{z}}{1-e^{it}\bar{z}}dt \ ;$$

(3) En déduire la formule intégrale de Schwarz

$$f(z) = i\mathrm{Im}f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{Re}f(e^{it})dt, \qquad z \in D(0,1);$$

(4) Montrer que pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{it}-z}\mathrm{Re}f(e^{it})dt, \\ \frac{f^{(n)}(z)}{n!} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{(e^{it}-z)^{n+1}}\mathrm{Re}f(e^{it})dt, \\ \mathrm{Re}f(z) &= \frac{1-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Re}f(e^{it})}{|e^{it}-z|^2}dt. \end{aligned}$$

Exercice 2. (Inégalité de Harnack)

(1) Montrer que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et $z \in D(0,1)$ on a

$$(1-|z|)^2 \leq |e^{it}-z|^2 \leq (1+|z|)^2.$$

(2) Soit f analytique dans $D(0, 1+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$ et t.q. $\mathrm{Re}f(e^{it}) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\mathrm{Re}f(0) \leq \mathrm{Re}f(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\mathrm{Re}f(0) \ , \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Exercice 3. Soit $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ et soit $f(z) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^l$ analytique dans $D(0, 1+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$ t.q. $\mathrm{Re}f(e^{it}) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que

$$|a_l| \leq 2\mathrm{Re}(a_0) \qquad \forall\ l \geq 1.$$

Exercice 4.(Théorème fondamental de l'algèbre) Soit p un polynôme non constant. En étudiant le comportement de

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)}dz$$

quand $R \to \infty$, déduire qu'il existe un point z_* t.q. $p(z_*) = 0$.

Exercice 5.

(1) Montrer qu'une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\frac{|f(z)|}{(1+|z|^n)}$ est borné est nécessairement un polynôme de degré $\leq n$.

(2) Montrer qu'une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et telle qu'il existe $B, C > 0$ pour lesquels $|f(z)| \leq e^{B|z|+C}$, est nécessairement de la forme $f(z) = e^{\alpha z+\beta}$, pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ bornée et non constante.

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert connexe) tel que $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe t.q. $f(e^{it})e^{it/2} \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que $f \equiv 0$ sur U.