Corrigé 12

Exercice 1. Soit $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ défini au voisinage d'une surface paramétrée $S \subset \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\left| \oiint_S X \cdot \nu d\sigma \right| \leq \iint_S \|X\| d\sigma.$$

Démonstration. On applique les définitions du cours pour une paramétrisation $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto S \subset \mathbb{R}^3$. On a alors que

$$\oiint_S X \cdot \nu d\sigma = \iint_U X(\phi(x,y)) \cdot (\partial_x \phi(x,y) \times \partial_y \phi(x,y)) dxdy.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs et en réutilisant la définition d'intégrale sur les surfaces, on a alors que

$$\begin{aligned} \left| \oiint_S X \cdot \nu d\sigma \right| &\leq \iint_U \|X(\phi(x,y))\| \|\partial_x \phi(x,y) \times \partial_y \phi(x,y)\| dxdy \\ &= \iint_S \|X\| d\sigma. \end{aligned}$$

□

Exercice 2. Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$, soit $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ et soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné dont le bord est un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceau. Montrer que

$$\oint_{\partial\Omega} f dz = 2i \iint_\Omega \bar{\partial} f dxdy.$$

Démonstration. On va paramétrer le bord de Ω par une courbe $\gamma : [0,1] \to \partial\Omega$ avec $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. On a alors

$$\oint_{\partial\Omega} f dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_0^1 \Big(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t) \Big) dt + i \int_0^1 \Big(u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t) \Big) dt.$$

On reconnait alors une intégrale curviligne des champs vectoriels $F = (u, -v)$ et $G = (v, u)$. On a donc en fait

$$\oint_{\partial\Omega} f dz = \oint_{\partial\Omega} F \cdot ds + i \oint_{\partial\Omega} G \cdot ds.$$

En appliquant alors Green-Riemann, on trouve que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} f dz &= \iint_\Omega \mathrm{rot}(F) dxdy + i \iint_\Omega \mathrm{rot}(G) dxdy \\ &= \iint_\Omega (-v_x - u_y)\, dxdy + i \iint_\Omega (u_x - v_y)\, dxdy \\ &= 2i \iint_\Omega \overline{\partial} f dxdy \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de l'opérateur $\overline{\partial}$ pour conclure. □

Exercice 3. Trouver un champ de vecteurs qui ne dérive pas d'un potentiel.

Démonstration. On considère le champ F donné par

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

dans le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si F dérive d'un potentiel C^1 sur Ω, alors en particulier on doit avoir que

$$\oint_\gamma F \cdot ds = 0$$

pour toute courbe fermée $\gamma \subset \Omega$. Or si on prend γ comme étant le cercle unité centré en zéro, on a

$$\oint_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta = 2\pi \neq 0,$$

ce qui est une contradiction.

Une autre manière de comprendre ceci est de voir que le seul candidat possible pour ϕ t.q. $\nabla\phi = F$ est

$$\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

où c est une valeur à fixer selon la partie de Ω dans laquelle on se trouve. Or il n'y a pas de possibilité de choisir ce c t.q. ϕ est continue sur Ω (vous reconnaissez ici en faite un parent de l'argument complexe que vous savez ne pas être continu, sauf si on enlève un demi-axe du plan). $\square$