Série 2

Exercice 1. Trouver à quelles fonctions usuelles correspondent ces séries
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Exercice 2. Calculer la somme des séries suivantes pour $|z| < 1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$
En déduire les identités suivantes :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} = -\log\left|2\sin\frac{\phi}{2}\right| \quad (0 < |\phi| < \pi),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\phi}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < \phi < \pi),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\phi}{n} = \frac{\phi}{2} \quad (0 < |\phi| < \pi).$$

Exercice 3. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + e^{it} + \cdots + e^{int}}{n}.$$

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels t.q. $\lim_n a_n = 0$ et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes t.q. $B_N := \sum_{n=1}^{N} b_n$ est une suite bornée.

(1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$ converge.

(2) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge aussi.

(3) Pour quel $\theta \in \mathbb{R}$ la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$$
converge ?

(4) Trouver une suite de nombres complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ converge mais $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^k$ diverge.

Exercice 5.

(1) Prouver que si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$, alors elle converge (normalement) en tout $z \in D(z_*, \rho)$, et diverge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_*, \rho)$.

(2) Prouver ce lemme d'Abel : si
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \rho^k < \infty$$
pour un certain $\rho \in (0, \infty)$, alors on a que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge uniformément sur tous les sous-ensembles compacts de $D(0, \rho)$.

(3) Trouver une série entière qui a rayon de convergence 1 et qui converge sur $\partial D(0, 1)$ sauf en cinq points, où elle diverge.

Exercice 6.

Soient $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ deux séries entières avec rayon de convergence au moins $\rho > 0$.

(1) Montrer que la série entière $\sum (a_k + b_k) z^k$ a pour rayon de convergence au moins ρ.

(2) On note

$$(a \star b)_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = \sum_{j,l : j+l=k} a_l b_j \ .$$

Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} (a \star b)_k z^k$ a pour rayon de convergence au moins ρ et que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a \star b)_k z^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right).$$