Corrigé 4

Exercice 1. Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ analytique dans $|z| < R$ et t.q. pour tout $\rho \in (0, R)$, $F(\rho)$ et $F(\rho e^{\frac{i\pi}{\sqrt{2}}})$ sont réels.

(1) Montrer que $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(2) montrer que F est constante.

Démonstration.

(1) Tout d'abord on a que $a_0 = \lim_{\rho \to 0} F(\rho) \in \mathbb{R}$. Ensuite, par récurrence, si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ appartiennent tous à $\mathbb{R}$, on a que
$$a_n = \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \rho^k = \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \left(F(\rho) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rho^k \right)$$
qui appartient à $\mathbb{R}$ car $F(\rho)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \rho^k$ appartiennent à $\mathbb{R}$ pour tout $\rho \in (0, R)$.

(2) Pour tout $\rho \in (0, R)$
$$\mathrm{Im} F \left(\rho e^{\frac{i\pi}{\sqrt{2}}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \sin \left(\frac{\pi n}{\sqrt{2}} \right) = 0$$
qui peut être vue comme une suite entière sur les réels avec comme coefficients $a_n \sin \left(\frac{\pi n}{\sqrt{2}} \right)$, $n \geq 0$. Comme cette suite est nulle pour tout $\rho \in (0, R)$, tous les coefficients doivent être nuls. Puisque pour tout $n > 0$, $\sin \left(\frac{\pi n}{\sqrt{2}} \right) \neq 0$, on a que $a_n = 0$.

$\square$

Exercice 2. Calculer
$$\int_C (x^2 - iy^2)\, dz$$
où $C \subset \mathbb{C}$ est le demi-cercle supérieur paramétrisé par $z(t) = \cos t + i \sin t$ pour $t \in [0, \pi]$.

Démonstration.
Par définition, on a
$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - iy^2) dz &= \int_0^{\pi} \left(\cos^2 t - i \sin^2 t \right) (-\sin t + i \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \Big(-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t + i(\sin^3 t + \cos^3 t) \Big) dt.\end{aligned}$$
On sépare alors l'intégrale en quatre, et puisque la deuxième et la quatrième intégrandes sont des fonctions impaires par rapport à $\pi/2$ et qu'on les intègre entre 0 et π, leurs intégrales sont égales à 0. Pour la première et troisième intégrales, on fait le changement de variable $u = \cos(t)$, $du = -\sin(t)dt$ (après avoir utilisé que $\sin^2(t)) = 1 - \cos^2(t)$ pour la troisième intégrale) et on obtient
$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - iy^2) dz &= -\int_{-1}^{1} u^2 du + i \int_{-1}^{1} (1 - u^2) du \\ &= -\frac{2}{3} + i\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que
$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}\, .$$

Démonstration.
Par définition, on a

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)dz} = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})e^{it}}dt = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\frac{1}{e^{2it}}e^{it}dt = \int_{|z|=1} \overline{f(z)}\frac{1}{z^2}dz$$

□

<u>Exercice 4.</u> Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et soit $\gamma \subset \Omega$ un chemin fermé. Montrer que

$$\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\ dz$$

est un nombre imaginaire.

Démonstration.
On utilise que pour tout $w \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} w = \frac{1}{2}(w + \overline{w})$ et la définition de l'intégrale complexe :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} \int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)dz &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\overline{f(\gamma(t))}f'(\gamma(t))\gamma'(t) + f(\gamma(t))\overline{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\overline{f(\gamma(t))}\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) + f(\gamma(t))\frac{d}{dt}\overline{f(\gamma(t))}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}|f(\gamma(t))|^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\left(|f(\gamma(1))|^2 - |f(\gamma(0))|^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $\gamma(1) = \gamma(0)$. □

<u>Exercice 5.</u> Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathrm{Re}(z_1), \mathrm{Re}(z_2) \leq 0$. Montrer que

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|\ .$$

Démonstration.
Pour γ le segment allant de z_1 à z_2 on a

$$|e^{z_1} - e^{z_2}| = \left|\int_\gamma e^z dz\right| \leq \int_0^1 \left|e^{\gamma(t)}\right| |\gamma'(t)|\, dt \leq \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = |z_1 - z_2|.$$

The last equality holds since $\gamma'(t)$ does not depend on t. □

<u>Exercice 6.</u> Soit $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ t.q.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1\ .$$

(1) Montrer que la fonction
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$
est holomorphe dans le disque unitaire ouvert $\mathbb{D} = D(0,1)$;
(2) Calculer $f'(z)$ dans $\mathbb{D}$;
(3) Montrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.

Démonstration.

(1) La fonction f est une série entière avec un rayon de convergence d'au moins 1 car $|a_n| \leq 1$ pour tout n. Elle est donc holomorphe dans $\mathbb{D}$.
(2) La dérivée est
$$f'(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

(3) Pour chaque paire $z_1 \neq z_2$ dans $\mathbb{D}$ et le segment $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ allant de z_1 à z_2 on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right| &= \left|\frac{\int_\gamma f'(z)dz}{z_2 - z_1}\right| \\
&= \left|1 + \int_0^1 \sum_{n=2}^{\infty} na_n \gamma(t)^{n-1} \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} dt\right| \\
&\geq 1 - \left|\sum_{n=2}^{\infty} na_n \int_0^1 |\gamma(t)|^{n-1} \mathrm{d}t\right| \\
&\geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \\
&> 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $|\gamma(t)| < 1$ puisque $\gamma(t) \in \mathbb{D}$ pour tout $t \in [0, 1]$, et la borne $\sum_{n\geq 2} na_n < 1$. Ceci implique que $f(z_1) \neq f(z_2)$.

□

Exercice 7. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe t.q. $|f(z) - 1| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

pour tous les chemins fermés $\gamma \subset \Omega$.

Démonstration.
On a

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt = \int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z} dz$$

pour $f \circ \gamma$ un chemins dans $f(\Omega) \subset D(1, 1)$ car $|f(z) - 1| < 1$ pour tout $z \in \Omega$. Comme la fonction $\frac{1}{z}$ est holomorphe dans $D(1, 1)$, l'integrale est nulle. □

Exercice 8.

(1) Soit $H \in (0, \infty)$ et soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ deux chemins parametrisés par $\gamma_1(t) = H(1 + i)t$ et

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 2Ht & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2Hi(t - \frac{1}{2}) + H & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Discuter si les valeurs des intégrales

$$\int_{\gamma_j} e^{iz^2}\, dz$$

pour $j = 1, 2$ sont égales ;

(2) en comparant les deux intégrales précédentes et en utilisant que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déduire que

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Démonstration. (1) They are equal because e^{iz^2} is holomorphic on $\mathbb{C}$, while γ_1 and γ_2 have the same start and end.

(2) Since $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ for $z = x + iy$, we have $e^{iz^2} = e^{-2xy}(\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2))$. For any $z = x + iy \in \gamma_1$, $x = y = Ht$ and therefore

$$\int_{\gamma_1} e^{iz^2}\, dz = \int_0^1 e^{-2H^2t^2} H(1 + i)\, dt = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}H} e^{-u^2}\, du, \tag{1}$$

which converges to $(1 + i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

At the same time,

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\,dz = \int_0^{1/2} (\cos(4H^2t^2) + i\sin(4H^2t^2))2H\,dt +$$

$$+ \int_{1/2}^{1} e^{-4H^2(t-1/2)}(\cos(H^2(1-(2t-1)^2)) + i\sin(H^2(1-(2t-1)^2)))2Hi\,dt =$$

$$= \int_0^H (\cos(u^2) + i\sin(u^2))\,du + \int_0^H e^{-2Hu}(i\cos(H^2-u^2) - \sin(H^2-u^2))\,du. \quad (2)$$

For the second term, we have an upper-bound :

$$\left| \int_0^H e^{-2Hu}(i\cos(H^2-u^2) - \sin(H^2-u^2))\,du \right| \le \int_0^H e^{-2Hu}\,du = \frac{1-e^{-2H^2}}{2H}, \quad (3)$$

which goes to zero as $H \to \infty$. In the same limit, the first term converges to $\int_0^\infty (\cos(u^2) + i\sin(u^2))\,du$. Equating the real and the imaginary part of the two integrals gives the result.

□