Corrigé 8

Exercice 1. (Lemme de Jordan) Démontrer le résultat suivant.

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec $|f(z)| = O(1/|z|)$ quand $|z| \to \infty$. On a que

$$\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z} \mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{pour } \xi < 0,$$

$$\int_{C_R^-} f(z)\, e^{-i\xi z} \mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{pour } \xi > 0.$$

où $C_R^\pm = \partial D(0,R) \cap \mathbb{H}^\pm$ et $\mathbb{H}^\pm = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \in \mathbb{R}^\pm\}$.

Démonstration. Montrons seulement le cas $\xi < 0$ (l'autre cas est identique) :

Pour $z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in (0,\pi)$, on a que $|e^{-i\xi z}| = e^{\xi \mathrm{Im} z} = e^{\xi R \sin(\theta)} < 1$. D'autre part, on a qu'il existe $R^* > 0$ tel que $|f(z)\, z| \leq M$ pour un certain $M > 0$ quand $|z| > R^*$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = 1/2M > 0$ tel que pour tout $R > R^*$, pour le secteur $C_{R,\delta}^+ = \left\{Re^{i\theta} : \theta \in [\delta, \pi-\delta]\right\}$, on a

$$\left|\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z - \int_{C_{R,\delta}^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z\right| \leq 2\delta R \max_{f \in C_R^+ \setminus C_{R,\delta}^+} |f(z)| \leq 2\delta M = \epsilon.$$

En outre, pour chaque $\delta > 0$, en faisant tendre $R \to \infty$, on a

$$\left|\int_{C_{R,\delta}} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi M e^{-R\sin(\delta)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\limsup_{R\to+\infty} \left|\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z\right| \leq \epsilon,$$

ce qui donne le résultat. $\square$

Exercice 2. (Transformée de Fourier par résidus)

(1) Montrer que, sous le même conditions de l'exercice 1 et f intégrable sur $\mathbb{R}$, si f n'a que des pôles simples on a

$$\hat{f}(\xi) = i \sum_{z \in \mathrm{sing}(f) \cap \mathbb{H}^+} e^{-i\xi z} \mathrm{res}(f,z) \qquad \text{si } \xi < 0$$

$$\hat{f}(\xi) = -i \sum_{z \in \mathrm{sing}(f) \cap \mathbb{H}^-} e^{-i\xi z} \mathrm{res}(f,z) \qquad \text{si } \xi > 0.$$

(2) Calculer la transformée de Fourier de la fonction (réelle)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} .$$

(3) Calculer la transformée de Fourier de la fonction (réelle)

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 2a^2x^2\cos(2\theta) + a^4} \quad a > 0, \quad 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2} .$$

Démonstration. (1) Faisons seulement le cas $\xi < 0$; le cas $\xi > 0$ est identique ; grâce au théorème des résidus (les résidus de $z \mapsto e^{-i\xi z} f(z)$ sont ceux de $f(z)$, multipliés par $e^{-i\xi z}$), et ensuite au lemme de Jordan, on a

$$2\pi i \sum_{z \in \mathrm{sing}(g) \cap \mathbb{H}^+} e^{-i\xi z} \mathrm{res}(f,z) = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z}\mathrm{d}z + \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-i\xi x} dx,$$

où la première limite vaut 0, on obtient donc le résultat désiré.

(2) on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{(x+i)(x-i)}\mathrm{d}x=ie^{-i\xi i}\mathrm{res}(f,i)=\frac{i}{2i}e^{\xi}=\frac{e^{\xi}}{2}\qquad\text{pour }\xi<0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{(x+i)(x-i)}\mathrm{d}x=-ie^{-i\xi(-i)}\mathrm{res}(f,-i)=-\frac{i}{-2i}e^{-\xi}=\frac{e^{-\xi}}{2}\qquad\text{pour }\xi>0,$$

ce qui donne

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{e^{-|\xi|}}{2}.$$

(3) La fonction $g(z)=z^4+2a^2\cos(2\theta)z^2+a^4$ est nulle pour $z=\pm iae^{\pm i\theta}$. Donc si $y<0$ on a

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iyx}}{x^4+2a^2\cos(2\theta)x^2+a^4}\,dx=i\sum_{z=iae^{\pm i\theta}}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iyz}}{z^4+2a^2\cos(2\theta)z^2+a^4},z\right)$$

$$=i\left(\frac{e^{aye^{i\theta}}}{-2ia^3e^{-i\theta}(-1+e^{4i\theta})}+\frac{e^{aye^{-i\theta}}}{2ia^3e^{-3i\theta}(-1+e^{4i\theta})}\right)$$

$$=\frac{i}{4a^3\sin 2\theta}\left(e^{-i\theta}e^{aye^{i\theta}}-e^{i\theta}e^{aye^{-i\theta}}\right)=\frac{1}{2a^3\sin 2\theta}\mathrm{Im}(e^{aye^{i\theta}-i\theta})$$

et de même manière, si $y>0$ on a

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iyx}}{x^4+2a^2\cos(2\theta)x^2+a^4}\,dx=i\sum_{z=-iae^{\pm i\theta}}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iyz}}{z^4+2a^2\cos(2\theta)z^2+a^4},z\right)$$

$$=i\left(\frac{e^{-aye^{i\theta}}}{2ia^3e^{-i\theta}(-1+e^{4i\theta})}+\frac{e^{-aye^{-i\theta}}}{-2ia^3e^{-3i\theta}(-1+e^{4i\theta})}\right)$$

$$=\frac{-i}{4a^3\sin 2\theta}\left(e^{i\theta}e^{-aye^{i\theta}}-e^{-i\theta}e^{-aye^{-i\theta}}\right)=\frac{1}{2a^3\sin 2\theta}\mathrm{Im}(e^{-aye^{i\theta}-i\theta})$$

Donc on a $\hat{f}(y)=\frac{1}{2a^3\cos 2\theta}\mathrm{Im}(e^{-a|y|e^{i\theta}-i\theta})$.

□

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

(1)

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{x^{2n}+1}\qquad n=1,2,\dots$$

(2)

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(x^2+1)^n}\qquad n=1,2,\dots$$

(3)

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(e^x+x+1)^2+\pi^2}$$

Démonstration. (1) Les zéros de $z^{2n}+1$ sont $z_l=e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi l}{2n}\right)}$ pour $l=0,\dots,n-1$. Ainsi, par le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on a

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{x^{2n}+1}=2\pi i\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^{2n}+1},z_l\right)=2\pi i\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{2nz_l^{2n-1}}=-2\pi i\sum_{l=0}^{n-1}\frac{z_l}{2n}=\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

(2) La fonction $\frac{1}{(x^2+1)^n}$ a deux pôles en $z=\pm i$. Par le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{1}{(x^2+1)^n}, i) \\ &= 2\pi \frac{\prod_{l=0}^{n-2}(n+l)}{2^{2n-1}(n-1)!}.\end{aligned}$$

(3) On décompose l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(e^x+x+1)^2+\pi^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+x+1-i\pi} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+x+1+i\pi}.$$

Les deux intégrandes diffèrent seulement d'une constante. L'idée est alors de reformuler ces deux intégrales comme deux intégrales d'une même fonction, sur deux domaines (deux droites) distinctes. On peut récrire la première intégrale comme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+x+1-i\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z-e^z}$$

où $\Gamma_1 = \{\Im z = -\pi\}$. Pour la deuxième, on a que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+x+1+i\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z-e^z}$$

où $\Gamma_2 = \{\Im z = \pi\}$. Puisque $\frac{1}{1+z-e^{-z}} \to 0$ quand $|z|\to\infty$, on a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(e^x+x+1)^2+\pi^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{R}_R} \frac{dz}{1+z-e^z}$$

où $\mathcal{R}_R$ est le rectangle de côtés $\gamma_1 = -i\pi - R + 2Rt$, $\gamma_2 = -i\pi + R + 2\pi i t$, $\gamma_3 = R + \pi i - 2Rt$, $\gamma_4 = -R + \pi i - 2\pi i t$ (avec $t \in [0,1]$ pour tous les segments).

Afin de calculer cette intégrale, on peut utiliser le théorème des résidus, pour cela on a besoin d'étudier les zéros de $1+z-e^z$.

Pour $z = x+iy$, on a

$$|1+z-e^z|^2 = (y - e^x \sin y)^2 + (-e^x\cos y + x + 1)^2.$$

Ainsi, on cherche les solutions du système

$$\begin{cases} e^x \sin y = y, \\ e^x \cos y = x+1. \end{cases} \tag{1}$$

Clairement, $(x,y) = (0,0)$ est solution, i.e. $z=0$. Pour $x<0$ et $y\neq 0$, on a $e^x < 1$ et $\frac{y}{\sin y} > 1$, et donc le système n'a pas de solution. Pour $x>0$ en combinant les deux équations on obtient $y\cot y = x+1$. Mais puisque $y \cot y < 1$ pour tout $y\in(-\pi,\pi)$ et $x+1>1$ pour tout $x>0$, le système n'a pas de solution. Ainsi, $z=0$ est le seul zéro de $1+z-e^z$ et

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{R}_R} \frac{dz}{1+z-e^z} = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z-e^z}, 0\right).$$

Un calcul rapide montre que

$$\frac{1}{1+z-e^z} \sim -\frac{2}{z^2} + \frac{2}{3z} + O(1);$$

et on peut enfin conclure

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(e^x+x+1)^2+\pi^2} = \frac{2}{3}.$$

□

Exercice 4.

(1) Montrer que si $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction rationnelle bien définie sur $\partial D(0,1)$, on a que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \sum_{z\in \mathrm{sing}(r)\cap D(0,1)} \mathrm{res}\,(r,z),$$

où

$$r(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right).$$

(2) Calculer pour $|a| > 1$,
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta} \,.$$

Démonstration. (1) Comme pour $z = e^{i\theta} \in \partial D(0,1)$, on a $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, on a
$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\mathrm{d}z = \oint_{\partial D(0,r)} r(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{sing}(r) \cap D(0,1)} \operatorname{res}(r, z)\,.$$

(2) On a
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin\theta}\mathrm{d}\theta = \oint_{\partial D(0,1)} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{iz}\mathrm{d}z = \oint_{\partial D(0,1)} \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}\mathrm{d}z,$$
on a deux pôles simples en $z_* := \left(-ia + i\sqrt{a^2 - 1}\right)$ et $1/z_*$; seul z_* est dans $D(0,1)$ et le résidu y est
$$\operatorname{res}(r, z_*) = \frac{2z_*}{z_*^2 + 1} = \frac{-i}{\sqrt{a^2 - 1}},$$
ce qui donne
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$
□

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $zf(z) \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. Montrer que le résidu de f en 0 vaut 0.

Démonstration. Le résidu de f en 0 est le coefficient a_{-1} dans sa série de Laurent en 0. Par la formule de Cauchy, ce dernier est donné par $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\alpha)} f(z)\,\mathrm{d}z$ pour tout $\alpha > 0$. Par hypothèse, $\max_{|z|=\alpha} |f(z)| = o(\alpha^{-1})$ quand $\alpha \to \infty$. Puisque $|\int_{\partial D(0,\alpha)} f(z)\,\mathrm{d}z| \leq 2\pi\alpha \max_{|z|=\alpha} |f(z)|$, En prenant $\alpha \to +\infty$, on voit que l'intégrale tend vers 0. □

Exercice 6. Soient $z_1, \ldots, z_{2n} \in \mathbb{C}$ des nombres complexes distincts et soit M la matrice antisymétrique $2n \times 2n$ avec coefficients $m_{ij} = \frac{1}{z_i - z_j}$ pour $i \neq j$ et $m_{ii} = 0$. Montrer par récurrence que
$$\det M = \sum_\sigma \frac{1}{\left(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)}\right)^2 \cdots \left(z_{\sigma(2n-1)} - z_{\sigma(2n)}\right)^2}$$
où la somme est sur tous les partitions $\{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \ldots \{\sigma(2n-1), \sigma(2n)\}\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ en n sous-ensembles de 2 éléments telles que $\sigma(2j-1) < \sigma(2j)$ pour tous $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Induction base, $n = 1$, is easy to check. Suppose the claim is true for $n = m - 1$ and let us prove it for $n = m$.

Think about the determinant as a function of z_1. Then, by developing it wrt the first row and afterwards developing the corresponding minors wrt their first columns, we get the following expression :
$$\det M(z_1) = \sum_{j=2}^{m} \frac{c_{jj}}{(z_1 - z_j)^2} + \sum_{j=2}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m} \frac{c_{jk}}{(z_1 - z_j)(z_1 - z_k)}, \tag{2}$$
where the coefficients $\{c_{jk}\}_{j \leq k}$ do not depend on z_1. Note that this expression is NOT Laurent series of $\det M(z_1)$; in particular, it is valid for any $z_1 \in \mathbb{C}$.

Let $f(z_1) = \sum_\sigma \frac{1}{\left(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)}\right)^2 \cdots \left(z_{\sigma(2m-1)} - z_{\sigma(2m)}\right)^2}$; our goal is to prove $\det M(z_1) = f(z_1)$ for any $z_1 \in \mathbb{C}$.

Note that the coefficients c_{jj} are minors resulted by removing j-th row and j-th column from M ; their values are given by the induction hypothesis. Therefore $f(z_1) = \sum_{j=2}^{m} \frac{c_{jj}}{(z_1 - z_j)^2}$ and $\det M(z_1) = f(z_1) + \sum_{j=2}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m} \frac{c_{jk}}{(z_1 - z_j)(z_1 - z_k)}$.

Consider a ratio $g(z_1) = \det M(z_1)/f(z_1)$. Note that $\det M$ and f have singularities at the same points $z_2, \ldots, z_m$. Since they are poles of order 2 for both, the ratio has only eliminable singularities :
$$g(z_1) = \frac{\det M(z_1)}{f(z_1)} = \frac{\sum_{j=2}^{m} c_{jj}\prod_{l \neq j}(z_1 - z_l)^2 + \sum_{j=2}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}(z_1 - z_j)(z_1 - z_k)\prod_{l \neq j,k}(z_1 - z_l)^2}{\sum_{j=2}^{m} c_{jj}\prod_{l \neq j}(z_1 - z_l)^2} \tag{3}$$

for all $z_1 \neq z_2, \ldots, z_m$. When z_1 approaches z_j, both the numerator and the denominator approach $c_{jj} \prod_{l \neq j}(z_j - z_l)^2$, which are not zero since c_{jj} are given by the induction hypothesis and all $z_1, \ldots, z_{2m}$ are distinct.

Therefore g can be extended to a holomorphic function on $\mathbb{C}$. It does not have a singularity at infinity. Indeed, consider a function $h(w) = g(1/w)$ and its Laurent series at zero :

$$h(w) = g(1/w) = \frac{\det M(1/w)}{f(1/w)} = \frac{\left(\sum_{j=2}^{m} c_{jj} + \sum_{j=2}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} c_{jk}\right) w^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k w^k}{\sum_{j=2}^{m} c_{jj} w^2 + \sum_{k=3}^{\infty} b_k w^k}. \tag{4}$$

The limit $\lim_{w \to 0} h(w)$ exists and equals $\frac{\sum_{j=2}^{m} c_{jj} + \sum_{j=2}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} c_{jk}}{\sum_{j=2}^{m} c_{jj}}$, which is finite since all c_{jj} are positive as they are given by the induction hypothesis. Therefore $\lim_{z_1 \to \infty} g(z_1)$ also exists.

Hence g is a bounded entire function. By Liouville's theorem, it is constant. Since $f(z_1)$ and $\det M(z_1)$ have the same coefficients at $(z_1 - z_j)^2$ for each j, the ratio should be one. Hence $f \equiv \det M$.

$\square$