Série 9

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ bornée et continue par morceaux t.q. sa transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ ait une extension méromorphe sur $\mathbb{H}_{-\delta} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > -\delta\}$ pour $\delta \geq 0$ et holomorphe sur $\overline{\mathbb{H}}_0$. Soit $T > 0$ et

$$\mathcal{L}_T f(z) := \int_0^T f(t) e^{-tz} dt \ .$$

(1) Soit $R > 0$ et $\Omega_R = \mathbb{H}_{-\delta/2} \cap D(0, R)$. Quitte à réduire $\delta > 0$, montrer que

$$\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega_R} \left(\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z)\right) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz} \frac{dz}{z} \ .$$

(2) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver R assez grand pour que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+} \left(\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z)\right) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz} \frac{dz}{z} \right| \leq \epsilon$$

où $C_R^+ = \partial\Omega_R \cap \overline{\mathbb{H}}_0$.

Indice : (montrer et) utiliser que pour $z \in \partial D(0, R)$, on a que $|(1 + \frac{z^2}{R^2})\frac{1}{z}| = \frac{2}{R^2}|\text{Re}(z)|$.

(3) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver R assez grand tel que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^-} \mathcal{L}_T f\,(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz} \frac{\mathrm{d}z}{z} \right| \leq \epsilon,$$

où Γ_R^- est l'union de
— la corde $C_R^- = \partial\Omega_R \cap \partial\mathbb{H}_{-\delta/2}$, orientée de haut en bas,
— un petit arc de cercle supérieur S_R^+ de longueur $\mathcal{O}\,(\delta)$, orienté de droite à gauche,
— un petit arc de cercle inférieur S_R^-, de longueur $\mathcal{O}\,(\delta)$, orienté de gauche à droite.

(4) Montrer que pour tout R fixé

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^-} \mathcal{L}f\,(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0 \ .$$

(5) Déduire que

$$\mathcal{L}_T f\,(0) \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}f\,(0) \ .$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{H}_1 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 1\}$ et soit $\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$.

(1) Montrer que pour tout $b, \epsilon > 0$ on a

$$\Phi(1 + 2ib + \epsilon) + \Phi(1 - 2ib + \epsilon) + 4\Phi(1 + ib + \epsilon) + 4\Phi(1 - ib + \epsilon) + 6\Phi(1 + \epsilon) \geq 0.$$

(2) Calculer la limite

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \epsilon \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}}\right)^4$$

et déduire que ζ n'a aucun zéro sur $\overline{\mathbb{H}}_1$.

Indice : on peut utiliser le lemme 265 du cours.