Corrigé 3

Exercice 1. Trouver les fonctions analytiques $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ qui ont pour partie réelle ou imaginaire :

(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$;

(2) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$;

(3) $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$;

(4) $v(x,y) = \log(x^2+y^2) + x - 2y$.

Démonstration. We apply Cauchy-Riemann :

(1) On a

$$\partial_y v(x,y) = \partial_x u(x,y) = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_x v(x,y) = -\partial_y u(x,y) = 2y - 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

donc

$$\begin{aligned} v(x,y_0) - v(x,0) &= \int_0^{y_0} 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy \\ &= 2xy_0 + 5y_0 + x\int_{x^2}^{x^2+y_0^2} \frac{1}{u^2} du \\ &= 2xy_0 + 5y_0 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+y_0^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v(x_0,y) - v(0,y) &= \int_0^{x_0} 2y - 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \\ &= 2x_0 y - x_0 - \frac{x_0}{x_0^2+y^2} \end{aligned}$$

ce qui implique que $v(x,y) = 2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2} + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, et donc que f est de la forme $f(z) = z^2 + 5z - iz - \frac{i}{z} + C$.

(2) On a

$$\partial_y v(x,y) = \partial_x u(x,y) = e^x(1+x)\cos y - e^x y \sin y + \cos x \sinh y + 3x^2 - 3y^2$$
$$\partial_x v(x,y) = -\partial_y u(x,y) = e^x(1+x)\sin y + e^x y\cos y - \sin x \cosh y + 6xy - 1$$

donc

$$\begin{aligned} v(x,y_0) - v(x,0) &= \int_0^{y_0} e^x(1+x)\cos y - e^x y\sin y + \cos x\sinh y + 3x^2 - 3y^2 dy \\ &= \left[e^x(1+x)\sin y + e^x y\cos y - e^x \sin y + \cos x\cosh y + 3x^2 y - y^3\right]_0^{y_0} \\ &= \left[e^x(x\sin y + y\cos y) + \cos x\cosh y + 3x^2 y - y^3\right]_0^{y_0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v(x_0,y) - v(0,y) &= \int_0^{x_0} e^x(1+x)\sin y + e^x y\cos y - \sin x\cosh y + 6xy - 1 dx \\ &= \left[e^x \sin y + e^x x\sin y - e^x\sin y + e^x y\cos y + \cos x\cosh y - x\right]_0^{x_0} \\ &= \left[e^x(x\sin y + y\cos y) + \cos x\cosh y - x\right]_0^{x_0} \end{aligned}$$

ce qui implique que $v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) + \cos x\cosh y + 3x^2 y - y^3 - x + C$ et donc que $f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz + C$.

(3) Par la même stratégie, on obtient $f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + C$.

(4) On obtient $f(z) = 2i\log z + iz - 2z + C$.

□

Exercice 2. Trouver une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe en seulement un point.

Démonstration. Les parties réelle et imaginaire de la fonction $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ont comme dérivées partielles

$$\partial_x u(x,y) = 2x, \qquad \partial_y u(x,y) = 2y, \qquad \partial_x v(x,y) = \partial_y v(x,y) = 0.$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont donc satisfaites seulement quand $x = y = 0$. □

Exercice 3. Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes :

(1) $f(x+iy) = x^2 + y^2 + 2ixy$;
(2) $f(z) = z\mathrm{Re}z$;
(3) $f(z) = e^z$;
(4) $f(z) = \bar{z}$;

Démonstration. (1) On a $\partial_x u(x,y) = 2x$, $\partial_y u(x,y) = 2y$, $\partial_x v(x,y) = 2y$ et $\partial_y v(x,y) = 2x$. Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour $y = 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) On a $\partial_x u(x,y) = 2x$, $\partial_y u(x,y) = 0$, $\partial_x v(x,y) = y$ et $\partial_y v(x,y) = x$. Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour $x = 0$ et $y = 0$.

(3) On a $\partial_x u(x,y) = e^x \cos y$, $\partial_y u(x,y) = -e^x \sin y$, $\partial_x v(x,y) = e^x \sin y$ et $\partial_y v(x,y) = e^x \cos y$. Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

(4) On a $\partial_x u(x,y) = 1$, $\partial_y u(x,y) = 0$, $\partial_x v(x,y) = 0$ et $\partial_y v(x,y) = -1$. Les équations de Cauchy-Riemann ne sont donc satisfaites pour aucun $x, y \in \mathbb{R}$.

□

Exercice 4. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (au sens de fonctions de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$). Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si $\bar{\partial} f(z) = 0$ pour tout $z \in U$ et que dans ce cas $f'(z) = \partial f(z)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f(z) &= \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z) + i\partial_y f(z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y) + i\partial_y u(x,y)\right) + \frac{i}{2}\left(\partial_x v(x,y) + i\partial_y v(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y) - \partial_y v(x,y)\right) + \frac{i}{2}\left(\partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\right).
\end{aligned}$$

On voit que les parties réelle et imaginaire sont 0 si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. On a alors,

$$\begin{aligned}
\partial f(z) &= \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z) - i\partial_y f(z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y)\right) - \frac{i}{2}\left(\partial_y u(x,y) + i\partial_y v(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y) + \partial_y v(x,y)\right) + \frac{i}{2}\left(-\partial_y u(x,y) + \partial_x v(x,y)\right) \\
&= \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) \\
&= \partial_x f(x+iy) = f'(z).
\end{aligned}$$

□

Exercice 5. Montrer que si $f : U \to V$ est bijective et holomorphe et si f' ne s'annule pas sur V, alors la fonction inverse f^{-1} est aussi holomorphe.

Démonstration. En considérant la fonction f comme allant de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$, sa Jacobienne $Df\big|_x$ est donc une matrice D de taille 2×2 satisfaisant $D_{11} = D_{22}$ et $D_{12} = -D_{21}$ par Cauchy-Riemann et qui est non-nulle en U. Par le théorème de la fonction inverse (Série 1 Exercise 3), la fonction inverse f en $w = f(z)$ a comme Jacobienne la matrice inverse $D^{-1} = (\det D)^{-1} \begin{pmatrix} D_{22} & -D_{21} \\ -D_{12} & D_{11} \end{pmatrix}$. On voit en particulier qu'elle satisfait également les équations de Cauchy-Riemann. □

Exercice 6.

(1) Montrer qu'il n'existe aucun de fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.q. $f(z^2) = z \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
(2) Montrer qu'il n'existe pas de logarithme continu sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Démonstration. (1) Il faudrait que $f(1^2) = 1$ et $f((-1)^2) = -1$: contradiction.

(2) Supposons qu'il existe une fonction h t.q. $e^{h(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $h(e^w) = w$ (continuité). Alors la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{2}h(z)}$ satisfait (pour tous $z = e^w$) $f(z^2) = e^{\frac{1}{2}h(e^{2w})} = e^w = z$, ce qui est impossible par (1).

□

Exercice 7. Trouver le rayon de convergence des séries suivantes :
(1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} z^n$

Démonstration. (1) Le rayon de convergence est 1 car pour chaque $\rho \in [0, 1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} < \infty$$

et pour chaque $\rho \geq 1$, chacun des termes $\rho^{n!}$ ne convergent pas vers 0 et il ne peut donc pas y avoir de convergence.

(2) On a $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} = 1$, et donc le rayon de convergence est 1.

□

Exercice 8. Soit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série convergente avec rayon de convergence $R > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que pour $|z| < R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j+kn} z^{j+kn} = \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} uj} f(e^{\frac{2\pi i}{n} u} z) \ .$$

Démonstration. We have

$$\frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} uj} f\left(e^{\frac{2\pi i}{n} u} z\right) = \frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i}{n} uj} \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{\frac{2\pi i m}{n} u} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \left(\frac{1}{n} \sum_{u=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} u(m-j)} \right).$$

The sum $\sum_{u=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} u(m-j)}$ equals to n if $m - j$ is divisible by n, and to $\frac{1-e^{2\pi i(m-j)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}(m-j)}} = 0$ otherwise since $m - j$ is an integer. Therefore the above expression equals $\sum_{k=0}^{\infty} a_{j+kn} z^{j+kn}$. □