Série 6

Exercice 1. Soit Ω un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ et soit I un intervalle fermé dans Ω. Soit f continue dans Ω et analytique dans $\Omega \setminus I$. Montrer que f est analytique dans tout Ω.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non constante. Démontrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3. En utilisant le contour de la Figure 1, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$

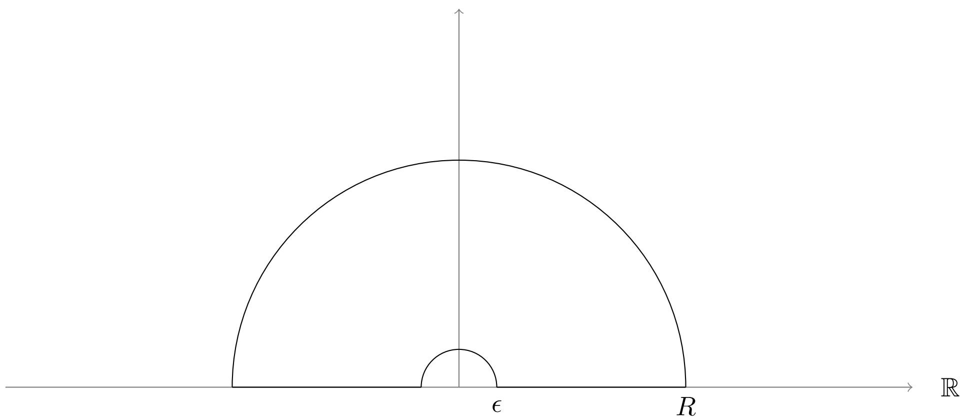

FIGURE 1

Exercice 4.

(1) (Lemme de Schwarz) Démontrer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, alors pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$|f(z)| \leq |z|.$$

(2) Soit $z, a \in \mathbb{D}$, et soit $M_a : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ la fonction analytique $M_a(z) = \frac{z-a}{1-z\bar{a}}$. Montrer que $\forall z, a \in \mathbb{D}$, on a $|M_a(z)| \leq 1$, et que $M_a \circ M_{-a} = M_{-a} \circ M_a = \mathrm{Id}$.

(3) Déduire que si la fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est analytique dans le disque ouvert $\mathbb{D}$ et qu'elle a deux points fixes dans $\mathbb{D}$, alors $f(z) \equiv z$. (*Indice : Utiliser (2) pour montrer que l'on peut supposer qu'un des deux points fixes est* 0.)

(4) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique et t.q. $f(z_0) = z_0$ et $f'(z_0) = 1$ pour un certain $z_0 \in \mathbb{D}$. Montrer que $f(z) \equiv z$.

(5) (Lemme de Schwarz-Pick) Démontrer que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe alors $\forall z, w \in \mathbb{D}$ on a

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)} f(w)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z} w} \right|,$$

et en déduire que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$