Série 8

Exercice 1. (Lemme de Jordan) Démontrer le résultat suivant.

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec $|f(z)| = O(1/|z|)$ quand $|z| \to \infty$. On a que

$$\int_{C_R^+} f(z)\, e^{-i\xi z} \mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{pour } \xi < 0,$$

$$\int_{C_R^-} f(z)\, e^{-i\xi z} \mathrm{d}z \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{pour } \xi > 0.$$

où $C_R^\pm = \partial D(0,R) \cap \mathbb{H}^\pm$ et $\mathbb{H}^\pm = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \in \mathbb{R}^\pm\}$.

Exercice 2. (Transformée de Fourier par résidus)

(1) Montrer que, sous le même conditions de l'exercice 1 et f intégrable sur $\mathbb{R}$, si f n'a que des pôles simples on a

$$\hat{f}(\xi) = i \sum_{z\in \mathrm{sing}(f)\cap\mathbb{H}^+} e^{-i\xi z} \mathrm{res}(f,z) \qquad \text{si } \xi < 0$$

$$\hat{f}(\xi) = -i \sum_{z\in \mathrm{sing}(f)\cap\mathbb{H}^-} e^{-i\xi z} \mathrm{res}(f,z) \qquad \text{si } \xi > 0.$$

(2) Calculer la transformée de Fourier de la fonction (réelle)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\ .$$

(3) Calculer la transformée de Fourier de la fonction (réelle)

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 2a^2x^2\cos(2\theta) + a^4} \quad a > 0, \quad 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}\ .$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

(1)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^{2n}+1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(2)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(3)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(e^x + x + 1)^2 + \pi^2}$$

Exercice 4.

(1) Montrer que si $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle bien définie sur $\partial D(0,1)$, on a que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta = 2\pi i \sum_{z\in\mathrm{sing}(r)\cap D(0,1)} \mathrm{res}(r,z)\,,$$

où

$$r(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\ .$$

(2) Calculer pour $|a| > 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta}\ .$$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $zf(z) \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. Montrer que le résidu de f en 0 vaut 0.

Exercice 6. Soient $z_1, \ldots, z_{2n} \in \mathbb{C}$ des nombres complexes distincts et soit M la matrice antisymétrique $2n \times 2n$ avec coefficients $m_{ij} = \frac{1}{z_i - z_j}$ pour $i \neq j$ et $m_{ii} = 0$. Montrer par récurrence que

$$\det M = \sum_{\sigma} \frac{1}{\left(z_{\sigma(1)} - z_{\sigma(2)}\right)^2 \cdots \left(z_{\sigma(2n-1)} - z_{\sigma(2n)}\right)^2}$$

où la somme est sur tous les partitions $\{\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \ldots \{\sigma(2n-1), \sigma(2n)\}\}$ de l'ensemble $\{1, \ldots, 2n\}$ en n sous-ensembles de 2 éléments telles que $\sigma(2j-1) < \sigma(2j)$ pour tous $j = 1, \ldots, n$.