Série 10

Théorème d'Arzelà-Ascoli :
Soit K compact et soit A une famille de fonctions continues $K \to \mathbb{C}$, uniformément bornée et uniformément équicontinue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in A$ et pour tous $x, y \in K$ tel que $\|x - y\| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Alors, chaque suite $(f_n)_{n \geq 0} \subseteq A$ a une sous-suite qui converge uniformément sur K.

Exercice 1. Étudier le comportement de la série suivante :

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} .$$

Indices : Soit $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $n \in \mathbb{N}$. On utilisera le théorème des nombres premiers (Théorème 255 du cours) pour trouver le comportement asymptotique de $\log \pi(n)$ quand $n \to \infty$. On pourra en déduire le comportement asymptotique de p_n, le n-ième nombre premier.

Exercice 2. Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Montrer que les applications conformes $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sont de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$ est *normale* si chaque suite $(f_n)_{n \geq 0}$ a une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, montrer que si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes $U \to \mathbb{C}$ qui est uniformément bornée sur les compacts de U, alors c'est une famille normale.

Exercice 4. Montrer que dans le théorème de l'application conforme de Riemann, l'hypothèse $U \neq \mathbb{C}$ est nécessaire et identifier quelle partie de la preuve ne fonctionne pas.

Exercice 5. Trouver une application conforme $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{D}$.