Corrigé 2

Exercice 1. Trouver à quelles fonctions usuelles correspondent ces séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Démonstration. On a que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n = -\ln(1+z), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

□

Exercice 2. Calculer la somme des séries suivantes pour $|z| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

En déduire les identités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} = -\log\left|2\sin\frac{\phi}{2}\right| \quad (0 < |\phi| < \pi),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\phi}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0 < \phi < \pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\phi}{n} = \frac{\phi}{2} \quad (0 < |\phi| < \pi).$$

Démonstration.
À l'intérieur du domaine où une série converge, on peut la dériver grâce au lemme 65 du cours. En particulier on a :

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z}{(1-z)^2};$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z),$$

puisque c'est la primitive de la troisième série de l'exercice 1 qui vaut 0 en 0.

(3) Pour cette série, il faut être plus malin et essayer de la réécrire en terme de séries connues :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} - \left(z + \frac{z^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(z^2\right)^n}{n} + \frac{z^2}{2} = -\ln(1-z) + \frac{1}{2}\ln\left(1-z^2\right) - z.$$

Afin de prouver les trois dernières identités, on utilise la formule de Moivre, à savoir

$$e^{in\phi} = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} \overset{z=e^{i\phi}}{=} \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(-\ln(1-z)\right).$$

Peu importe la détermination du logarithme qu'on veut considérer, on a toujours que $\mathrm{Re}(\ln(w)) = \ln|w|$ (voir section 3.3 du cours). Ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} &= -\ln|1-z| = -\ln\left|1-e^{i\phi}\right| = -\ln|1-\cos(\phi) - i\sin(\phi)| \\
&= -\ln\left|\sqrt{(1-\cos(\phi))^2 + \sin^2(\phi)}\right| = -\ln\left|\sqrt{1-2\cos(\phi)+\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)}\right| \\
&= -\ln\left|\sqrt{2(1-\cos(\phi))}\right|.
\end{aligned}
$$

On conclut alors en utilisant la formule $\sin^2(\phi) = \frac{1-\cos(2\phi)}{2}$.

(2) Pour $z = e^{i\phi}$, $\phi \in (0,\pi)$, on utilise la formule de Moivre et l'expression de la troisième série qu'on a calculée pour obtenir que

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\phi)}{2n+1} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1-z^2\right) - \ln(1-z)\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right) = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right).
$$

Calculons $\arg\left(\frac{1+e^{i\phi}}{1-e^{i\phi}}\right)$; on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1+e^{i\phi}}{1-e^{i\phi}} =& \frac{(1+e^{i\phi})\overline{(1-e^{i\phi})}}{|1-e^{i\phi}|^2} = (1+\cos\phi + i\sin\phi)(1-\cos\phi + i\sin\phi)\frac{1}{|1-\cos\phi+i\sin\phi|^2} \\
=& \left(1+\cos\phi + i\sin\phi - \cos\phi - \cos^2\phi - i\cos\phi\sin\phi + i\sin\phi + i\sin\phi\cos\phi - \sin^2\phi\right)\frac{1}{|1-\cos\phi+i\sin\phi|^2} \\
=& i\,\frac{2\sin\phi}{|1-\cos\phi+i\sin\phi|^2}.
\end{aligned}
$$

Puisque $\phi \in (0,\pi)$, on a que $\sin\phi > 0$. En particulier,

$$
\arg\left(\frac{1+e^{i\phi}}{1-e^{i\phi}}\right) = \arg\left(i\,\frac{2\sin\phi}{|1-\cos\phi+i\sin\phi|^2}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}.
$$

On a ainsi montré que pour tout $\phi \in (0,\pi)$,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\phi)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.
$$

(3) Les mêmes idées que précédemment nous donnent

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\phi}{n} &= -\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{-i\phi})^n}{n} = -\mathrm{Im}\ln\left(1+e^{-i\phi}\right) \\
&= -\arg\left(1+e^{-i\phi}\right) \\
&= -\arg\left(e^{-i\frac{\phi}{2}}\left(e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}}\right)\right) \\
&= -\arg\left(2e^{-i\frac{\phi}{2}}\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\phi}{2}}\right)\right) = \frac{\phi}{2},
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé que $|\phi| \in (0,\pi)$ et donc $\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\phi}{2}}\right) > 0$.

$\square$

Exercice 3. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1+e^{it}+\cdots+e^{int}}{n}.
$$

Démonstration.

(1) Pour tout $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, la limite est égale à 1 car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{ikt} = 1$ et donc tous les termes de la suite sont égaux à 1.

(2) Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, l'inégalité triangulaire nous donne que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1 + e^{it} + \cdots + e^{int}}{n} \right| \leq 1.$$

Bien que cela montre que la suite est bornée, cette majoration est trop forte et ne prend pas avantage du fait que les nombres complexe d'arguments opposés s'annulent.
On peut à la place utiliser l'identité

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

et obtenir une majoration plus précise

$$\left| \frac{1 + e^{it} + \cdots + e^{int}}{n} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{n(1 - e^{it})} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{2}{|1 - e^{it}|},$$

qui converge vers 0 quand n tend vers ∞, tant que $|1 - e^{it}| \neq 0$; ce qui est bien le cas dès lors que $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
On peut alors conclure que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + e^{it} + \cdots + e^{int}}{n} = \delta_{t \in 2\pi\mathbb{Z}}.$$

$\square$

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels t.q. $\lim_n a_n = 0$ et soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes t.q. $B_N := \sum_{n=1}^{N} b_n$ est une suite bornée.

(1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$ converge.

(2) En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge aussi.

(3) Pour quel $\theta \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$$

converge ?

(4) Trouver une suite de nombres complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ converge mais $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^k$ diverge.

Démonstration.

(1) Il suffit de montrer la convergence en norme de la série :

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n (a_n - a_{n+1})| = \sum_{n=1}^{N} |B_n|(a_n - a_{n+1}) \leq B \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = B(a_1 - a_{N+1});$$

où l'on a utilisé que $(a_n)_{n \geq 1}$ est réelle et décroissante puis que les B_n sont bornés (en module) par un certain $B > 0$. Clairement, cette série converge quand $N \to \infty$, ce qui implique la convergence de $\sum_{n=1}^{N} B_n (a_n - a_{n+1})$.

(2) On écrit

$$\sum_{n=1}^{N} B_n (a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} b_k (a_n - a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sum_{n=k}^{N} (a_n - a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{N} b_k a_k - \sum_{k=1}^{N} b_k a_{N+1}.$$

Ainsi, on a que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = B_N a_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} B_n (a_n - a_{n+1}).$$

Nous avons déjà démontré que le second terme converge, quant au premier, il converge vers 0 car $(B_n)_{n \geq 1}$ est bornée et a_N converge vers 0.

(3) On pose $b_n = e^{i\theta n}$ et $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui converge vers zero de façon décroissante. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a que la suite définie par $B_N = \sum_{n=1}^{N} e^{i\theta n} = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta(N+1)}}{1 - e^{i\theta}}$ est bornée et donc que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. Nous avons donc convergence en $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(4) On pose $z_n = \frac{e^{i\theta n}}{\log n}$ pour $\theta \neq 0$ qui est de la forme $a_n b_n$ pour $b_n = e^{i\theta n}$ et $a_n = \frac{1}{\log n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N b_n^k = \sum_{n=1}^N e^{i\theta nk}$ est bornée et $a_n^k = \frac{1}{(\log n)^k}$ converge vers 0. La série $\sum_{n=1}^\infty z_n^k = \sum_{n=1}^\infty a_n^k b_n^k$ converge donc pour tout k. Pourtant en valeur absolue, $\sum_{n=1}^\infty \left|z_n^k\right| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\log n)^k}$ diverge.

□

Exercice 5.

(1) Prouver que si $\sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_*)^k$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$, alors elle converge (normalement) en tout $z \in D(z_*, \rho)$, et diverge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_*, \rho)$.

(2) Prouver ce lemme d'Abel : si

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \rho^k < \infty$$

pour un certain $\rho \in (0, \infty)$, alors on a que $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ converge uniformément sur tous les sous-ensembles compacts de $D(0, \rho)$.

(3) Trouver une série entière qui a rayon de convergence 1 et qui converge sur $\partial D(0,1)$ sauf en cinq points, où elle diverge.

Démonstration.

(1) Quitte à recentrer la série, on peut supposer que $z_* = 0$. Supposons que $\sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ converge pour un z de norme $\rho = |z|$. On a donc que la suite $|a_n z^n| = |a_n| \rho^n$ est bornée par un certain B. Pour tout autre $\tilde{z}$ de norme $|\tilde{z}| = \tilde{\rho} < \rho$, on écrit

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n z^n| \le B \sum_{n=1}^N \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^n = B \frac{1 - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)} \to \frac{B}{1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}}$$

ce qui implique la convergence normale de la série $\sum_{n=1}^\infty a_n \tilde{z}^n$.

On montre maintenant que la série diverge pour $|z| > \rho$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_*, \rho)$ tel que $\sum_{k=0}^\infty a_n z_0^n$ converge. En appliquant le même raisonnement que pour prouver la convergence, on a que $|a_n z_0^n| \le B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un certain B. Ainsi, pour tout z tel que $|z| < z_0$, on a que $\sum_{k \ge 0} a_k z^k$ converge, mais puisque $|z_0| > \rho$, cela contredit la définition du rayon de convergence ρ. Ainsi la série diverge sur $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(z_*, \rho)$.

(2) Tout sous-ensemble compact de $D(0, \rho)$ est contenu dans $D(0, \tilde{\rho})$ pour un certain $\tilde{\rho} < \rho$. On a alors pour tout z dans $D(0, \tilde{\rho})$

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n z^n| \le B \sum_{n=1}^N \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^n = B \frac{1 - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)} \to \frac{B}{1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}},$$

où $B = \sup_n |a_n| \rho^n$.

(3) La série entière $f(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{1\}$ et diverge en $z = 1$. Pour chaque $k = 0, 1, 2, 3, 4$ la série $f_k(z) = f(z e^{-i\frac{2\pi k}{5}})$ converge donc en $z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{e^{i\frac{2\pi k}{5}}\}$. La somme $f_0 + \cdots + f_4$ est donc une série entière qui diverge en $e^{i\frac{2\pi k}{5}}$ pour tout $k = 0, 1, 2, 3, 4$ et converge pour tout autre point de $\overline{D}(0,1)$.

□

Exercice 6.

Soient $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^\infty b_k z^k$ deux séries entières avec rayons de convergence au moins $\rho > 0$.

(1) Montrer que la série entière $\sum (a_k + b_k) z^k$ a pour rayon de convergence au moins ρ.

(2) On note

$$(a \star b)_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j = \sum_{j,l : j+l=k} a_l b_j \ .$$

Montrer que la série $\sum_{k=0}^\infty (a \star b)_k z^k$ a pour rayon de convergence au moins ρ et que

$$\sum_{k=0}^\infty (a \star b)_k z^k = \left(\sum_{k=0}^\infty a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty b_k z^k\right).$$

Démonstration.

(1) Since both series have convergence radii at least ρ, for any $\tilde{\rho} \in (0,\rho)$, we have $\sup_n |a_n|\tilde{\rho}^n < \infty$ and $\sup_n |b_n|\tilde{\rho}^n < \infty$. Therefore for any $\tilde{\rho} \in (0,\rho)$,

$$\sup_n |a_n + b_n|\tilde{\rho}^n \leq \sup_n |a_n|\tilde{\rho}^n + \sup_n |b_n|\tilde{\rho}^n < \infty,$$

which means that the radius of convergence of $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ is at least $\tilde{\rho}$. Since this holds for any $\tilde{\rho} \in (0,\rho)$, it is at least ρ.

(2) For any $\tilde{\rho} < \rho$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} |(a \star b)_n|\tilde{\rho}^n &\leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} |a_k|\tilde{\rho}^k |b_{n-k}|\tilde{\rho}^{n-k} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^n \sum_{k=0}^{n} |a_k|\rho^k |b_{n-k}|\rho^{n-k} \\ &\leq \left(\sup_k |a_k|\rho^k\right)\left(\sup_k |b_k|\rho^k\right)\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^n n,\end{aligned}$$

which is finite as $N \to \infty$ since $\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^n = o(1/n^3)$. Therefore $\sum_{n=0}^{\infty} |(a \star b)_n|\tilde{\rho}^n < \infty$ for any $\tilde{\rho} \in (0,\rho)$, which implies that the radius of convergence is at least ρ.

We have

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{N} b_m z^m\right) - \sum_{k=0}^{2N} (a \star b)_k\, z^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{2N}\sum_{n,m:\,n+m=k} a_n b_m z^k - \sum_{k=0}^{2N}\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} z^k\right| = 0,$$

which implies

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a \star b)_k\, z^k = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{2N} (a \star b)_k\, z^k = \lim_{N\to\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{N} b_m z^m\right)\right],$$

which equals to $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right)$ since both series converge.

$\square$