Corrigé 9

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ bornée et continue par morceaux t.q. sa transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ ait une extension méromorphe sur $\mathbb{H}_{-\delta} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > -\delta\}$ pour $\delta \geq 0$ et holomorphe sur $\overline{\mathbb{H}}_0$. Soit $T > 0$ et

$$\mathcal{L}_T f(z) := \int_0^T f(t)e^{-tz}dt \ .$$

(1) Soit $R > 0$ et $\Omega_R = \mathbb{H}_{-\delta/2} \cap D(0, R)$. Quitte à réduire $\delta > 0$, montrer que

$$\mathcal{L}_T f(0) - \mathcal{L}f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega_R} (\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z)) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz}\frac{dz}{z} \ .$$

(2) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver R assez grand pour que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+} (\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z)) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz}\frac{dz}{z}\right| \leq \epsilon$$

où $C_R^+ = \partial\Omega_R \cap \overline{\mathbb{H}}_0$.

Indice : (montrer et) utiliser que pour $z \in \partial D(0, R)$, on a que $|(1 + \frac{z^2}{R^2})\frac{1}{z}| = \frac{2}{R^2}|\mathrm{Re}(z)|$.

(3) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver R assez grand tel que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^-} \mathcal{L}_T f(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leq \epsilon,$$

où Γ_R^- est l'union de
— la corde $C_R^- = \partial\Omega_R \cap \partial\mathbb{H}_{-\delta/2}$, orientée de haut en bas,
— un petit arc de cercle supérieur S_R^+ de longueur $\mathcal{O}(\delta)$, orienté de droite à gauche,
— un petit arc de cercle inférieur S_R^-, de longueur $\mathcal{O}(\delta)$, orienté de gauche à droite.

(4) Montrer que pour tout R fixé

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^-} \mathcal{L}f(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0 \ .$$

(5) Déduire que

$$\mathcal{L}_T f(0) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}f(0) \ .$$

Démonstration.

(1) On peut voir que $\mathcal{L}_T f$ est une fonction entière (par exemple en développant l'exponentielle en série entière et en s'assurant de la convergence de la série obtenue). De plus, par définition d'une fonction méromorphe, les singularités de $\mathcal{L}f$ sont isolées. En particulier on peut toujours trouver un $\delta > 0$ suffisamment petit pour s'assurer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur $\overline{\Omega}_R$. On peut donc utiliser la formule de Cauchy pour obtenir l'expression voulue.

(2) Pour $z \in \mathbb{H}_0$, si on note $M = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)|$, on a

$$|\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z)| = \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t\right| \leq M\int_T^\infty \left|e^{-zt}\right|\mathrm{d}t = \frac{Me^{-\mathfrak{Re}(z)T}}{|\mathfrak{Re}(z)|} \ .$$

D'autre part pour $z \in \partial D(0, R)$, on a $R/z = \bar{z}/R$, d'où

$$\left|e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = \frac{\left|e^{Tz}\right|}{R}\left|\frac{R}{z} + \frac{z}{R}\right| = \frac{\left|e^{Tz}\right|}{R}\left|\frac{z}{R} + \frac{\bar{z}}{R}\right| = 2\frac{e^{T\mathfrak{Re}(z)}}{R^2}|\mathfrak{Re}(z)| \ .$$

On voit que le terme artificiel $e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$ a précisément servi à équilibrer la borne supérieure sur $|\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z)|$. Ainsi, sur $z \in C_R^+$, on obtient :

$$\left|(\mathcal{L}_T f(z) - \mathcal{L}f(z))\left(e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right)\right| \leq 2\frac{M}{R^2}.$$

Cela nous permet de majorer l'intégrale en termes de la longueur de C_R^+ (qui vaut πR) et du maximum de l'intégrande (qui vaut $2M/R^2$)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+}\left(\mathcal{L}_T f(z)-\mathcal{L}f(z)\right)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\pi R\cdot\left(2\frac{M}{R^2}\right)=\frac{M}{R}.$$

Ainsi, pour $R\geq M/\epsilon$, on a l'inégalité dans (1) pour tout $T\in\mathbb{R}_+$.

(3) Comme $\mathcal{L}_T f$ est une fonction entière, on peut déformer Γ_R^- en O_R^-, le demi-cercle $\{z\in\partial D(0,R):\mathfrak{Re}(z)\leq 0\}$, et écrire

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^-}\mathcal{L}_T f(z)\,e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\mathrm{d}z\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{O_R^-}\mathcal{L}_T f(z)\,e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\mathrm{d}z\right|.$$

On a ensuite l'inégalité :

$$|\mathcal{L}_T f(z)|=\left|\int_0^T f(t)\,e^{-tz}\mathrm{d}z\right|\leq M\int_0^T e^{-\mathfrak{Re}(z)t}\mathrm{d}t=M\frac{e^{-\mathfrak{Re}(z)T}-1}{-\mathfrak{Re}(z)}\leq\frac{Me^{-\mathfrak{Re}(z)T}}{|\mathfrak{Re}(z)|}$$

comme $\mathfrak{Re}(z)\leq 0$. On a montré pour la question (2) que pour tout $z\in\partial D(0,R)$, on a

$$\left|e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right|=2\frac{e^{T\mathfrak{Re}(z)}}{R^2}|\mathfrak{Re}(z)|,$$

Cela nous donne la borne similaire à (1) :

$$\left|\mathcal{L}_T f(z)\,e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right|\leq 2\frac{M}{R^2}.$$

On peut majorer l'intégrale comme

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^-}\mathcal{L}_T f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\pi R\cdot\frac{Me^{-\mathfrak{Re}(z)T}}{|\mathfrak{Re}(z)|}\left(2\frac{e^{T\mathfrak{Re}(z)}}{R^2}|\mathfrak{Re}(z)|\right)\leq\frac{M}{R}.$$

Ainsi, pour $R\geq M/\epsilon$, on a l'inegalité.

(4) Define $S_R^{+,\delta'}$ an arc of the circle similar to S_R^+ but with δ' instead of δ and similarly define $S_R^{-,\delta'}$. Also define $\Gamma_R^{-,\delta'}$ as $\Gamma_R^-\setminus(S_R^{+,\delta'}\cup S_R^{-,\delta'})$. On observe d'abord que sur $\{z\in\mathbb{C}:\mathfrak{Re}(z)<0\}$, on a

$$e^{Tz}=e^{\mathfrak{Re}(z)T}\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ainsi, pour tout R fixé, pour tout $\delta'\in(0,\delta]$, comme $\mathcal{L}f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)$ est indépendant de T, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^{-,\delta'}}\mathcal{L}f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Since $|e^{Tz}|<1$ when $\mathfrak{Re}<0$, for any $\delta'\in(0,\delta]$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{S_R^{+,\delta'}}\mathcal{L}f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\leq\frac{\arcsin(\delta'/R)R}{2\pi}\frac{2}{R}\sup_{z\in S_R^{+,\delta}}|\mathcal{L}f(z)|\leq C\delta',\tag{1}$$

where the constant C may depend on R but does not depend on δ' or T, and the same bound holds if we substitute $S_R^{+,\delta'}$ with $S_R^{-,\delta'}$. Therefore for any $\delta'\in(0,\delta]$,

$$\limsup_{T\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{S_R^{+,\delta}}\mathcal{L}f(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\leq 2C\delta'.\tag{2}$$

Hence the limit exists and equals zero.

(5) Pour tout $\epsilon>0$, pour $R\geq M/\epsilon$, on a que les integrales dans les points (2) et (3) sont bornées par ϵ indépendamment de T. Par (4) on a

$$\limsup_{T\to+\infty}|\mathcal{L}_T f(0)-\mathcal{L}f(0)|\leq\epsilon,$$

et donc

$$\limsup_{T\to+\infty}|\mathcal{L}_T f(0)-\mathcal{L}f(0)|=0,$$

ce qui nous donne

$$\mathcal{L}_T f(0)\underset{T\to\infty}{\longrightarrow}\mathcal{L}f(0),$$

comme désiré.

$\square$

Exercice 2. Soit $\mathbb{H}_1 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 1\}$ et soit $\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$.

(1) Montrer que pour tout $b, \epsilon > 0$ on a
$$\Phi(1+2ib+\epsilon) + \Phi(1-2ib+\epsilon) + 4\Phi(1+ib+\epsilon) + 4\Phi(1-ib+\epsilon) + 6\Phi(1+\epsilon) \geq 0.$$

(2) Calculer la limite
$$\lim_{\epsilon \to 0+} \epsilon \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4$$
et déduire que ζ n'a aucun zéro sur $\overline{\mathbb{H}}_1$.

Indice : on peut utiliser le lemme 265 du cours.

Démonstration.

(1) Comme pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a^{-ib} = \overline{a^{ib}}$, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $b > 0$, on a
$$\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4 > 0 \ .$$

Si on développe
$$\left(p^{ib/2} + p^{-ib/2}\right)^4 = p^{2ib} + p^{-2ib} + 4p^{ib} + 4p^{-ib} + 6,$$
et ainsi
$$\sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4 = \Phi\left(1+2ib+\epsilon\right) + \Phi\left(1-2ib+\epsilon\right) + 4\Phi\left(1+ib+\epsilon\right) + 4\Phi\left(1-ib+\epsilon\right) + 6\Phi\left(1+\epsilon\right) > 0$$
pour tout $b > 0, \epsilon > 0$.

(2) Par le lemme 265 du cours, on sait que sur $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, les pôles de Φ sont tous simples et correspondent aux zéros et à l'unique pôle (simple) de ζ. En particulier, si on suppose que $1 + ib$ est un zéro d'ordre m de la fonction ζ, alors le résidu de Φ en $1 + ib$ (et aussi en $1 - ib$ parce que $\Phi(\bar{z}) = \bar{\Phi}(z)$) est $-m$ et on a alors
$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ >}} \epsilon \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{p^{ib/2}} + \frac{1}{p^{-ib/2}} \right)^4 \\
= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \left(\Phi\left(1+2ib+\epsilon\right) + \Phi\left(1-2ib+\epsilon\right) + 4\Phi\left(1+ib+\epsilon\right) + 4\Phi\left(1-ib+\epsilon\right) + 6\Phi\left(1+\epsilon\right)\right) \\
= 6\text{res}\left(\Phi, 1\right) + 4\text{res}\left(\Phi, 1+ib\right) + 4\text{res}\left(\Phi, 1-ib\right) + \text{res}\left(\Phi, 1+2ib\right) + \text{res}\left(\Phi, 1-2ib\right) \\
= 6 - 4m - 4m + \text{res}\left(\Phi, 1+2ib\right) + \text{res}\left(\Phi, 1-2ib\right) \\
\leq 6 - 8m
\end{aligned}$$
où on a utilisé que les résidus de Φ en $\pm 2ib$ étaient nuls ou négatifs (toujours par le lemme 265), ce qui force $m = 0$, et donc $1 + ib$ ne peut être un zéro de ζ, pour tout $b \in \mathbb{R}$. Ainsi, ζ n'a aucun zéro sur la droite $\partial\mathbb{H}_1$.

Sur $\mathbb{H}_1$, on peut voir que Φ est holomorphe en utilisant sa définition (voir remarque 258 dans le cours). Le lemme 265 permet alors de déduire que ζ n'a aucun zéro sur $\mathbb{H}_1$.

$\square$