Série 13

Exercice 1. On dit qu'un champ vectoriel $Y : \Omega \to \mathbb{R}^3$ a un potentiel vecteur s'il existe un champ vectoriel $\mathcal{C}^1$ $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{rot}X = Y$.

(1) Montrer que si Y est $\mathcal{C}^1$ et a un potentiel vecteur X, on a $\mathrm{div}Y = 0$ et alors pour tout champ scalaire $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $X + \nabla f$ est aussi un potentiel vecteur pour Y.

(2) (difficile, pour réfléchir) Si $Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ est $\mathcal{C}^1$ avec $\mathrm{div}Y = 0$, sous quelles conditions sur Ω le champ Y a-t-il un potentiel vecteur ?

Exercice 2. Soit $s \in \mathbb{R}$ et soit $X : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^d$, défini par

$$X(u) = \frac{u}{\|u\|^s}.$$

Déterminer pour quel s on a $\mathrm{div}X(u) = 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 3. En utilisant le théorème de divergence montrer que pour $n = 2, 3$ on a

$$\mathrm{Aire}(S^{n-1}) = n\mathrm{Vol}(B^n(1)).$$

Exercice 4. Trouvez un champ de vecteurs tangent à la sphère S^n pour n impair, c'est-à-dire tel que $X(u)\cdot u = 0$ pour tout $u \in S^n$, et t.q. $X(u)$ n'est jamais 0.

Exercice 5.

(1) Soit ∂D une courbe plane simple, positivement orientée et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, soit D le compact du plan délimité par ∂D. Montrer que

$$\mathrm{Aire}(D) = \oint_{\partial D} x\, dy.$$

(2) Soit D un polygone avec n sommets $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n$ marqués dans le sens antihoraire. Montrer que

$$\mathrm{Aire}(D) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.(Facteur intégrant) Soit $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et soit l'équation différentielle

$$F_2(x, u(x))u'(x) + F_1(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer qu'il existe $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (avec $W(x, y) \neq 0$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$) tel que le champ de vecteurs

$$(WF_1, WF_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dérive d'un potentiel Φ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si chaque solution $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = u(x)$ de l'équation différentielle est donnée, sous forme impicite, par

$$\Phi(x, u(x)) = \textit{ constante}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) En déduire, sous forme implicite, une solution de

$$4x\sin(xu(x)) + u(x)(x^2 + 1)\cos(xu(x)) + u'(x)((x^2 + 1)x\cos(xu(x)) = 0.$$