Corrigé 11

Exercice 1. Montrer que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

converge normalement sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ et (en dérivant par rapport à z) que

$$\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{\tan\pi z}.$$

Démonstration. Pour démontrer la convergence normale (locale) de

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

on procède comme dans la Proposition 306. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Il existe alors $m,M\in\mathbb{N}$ tel que z se trouve dans la bande $[m,M]\times i\mathbb{R}$. Finalement, on considère une petite boule fermée autour de z qui reste compactement contenue dans la bande (afin de montrer la définition que vous avez vu en cours de convergence normale, finalement la taille de cette petite boule n'aura que peu d'importance).

On coupe alors la somme en trois. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n<m}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,m\leq n\leq M}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n>M}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

La somme du milieu a un nombre fini de termes et donc ne pose aucun problème pour établir la convergence. La convergence de la première somme se montre comme celle de la dernière, on va donc se concentrer sur celle-ci.

On va d'abord mettre les termes au même dénominateur et on aura

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n>M}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=z\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n>M}\frac{1}{(z-n)n}.$$

Maintenant, pour z dans la bande choisie, on a

$$|z-n|\geq|M-n|=n-M.$$

Ainsi, on a que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n>M}\frac{1}{(z-n)n}\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n>M}\frac{1}{(n-M)n}\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}^*,n>M}\frac{1}{(n-M)^2}$$
$$\leq\sum_{n>0}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Pour la seconde partie, notons

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right).$$

f est donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui a un pôle simple en chaque entier. On calcule sa dérivée comme la série des dérivées terme à terme :

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2}=-\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2=\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\tan\pi z}\right).$$

Donc la fonction $f(z)-\frac{\pi}{\tan\pi z}$ est constante. Puisque f et $\frac{\pi}{\tan\pi z}$ sont impaires, la différence l'est également et on en déduit que la constante est nulle. □

Exercice 2. Soient $T_1,T_2\in\mathbb{C}^*$ tels que $\frac{T_1}{T_2}\notin\mathbb{R}$. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe et elliptique (ou doublement périodique), c'est-à-dire

$$f(z+kT_1+jT_2)=f(z)\qquad\forall k,j\in\mathbb{Z}.$$

Montrer que f est constante.

Démonstration. Si f est holomorphe bi-périodique, on a

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = \max_{z\in\{tT_1+sT_2\ :\ t,s\in[0,1]\}} |f(z)| < +\infty.$$

Ainsi f est entière et bornée, donc constante par le théorème de Liouville. □

Exercice 3. Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{R}$ et soit $\Lambda = \Lambda_{T_1,T_2} = \{k_1T_1 + k_2T_2\ : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$.

— Montrer que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|^3} < +\infty$$

— Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, montrer que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

est uniformément convergente sur $\overline{D}(0,R) \setminus \Lambda$, pour tout $R > 0$;

— En calculant sa dérivée, montrer que la fonction de Weierstrass

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

est bi-périodique.

— Montrer que $(\wp'_\Lambda(z))^2 = 4\wp^3_\Lambda(z) - g_2\wp_\Lambda(z) - g_3$ avec

$$g_2 = 60 \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Démonstration.

(1) Si on regarde $A_n = (D(0,n+1) \setminus D(0,n))$, on a $\mathcal{O}(n)$ points de Λ dans cet anneau, et

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\cap A_n} \frac{1}{|\lambda|^3} = \mathcal{O}\left(\frac{n}{n^3}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on somme sur tous les $n \geq 0$, on arrive donc à une somme convergente.

(2) Pour tout $z \in D(0,R)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D(0,2R)$, on a $\left|2 - \frac{z}{\lambda}\right| \leq \frac{5}{2}$ et $\left|1 - \frac{z}{\lambda}\right| \geq \frac{1}{2}$, et donc

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right| = \left|\frac{\lambda^2 - (z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| = \left|\frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| = \frac{|z\left(2-\frac{z}{\lambda}\right)|}{|\lambda|^3|1-\frac{z}{\lambda}|^2} \leq 10\frac{R}{|\lambda|^3}$$

donc la somme

$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus D(0,2R)} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

converge uniformément sur $\overline{D}(0,R) \setminus \Lambda$. On a un nombre fini de termes correspondant à $\lambda \in D(0,2R)$, donc ils n'affectent pas la convergence.

(3) La dérivée de $\wp_\Lambda$ est obtenue en dérivant terme à terme :

$$\wp'_\Lambda(z) = -2\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$$

et on a que $\wp'_\Lambda$ est bi-périodique. Pour tout $\mu \in \Lambda$,

$$\frac{d}{dz}(\wp_\Lambda(z+\mu) - \wp_\Lambda(z)) = \wp'_\Lambda(z+\mu) - \wp'_\Lambda(z) = 0.$$

Il suit que $z \mapsto \wp_\Lambda(z+\mu) - \wp_\Lambda(z)$ est constante, et on peut voir que cette constante est nulle en prenant $z = -\frac{\mu}{2}$ et en utilisant que $\wp_\Lambda$ est une fonction paire (en fait on démontre ceci en deux temps, en prenant une fois $\mu = T_1$ une fois $\mu = T_2$ puis en appliquant le résultat successivement pour un $\mu \in \Lambda$ quelconque).

(4) Le développement de $\wp_\Lambda$ a la forme

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \dots$$

parce que $\wp$ est paire et pour $g(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$ on a $g(0) = 0$. Alors, en dérivant terme à terme, on a :

$$b_2 = 3 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^4} \qquad b_4 = 5 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}$$

et donc

$$\begin{aligned} \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2b_2 z + 4b_4 z^3 + \dots, \\ (\wp'(z))^2 &= \frac{4}{z^6} - 8\frac{b_2}{z^2} - 16b_4 + \dots, \\ (\wp(z))^3 &= \frac{1}{z^6} + 3\frac{b_2}{z^2} + 3b_2 z^2 + \dots. \end{aligned}$$

On a ainsi que

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp(z)^3 + 20 b_2 \wp(z) + 28 b_4$$

est holomorphe au voisinage de 0 et nulle en 0. Mais elle est bi-périodique, donc elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donc constante, et donc, enfin, nulle.

$\square$