Série 11

Exercice 1. Montrer que la série
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$
converge normalement sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ et (en dérivant par rapport à z) que
$$\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{\tan \pi z}.$$

Exercice 2. Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et elliptique (ou doublement périodique), c'est-à-dire
$$f(z + kT_1 + jT_2) = f(z) \qquad \forall k, j \in \mathbb{Z}.$$
Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{R}$ et soit $\Lambda = \Lambda_{T_1,T_2} = \{k_1T_1 + k_2T_2 \ : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$.

— Montrer que
$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{|\lambda|^3}<+\infty$$

— Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, montrer que
$$\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$
est uniformément convergente sur $\overline{D}(0, R) \setminus \Lambda$, pour tout $R > 0$;

— En calculant sa dérivée, montrer que la fonction de Weierstrass
$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$
est bi-périodique.

— Montrer que $(\wp'_\Lambda(z))^2 = 4\wp^3_\Lambda(z) - g_2\wp_\Lambda(z) - g_3$ avec
$$g_2 = 60\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda^4}$$
$$g_3 = 140\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda^6}.$$