

Politechnika Gdańsk
Wydział Elektroniki Telekomunikacji i Informatyki

**Analiza i Porównanie Metod Aproksymacji
Profilu Wysokościowego**

Kacper Doga s198020

Metody Numeryczne
Projekt 3

Spis treści

1 Wstęp	2
1.1 Interpolacja wielomianowa Lagrange'a	2
1.2 Interpolacja funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia	2
2 Opis danych	3
2.1 Hel Yeah - trasa z licznymi wahaniem	3
2.2 Spacerniak Gdańsk - trasa prawie płaska	3
3 Interpolacja wielomianowa Lagrange'a	4
3.1 Hel Yeah: trasa z licznymi wahaniem	4
3.2 Spacerniak Gdańsk: trasa płaska	5
4 Interpolacja funkcjami sklejonymi	6
4.1 Hel Yeah: trasa z licznymi wahaniem	7
4.2 Spacerniak Gdańsk: trasa płaska	8
5 Wpływ rozmieszczenia węzłów - węzły Chebyshev'a	8
5.1 Hel Yeah: trasa z licznymi wahaniem	9
5.2 Spacerniak Gdańsk: trasa płaska	12
6 Podsumowanie	14
6.1 Porównanie metod interpolacji	14
6.2 Wpływ charakteru trasy	15
6.3 Wpływ liczby węzłów	15
6.4 Wpływ rozmieszczenia węzłów	15

1 Wstęp

Profil wysokościowy trasy przedstawia zmiany wysokości terenu w zależności od odległości od punktu początkowego. W niniejszym projekcie zastosowano dwie metody interpolacyjne do aproksymacji profili wysokościowych rzeczywistych tras: wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz funkcje sklejane trzeciego stopnia. Celem jest analiza przydatności tych metod w zależności od rodzaju trasy, liczby i rozmieszczenia węzłów oraz dokładności interpolacji.

W celu sprawdzenia wpływu rozmieszczenia węzłów na jakość interpolacji zastosowane zostały węzły Chebyshev'a, które były tematem analizy dodatkowej w porównaniu do równomiernego rozłożenia węzłów. Węzły Chebyshev'a na przedziale $[a, b]$ można obliczyć ze wzoru:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2k}\pi\right), k = 1, \dots, n$$

1.1 Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

Metoda wykorzystująca wielomian stopnia $n-1$ dla n punktów węzłowych. Wielomian ten przechodzi dokładnie przez wszystkie punkty węzłowe, jednak może wykazywać niestabilność dla dużej liczby węzłów - zjawisko Rungego.

Baza Lagrange'a:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Wzór na wielomian Lagrange'a:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

W celu poprawy stabilności numerycznej obliczeń, przed wyznaczeniem wielomianu interpolacyjnego dziedzina funkcji zostaje przekształcona do przedziału $[-1,1]$ za pomocą transformacji liniowej.

1.2 Interpolacja funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia

Metoda łącząca wielomiany trzeciego stopnia w każdym przedziale między węzłami. Zapewnia ciągłość funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w węzłach, co gwarantuje gładkość interpolacji.

Postać funkcji sklejanej trzeciego stopnia na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i(x_i) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Do znalezienia współczynników stosowane jest rozwiązywanie układu równań liniowych, zbudowanych na podstawie warunków ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej funkcji sklejanej w każdym z punktów.

Metoda ta jest zdecydowanie bardziej skomplikowana w implementacji, jednak zastosowanie jej skutkuje uzyskaniem lepszych wyników bez efektu Rungego.

Układ równań do rozwiązywania dla metody funkcji sklejanych można zapisać jako:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n - 1 \text{ - Wartość funkcji w węzłach}$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n - 1 \text{ - Ciągłość funkcji w węzłach}$$

$$S_0''(x_0) = 0 \text{ - Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie początkowym}$$

$$S_{n-1}''(x_n) = 0 \text{ - Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie końcowym}$$

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1 \text{ - Zerowanie pierwszej pochodnej w punktach}$$

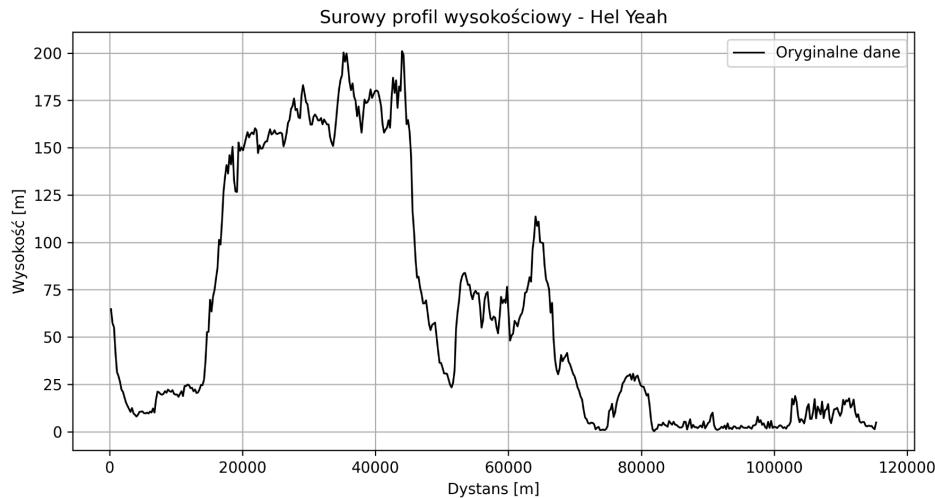
$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1 \text{ - Zerowanie drugiej pochodnej w punktach}$$

2 Opis danych

Dane profilu wysokościowego pobrano z archiwum załączonego do projektu. W celu weryfikacji działania metod interpolacji w różnych środowiskach wybrano dwie trasy o odróżniającym się charakterze.

2.1 Hel Yeah - trasa z licznymi wahaniami

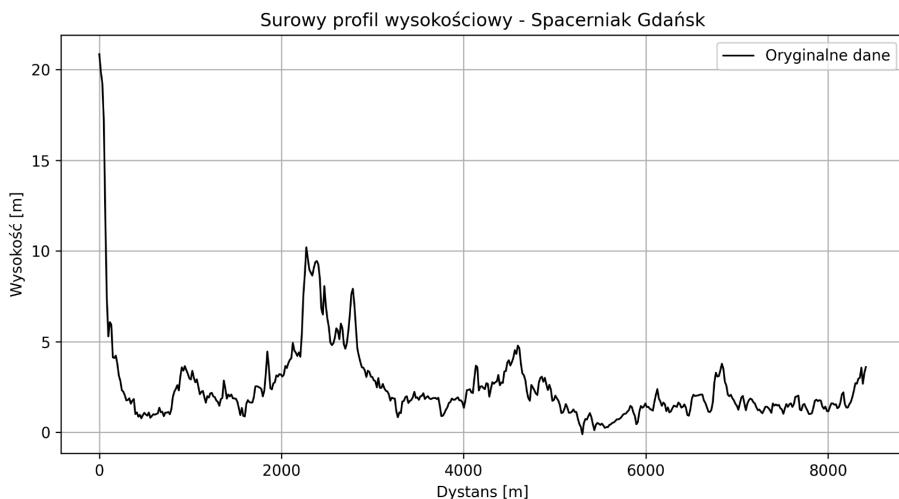
- a. Dystans 115316 metrów
- b. Zakres wysokości 0.2 - 201.0 metrów
- c. 511 punktów pomiarowych



(Rysunek 1. Profil wysokościowy Hel Yeah)

2.2 Spacerniak Gdańsk - trasa prawie płaska

- a. Dystans 8415 metrów
- b. Zakres wysokości -0.1 - 20.9 metrów
- c. 511 punktów pomiarowych

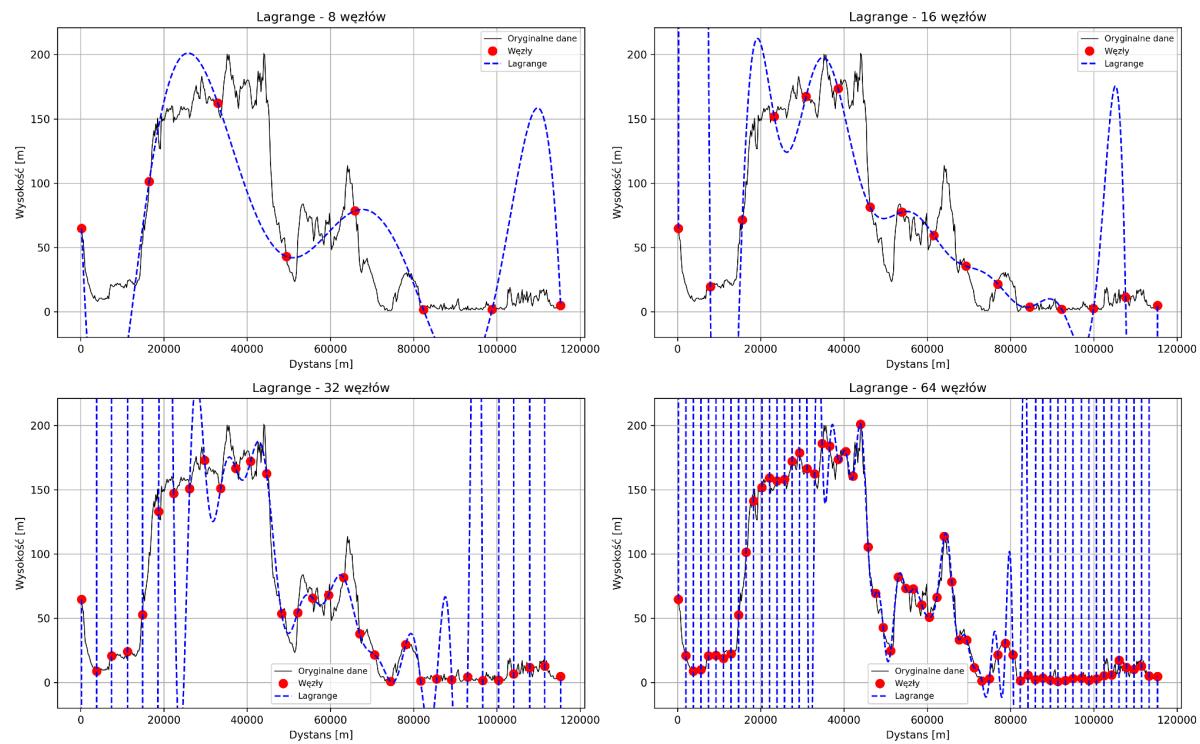


(Rysunek 2. Profil wysokościowy Spacerniak Gdańsk)

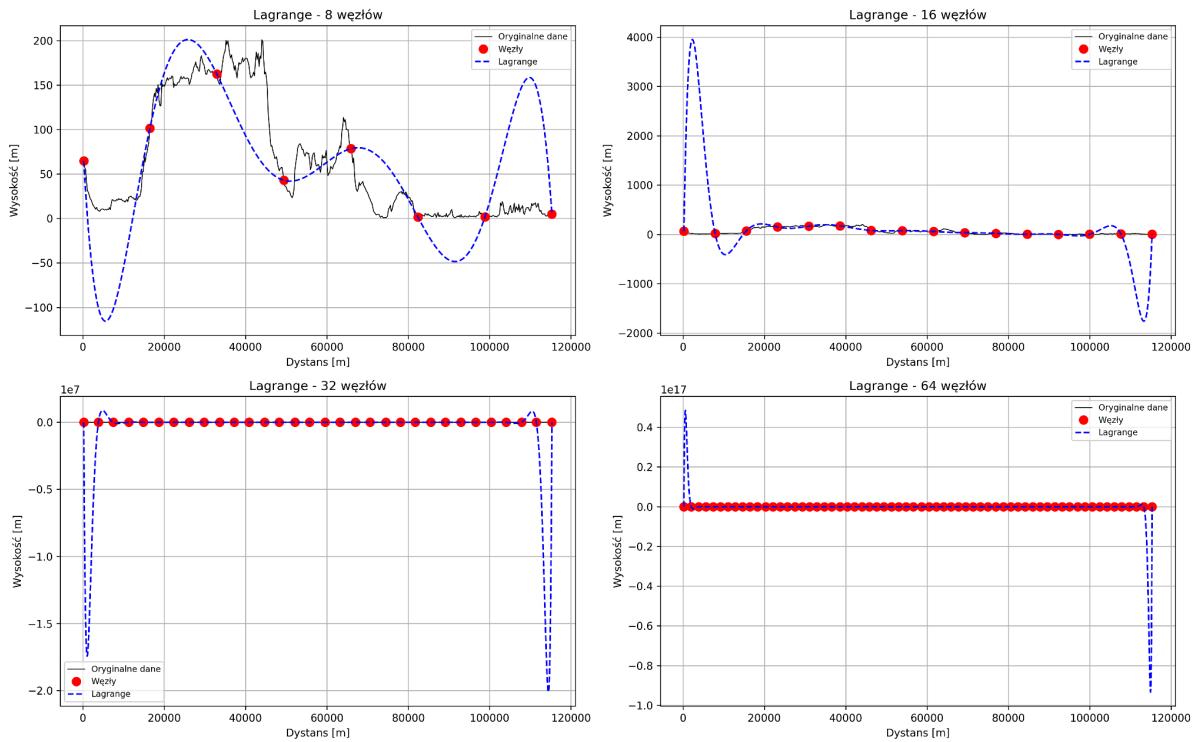
3 Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

Przeprowadzono interpolację dla różnej liczby węzłów równomiernie rozłożonych.

3.1 Hel Yeah: trasa z licznymi wahaniami



(Rysunek 4. Interpolacja Lagrange'a dla 8, 16, 32 i 64 węzłów z przybliżeniem na wartości oryginalne)



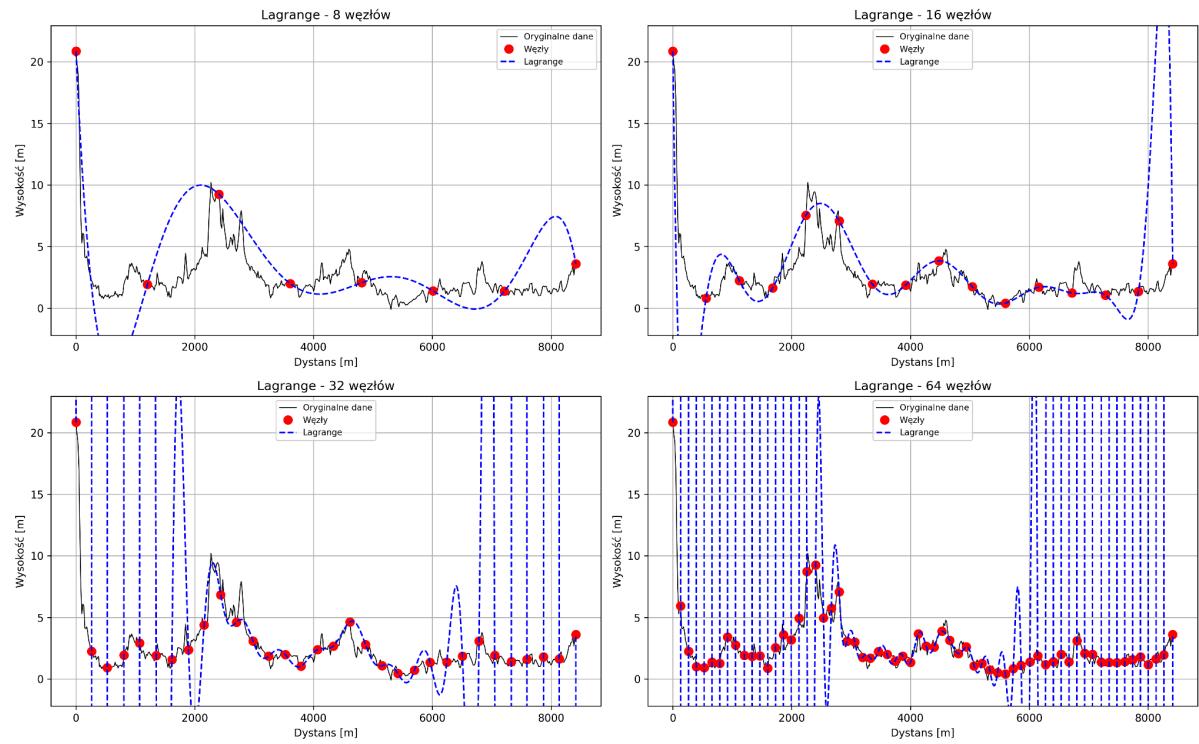
(Rysunek 4. Interpolacja Lagrange'a dla 8, 16, 32 i 64 węzłów bez przybliżenia na wartości oryginalne)

Obserwacje:

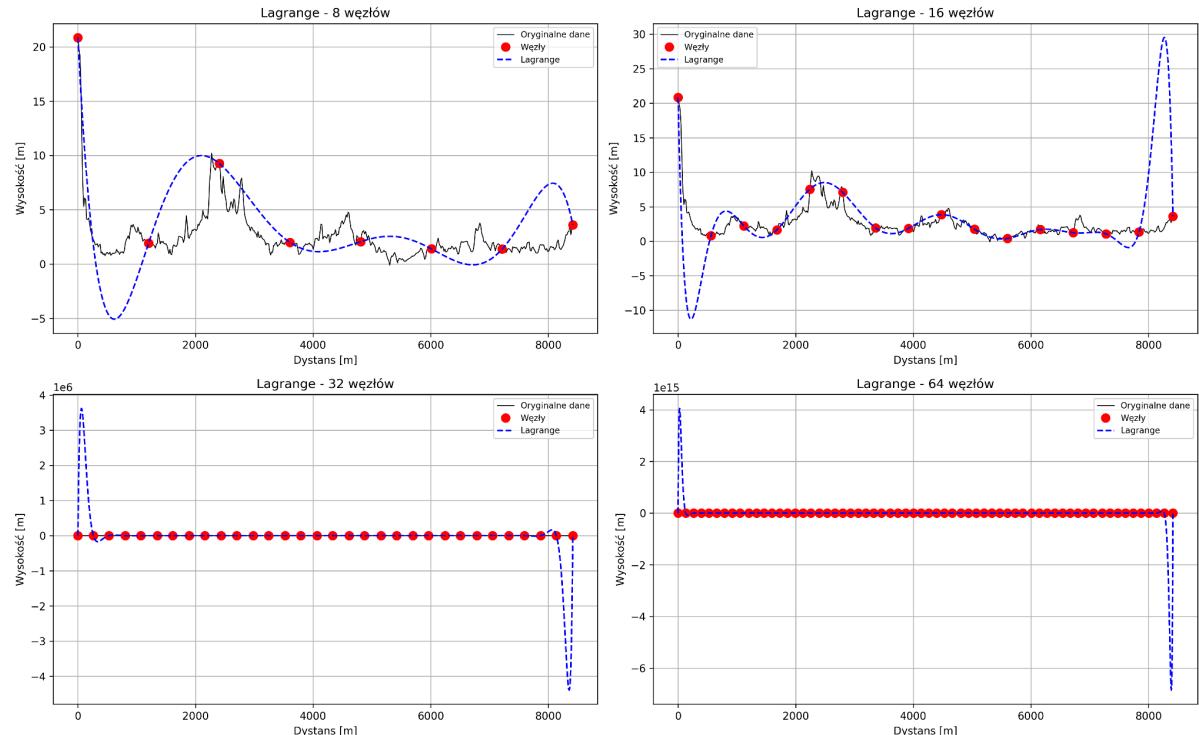
Interpolacja wielomianowa Lagrange'a dla trasy o złożonym profilu wykazuje znaczące ograniczenia. Dla małej liczby węzłów interpolacja jest zbyt gruba i nie oddaje charakteru trasy, jednak zwiększając ich liczbę wyraźnie wzrasta widoczność zjawiska Runego, czyli oscylacja na krańcach funkcji. Mimo zastosowania transformacji dziedziny do przedziału [-1,1], która poprawia stabilność numeryczną obliczeń, zjawisko Runego nadal pozostaje widoczne dla dużej liczby węzłów równomiernie rozłożonych

Przy dużej liczbie węzłów interpolacja wykazuje podobieństwo wyłącznie na środku swoich wartości, brzegowe przybliżenia nie nadają się do późniejszej analizy przez zbyt duży negatywny wpływ oscylacji na błąd.

3.2 Spacerniak Gdańsk: trasa płaska



(Rysunek 5. Interpolacja Lagrange'a dla 8, 16, 32 i 64 węzłów z przybliżeniem na wartości oryginalne)



(Rysunek 6. Interpolacja Lagrange'a dla 8, 16, 32 i 64 węzłów, bez przybliżenia na wartości oryginalne)

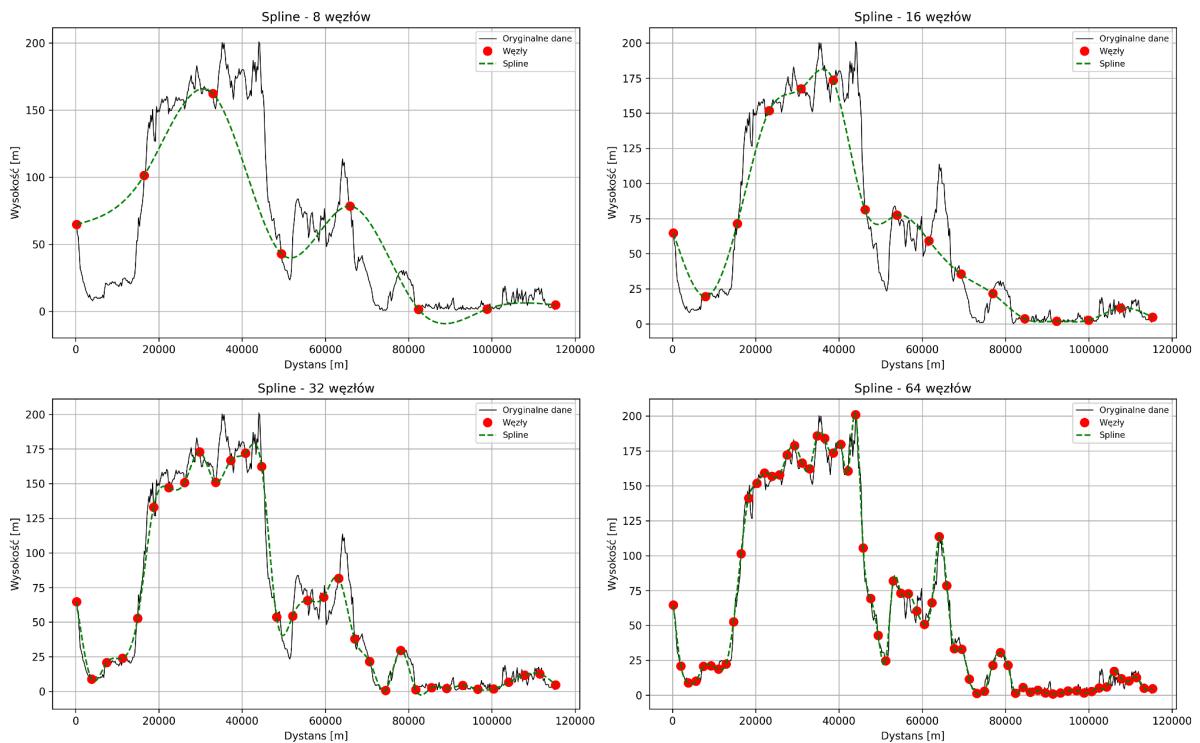
Obserwacje:

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a dla trasy o płaskim profilu wykazuje satysfakcjonujące przybliżenie już dla 16 węzłów. Ciągle widoczne jest zjawisko Rungego, które widocznie psuje pogląd na daną metodę interpolacji z rozkładem równomiernym węzłów. Mimo zastosowania transformacji dziedziny do przedziału $[-1,1]$, która poprawia stabilność numeryczną obliczeń, zjawisko Rungego nadal pozostaje widoczne dla dużej liczby węzłów równomiernie rozłożonych

4 Interpolacja funkcjami sklejonymi

Przeprowadzono interpolację dla różnej liczby węzłów równomiernie rozłożonych, podmiotem analizy jest wpływ liczby węzłów na podobieństwo interpolacji względem wartości oryginalnych.

4.1 Hel Yeah: trasa z licznymi wahaniem



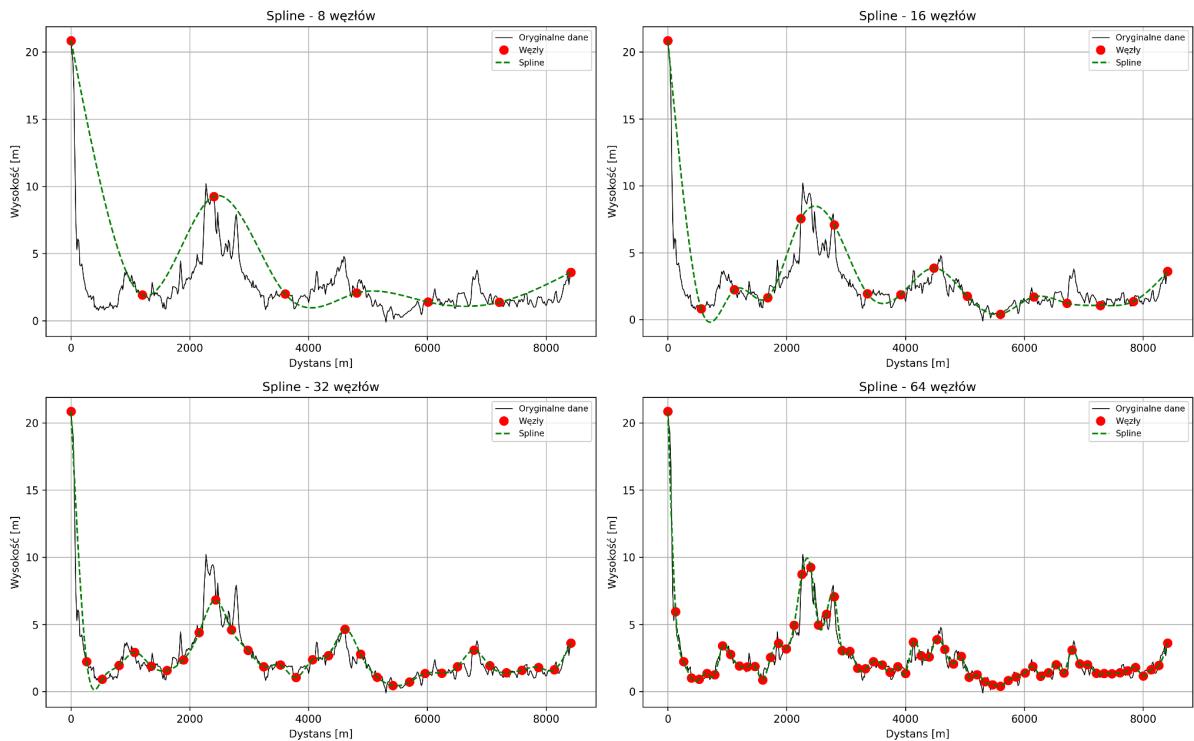
(Rysunek 7. Interpolacja funkcjami sklejonymi dla 8, 16, 32 i 64 węzłów)

Obserwacje:

Interpolacja funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia dla trasy o zróżnicowanym profilu wykazuje się bardzo dobrym pokryciem wartości oryginalnych. Wykonując interpolację od 16 węzłów i więcej, można uznać wartości za akceptowalnie dobre. Na

krańcach nie występuje oscylacja wynikająca z niestabilności. Zwiększenie liczby węzłów wpływa bardzo dobrze na przybliżenia na całej długości funkcji.

4.2 Spacerniak Gdańsk: trasa płaska



(Rysunek 8. Interpolacja funkcjami sklejonymi dla 8, 16, 32 i 64 węzłów)

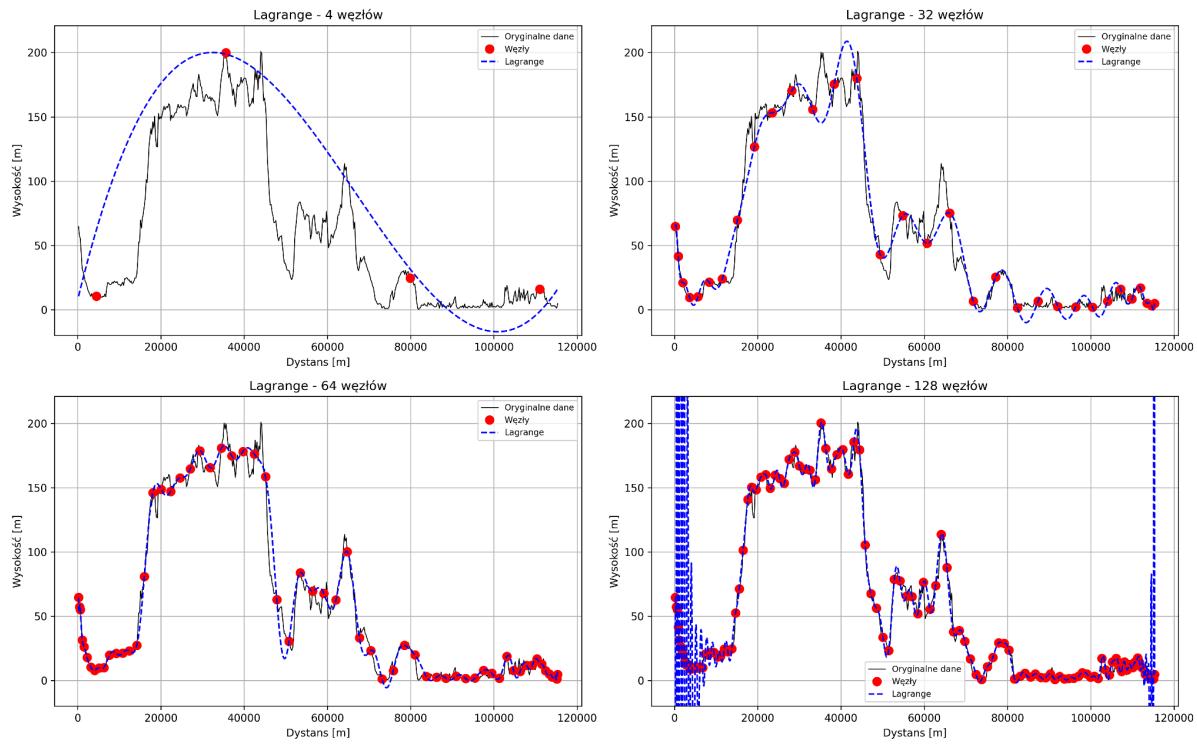
Obserwacje:

Interpolacja funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia dla trasy o płaskim profilu już od 8 węzłów wykazuje ogólny charakter funkcji, kolejno zwiększając liczbę węzłów coraz lepiej wyznaczane jest podobieństwo względem danych oryginalnych. Dla interpolacji na 32 węzłach (Rysunek 8. lewy dolny wykres) widoczna jest niedokładność na wzniесieniu między 2000 a 3000 metrem, wynika z równomiernego rozmieszczenia węzłów.

5 Wpływ rozmieszczenia węzłów - węzły Chebyshev'a

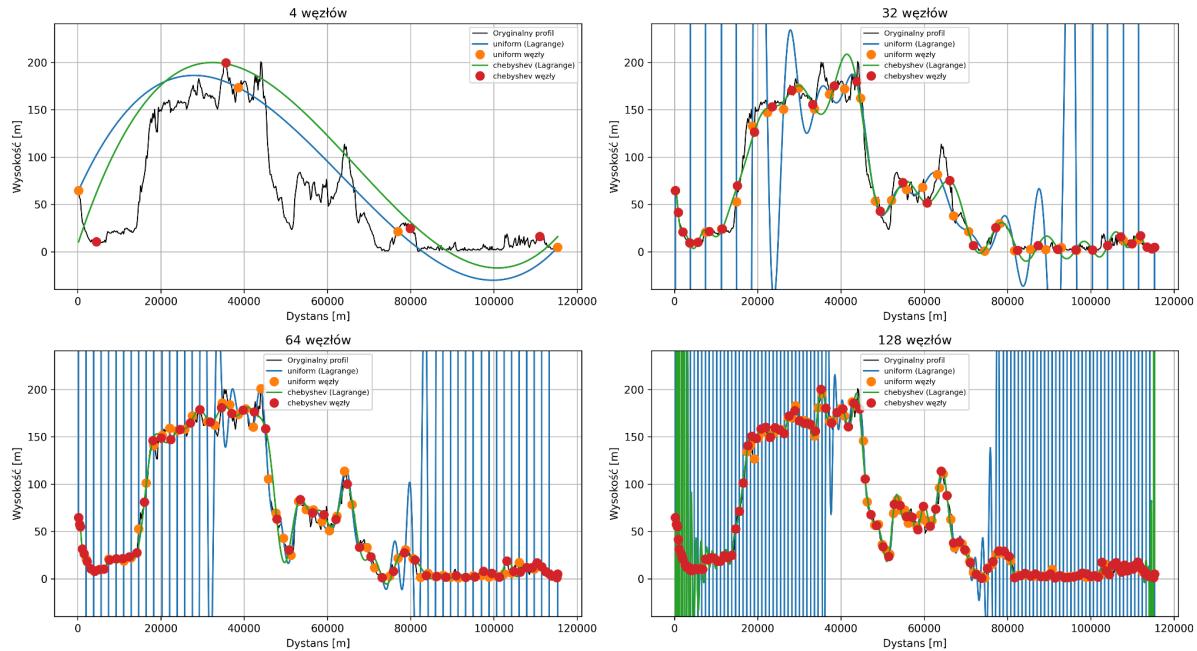
Rozwiązańem słabej dokładności interpolacji metodą Lagrange'a na krańcach funkcji mogą być węzły Chebyshev'a. Opierają się one na założeniu gęstszego rozłożenia węzłów na brzegach, kosztem mniejszego obłożenia bliżej środka. Poniższe wykresy obrazują wykorzystanie omawianych węzłów w kontekście profili zdefiniowanych w punkcie 2.

5.1 Hel Yeah: trasa z licznymi wahaniami

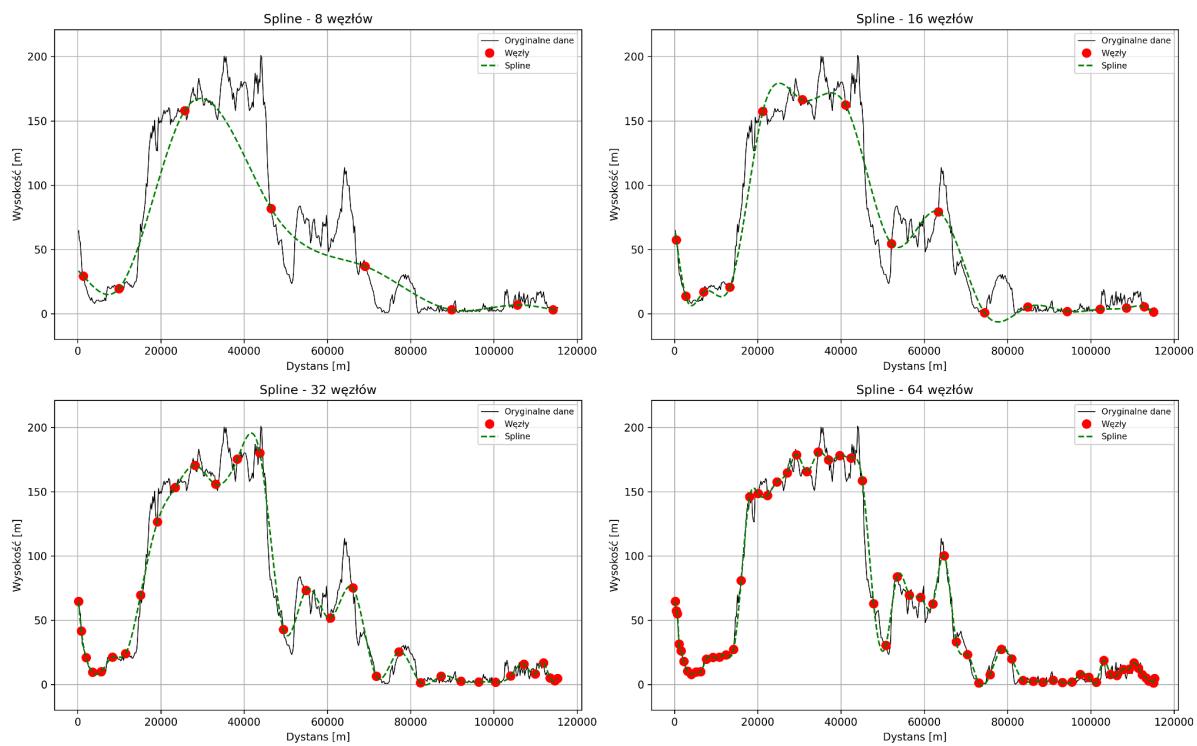


(Rysunek 9. Interpolacja Lagrange'a dla 8, 32, 64 i 128 węzłów Chebyshev'a)

Porównanie interpolacji (Lagrange) – Hel Yeah

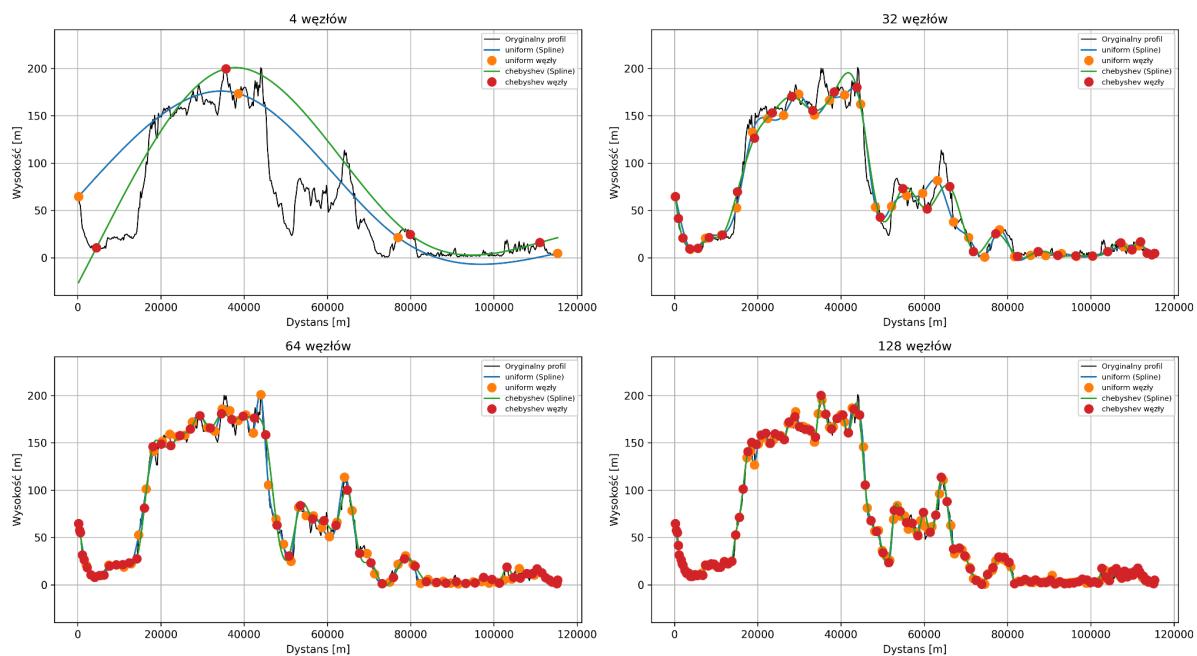


(Rysunek 10. Porównanie interpolacji Lagrange'a dla 8, 32, 64 i 128 węzłów równomiernie rozłożonych oraz węzłów Chebyshev'a)



(Rysunek 11. Interpolacja funkcjami sklejanyimi dla 8, 16, 32 i 64 węzłów Chebyshev'a)

Porównanie interpolacji (Spline) – Hel Yeah

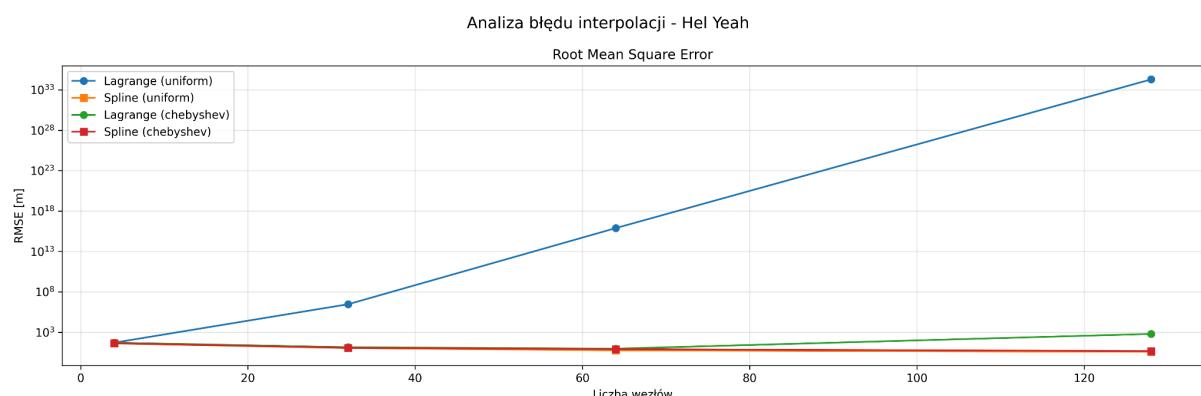


(Rysunek 12. Porównanie interpolacji funkcjami sklejanyimi dla 8, 16, 32 i 64 węzłów równomierne rozłożonych oraz węzłów Chebyshev'a)

Obserwacje wpływu węzłów Chebyshev'a na interpolację:

Na zbiorze danych o zróżnicowanym profilu widać znaczącą poprawę przy użyciu interpolacji wielomianowej Lagrange'a, krańcowa oscylacja (zjawisko Rungego) ustępuje. Od 16 węzłów widoczne jest bardzo dobre przybliżenie wartości oryginalnych, które się ciągle polepsza przy zwiększeniu liczby węzłów.

Dla interpolacji funkcjami sklejonymi różnica jest mniejsza, nie jest widoczny aż tak duży skok jakości przybliżenia. Lepiej widać natomiast charakter funkcji dla mniejszej ilości węzłów, a zwiększając ich ilość przybliżenie jest coraz to lepsze, natomiast nie posiada aż tak drastycznej różnicy błędu jak w metodzie Lagrange'a.



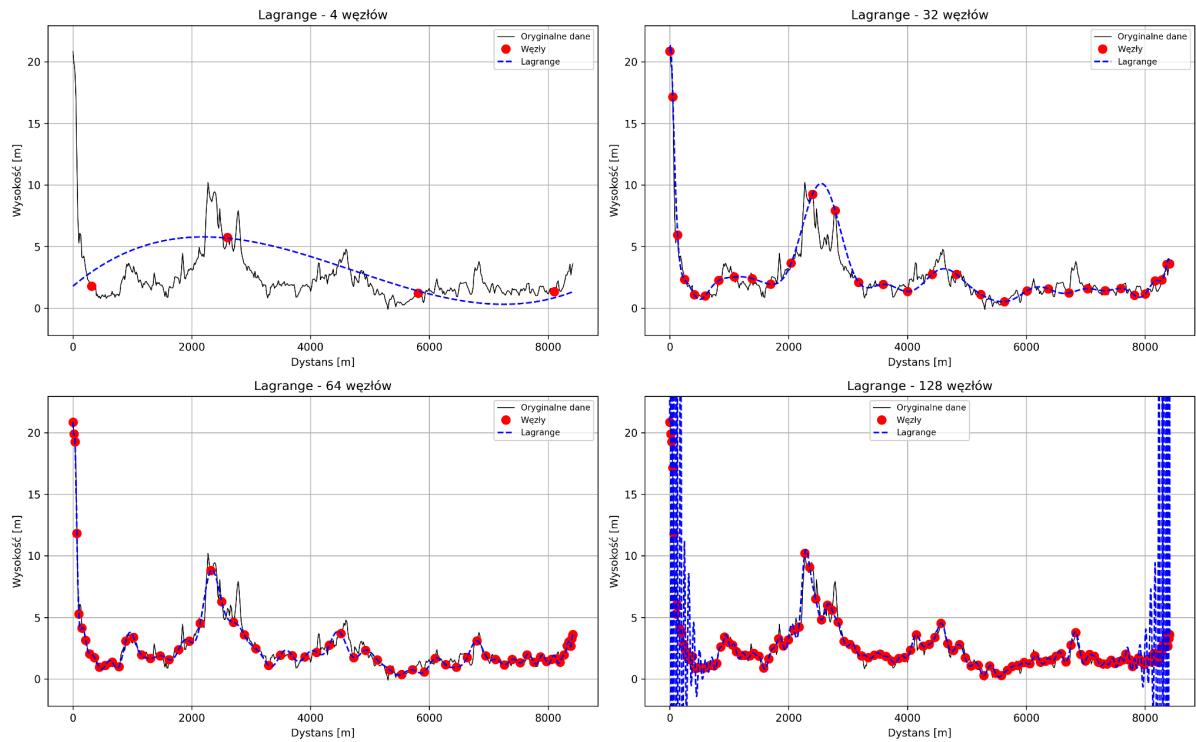
(Rysunek 13. RMSE w zależności od użytej metody interpolacji, rodzaju wyznaczania węzłów oraz liczby wierzchołków)

Obserwacje wpływu węzłów Chebyshev'a w interpolacji na RMSE:

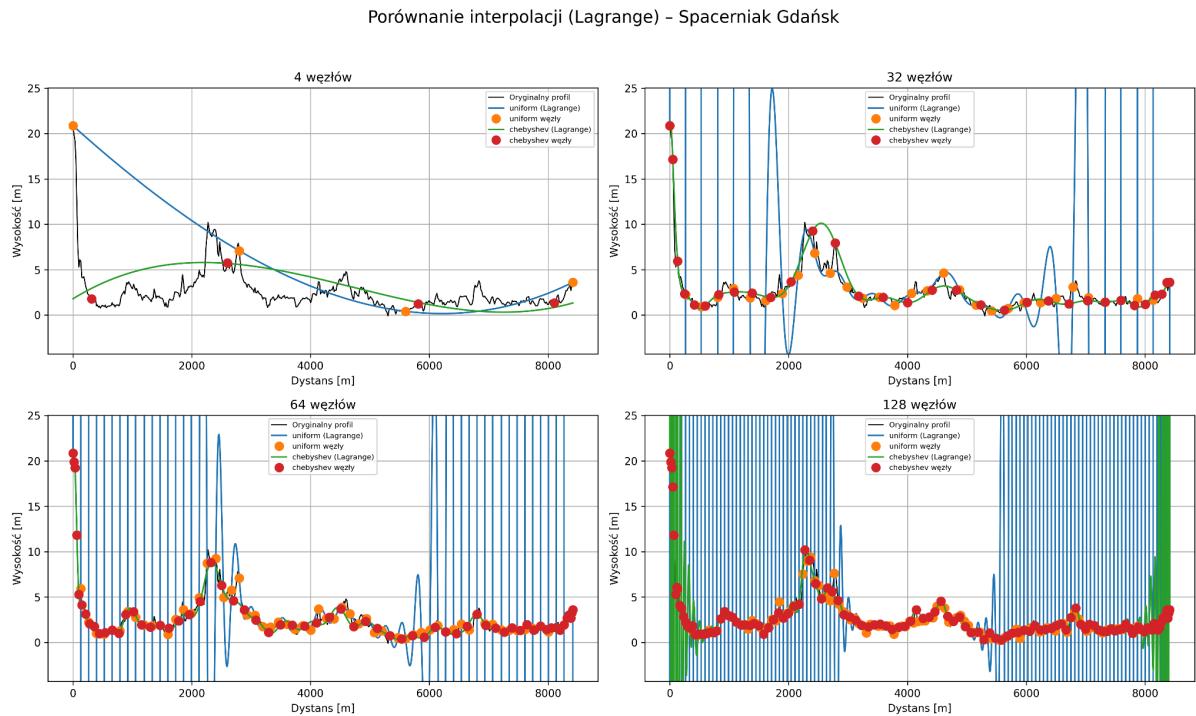
Węzły Chebyshev'a znaczowo zminimalizowały błąd, który występował w wielomianowej interpolacji Lagrange'a, wyeliminowały one zjawisko Rungego, dzięki czemu wartość RMSE spadła bardzo dobrych wartości.

W przypadku interpolacji sklejania funkcji zmiana jest praktycznie niezauważalna, różnica w błędzie między równomiernym rozłożeniem węzłów, a węzłami Chyebshev'a dla wszystkich ilości wierzchołków $RMSE = 10$ metrów.

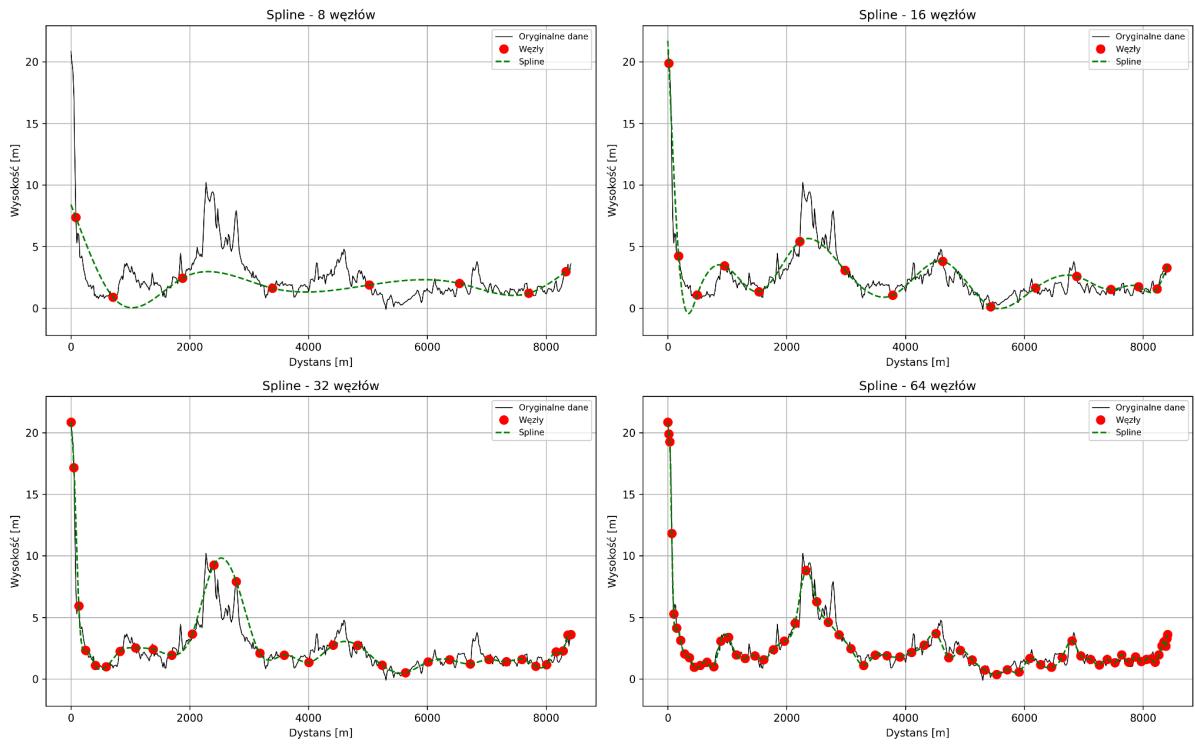
5.2 Spacerniak Gdańsk: trasa płaska



(Rysunek 14. Interpolacja funkcjami sklejanymi dla 8, 32, 64 i 128 węzłów Chebyshev'a)

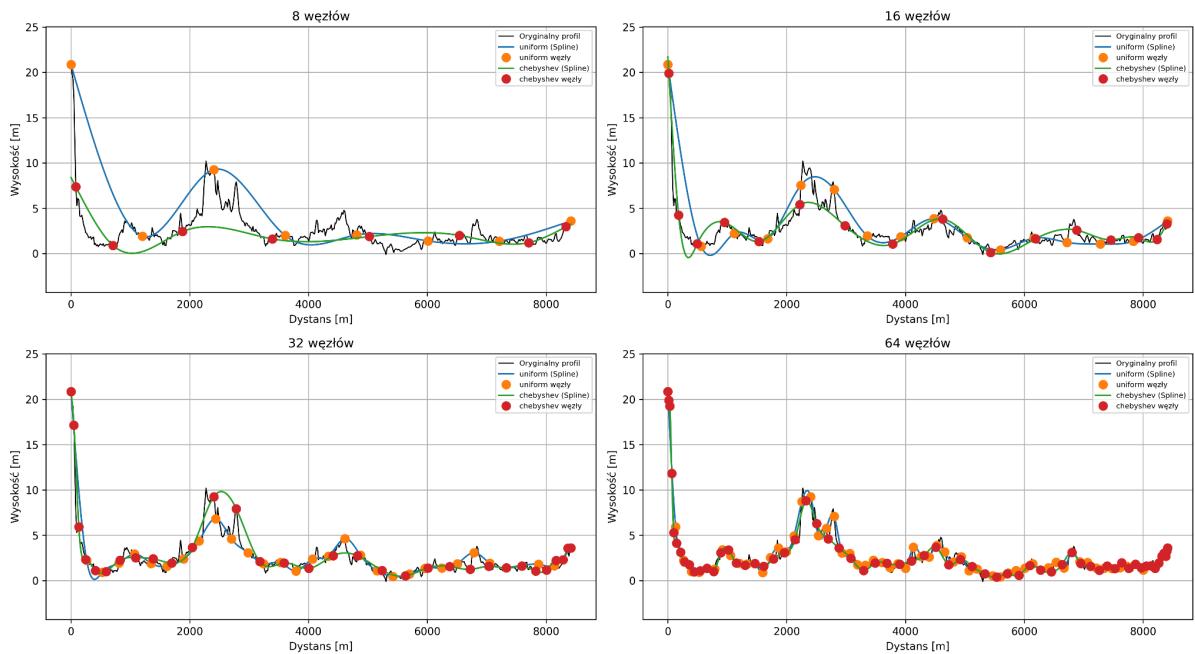


(Rysunek 15. Porównanie interpolacji funkcjami sklejanymi dla 8, 32, 64 i 128 węzłów równomierne rozłożonych oraz węzłów Chebyshev'a)



(Rysunek 16. Interpolacja funkcjami sklejonymi dla 8, 16, 32 i 64 węzłów Chebyshev'a)

Porównanie interpolacji (Spline) – Spacernik Gdańsk



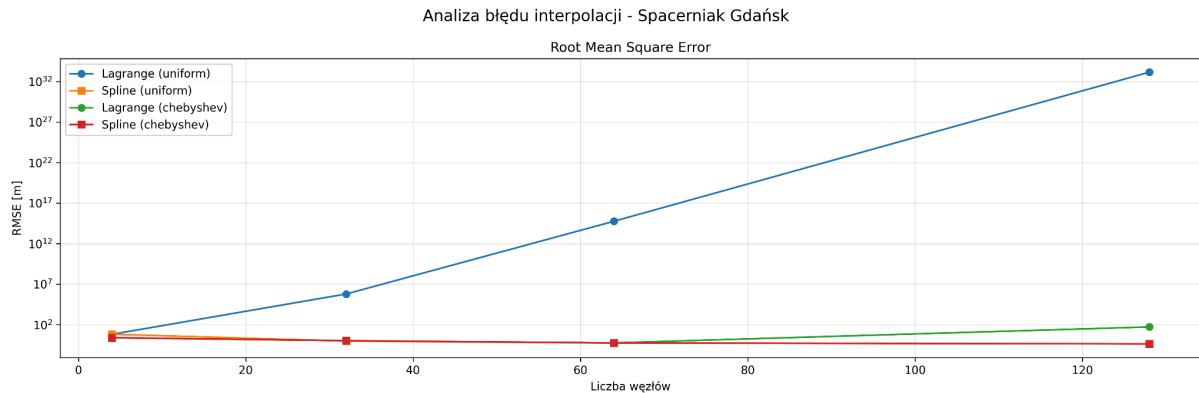
(Rysunek 17. Porównanie interpolacji funkcjami sklejonymi dla 8, 16, 32 i 64 węzłów równomiernie rozłożonych oraz węzłów Chebyshev'a)

Obserwacje wpływu węzłów Chebyshev'a na interpolację:

Na zbiorze danych o zróżnicowanym profilu widać znaczącą poprawę przy użyciu interpolacji wielomianowej Lagrange'a, krańcowa oscylacja (zjawisko Rungego) ustępuje.

Od 16 węzłów widoczne jest bardzo dobre przybliżenie wartości oryginalnych, które się ciągle polepsza przy zwiększeniu liczby węzłów.

Dla interpolacji funkcjami sklejonymi różnicą jest mniejsza, nie jest widoczny aż tak duży skok jakości przybliżenia. Lepiej widać natomiast charakter funkcji dla mniejszej ilości węzłów, a zwiększając ich ilość przybliżenie jest coraz to lepsze, natomiast nie posiada aż tak drastycznej różnicy błędu jak w metodzie Lagrange'a.



(Rysunek 18. RMSE w zależności od użytej metody interpolacji, rodzaju wyznaczania węzłów oraz liczby wierzchołków)

Obserwacje wpływu węzłów Chebyshev'a w interpolacji na RMSE:

Węzły Chebyshev'a znaczco zminimalizowały błąd, który występował w wielomianowej interpolacji Lagrange'a, wyeliminowały one zjawisko Rungego, dzięki czemu wartość RMSE spadła bardzo dobrze wartości.

W przypadku interpolacji sklejania zmiana jest niezauważalna. Błąd z interpolacji wielomianowej Lagrange'a i funkcji sklejanej z węzłami Chebyshev'a, jak i funkcji sklejanej z zastosowaniem węzłów równomiernie rozłożonych wynosi praktycznie tyle samo.

6 Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonej analizy można sformułować następujące wnioski:

6.1 Porównanie metod interpolacji

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a z zastosowaniem transformacji dziedziny do przedziału [-1,1] jest dobrym rozwiązaniem w przypadku wymogu przejścia przez wszystkie węzły. Transformacja poprawia stabilność numeryczną, jednak nie eliminuje całkowicie zjawiska Rungego dla większej liczby węzłów, gdzie jest ono coraz to bardziej zauważalne. Dla płaskich profili radzi sobie nienagannie, natomiast dla zróżnicowanej trasy widoczne są większe błędy.

Interpolacja funkcjami sklejonymi bardzo dobrze odzwierciedla charakter wartości oryginalnych, implementacja jej jest znaczowo cięzsza. Charakteryzuje się bardzo dobrymi interpolacjami niezależnie analizowanego profilu.

6.2 Wpływ charakteru trasy

W przypadku tras płaskich obie metody dobrze określają charakter wartości oryginalnych, funkcje sklejane nie mają znaczącej przewagi dla małej liczby węzłów.

Dla tras o złożonym profilu metody sklejania funkcji radziły sobie znaczaco lepiej, wielomiany Lagrange'a wykazywały niestabilność.

6.3 Wpływ liczby węzłów

Wielomiany Lagrange'a dla liczby węzłów mniejszej niż 32 radzą sobie optymalnie, dla wartości równych i większych oscylacja krańcowa jest zbyt duża, żeby interpolacja mogła służyć do analizy całości dziedziny.

Funkcje sklejane niezależnie od zwiększenia liczby węzłów coraz bardziej zwiększają dokładność względem danych oryginalnych.

6.4 Wpływ rozmieszczenia węzłów

Węzły Chebyshev'a eliminują zjawisko Rungego, dzięki czemu całość dziedziny może podlegać kompleksowej analizie, nie mają one jednak znaczącego wpływu na interpolacje funkcjami sklejonymi, które niezależnie od rozmieszczenia radzą sobie równie dobrze.