Péndulo Invertido

Andrés Vargas

Resumen

Se presenta el modelo físico utilizado en la simulación del péndulo invertido.

La función de Lagrange del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x_1}^2 - mgy_2$$

las restricciones del sistema de acuerdo a la figura 1 son las siguientes:

$$x_2 = x_1 - l\sin\phi \qquad y_2 = l\cos\phi$$

En consecuencia:

$$\dot{x_2} = \dot{x_1} - l\dot{\phi}\cos\phi \qquad \dot{y_2} = -l\dot{\phi}\sin\phi$$

La energía potencial de la base permanece nula, mientras su energía cinética es $K_1 = \frac{1}{2}M(\dot{x_1})^2$, la masa pendular en cada instante, tiene una energía potencial dada por $U_2 = mgl\cos(\phi)$ y una energía cinética $K_2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x_1}^2 - 2\dot{x_1}l\dot{\phi}\cos\phi + (l\dot{\phi})^2\right)$.

La función de Lagrange puede ser reescrita como:

$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x_1}^2 - ml\dot{x_1}\dot{\phi}\cos\phi + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl\cos\phi$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange establecen que:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\right) - \frac{\delta L}{\delta q} = F_q$$

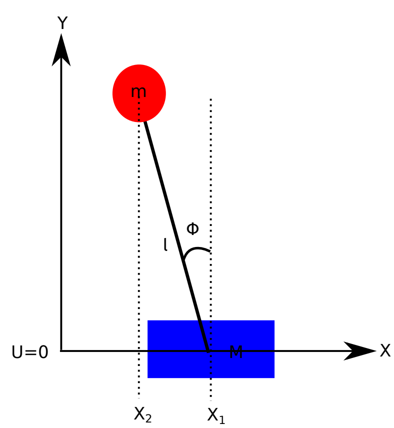

Fig. 1: Esquema Péndulo Invertido

Para nuestro caso particular:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}}\right) - \frac{\delta L}{\delta \phi} = 0 \qquad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x_1}}\right) - \frac{\delta L}{\delta x_1} = F$$

Aplicando las derivadas y simplificando se obtienen las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del sistema:

$$l\ddot{\phi} - \ddot{x_1}\cos\phi - g\sin\phi = 0$$

$$(m+M)\ddot{x_1} - ml\ddot{\phi}\cos\phi + ml\dot{\phi}^2\sin\phi = F$$

Es posible escribir éste sistema de ecuaciones diferenciales como:

$$\begin{pmatrix} l & -\cos\phi \\ -ml\cos\phi & m+M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\sin\phi \\ F - ml\dot{\phi}^2\sin\phi \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} l & -\cos\phi \\ -ml\cos\phi & m+M \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{l(m+M) - lm\cos^2\phi}\begin{pmatrix} m+M & \cos\phi \\ ml\cos\phi & l \end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones se puede reescribir así:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{x_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{l(m+M) - lm\cos^2\phi}\begin{pmatrix} (m+M)g\sin\phi + F\cos\phi - ml\dot{\phi}^2\sin\phi\cos\phi \\ mlg\sin\phi\cos\phi + lF - ml^2\dot{\phi}^2\sin\phi \end{pmatrix}$$