Распараллеливание вычисления интеграла

Варивода Иван Алексеевич, Давыдов Алексей , студенты 4 курса кафедры прикладной кибернетики СПБГУ varivoda_ivan@mail.ru,

Аннотация

Существует огромное количество методов для приближенного вычисления интеграла. Одним из главных требований, предъявляемых к схеме, является скорость вычисления. Раньше математики разрабатывали новые модификации методов, для того, чтобы выиграть хоть немного времени. В наши дни существуют мощные средства для повышения скорости вычисления, например, распараллеливание процеса.

В данной работе рассматривается распараллеливание вычислений интеграла с помощью средств Open MP.

Ключевые слова: *OpenMp, распараллеливание, вычисление кратного интеграла*

Пусть a, b — вещественные числа, где $b > a$, n, N — натуральные числа. Возьмем $H = \frac{b-a}{N}, h = \frac{H}{n}$. Положим $x_k = a + kH, k = 0, 1, \ldots, N$.

Представляя интеграл в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \tag{1}$$

и используя формулу Ньютона-Котеса

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{n} B_k^n f(x_k), \tag{2}$$

где

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k} dt \tag{3}$$

получаем формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \sum_{k=0}^{n} B_k^n \sum_{l=0}^{N} f(x_k^l). \tag{4}$$

Здесь использовано обозначение $x_k^l = a + Hl + hk, k = 0, 1, \ldots, N, l = 0, 1, \ldots, n$. В силу свойства $B_j^n = B_{n-j}^n$ можем переписать (3) при нечетном n в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} B_k^n \sum_{l=0}^{N} (f(x_k^l) + f(x_{n-k}^l)). \tag{5}$$

При четном n имеем

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} B_k^n \sum_{l=0}^{N} (f(x_k^l) + f(x_{n-k}^l)) + HB_{\frac{n}{2}}^n \sum_{l=0}^{N} f(x_{\frac{n}{2}}^l). \quad (6)$$

Из формулы (1) получаем значения коэффициентов B_k^n

$$\text{Для n=4:} \quad B_0^4 = \frac{7}{90} \qquad B_1^4 = \frac{32}{90} \qquad B_2^4 = \frac{12}{90}$$

$$\text{Для n=5:} \quad B_0^5 = \frac{19}{288} \qquad B_1^5 = \frac{75}{288} \qquad B_2^5 = \frac{50}{288}$$

Поэтому для $n = 4$ имеем следующую составную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \left[\frac{7}{90} \sum_{l=0}^{N} (f(x_0^l)+f(x_4^l)) + \frac{32}{90} \sum_{l=0}^{N} (f(x_1^l)+f(x_3^l)) + \frac{12}{90} \sum_{l=0}^{N} (f(x_2^l)+f(x_3^l)) \right], \quad (7)$$

а для $n = 5$ получаем

$$\int_a^b f(x)dx \approx H \left[\frac{19}{288} \sum_{l=0}^{N} (f(x_0^l)+f(x_5^l)) + \frac{75}{288} \sum_{l=0}^{N} (f(x_1^l)+f(x_4^l)) + \frac{50}{288} \sum_{l=0}^{N} (f(x_2^l)+f(x_3^l)) \right]. \quad (8)$$

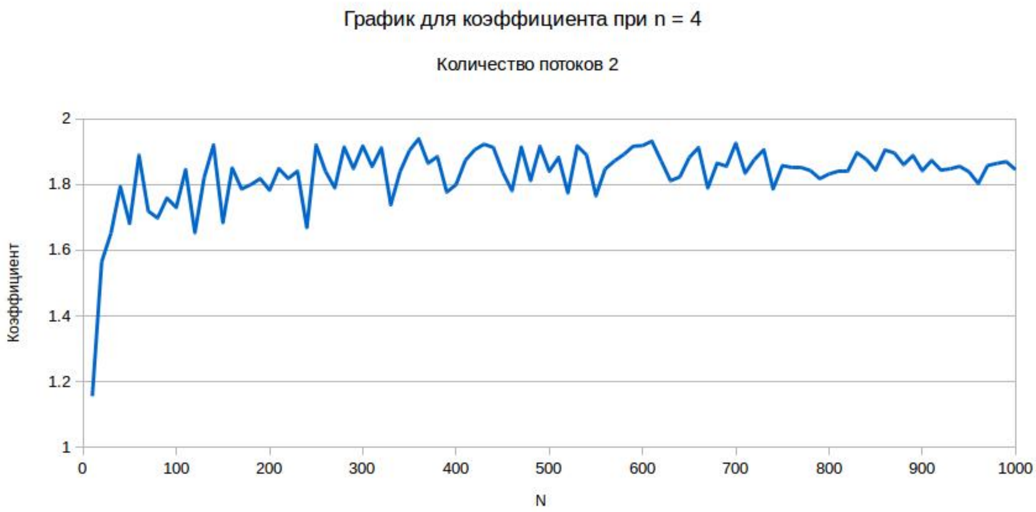
Ниже приведен пример кода для параллельного вычисления интеграла с $n = 4$. Распараллеливание происходит за счет синхронного вычисления трех сумм из (7).

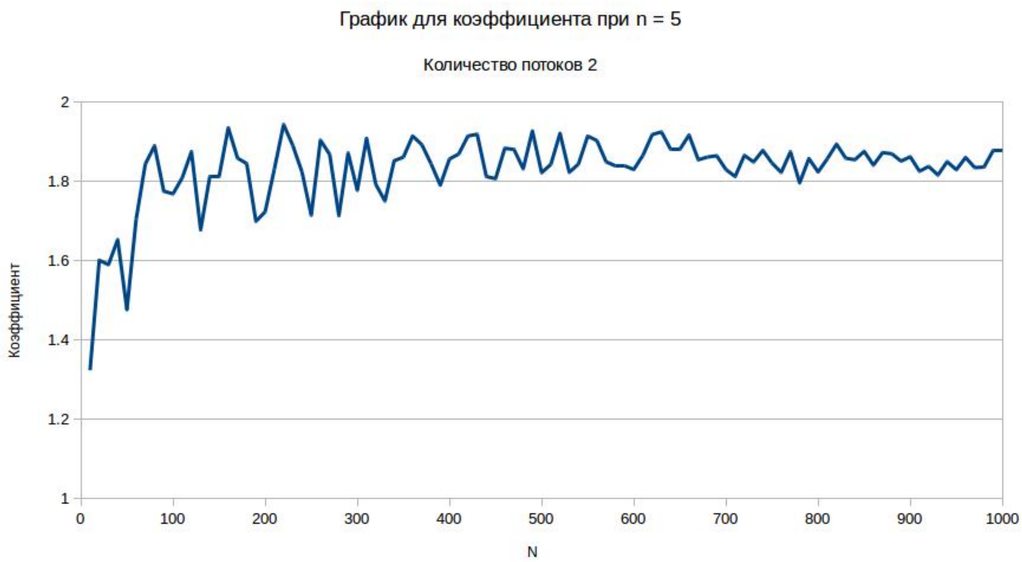
```
#pragma omp parallel reduction(+: sum_1,sum_2,sum_3) num_threads(THREAD_AMOUNT)
{
//Calculating the sum_1
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
sum_1 += f(a + l*H) + f(a + H + l*H);
}

//Calculating the sum_2
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
sum_2 += f(a + h + l*H) + f(a + (n - 1)*h + l*H);
}

//Calculating the sum_3
#pragma omp for
for (int l = 0; l < N; l++){
sum_3 += f(a + 2 * h + l*H);
}
}
```

В качестве подынтегральной функции была выбрана функция $f(x) = sin(x) + x^5$
При вычислении были получаны следующие результаты





Ниже представлен график сравнения двух предыдущих коэффициентов.

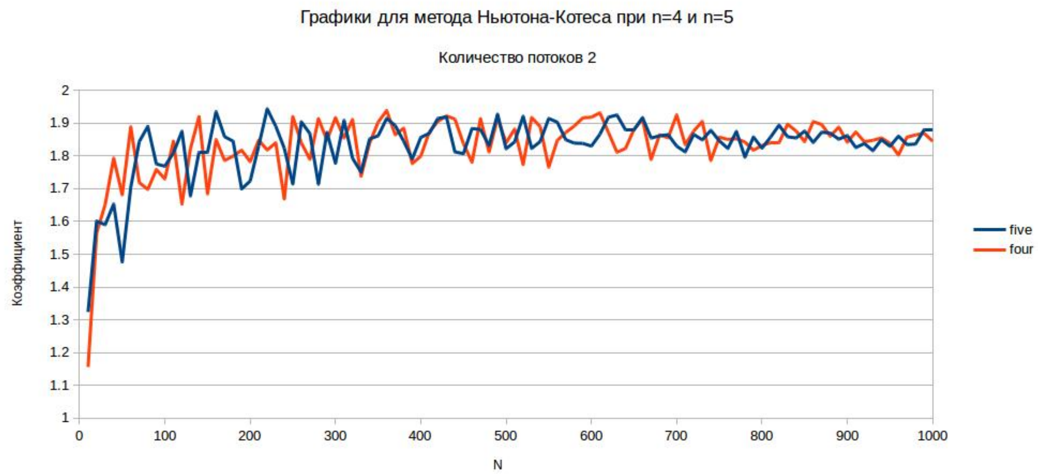
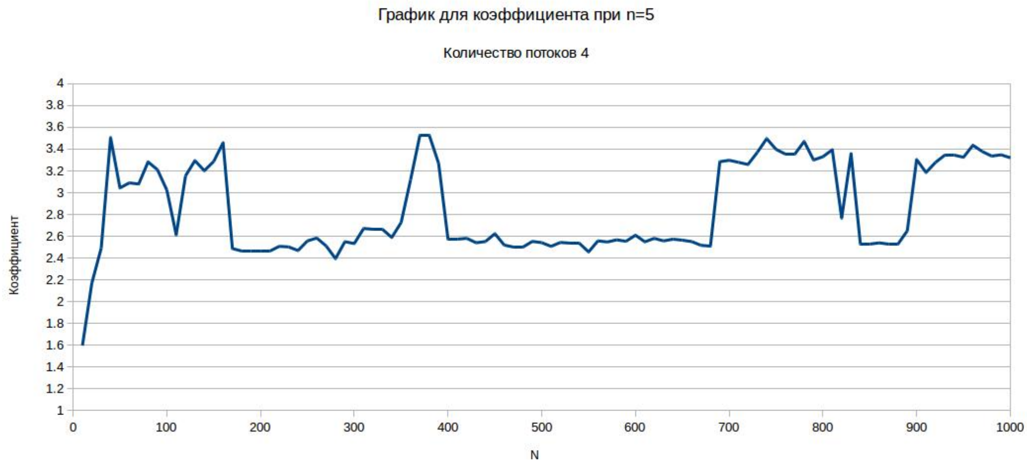
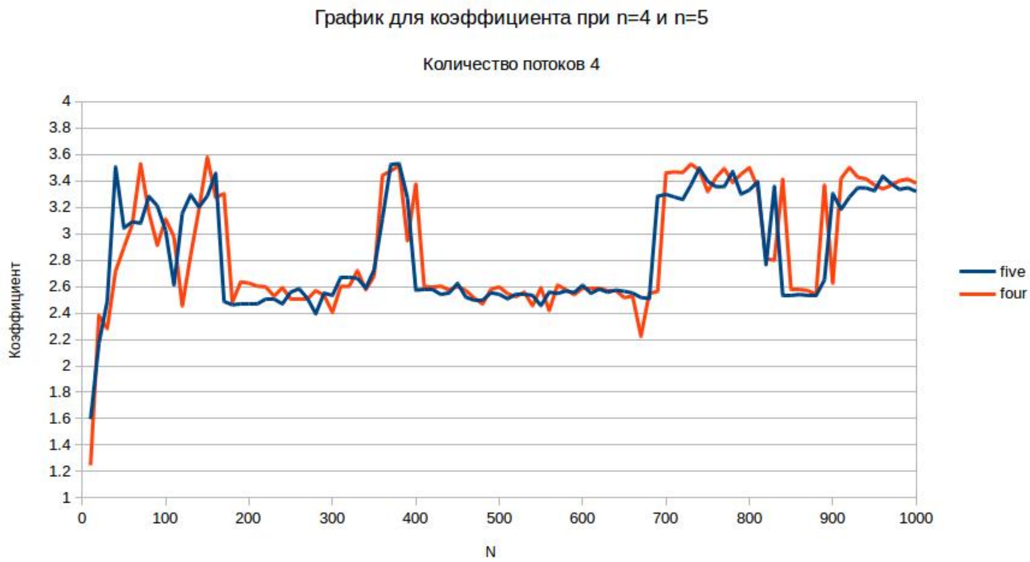

Графики для метода Ньютона-Котеса при n=4 и n=5
Количество потоков 2
Коэффициент
N
five
four
2
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


График для коэффициента при n=4
Количество потоков 4
Коэффициент
N
3.8
3.6
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000





Список литературы

1. *Крылов В.И* название книги.: Изд-во СПБГУ, 19??. - ???с.