№6 200 чел.

1 кр. – 181 чел. A_1 0 кр – 10 чел. A_0

2 кр. – 9 чел. A_2 A_1, A_2, A_3 – полная группа событий

H_0: число заболеваний 1 чел. – $\xi \sim B(2, p)$ $\exists \alpha = 0{,}05$

$p = \theta$

Критерий Пирсона для сложной гип.

$H_1 : \overline{H_0}$

$$P(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\tilde{P}(A_1) = \frac{181}{200} = 0{,}905 \qquad P(A_1) = 2 \cdot \theta \cdot (1-\theta)$$

$$\tilde{P}(A_2) = \frac{9}{200} = 0{,}045 \qquad P(A_2) = \theta^2$$

$$\tilde{P}(A_0) = \frac{10}{200} = 0{,}05 \qquad P(A_0) = (1-\theta)^2$$

$$L = (2\theta(1-\theta))^{181} \cdot \theta^{18} \cdot (1-\theta)^{20} = 2^{181} \cdot \theta^{199} \cdot (1-\theta)^{201} \to max$$

$$\ln L = 181 \ln 2 + 199 \ln\theta + 201 \ln(1-\theta) \longrightarrow max$$

$$(\ln L)' = \frac{199}{\theta} - \frac{201}{1-\theta} = 0 \qquad 199 - 199\theta - 201\theta = 0$$

$$400\theta = 199 \to \theta = 0{,}4975$$

$$(\ln L)'' = -\frac{199}{\theta^2} - \frac{201}{(1-\theta)^2} < 0 \Rightarrow max$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{(181 - 200 \cdot 2 \cdot 0{,}4975(1-0{,}4975))^2}{200 \cdot 2 \cdot 0{,}4975(1-0{,}4975)} + \frac{(9 - 200 \cdot 0{,}4975^2)^2}{200 \cdot 0{,}4975^2} + \frac{(10 - 200 \cdot (1-0{,}4975)^2)^2}{200(1-0{,}4975)^2} =$$

$$= 65{,}6157 + 33{,}1376 + 32{,}4814 = 131{,}23$$

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$$

$$\Delta \sim \chi^2(1)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{131{,}23}^{+\infty} q(t)\,dt = \int_{131{,}23}^{+\infty} \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} t^{-1/2} e^{-t/2}\,dt \approx 2{,}21 \cdot 10^{-30} < \alpha$$

$\Rightarrow$ отвергаем H_0 (надёжно!)

№57 2 партии по 100 деталей

$1^{я}$ партия: 25 дет. с заниж., 50 дет. с точными, 25 дет. с завыш.

$2^{я}$ партия: 52, 41, 7

H_0: N партии не зав. от размера дет.

$H_1 : \overline{H_0}$ $n = 200$ $\exists \alpha = 0{,}05$

1	25	50	25	$\frac{100}{200}$
2	52	41	7	$\frac{100}{200}$
	$\frac{77}{200}$	$\frac{91}{200}$	$\frac{32}{200}$	

$$\tilde{\Delta} = \frac{\left(25 - 200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{77}{200}\right)^2}{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{77}{200}} + \ldots \approx 20{,}48$$

$$\Delta \sim \chi^2(2 \cdot 1) = \chi^2(2)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{20{,}48}^{+\infty} q(t)\,dt = \int_{20{,}48}^{+\infty} \frac{(1/2)^1}{\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}} e^{-t/2}\,dt = \int_{20{,}48}^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{2}\,dt \approx 3{,}57 \cdot 10^{-5} < 0{,}05$$

$\Rightarrow$ отвергаем H_0 (надёжно!)

(№8) 2 потока по 300 чел

	2	3	4	5
1 поток	33	43	80	144
2 поток	39	35	72	154

H_0: потоки однородны $\quad \exists\, \alpha = 0.05$

H_1: $\overline{H_0}$

$p_1 = P(\text{„2"}) = \frac{72}{600} = 0,12$

$p_2 = P(\text{„3"}) = \frac{78}{600} = 0,13$

$p_3 = P(\text{„4"}) = \frac{152}{600} = 0,253$

$p_4 = P(\text{„5"}) = \frac{298}{600} = 0,497$

$\tilde{\Delta}_1 = \frac{(33 - 300\cdot 0,12)^2}{300\cdot 0,12} + \frac{(43-300\cdot 0,13)^2}{300\cdot 0,13} + \ldots = 1,056$

$\tilde{\Delta}_2 = 1,022$

$\tilde{\Delta} = 2,078$

$\Delta \sim \chi^2(3\cdot 1) = \chi^2(3)$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{2,078}^{+\infty} q(t)dt = \int_{2,078}^{+\infty} \frac{(1/2)^{3/2}}{\Gamma(3/2)} t^{1/2} e^{-t/2} dt = 0,556 > \alpha \Rightarrow$ нет основания отвергнуть H_0

$\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{2}{1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(№9)

$[-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$	$[\frac{3}{2},\frac{5}{2})$	$[\frac{5}{2},\frac{7}{2})$	$[\frac{7}{2},\frac{9}{2})$	$[\frac{9}{2},\frac{11}{2})$	$[\frac{11}{2},\frac{13}{2})$	$[\frac{13}{2},\frac{15}{2})$	$[\frac{15}{2},\frac{17}{2})$	$[\frac{17}{2},\frac{19}{2})$
„0"	„1"	„2"	„3"	„4"	„5"	„6"	„7"	„8"	„9"
5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

100 измерений $\quad \exists\, \alpha = 0,05$

a) $H_0: \xi \sim R(0,10) \qquad H_1: \overline{H_0}$

Пирсон ← цена деления

$p_i = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{10} dx = 0,1 \qquad i = \overline{1,10}$

$\tilde{\Delta} = \frac{(5-100\cdot\frac{1}{10})^2}{100\cdot\frac{1}{10}} + \ldots + \frac{(7-100\cdot\frac{1}{10})^2}{100\cdot\frac{1}{10}} = \frac{25+4+16+4+16+64+1+16+9+9}{10} = 16,4$

$\Gamma(4 + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^8}\cdot\frac{8!}{4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\sqrt{\pi}}{2^8} = 6,5625\sqrt{\pi}$

$\Delta \sim \chi^2(9)$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{16,4}^{+\infty} q(t)dt = \int_{16,4}^{+\infty} \frac{(1/2)^{9/2}}{\Gamma(\frac{9}{2})} t^{7/2} e^{-t/2} dt = 0,059 > \alpha \Rightarrow$ нет осн-й отвергнуть H_0

Колмогоров

Далее см. task9.ipynb

(№11) H_0: „4": $\frac{1}{3}$, „3": $\frac{1}{6}$; „2": $\frac{1}{4}$; „1": $\frac{1}{4}$

H_1: „4": $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$

$p_0(x) = \frac{1}{3}\delta(x-4) + \frac{1}{6}\delta(x-3) + \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$

$p_1(x) = \frac{1}{4}\delta(x-4) + \frac{1}{4}\delta(x-3) + \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$

Проверка H_0 на 2х бросаниях

Наиболее мощный критерий, мощность — ?

$\alpha = 0,2$

Точный метод

$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{[\frac{1}{3}\delta(x_1-4) + \frac{1}{6}\delta(x_1-3) + \frac{1}{4}\delta(x_1-2) + \frac{1}{4}\delta(x_1-1)][\frac{1}{3}\delta(x_2-4) + \ldots]}{[\frac{1}{4}\delta(x_1-4) + \frac{1}{4}\delta(x_1-3) + \frac{1}{4}\delta(x_1-2) + \frac{1}{4}\delta(x_1-1)][\frac{1}{4}\delta(x_2-4) + \ldots]} \geq c$

G: появление 2х „3"

$\alpha_1 = P(x \in G \mid H_0) = \frac{1}{36} < \alpha$

$W = P(x \in G \mid H_1) = \frac{1}{16} \qquad \alpha_2 = \frac{15}{16}$ — нашли крит. для $\min \alpha_1$, а не для $\max W$!

№11

ℓ:

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4
1	1	1	3/2	3/4
2	1	1	3/2	3/4
3	3/2	3/2	9/4	9/8
4	3/4	3/4	9/8	9/16

тогда

C	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$
α_1	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	1
W	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

$\alpha_1 > 0{,}2$

$W \to \max$

$\alpha_1 < 0{,}2$

$\Rightarrow W = \frac{5}{16}, \quad C = \frac{3}{2}$

Критерий: выпадение одной „3" и одной „1"

S12 $n=3$

$\xi \sim N(a, \sigma^2)$

$X_n = \{-1,11;\ -6.1;\ 2.42\}$

$H_0: a=0$

$H_1:$ а) $a>0$; б) $a<0$; в) $a \neq 0$

а) Нужно найти s^2

$\bar{x} = -4,79/3 = -1,597$

$$s^2 = \frac{0,237+20,277+16,136}{3-1} = 18,325 \qquad s = 4,281$$

Т Фишера: $\frac{2 \cdot 18,325}{\theta_2^2} \sim \chi^2(2)$ $\quad \frac{36,65}{\theta_2^2} \sim \chi^2(2)$ (не нужно...)

$$\frac{\bar{x}-\theta_1}{s}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$\frac{-1,597-\theta_1}{4,281}\sqrt{3} \sim t(2)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{-1,597-0}{4,281}\sqrt{3} = -0,646$$

$$\text{p-value} = P(|\Delta| \geq |\tilde{\Delta}| \mid H_0) = 2\int_{0,646}^{+\infty} \frac{\underbrace{\Gamma(\tfrac{3}{2})}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{3/2}}dx = \int_{0,646}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{3/2}} = 0,585$$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0.

б-в) p-value $= P(\Delta \leq -|\tilde{\Delta}|) = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) = 0,293 \Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0

(S13) $\bar{x}_n = \{-1{,}11; -6{,}1; 2{,}42\}$
$\bar{y}_m = \{-2{,}29; -2{,}91\}$ – незав.

$\xi \sim N(a, 2)$ $\quad \bar{x} = -1{,}6$
$\eta \sim N(8, 1)$ $\quad \bar{y} = -2{,}6$

$S_x^2 = \dfrac{0{,}24 + 20{,}25 + 16{,}16}{2} = 18{,}33$

$S_y^2 = \dfrac{0{,}0961 + 0{,}0961}{1} = 0{,}19$

$H_0: a = 8$
$H_1:$ а) $a > 8$, б) $a < 8$, в) $a \neq 8$

$$\cancel{\Delta = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (a-8)}{\sqrt{\frac{n+m}{m \cdot n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}}}$$

Т Фишера $\Rightarrow$ $\dfrac{\bar{x} - a}{\sigma_x}\sqrt{n} \sim N(0,1)$ $\quad \bar{x} - a \sim N\left(0, \dfrac{\sigma_x^2}{n}\right)$

$\dfrac{\bar{y} - 8}{\sigma_y}\sqrt{m} \sim N(0,1)$ $\quad \bar{y} - 8 \sim N\left(0, \dfrac{\sigma_y^2}{m}\right)$

Тогда $(\bar{x} - a) - (\bar{y} - 8) \sim N\left(0, \dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}\right)$

$$\Delta = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{-1{,}6 + 2{,}6}{\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}} \approx 0{,}93$$

в) $p\text{-value} = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) + P(\Delta \leq -|\tilde{\Delta}|) = 2\int_{0{,}93}^{+\infty} p(x)\,dx = 2\int_{0{,}93}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2 \cdot 0{,}176 = 0{,}352$

а-б) $p\text{-value} = P(\Delta \geq |\tilde{\Delta}|) = P(\Delta \leq -|\tilde{\Delta}|) = 0{,}176$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0