

# Дисперсионный анализ

Основы биостатистики, осень 2022

Марина Варфоломеева

- Однофакторный дисперсионный анализ
- Условия применимости дисперсионного анализа
- Запланированные сравнения
- Пост хок тесты
- Фиксированные и случайные факторы
- Ошибка измерения, воспроизводимость

# Пример: Мелатонин как регулятор циркадного ритма

После джет-лага режим выравнивается, когда глаза привыкают к ритму освещения на новом месте.

Мелатонин:

- регулятор суточного ритма
- вырабатывается ночью
- свет снижает выработку

# Проверка сомнительного результата

Одно исследование показало, что продукцию мелатонина можно регулировать, освещая внутреннюю сторону коленей (Campbell, Murphy, 1998).

Проверка (Wright, Czeisler, 2002):

3 группы людей (22 чел.) будили ночью и

3 часа

- освещали ярким светом глаза
- освещали ярким светом колени
- не освещали ничего (контроль)

По уровню продукции мелатонина  
регистрировали сдвиг циркадного ритма  
(в часах).

Влияет ли экспериментальная  
процедура (группа) на сдвиг циркадного  
ритма?

# Проверка сомнительного результата

Одно исследование показало, что продукцию мелатонина можно регулировать, освещая внутреннюю сторону коленей (Campbell, Murphy, 1998).

Проверка (Wright, Czeisler, 2002):

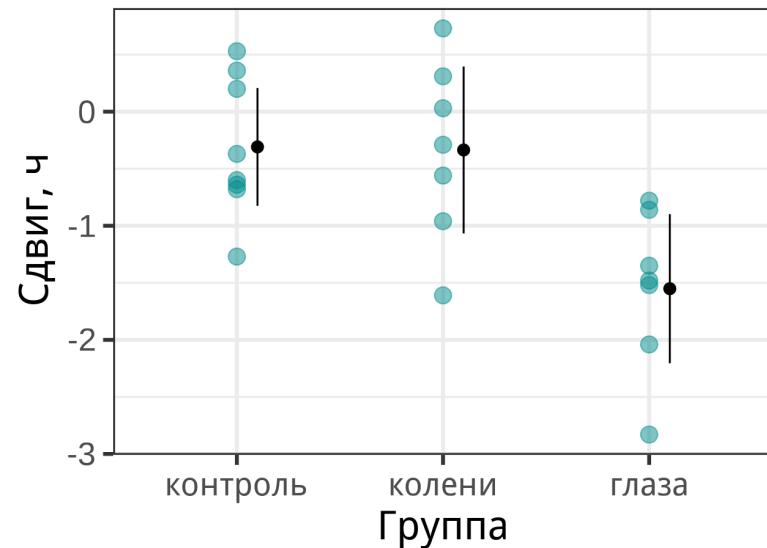
3 группы людей (22 чел.) будили ночью и

3 часа

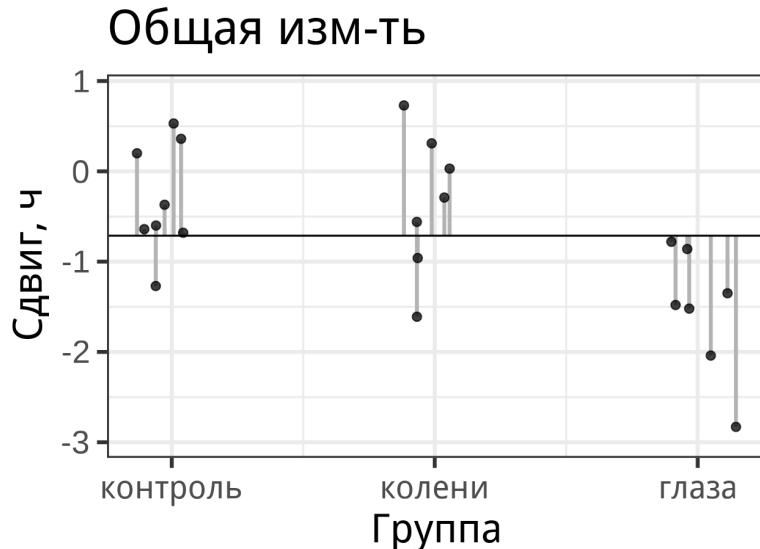
- освещали ярким светом глаза
- освещали ярким светом колени
- не освещали ничего (контроль)

По уровню продукции мелатонина регистрировали сдвиг циркадного ритма (в часах).

Влияет ли экспериментальная процедура (группа) на сдвиг циркадного ритма?

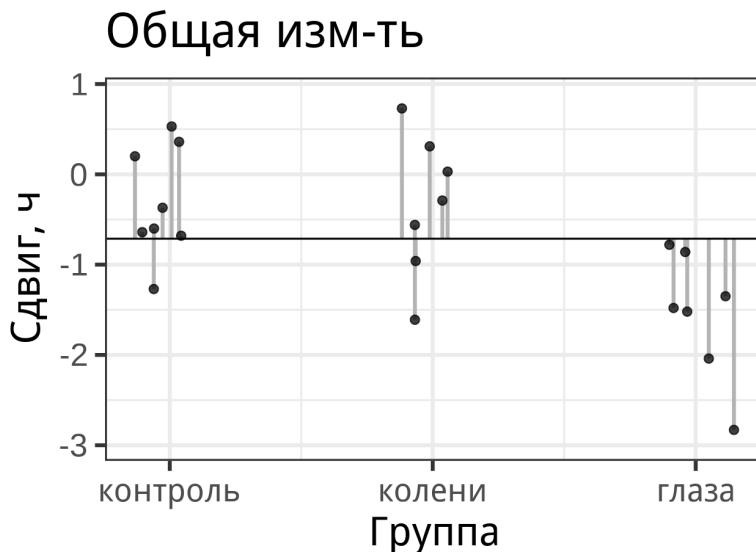


# Дисперсионный анализ



Дисперсионный анализ (analysis of variance, ANOVA) — метод одновременной проверки гипотез о равенстве средних значений в нескольких группах.

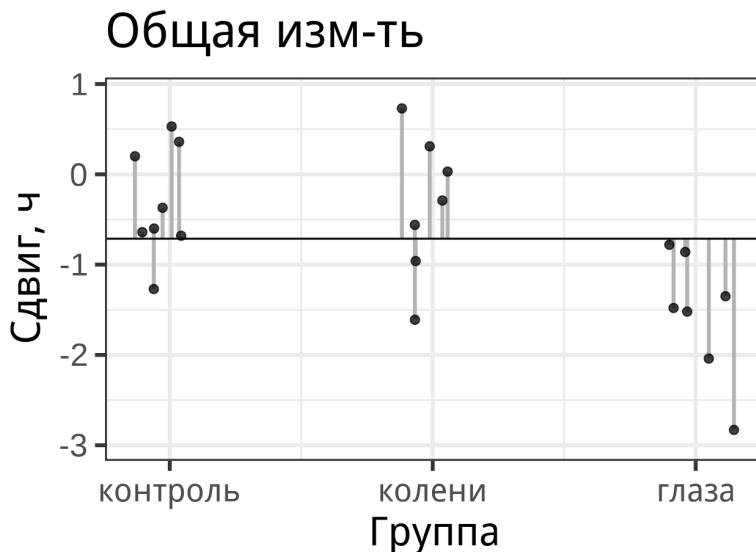
# Дисперсионный анализ



Дисперсионный анализ (analysis of variance, ANOVA) — метод одновременной проверки гипотез о равенстве средних значений в нескольких группах.

Насколько наблюдения из одной группы более похожи друг на друга, чем из разных групп?

# Дисперсионный анализ



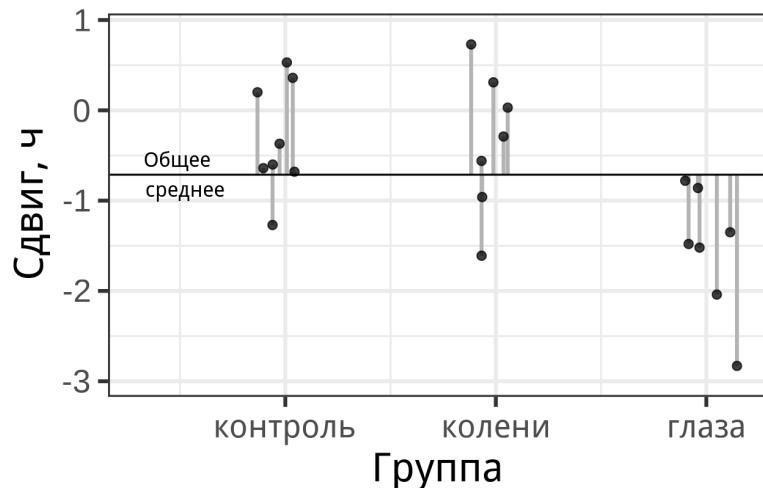
**Дисперсионный анализ** (analysis of variance, ANOVA) — метод одновременной проверки гипотез о равенстве средних значений в нескольких группах.

Насколько наблюдения из одной группы более похожи друг на друга, чем из разных групп?

- однофакторный (как в примере)
- многофакторный (деление на группы сразу по нескольким факторам).

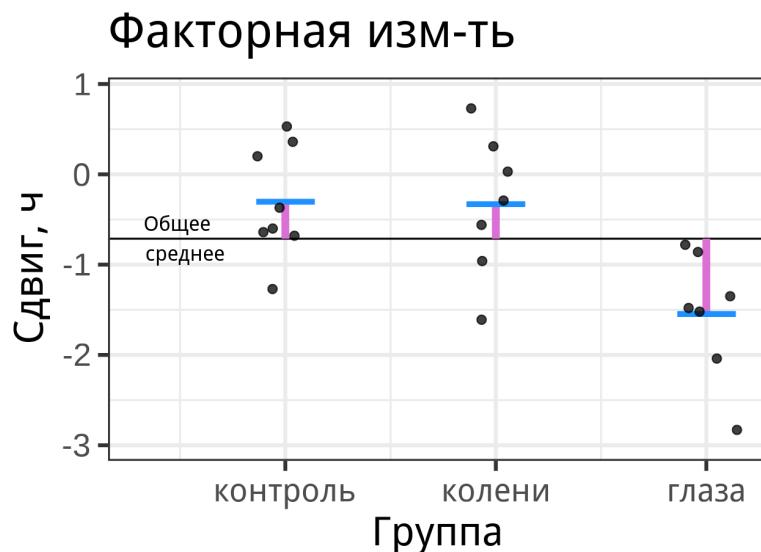
# Общая изменчивость

## Общая изм-ть



Общая изменчивость  $SS_t$  — это сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений  $y_i$  от общего среднего  $\bar{y}$

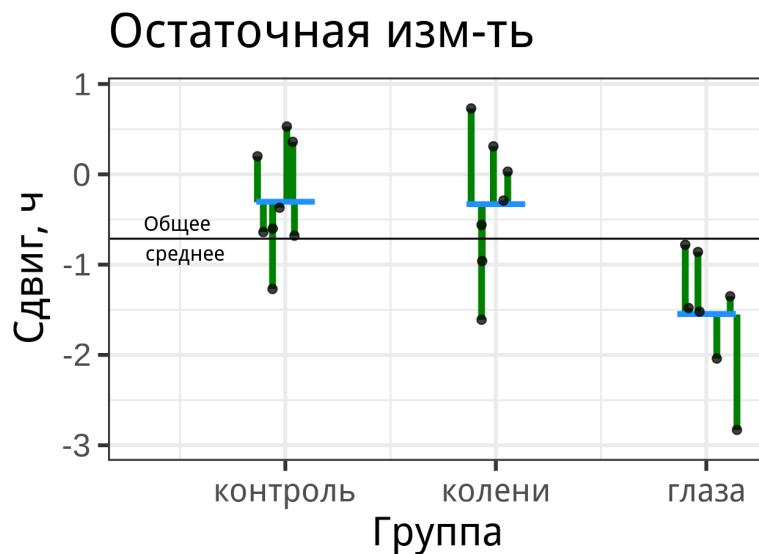
# Факторная (межгрупповая) изменчивость



Отклонения внутригрупповых средних от общего среднего в генеральной совокупности — это эффект фактора  $\alpha_j = \mu_j - \mu$ , где  $j = 1, 2, \dots, p$  — это одна из  $p$  групп.

Мы оцениваем эффект фактора по реальным данным  $\bar{y}_j - \bar{y}$

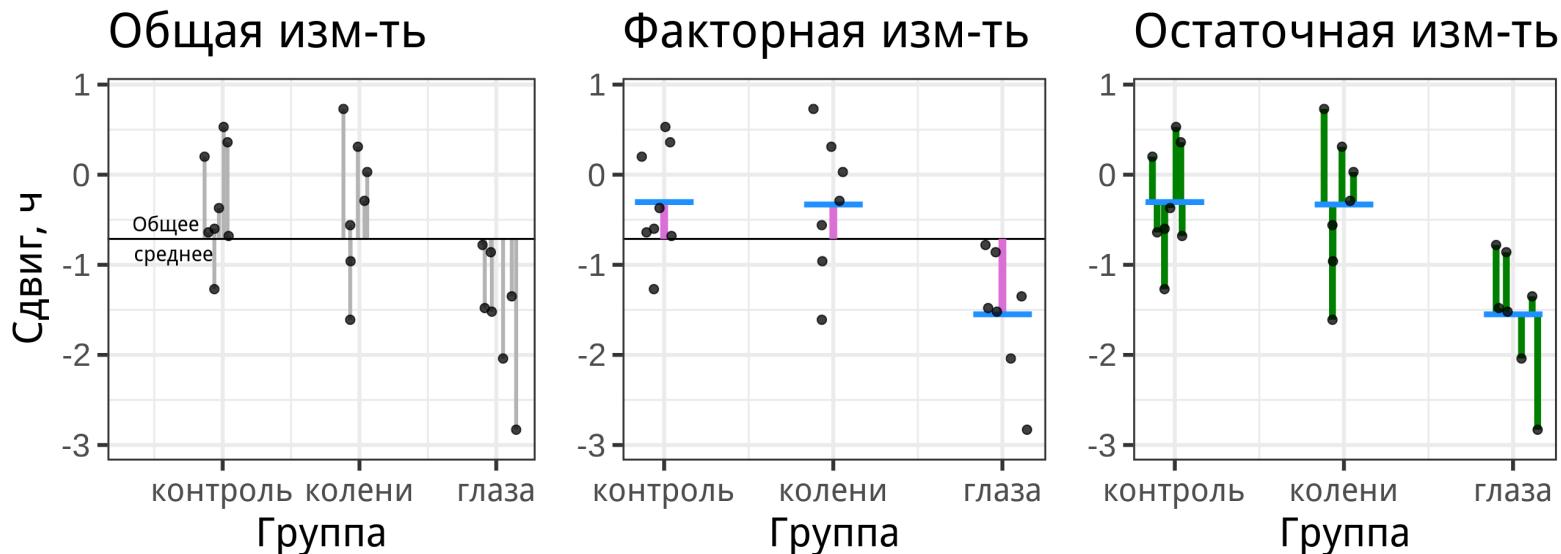
# Остаточная (внутригрупповая) изменчивость



Отклонения значений от средних внутри групп (**остатки**) — это изменчивость, которую не может объяснить группировка по фактору. Ещё её называют случайной изменчивостью.

# Структура общей изменчивости

$$SS_t = SS_x + SS_e$$



Общая изменчивость

Факторная изменчивость

Остаточная изменчивость

...

...

...

$$SS_t = \sum \sum (\bar{y} - y_{ij})^2$$

$$SS_x = \sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$$

$$SS_e = \sum \sum (\bar{y}_j - y_{ij})^2$$

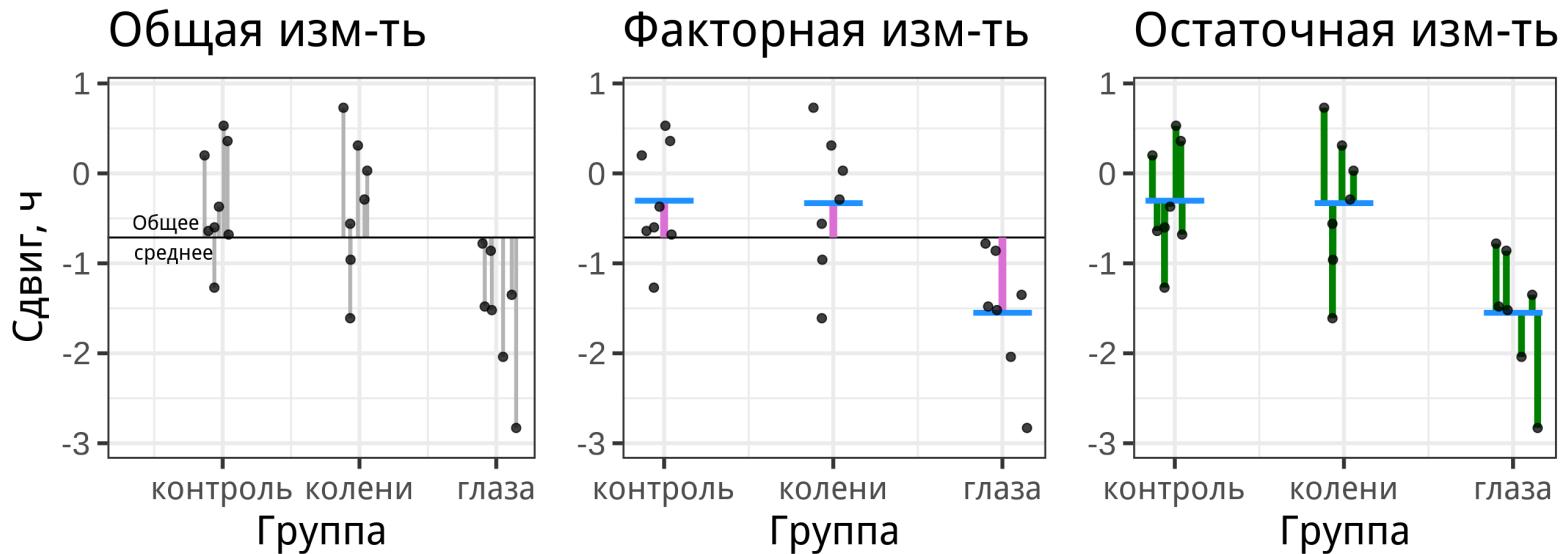
$$df_t = n - 1$$

$$df_x = p - 1$$

$$df_e = n - p$$

# От изменчивостей к дисперсиям

$$SS_t = SS_x + SS_e \quad MS_t \neq MS_x + MS_e$$



Общая дисперсия	Факторная дисперсия	Остаточная дисперсия
$MS_t = \frac{SS_t}{df_t}$	$MS_x = \frac{SS_x}{df_x}$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$
$SS_t = \sum \sum (\bar{y} - y_{ij})^2$	$SS_x = \sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	$SS_e = \sum \sum (\bar{y}_j - y_{ij})^2$
$df_t = n - 1$	$df_x = p - 1$	$df_e = n - p$

$MS_x$  и  $MS_e$

## помогают тестировать значимость фактора

Если зависимости нет, то  $\mu_1 = \dots = \mu_p$  — средние равны во всех  $p$  группах, и  
 $MS_x \sim MS_e$

при условии, что

- дисперсии остатков в группах равны
- фактор имеет фиксированное число градаций

## MS<sub>x</sub> и MS<sub>e</sub>

### помогают тестировать значимость фактора

Если зависимости нет, то  $\mu_1 = \dots = \mu_p$  — средние равны во всех  $p$  группах, и  $MS_x \sim MS_e$

при условии, что

- дисперсии остатков в группах равны
  - фактор имеет фиксированное число градаций
- 
- $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_p$  — средние во всех  $p$  группах равны.
  - $H_A : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$  — **хотя бы одно** среднее отличается от общего среднего.

## MS<sub>x</sub> и MS<sub>e</sub>

# помогают тестировать значимость фактора

Если зависимости нет, то  $\mu_1 = \dots = \mu_p$  — средние равны во всех  $p$  группах, и  $MS_x \sim MS_e$

при условии, что

- дисперсии остатков в группах равны
  - фактор имеет фиксированное число градаций
- 
- $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_p$  — средние во всех  $p$  группах равны.
  - $H_A : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$  — **хотя бы одно** среднее отличается от общего среднего.

$$F_{df_x, df_e} = \frac{MS_x}{MS_e}$$

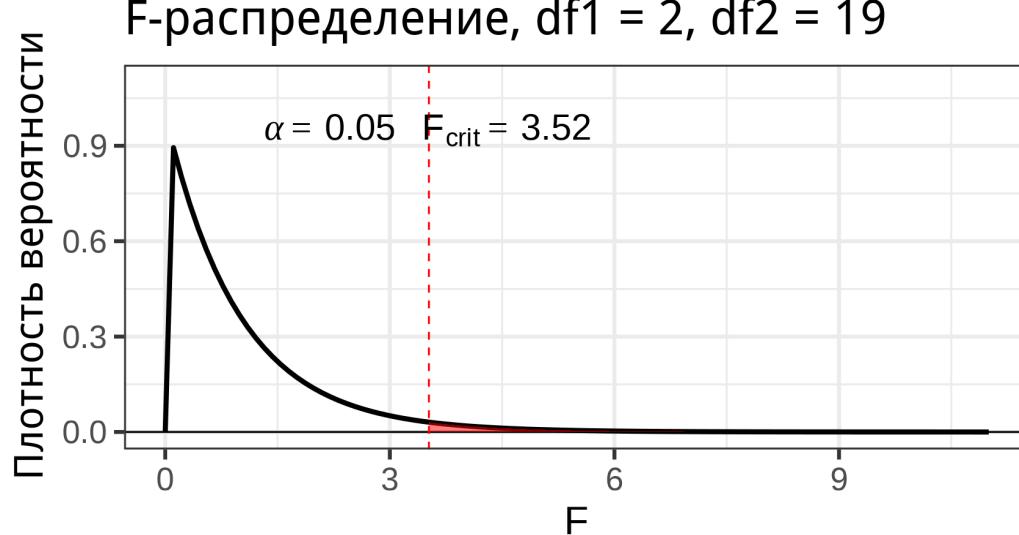
# Тестирование значимости фактора при помощи F-критерия

- $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_p$  — средние во всех  $p$  группах равны.
- $H_A : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$  — **хотя бы одно** среднее отличается от общего среднего.

$$F_{df_x, df_e} = \frac{MS_x}{MS_e}$$

В однофакторном дисперсионном анализе  $df_x = p - 1$  и  $df_e = n - p$ .

F-распределение,  $df1 = 2$ ,  $df2 = 19$



# Результаты дисперсионного анализа часто представляют в виде таблицы

Источник изменчивости	SS	df	MS	F
Фактор	$SS_x = \sum n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2$	$df_x = p - 1$	$MS_x = \frac{SS_x}{df_x}$	$F_{df_x, df_e} = \frac{MS_x}{MS_e}$
Случайная	$SS_e = \sum \sum (\bar{y}_j - y_{ij})^2$	$df_e = n - p$	$MS_e = \frac{SS_e}{df_e}$	
Общая	$SS_t = \sum \sum (\bar{y} - y_{ij})^2$	$df_t = n - 1$		

Минимальное описание результатов в тексте должно содержать  $F_{df_x, df_e}$  и  $p$ .

# Дисперсионный анализ данных о мелатонине

- $H_0 : \mu_{\text{контроль}} = \mu_{\text{колени}} = \mu_{\text{глаза}}$  — средние во всех 3 группах равны.
- $H_A : \text{хотя бы одно}$  среднее отличается от общего среднего.

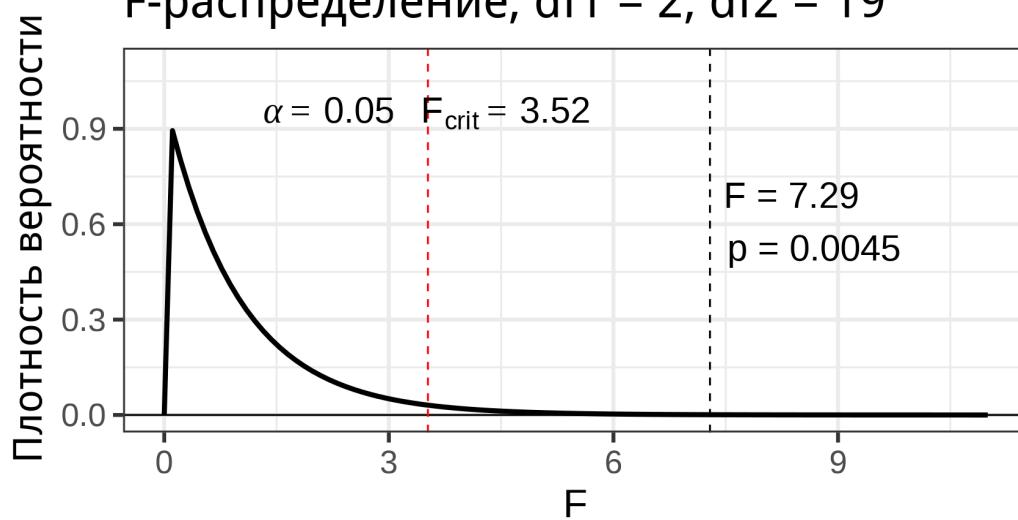
	SS	df	MS	F	P
Группа	7.22	2	3.612	7.29	0.004
Случайная	9.41	19	0.496		
Общая	16.64	21			

# Дисперсионный анализ данных о мелатонине

- $H_0 : \mu_{\text{контроль}} = \mu_{\text{колени}} = \mu_{\text{глаза}}$  — средние во всех 3 группах равны.
- $H_A : \text{хотя бы одно}$  среднее отличается от общего среднего.

	SS	df	MS	F	P
Группа	7.22	2	3.612	7.29	0.004
Случайная	9.41	19	0.496		
Общая	16.64	21			

F-распределение,  $df1 = 2$ ,  $df2 = 19$



# Коэффициент детерминации – мера объясненной изменчивости

$$SS_t = SS_x + SS_e$$

- $SS_t$  — общая изменчивость
- $SS_x$  — объясненная фактором изменчивость
- $SS_e$  — остаточная изменчивость

Как оценить, какую долю от всей изменчивости зависимой переменной объясняет фактор?

# Коэффициент детерминации – мера объясненной изменчивости

$$SS_t = SS_x + SS_e$$

- $SS_t$  — общая изменчивость
- $SS_x$  — объясненная фактором изменчивость
- $SS_e$  — остаточная изменчивость

Как оценить, какую долю от всей изменчивости зависимой переменной объясняет фактор?

Коэффициент детерминации:

$$R^2 = \frac{SS_x}{SS_t}$$

$$0 < R^2 < 1$$

Можно записать в долях или процентах.

# Какую долю изменчивости объясняет фактор в примере про мелатонин?

	SS	df	MS	F	P
Группа	7.22	2	3.612	7.29	0.004
Случайная	9.41	19	0.496		
Общая	16.64	21			

# Какую долю изменчивости объясняет фактор в примере про мелатонин?

	SS	df	MS	F	P
Группа	7.22	2	3.612	7.29	0.004
Случайная	9.41	19	0.496		
Общая	16.64	21			

$$R^2 = \frac{7.224}{16.64} = 0.434$$

или  $R^2 = 43.4\%$

# Условия применимости однофакторного дисперсионного анализа

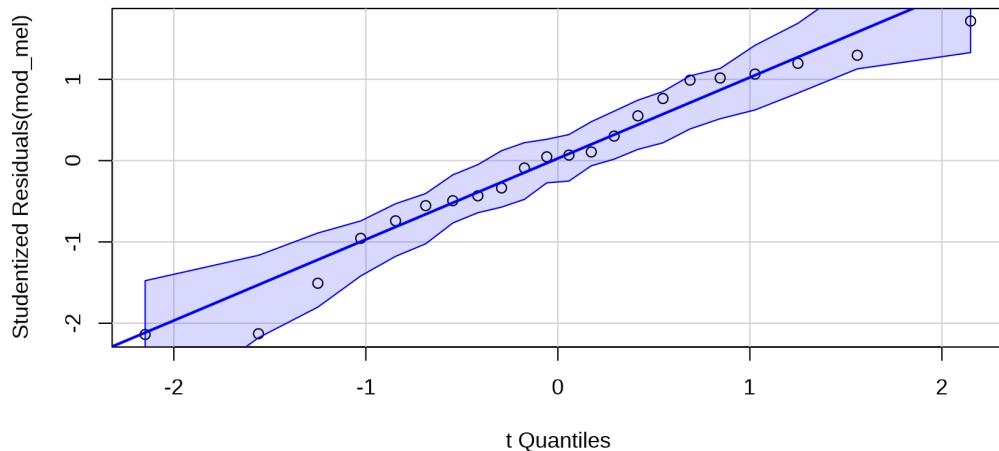
# Условия применимости однофакторного дисперсионного анализа

F-тесту можно верить, если выполняются условия применимости:

- Случайность и независимость наблюдений внутри групп
- Нормальное распределение **остатков**
- Равенство дисперсий **остатков** в группах по фактору

# Проверка нормальности распределения остатков

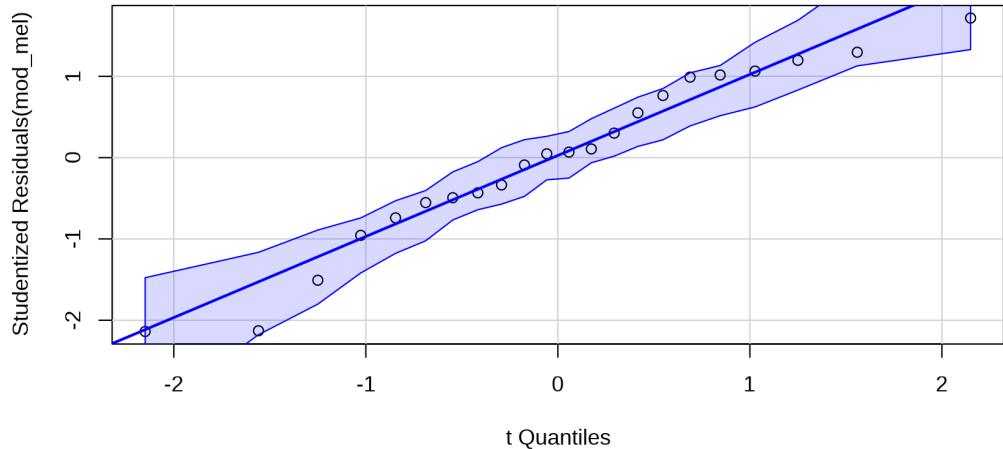
Квантильный график остатков



Знакомый график

# Проверка нормальности распределения остатков

## Квантильный график остатков

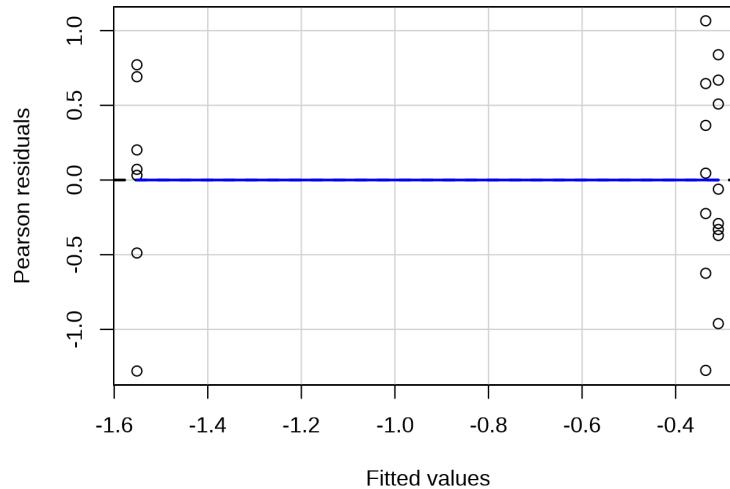
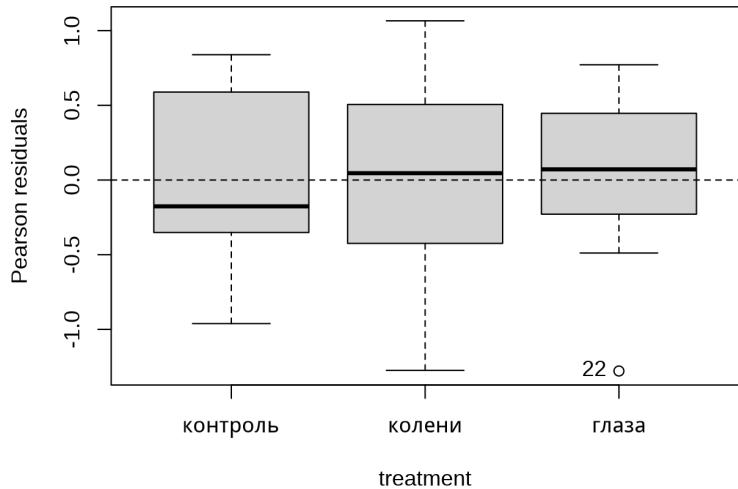


## Знакомый график

- Точки должны лежать на одной прямой, если квантили наблюдаемого распределения остатков соответствуют квантилям теоретического распределения.

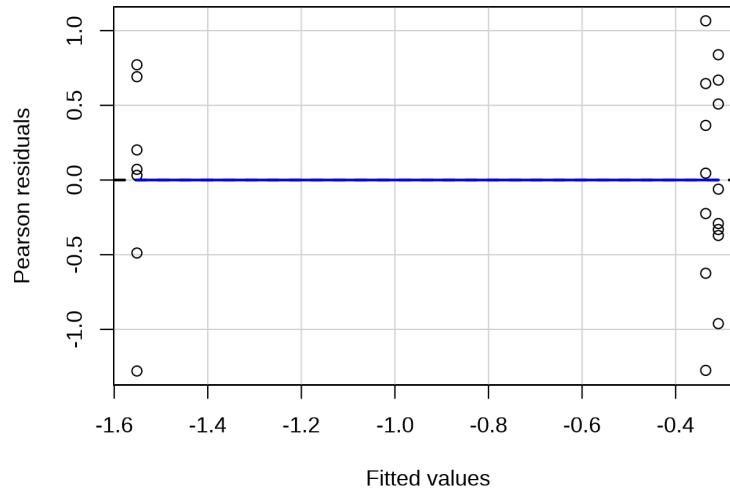
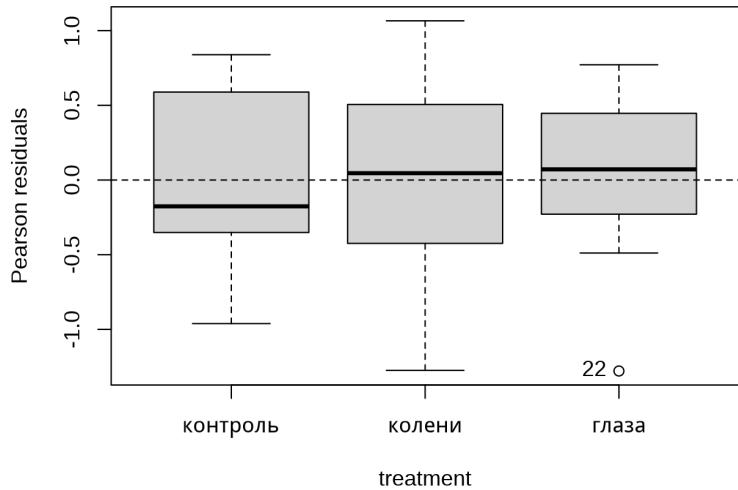
# Проверка равенства дисперсий остатков в группах

- остатки в группах по фактору
- остатки в зависимости от предсказанных значений



# Проверка равенства дисперсий остатков в группах

- остатки в группах по фактору
- остатки в зависимости от предсказанных значений



- Разброс остатков должен быть одинаков
  - в группах
  - вне зависимости от предсказанных значений

# Устойчивость дисперсионного анализа

**Устойчивость** (*robustness*) — свойство статистического метода, описывающее устойчивость его результатов при нарушении условий применимости.

# Устойчивость дисперсионного анализа

**Устойчивость** (robustness) — свойство статистического метода, описывающее устойчивость его результатов при нарушении условий применимости.

Дисперсионный анализ устойчив к отклонениям от условий применимости, если

- размеры групп примерно одинаковы
- равные объемы групп
- большие выборки

# Устойчивость дисперсионного анализа

**Устойчивость** (robustness) — свойство статистического метода, описывающее устойчивость его результатов при нарушении условий применимости.

Дисперсионный анализ устойчив к отклонениям от условий применимости, если

- размеры групп примерно одинаковы
- равные объемы групп
- большие выборки

Более устойчив к отклонениям от нормальности распределения остатков

Менее устойчив к неравенству дисперсий

# Если условия применимости нарушены

- Трансформация данных
- Обобщенная линейная модель (например, для счетных данных или долей)
- Непараметрический тест Краскала-Уоллиса (Kruskal-Wallis test)
- Тест, основанный на пермутациях

# Какие именно группы различаются? Запланированные сравнения

# Как понять, какие именно группы различаются?

Дисперсионный анализ говорит только, есть ли влияние фактора.

# Два способа понять, какие группы различаются

# Два способа понять, какие группы различаются

## Запланированные сравнения

(= planned comparisons,  
= linear contrasts)

- Можно сравнить выбранные группы.
- Набор гипотез (и сравнений) должен быть определен заранее.
- Делать можно вне зависимости от результатов дисперсионного анализа.

# Два способа понять, какие группы различаются

## Запланированные сравнения

(= planned comparisons,  
= linear contrasts)

- Можно сравнить выбранные группы.
- Набор гипотез (и сравнений) должен быть определен заранее.
- Делать можно вне зависимости от результатов дисперсионного анализа.

## Post hoc тесты

- Сравниваются все возможные группы.
- Нет четких заранее сформулированных гипотез.
- Делать можно, только если влияние соответствующего фактора оказалось значимым.

## Запланированные сравнения средних

$d = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1$  — разница средних значений в двух группах

## Запланированные сравнения средних

$d = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1$  — разница средних значений в двух группах

Стандартная ошибка этой разницы:

$$SE_d = \sqrt{MS_e \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

## Запланированные сравнения средних

$d = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1$  — разница средних значений в двух группах

Стандартная ошибка этой разницы:

$$SE_d = \sqrt{MS_e \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

Доверительный интервал для этой разницы будет накрывать истинное значение  $\mu_2 - \mu_1$  в заданном проценте повторных выборок:

$$d - |t_{\alpha, df}| \cdot SE_d \leq \mu_2 - \mu_1 \leq d + |t_{\alpha, df}| \cdot SE_d$$

$$df = N - p$$

# Сравним контроль и опыт

Сравним время сдвига циркадного ритма в группе, где освещали колени, и в контроле.

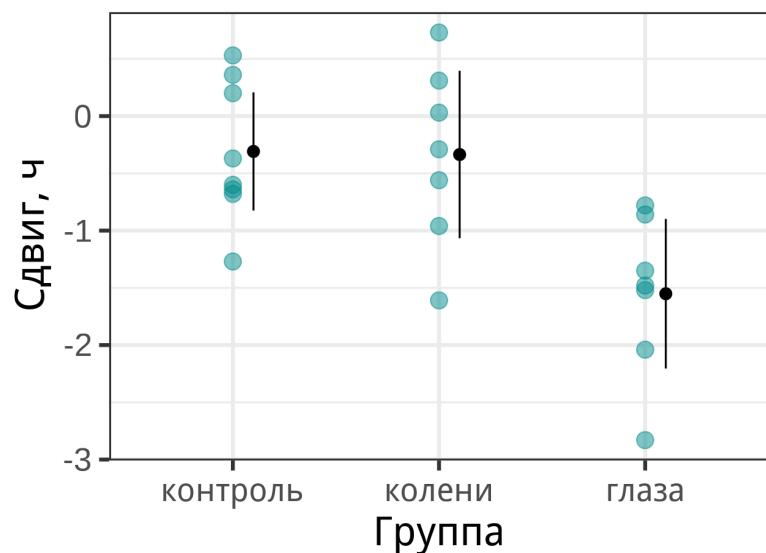
$$d = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 = -0.336 - (-0.309) = -0.027$$

$$MS_e = 0.496$$

$$SE_d = \sqrt{0.496 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right)} = 0.364$$

$$df = 22 - 3 = 19$$

$$|t_{0.05,19}| = 2.093$$



# Сравним контроль и опыт

Сравним время сдвига циркадного ритма в группе, где освещали колени, и в контроле.

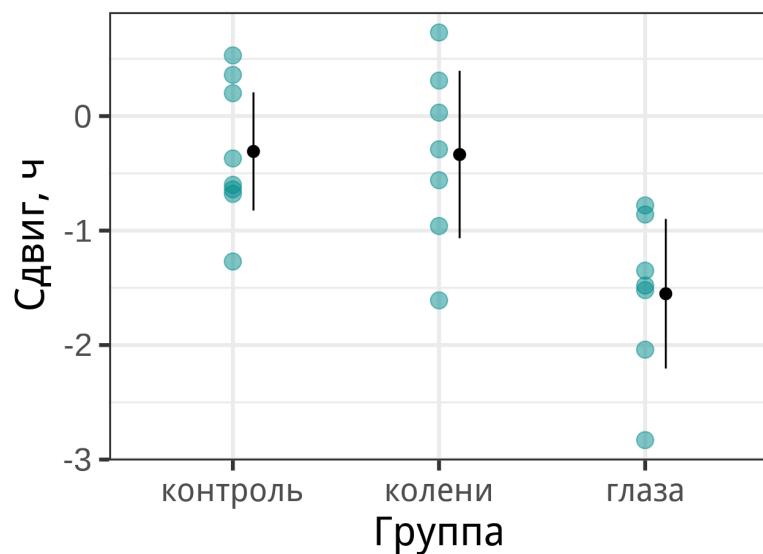
$$d = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 = -0.336 - (-0.309) = -0.027$$

$$MS_e = 0.496$$

$$SE_d = \sqrt{0.496 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right)} = 0.364$$

$$df = 22 - 3 = 19$$

$$|t_{0.05,19}| = 2.093$$



Доверительный интервал :

$$-0.027 - 2.093 \cdot 0.364 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq -0.027 + 2.093 \cdot 0.364$$

$$-0.79 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.736 \text{ или } -0.027 \pm 0.763$$

# Сравним контроль и опыт

Сравним время сдвига циркадного ритма в группе, где освещали колени, и в контроле.

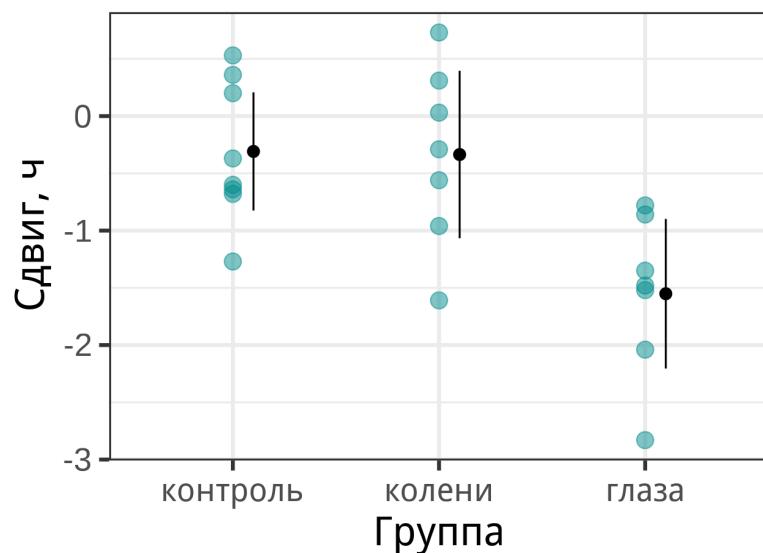
$$d = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1 = -0.336 - (-0.309) = -0.027$$

$$MS_e = 0.496$$

$$SE_d = \sqrt{0.496 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right)} = 0.364$$

$$df = 22 - 3 = 19$$

$$|t_{0.05,19}| = 2.093$$



Доверительный интервал :

$$-0.027 - 2.093 \cdot 0.364 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq -0.027 + 2.093 \cdot 0.364$$

$$-0.79 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.736 \text{ или } -0.027 \pm 0.763$$

Он включает 0, значит нет статистически-значимой разницы времени сдвига циркадного ритма в контроле и в группе людей, которым освещали колени.

# Чем это отличается от обычного доверительного интервала?

Запланированные сравнения дают доверительный интервал:

$$-0.79 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.736 \text{ или } -0.027 \pm 0.763$$

# Чем это отличается от обычного доверительного интервала?

Запланированные сравнения дают доверительный интервал:

$$-0.79 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.736 \text{ или } -0.027 \pm 0.763$$

Обычный доверительный интервал к разнице средних был бы шире:

$$-0.813 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.759 \text{ или } -0.027 \pm 0.786$$

# Чем это отличается от обычного доверительного интервала?

Запланированные сравнения дают доверительный интервал:

$$-0.79 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.736 \text{ или } -0.027 \pm 0.763$$

Обычный доверительный интервал к разнице средних был бы шире:

$$-0.813 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 0.759 \text{ или } -0.027 \pm 0.786$$

Т.е. запланированные сравнения — более мощный метод.

# Условия применимости запланированных сравнений

Те же, что и у дисперсионного анализа:

- независимость наблюдений
- нормальное распределение остатков
- одинаковые дисперсии в группах

# Условия применимости запланированных сравнений

Те же, что и у дисперсионного анализа:

- независимость наблюдений
- нормальное распределение остатков
- одинаковые дисперсии в группах

Менее устойчивы к отклонениям от условий применимости.

# Какие именно группы различаются?

## Пост хок тесты

# Пост хок тесты

Пост хок тесты (post hoc tests) — позволяют узнать, какие именно группы различаются.

# Пост хок тесты

Пост хок тесты (post hoc tests) — позволяют узнать, какие именно группы различаются.

- Делать можно, только если влияние соответствующего фактора оказалось значимым.
- Сравниваются все возможные группы.

# Пост хок тесты

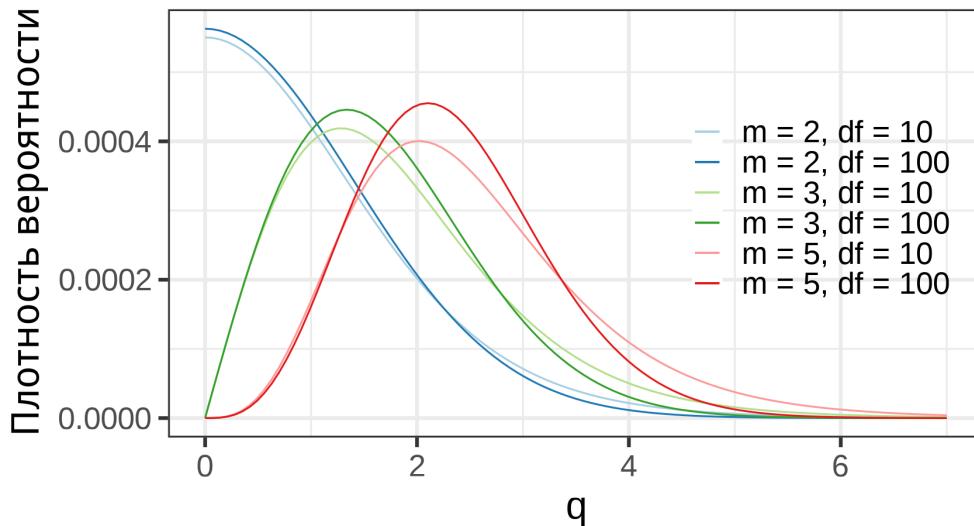
Пост хок тесты (post hoc tests) — позволяют узнать, какие именно группы различаются.

- Делать можно, только если влияние соответствующего фактора оказалось значимым.
  - Сравниваются все возможные группы.
- 
- Тест Тьюки (Tukey's Honest Significant Difference, HSD) — пост хок тест, основанный на распределении стьюдентизированного размаха

# Распределение стьюдентизированного размаха

(studentized range distribution)

- Аналог t-распределения для любого числа выборок.
- Стандартизованная разница минимального и максимального средних из нескольких выборок.
- Форма зависит от  $df$  и от числа выборок  $m$ .



Функция распределения для случая равных дисперсий и разных объемов групп:

$$q = \frac{\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}}{\sqrt{s^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$

# Пост хок Тест Тьюки

(Tukey's Honest Significant Difference)

= стьюдентизированный t-критерий

$$q = \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_j}{\sqrt{MS_e \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}}$$

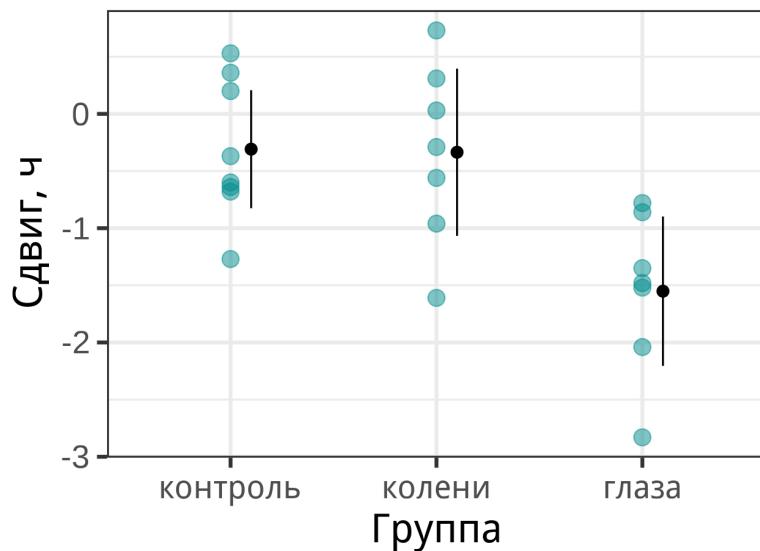
Подчиняется распределению стьюдентизированного размаха с параметрами  $df = df_e = n - p$  и  $m = p$  (число групп).

Требуется равенство дисперсий.

# Сделаем пост хок тест

Сравним средние во всех группах

	Разность	Н.гр.	В.гр.	p
колени-контроль	-0.027	-0.953	0.899	0.997
глаза-контроль	-1.243	-2.168	-0.317	0.008
глаза-колени	-1.216	-2.172	-0.260	0.012



# Фиксированные и случайные факторы

# Фиксированные факторы

Свойства фиксированных факторов	
Уровни фактора	заранее определенные и воспроизводимые уровни
Гипотезы	о средних значениях отклика для уровней фактора $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \mu$
Экстраполяция	только на уровни из анализа
Число уровней фактора	Если много уровней, нужно много наблюдений

- Разные группы в клинических испытаниях
- Горизонты на литорали
- Разные возрастные группы

# Случайные факторы

Свойства случайных факторов	
Уровни фактора	случайная выборка из возможных уровней
Гипотезы	о дисперсии отклика между уровнями фактора $H_0 : \sigma_{rand.\ fact.}^2 = 0$
Экстраполяция	на все возможные уровни
Число уровней фактора	Лучше больше 5 уровней

- Пациенты в клинических испытаниях (если несколько измерений на одном человеке)
- Семьи или выводки (если наблюдения на нескольких членах семьи)

# Дисперсионный анализ со случайным фактором

# Дисперсионный анализ со случайным фактором

Главная задача – сравнение средних, а определение **компонентов дисперсии** (variance components) случайных факторов.

Примеры использования:

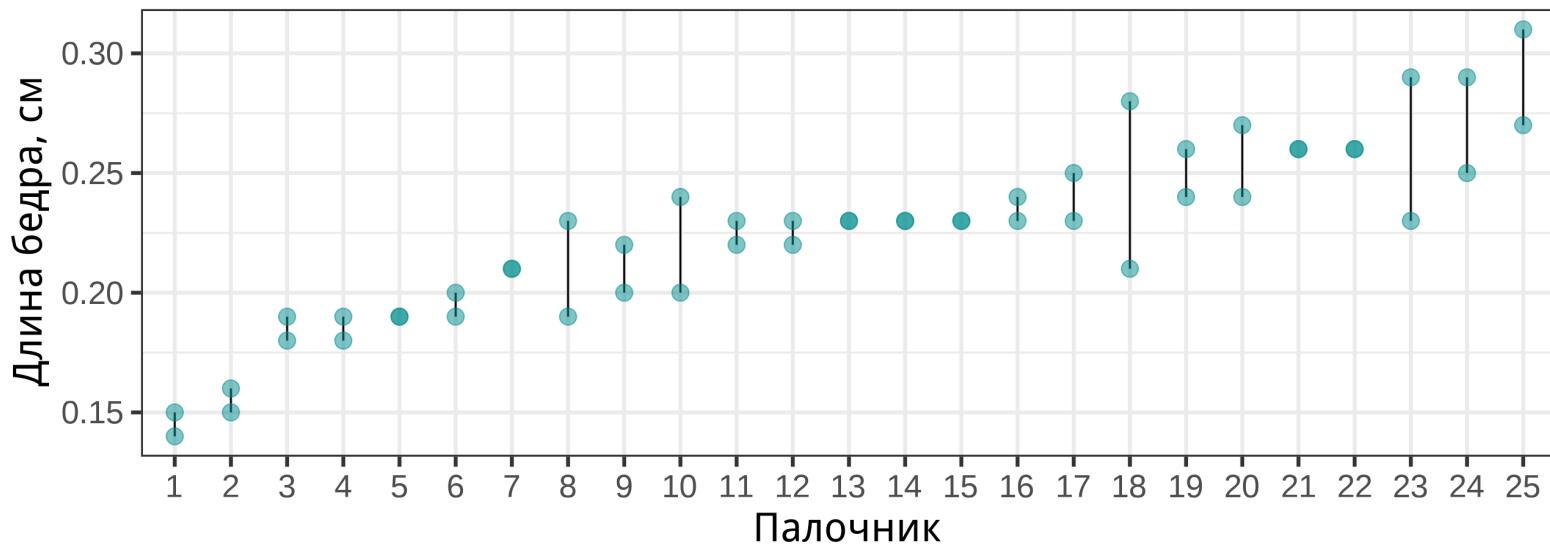
- определение вклада генов и среды в изменчивость признака при селекции
- определение ошибки измерения

# Ошибка измерения

Палочник *Timema cristinae* живет в чаппарале в Калифорнии. В исследовании морфологических адаптаций палочников к разным видам растений учитывали ошибку измерения (Nosil, Crespi, 2006).

Каждого палочника фотографировали и измеряли. Затем повторяли всю процедуру.

Насколько велика ошибка измерений по сравнению с изменчивостью признака?



# Дисперсионный анализ со случайным фактором

Если только один случайный фактор, то вычисления такие же, как для модели с фиксированным фактором.

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

# Дисперсионный анализ со случайным фактором

Если только один случайный фактор, то вычисления такие же, как для модели с фиксированным фактором.

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

Задача оценить компоненты дисперсии, поэтому F-тест не нужен.

# Два уровня изменчивости

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

# Два уровня изменчивости

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

## Внутри групп

$\sigma^2$  и ее оценка  $MS_e$  — дисперсия между измерениями на одном и том же объекте.

# Два уровня изменчивости

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

## Внутри групп

$\sigma^2$  и ее оценка  $MS_e$  — дисперсия между измерениями на одном и том же объекте.

## Междуд группами

Средние в группах  $\mu_i \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

$\sigma_A^2$  и ее оценка —  $s_A^2$  — дисперсия между средними в группах (т.е. на разных объектах).

$$s_A^2 = \frac{MS_{\text{группа}} - MS_e}{n_{\text{группа}}}$$

# Два уровня изменчивости

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

## Внутри групп

$\sigma^2$  и ее оценка  $MS_e$  — дисперсия между измерениями на одном и том же объекте.

## Междугруппами

Средние в группах  $\mu_i \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

$\sigma_A^2$  и ее оценка —  $s_A^2$  — дисперсия между средними в группах (т.е. на разных объектах).

$$s_A^2 = \frac{MS_{\text{группа}} - MS_e}{n_{\text{группа}}}$$

## В примере

$$MS_e = 0.000356$$

# Два уровня изменчивости

	SS	df	MS
Группа (палочник)	0.059132	24	0.002464
Случайная	0.008900	25	0.000356
Общая	0.068032	49	

## Внутри групп

$\sigma^2$  и ее оценка  $MS_e$  — дисперсия между измерениями на одном и том же объекте.

## Междугруппами

Средние в группах  $\mu_i \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$

$\sigma_A^2$  и ее оценка —  $s_A^2$  — дисперсия между средними в группах (т.е. на разных объектах).

$$s_A^2 = \frac{MS_{\text{группа}} - MS_e}{n_{\text{группа}}}$$

## В примере

$$MS_e = 0.000356$$

$$s_A^2 = \frac{0.002464 - 0.000356}{2} = 0.00105$$

# Воспроизводимость

Воспроизводимость (repeatability) — способ оценить долю изменчивости признака по отношению ко всей изменчивости.

$$Repeatability = \frac{s_A^2}{s_A^2 - MS_e}$$

# Воспроизводимость

Воспроизводимость (repeatability) — способ оценить долю изменчивости признака по отношению ко всей изменчивости.

$$Repeatability = \frac{s_A^2}{s_A^2 - MS_e}$$

---

$$Repeatability = \frac{0.00105}{0.00105 - 0.000356} = 0.747503$$

# Воспроизводимость

**Воспроизводимость** (repeatability) — способ оценить долю изменчивости признака по отношению ко всей изменчивости.

$$Repeatability = \frac{s_A^2}{s_A^2 - MS_e}$$

---

$$Repeatability = \frac{0.00105}{0.00105 - 0.000356} = 0.747503$$

Т.е. 75% общей изменчивости объясняется изменчивостью признака, а 25% — ошибкой измерения.

# Условия применимости дисперсионного анализа со случайным фактором

Те же самые + два новых

- Уровни фактора (группы) выбраны случайно из возможных уровней.
- Средние в группах нормально распределены.

# Summary

# Summary

- Дисперсионный анализ позволяет одновременно сравнивать средние значения в нескольких группах.
- Условия применимости дисперсионного анализа:
  - Случайность и независимость наблюдений внутри групп
  - Нормальное распределение **остатков**
  - Равенство дисперсий **остатков** в группах по фактору

# Summary

- Если влияние фактора статистически значимо, это означает, что какие-то из сравниваемых средних в группах по этому фактору отличаются друг от друга.
- Коэффициент детерминации  $R^2$  показывает, какую долю от всей изменчивости зависимой переменной объясняет фактор. Это мера силы влияния фактора.
- Чтобы узнать, какие именно средние различаются можно:
  - сделать заранее запланированные сравнения,
  - сравнить все подряд при помощи пост хок теста, но только если было показано, что влияние фактора значимо.

# Summary

- Факторы в дисперсионном анализе делят на две категории:
  - Фиксированные
  - Случайные

Дисперсионный анализ моделей со случайным фактором позволяет разложить дисперсию на компоненты, объясняемые этими факторами.

При помощи компонент дисперсии можно оценить воспроизводимость наблюдений.

# ЧТО ПОЧИТАТЬ

- Quinn, Keough, 2002, pp. 173-207
- Logan, 2010, pp. 254 - 282
- [Open Intro to Statistics](#)
- Sokal, Rohlf, 1995, pp. 179-260
- Zar, 2010, pp. 189-207