Коррекция гетерогенности дисперсий

Линейные модели...

Марина Варфоломеева, Вадим Хайтов

СПбГУ

Способы моделирования “поведения” дисперсии

Вы сможете

- Построить модели для данных, демонстрирующих высокую степень гетерогености дисперсии
- Подобрать оптимальную модель, учитывающую ковариаты дисперсии
- Построить смешанную модель учитывающую не только группирующие (случайные) факторы, но и гетерогенность дисперсии.

Гетерогенность дисперсии

Пример: Способствуют ли взрослые мидии притоку молоди?

Даные взяты из работы Khaitov, 2013

```
myt <- read.table("data/myt.csv", sep=";", header = TRUE)
head(myt, 12)
```

```
#    Year Bank Sample Recruits Small Large
# 1  1997 vor2      1        0    12    25
# 2  1997 vor2      2        0    23    27
# 3  1997 vor2      3        0    17    36
# 4  1997 vor2      4        0    17    27
# 5  1997 vor2      5        0    30    25
# 6  1997 vor2      6        0    12    27
# 7  1999 vor2      1       12    12    41
# 8  1999 vor2      2        2    16    38
# 9  1999 vor2      3        1    13    49
# 10 1999 vor2      4        6    19    52
# 11 1999 vor2      5        1     7    31
# 12 1999 vor2      6        2     9    34
```

В качестве зависимой перменной будем анализировать $\sqrt{N_{recruits}}$

```
myt$Sq_Recruits <- sqrt(myt$Recruits)
myt$fYear <- factor(myt$Year)
```

Строим обычную регрессионную модель

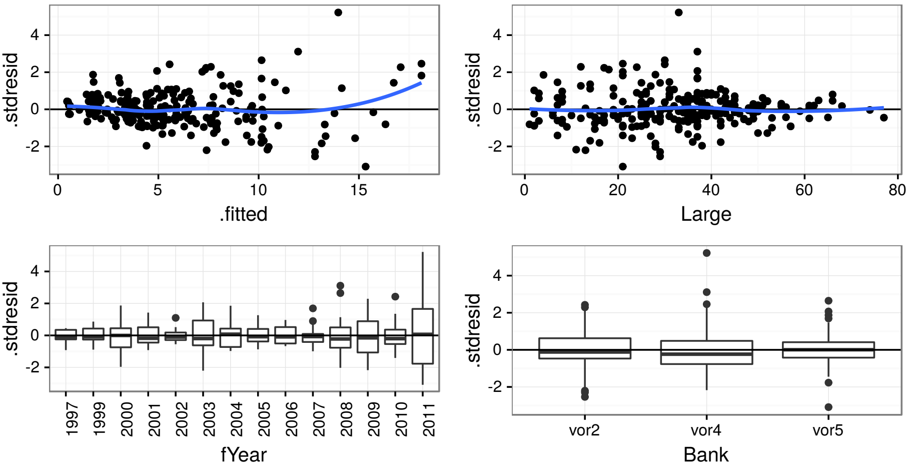
```r
mod_formula <- Sq_Recruits ~ Large +  fYear + Bank  +
  Large:fYear + Large:Bank
M1_lm <- lm(mod_formula, data = myt)

library(car)
Anova(M1_lm)
```

```
# Anova Table (Type II tests)
#
# Response: Sq_Recruits
#              Sum Sq  Df F value        Pr(>F)
# Large            32   1    5.85       0.01637 *
# fYear          2286  13   31.95       < 2e-16 ***
# Bank            263   2   23.85 0.00000000043 ***
# Large:fYear     220  13    3.08       0.00033 ***
# Large:Bank        2   2    0.14       0.86594
# Residuals      1194 217
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

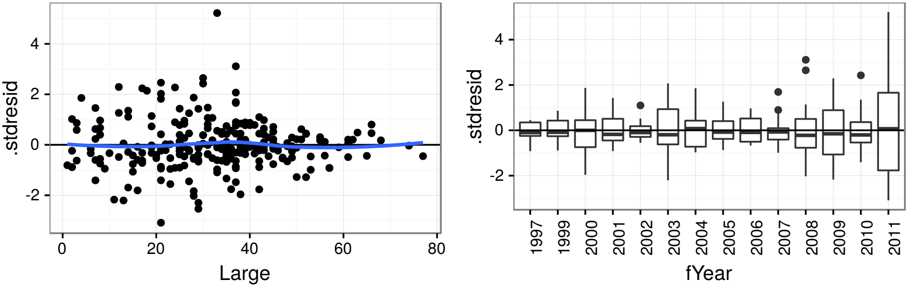
Можем ли мы доверять этим результатам?

Диагностика модели



Мы не можем доверять величинам уровня значимости!
Нарушается условие применимости линейных моделей, основанных на нормальном распределении остатков с неизменной дисперсией.

Ковариата дисперсии (Variance covariate)



Видно, что дисперсия остатков убывает по мере увеличения значения переменной `Large` и меняется год от года

Переменные `Large` и `fYear` являются ковариатами дисперсии

Моделирование гетерогенности дисперсии

В начале курса мы записывали “обычную” регрессионную модель в таком виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Фиксированная часть модели: $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$
Случайная часть модели: ε

Обычно мы считали, что $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

В начале курса мы записывали “обычную” регрессионную модель в таком виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Фиксированная часть модели: $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$
Случайная часть модели: ε

Обычно мы считали, что $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

т.е. остатки независимы и одинаково распределены со средним 0 и дисперсией σ^2, одинаковой для всех уровней y_i

Теория смешанных моделей расширяет наши представления о случайной части модели

$$Y = \underline{\text{fixed part}} + \underline{\text{random part}}$$

$\alpha + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_q X_q$

$\alpha + f_1(X_1) + \cdots + f_q(X_q)$

Heterogeneity

Nested data (random effects)

Temporal correlation

Spatial correlation

Random noise

Рис. из Zuur et al. 2009

Модели на языке матриц

Простая линейная модель

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

Смешанная линейная модель с группирующими факторами

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \Sigma_i)$$

$$\mathbf{b}_i \sim N(0, \mathbf{D})$$

Расширенная смешанная линейная модель

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\beta + \mathbf{Z}_i\mathbf{b}_i + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2\Lambda_i)$$

$$\mathbf{b}_i \sim N(0, \mathbf{D})$$

Ковариата дисперсии (Variance covariate)

Расширенная модель может включать еще один компонент

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \times f(VC))$$

VC - ковариата дисперсии
$f(VC)$ - функция, вводящая попаравку, стабилизирующую дисперсию

В зависимости от формы функции $f(VC)$ мы получим разную структуру дисперсии в модели

Различные формы структуры дисперсии

Для дальнейших вычислений необходимо использовать функцию `gls` из пакета `nlme`

```
library(nlme)
M1_gls <- gls(mod_formula, data = myt)
```

Если ничего не менять, то эта функция дает результаты полностью идентичные результатам функции `lm()`.

Для оценки параметров по умолчанию используется Restricted Maximum Likelihood (REML). Этот метод дает более точные оценки случайных факторов, чем обычный ML

Осторожно! Модели, подобранные с помощью REML, можно сравнивать только если у них одинаковая фиксированая часть!

```
Anova(M1_gls)
```

```
# Analysis of Deviance Table (Type II tests)
#
# Response: Sq_Recruits
#             Df  Chisq Pr(>Chisq)
# Large        1   5.85    0.01555 *
# fYear       13 415.39    < 2e-16 ***
# Bank         2  47.71    4.4e-11 ***
# Large:fYear 13  40.05    0.00014 ***
# Large:Bank   2   0.29    0.86586
```

1. Фиксированная структура дисперсии

Дисперсия изменяется пропорционально значениям ковариаты дисперсии

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 \times VC_i)$$

Предположим, что дисперсия меняется пропорционально численности больших мидий (Large)

```
M2_gls <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varFixed( ~ Large))
```

Можем сравнить две модели при помощи AIC

```
AIC(M1_gls, M2_gls)
```

```
#        df  AIC
# M1_gls 33 1228
# M2_gls 33 1290
```

Можем сравнить две модели при помощи AIC

```r
AIC(M1_gls, M2_gls)
```

```
#        df  AIC
# M1_gls 33 1228
# M2_gls 33 1290
```

Стало хуже. Но дисперсия явно убывала по мере увеличения значений перменной `Large`…

2. Разные дисперсии для разных уровней категориальных предикторов

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_j^2)$$

При построении моделей с такой структурой дисперсии подбирается $k - 1$ новых параметров, где k — количество уровней категориального предиктора.

```
M3_gls <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varIdent(form = ~1|fYear))
```

Сравним модели при помощи LRT

Важно! Модели `M1_gls` и `M3_gls` вложенные, поэтому их можно сравнивать LRT

`M1_gls`: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_m^2$
`M3_gls`: $k_1\sigma_1^2 = k_2\sigma_2^2 = ... = k_m\sigma_m^2$

```
anova(M1_gls, M3_gls)
```

```
#        Model df  AIC  BIC logLik   Test L.Ratio p-value
# M1_gls     1 33 1228 1340   -581
# M3_gls     2 46 1131 1287   -520 1 vs 2     123  <.0001
```

Сравним модели при помощи LRT

Важно! Модели `M1_gls` и `M3_gls` вложенные, поэтому их можно сравнивать LRT

`M1_gls`: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_m^2$
`M3_gls`: $k_1\sigma_1^2 = k_2\sigma_2^2 = ... = k_m\sigma_m^2$

```
anova(M1_gls, M3_gls)
```

```
#        Model df  AIC  BIC logLik   Test L.Ratio p-value
# M1_gls     1 33 1228 1340   -581
# M3_gls     2 46 1131 1287   -520 1 vs 2     123  <.0001
```

Модель `M3_gls` лучше!

Для второго дискретного предиктора можно построить аналогичную модель

```
M3_gls2 <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varIdent(form = ~1|Bank))

anova(M1_gls, M3_gls2)
```

```
#          Model df  AIC  BIC logLik   Test L.Ratio p-value
# M1_gls       1 33 1228 1340   -581
# M3_gls2      2 35 1216 1334   -573 1 vs 2    16.5  0.0003
```

Для второго дискретного предиктора можно построить аналогичную модель

```
M3_gls2 <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varIdent(form = ~1|Bank))

anova(M1_gls, M3_gls2)
```

```
#         Model df  AIC  BIC logLik   Test L.Ratio p-value
# M1_gls      1 33 1228 1340   -581
# M3_gls2     2 35 1216 1334   -573 1 vs 2    16.5  0.0003
```

Модель `M3_gls2` лучше, но не настолько.

Дальше не будем пока сравнивать модели с разными структурами дисперсий по одной. Сначала построим все, а потом все сравним.

Что произошло в результате работы функции varIdent()?

```r
summary(M3_gls)
```

Часть вывода summary(M3_gls)

```
Variance function:
 Structure: Different standard deviations per stratum
 Formula: ~1 | fYear
 Parameter estimates:
 1997  1999  2000  2001  2002  2003  2004  2005  2006  2007  2008
 1.00  2.62  4.39  3.47  2.84  5.85  4.93  3.21  2.95  3.87  7.98
 2009  2010  2011
 9.26  5.97 13.59
```

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_j^2)$$

Т.е. в выводе summary() присутствуют оценки σ_j^2

3. Степенная зависимость дисперсии от ковариаты

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 \times |VC|^{2\delta})$$

Параметр δ неизвестен и требует оценки

Если $\delta = 0$, то струкутра дисперсии будет аналогична структуре дисперсии в “обычной” регрессионной модели, где $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Важно! Если значения ковариаты дисперсии могут принимать значение равное нулю, то такая форма струкутры дисперсии неопределена и использоваться не может.

```
M4_gls <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varPower(form = ~ Large))
```

Что произошло в результате работы функции varPower()?

```r
summary(M4_gls)
```

Часть вывода summary(M4_gls)

```
  Variance function:
   Structure: Power of variance covariate
   Formula: ~Large
   Parameter estimates:
   power
  -0.214
```

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 \times |VC|^{2\delta})$$

Оценка параметра δ

```r
M4_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
#  power
# -0.214
```

Задание

Степенная зависимость дисперсии от ковариаты может учитывать и взаимодействие ковариаты дисперсии с категориальными предикторами

Напишите код, с помощью которого в модели будет учтена степенная зависимость дисперсии от переменной `Large`, но разная для каждого уровня фактора `fYear`. Аналогичный код напишите для фактора `Bank`

Подсказка: Изучите справку по функции `varPower()`

Решение: разная степенная зависимость дисперсии от ковариаты для разных уровней дискретного предиктора

```
M5_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
              weights = varPower(form = ~ Large|fYear))
M6_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
              weights = varPower(form = ~ Large|Bank))
```

```
M5_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
#    1997    1999    2000    2001    2002    2003    2004    2005
# -0.4236 -0.3033 -0.1106 -0.1966 -0.2512 -0.0680 -0.1480 -0.2494
#    2006    2007    2008    2009    2010    2011
# -0.2805 -0.1650  0.0359  0.0860 -0.0536  0.1860
```

```
M6_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
#    vor2    vor4    vor5
# -0.1980 -0.0488 -0.2299
```

4. Экспоненциальная зависимость дисперсии от ковариаты

$$\varepsilon_{ij} \sim N\left(0, \sigma^2 \times e^{2\delta \times VC_i}\right)$$

Эта форма структуры дисперсии может применяться для случаев, когда $VC = 0$

Если $\delta = 0$, то структура дисперсии будет аналогична структуре дисперсии в "обычной" регрессионной модели, то есть $\varepsilon_{ij} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$

```
M7_gls <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varExp(form = ~ Large))
M8_gls <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varExp(form = ~ Large|fYear)
M9_gls <- gls(mod_formula, data = myt, weights = varExp(form = ~ Large|Bank))
```

Что произошло в результате работы функции varExp()?

Оцененные параметры

```
M7_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
# expon
# -0.02
```

```
M8_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
#     1997     1999     2000     2001     2002     2003     2004
# -0.03093 -0.02296 -0.00946 -0.01591 -0.01679 -0.00395 -0.01906
#     2005     2006     2007     2008     2009     2010     2011
# -0.02190 -0.02417 -0.01310  0.00743  0.00939 -0.00347  0.02475
```

```
M9_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
#     vor2     vor4     vor5
# -0.02360 -0.00896 -0.02477
```

5. Усложненная степенная зависимость дисперсии от коварианты

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 \times (\delta_1 + |VC|^{2\delta_2})^2)$$

Впорос:

При каких значениях параметров функции $f(VC)$ структура дисперсии будет аналогична структуре дисперсии в “обычной” регрессионной модели?

5. Усложненная степенная зависимость дисперсии от ковариаты

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 \times (\delta_1 + |VC|^{2\delta_2})^2)$$

Впорос:

При каких значениях параметров функции $f(VC)$ структура дисперсии будет аналогична структуре дисперсии в "обычной" регрессионной модели?

Ответ:

При $\delta_1 = 0$ и $\delta_2 = 0$ выражение $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 \times (0 + |VC|^0)$ будет эквивалентно $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

```
M10_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
               weights = varConstPower(form = ~ Large))
#M11_gls <-gls(mod_formula, data = myt,
#               weights = varConstPower(form = ~ Large|fYear))
M12_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
               weights = varConstPower(form = ~ Large|Bank))
```

Что произошло в результате работы функции `varConstPower()`?

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 \times (\delta_1 + |VC|^{2\delta_2})^2)$$

```
M10_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
#   const   power
# -17.027  -0.214
```

```
M12_gls$modelStruct
```

```
# varStruct  parameters:
# const.vor2 const.vor4 const.vor5 power.vor2 power.vor4 power.vor5
#    -1.3195   -17.2718    -1.9165    -0.2939     0.0127    -0.2608
```

```
M13_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
               weights = varComb(varIdent(form = ~ fYear),
                                 varPower(form = ~ Large)))
M14_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
               weights = varComb(varIdent(form = ~ Bank),
                                 varPower(form = ~ Large)))
M15_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
               weights = varComb(varIdent(form = ~ fYear),
                                 varExp(form = ~ Large)))
M16_gls <- gls(mod_formula, data = myt,
               weights = varComb(varIdent(form = ~ Bank),
                                 varExp(form = ~ Large)))
```

Задание

Найдите модель с наилучшей структурой дисперсии

Решение

```
AICs <- AIC(M1_gls, M2_gls, M3_gls,
            M4_gls, M5_gls, M6_gls,
            M7_gls, M8_gls, M9_gls,
            M10_gls, M12_gls,M13_gls,
            M14_gls, M15_gls, M16_gls)
```

Решение

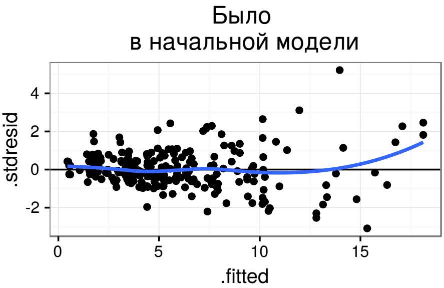
```r
AICs[AICs$AIC == min(AICs$AIC), ]
```

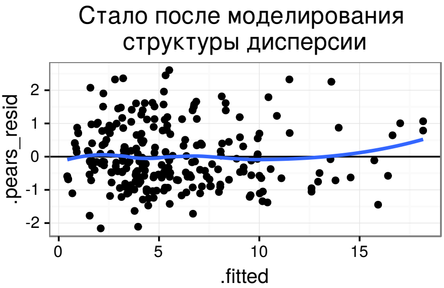
```
#        df  AIC
# M5_gls 47 1131
```

```r
M5_gls$call
```

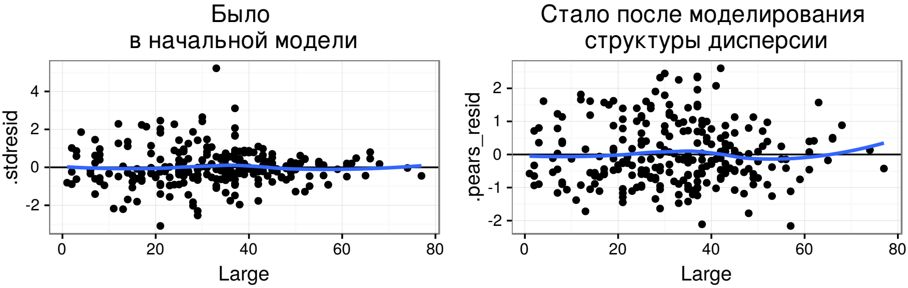
```
# gls(model = mod_formula, data = myt, weights = varPower(form = ~Large |
#     fYear))
```

Диагностика модели с оптимальной структурой дисперсии

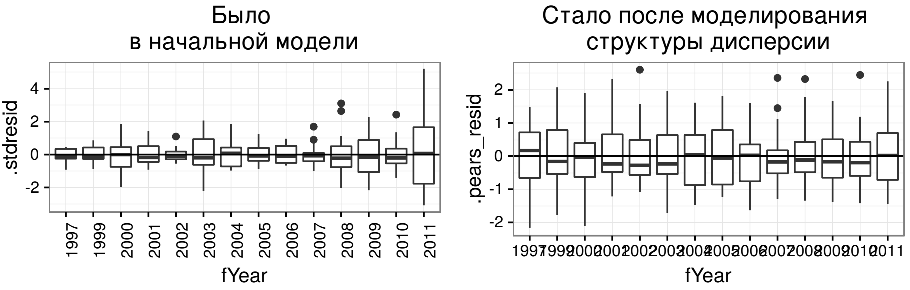




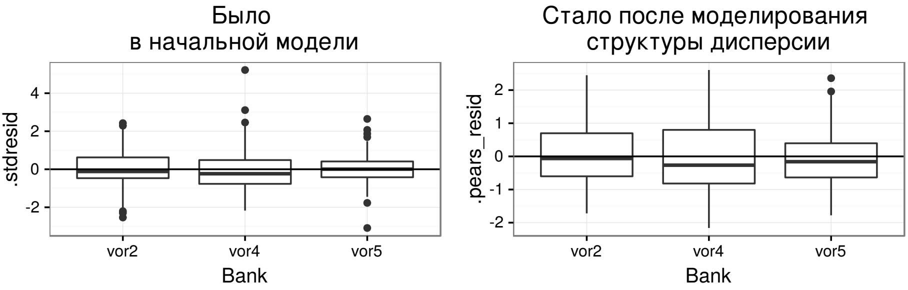
Диагностика модели с оптимальной структурой дисперсии



Диагностика модели с оптимальной структурой дисперсии



Диагностика модели с оптимальной структурой дисперсии



Можно ли упростить модель?

Обратите внимание, для оптимизации фиксированной части модели используем ML

```
M5_gls_ML <- update(M5_gls, method = "ML")
drop1(M5_gls_ML, test = "Chi")
```

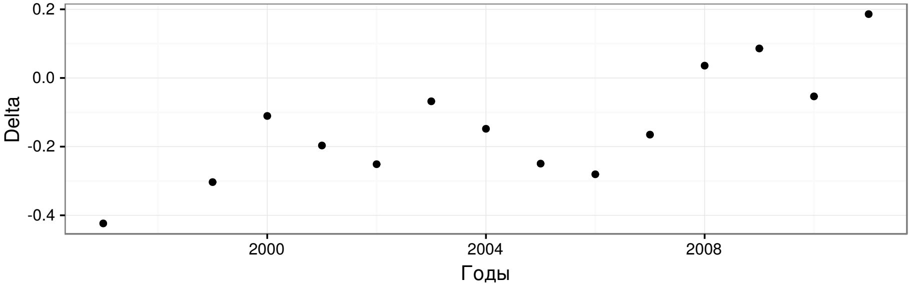
```
# Single term deletions
#
# Model:
# Sq_Recruits ~ Large + fYear + Bank + Large:fYear + Large:Bank
#             Df  AIC   LRT Pr(>Chi)
# <none>          1044
# Large:fYear 13 1048 30.02   0.0047 **
# Large:Bank   2 1050  9.68   0.0079 **
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Эту модель упростить нельзя!

То есть, изменение структуры дисперсии заставляет формулировать иные биологические выводы.

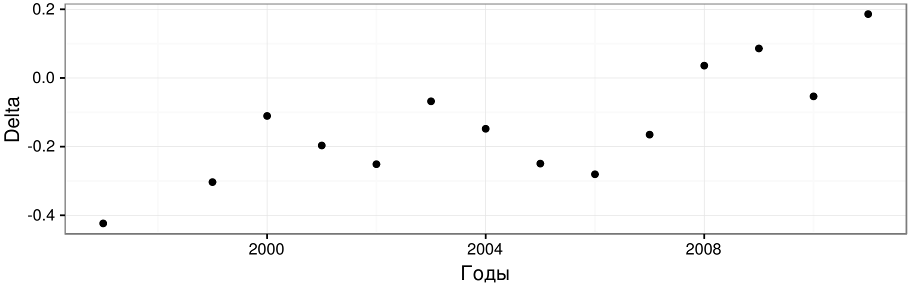
Структура дисперсии может иметь определенный биологический смысл

```
dat <- data.frame(x = c(1997, 1999:2011),
                  y = as.vector(unlist(M5_gls$modelStruct)))
ggplot(dat, aes(x = x, y = y)) + geom_point() + xlab("Годы") + ylab("Delta")
```



Структура дисперсии может иметь определенный биологический смысл

```
dat <- data.frame(x = c(1997, 1999:2011),
                  y = as.vector(unlist(M5_gls$modelStruct)))
ggplot(dat, aes(x = x, y = y)) + geom_point() + xlab("Годы") + ylab("Delta")
```



- В большинстве случаев параметр $\delta < 0$
- Чем больше обилие взрослых мидий, тем меньше варьирует обилие молоди
- Есть какая-то многолетняя динамика влияния обилия взрослых на “пятнистость” распределения молоди

Моделирование структуры дисперсии при наличии группирующих (случайных) факторов

Рост крыс при разной диете

Пример взят из книги Pinheiro & Bates, 2000 (Hand and Crowder (1996))

Три группы крыс, содержались при разных условиях кормления 64 дня. Каждую крысу взвешивали с определнной периодичностью.

```
data("BodyWeight")
bw <- as.data.frame(BodyWeight)
head(bw, 14)
```

```
#    weight Time Rat Diet
# 1     240    1   1    1
# 2     250    8   1    1
# 3     255   15   1    1
# 4     260   22   1    1
# 5     262   29   1    1
# 6     258   36   1    1
# 7     266   43   1    1
# 8     266   44   1    1
# 9     265   50   1    1
# 10    272   57   1    1
# 11    278   64   1    1
# 12    225    1   2    1
# 13    230    8   2    1
# 14    230   15   2    1
```

Задание

Постройте модель, которая дала бы ответ на вопрос, изменяется ли характер роста крыс в зависимости от типа диеты?

Решение: Неправильная модель

```
M1 <- gls(weight ~ Time*Diet, data = bw)
```

Решение: Неправильная модель

```
M1 <- gls(weight ~ Time*Diet, data = bw)
```

Важно! Строить простую линейную модель в данном случае *некорректно*!

- Дизайн эксперимента изначально включает случайный фактор. Здесь мы имеем дело с повторными наблюдениями одного и того же объекта.
- Однако мы рассмотрим M1 для демонстрации того, что происходит, если не учитывать этой осбенности экспериментального дизайна.

```
Anova(M1)
```

```
# Analysis of Deviance Table (Type II tests)
#
# Response: weight
#           Df   Chisq Pr(>Chisq)
# Time       1   19.55  0.0000098 ***
# Diet       2 2228.76    < 2e-16 ***
# Time:Diet  2    3.59       0.17
# ---
# Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Решение: Модель со случайными факторами

Важно! в этом эксперименте присутсвует случайный (группирующий) фактор Rat, который необходимо учесть в модели.

```
M2 <- lme(weight ~ Time*Diet, data = bw, random = ~1|Rat)
M3 <- lme(weight ~ Time*Diet, data = bw, random = ~1 + Time|Rat)
```

Решение: Модель со случайными факторами

Важно! в этом эксперименте присутсвует случайный (группирующий) фактор Rat, который необходимо учесть в модели.

```
M2 <- lme(weight ~ Time*Diet, data = bw, random = ~1|Rat)
M3 <- lme(weight ~ Time*Diet, data = bw, random = ~1 + Time|Rat)
```

Какую из моделей выбрать?

```
AIC(M2, M3)
```

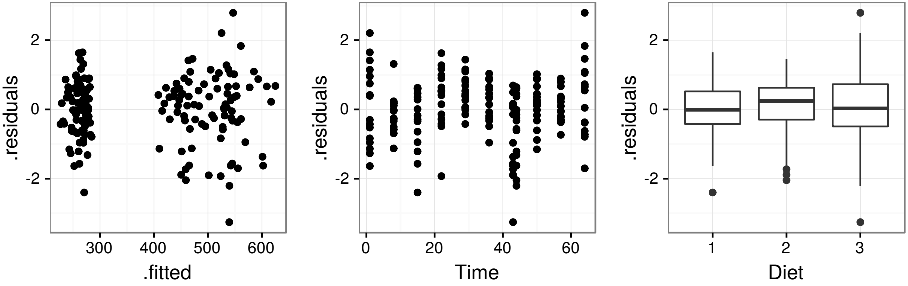
```
#    df  AIC
# M2  8 1248
# M3 10 1172
```

Решение: Пытаемся ответить на вопрос исследования

```r
Anova(M3)
```

```
# Analysis of Deviance Table (Type II tests)
#
# Response: weight
#           Chisq Df Pr(>Chisq)
# Time       82.6  1    < 2e-16 ***
# Diet      170.7  2    < 2e-16 ***
# Time:Diet  15.2  2    0.00051 ***
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Диагностика модели



Моделируем структуру дисперсии

```
M3_1 <- update(M3, weights = varIdent(form = ~ 1|Diet))
M3_2 <- update(M3, weights = varPower(form = ~Time))
M3_3 <- update(M3, weights = varPower(form = ~Time|Diet))
M3_4 <- update(M3, weights = varExp(form = ~Time))
M3_5 <- update(M3, weights = varExp(form = ~Time|Diet))
M3_6 <- update(M3, weights = varComb(varExp(form = ~Time),
                                     varIdent(form = ~1|Diet)))
```

Выбираем лучшую модель

```r
AIC(M3, M3_1, M3_2, M3_3, M3_4, M3_5, M3_6)
```

```
#      df  AIC
# M3   10 1172
# M3_1 12 1164
# M3_2 11 1173
# M3_3 13 1158
# M3_4 11 1174
# M3_5 13 1155
# M3_6 13 1165
```

Отвечаем на вопрос

```
Anova(M3_5)
```

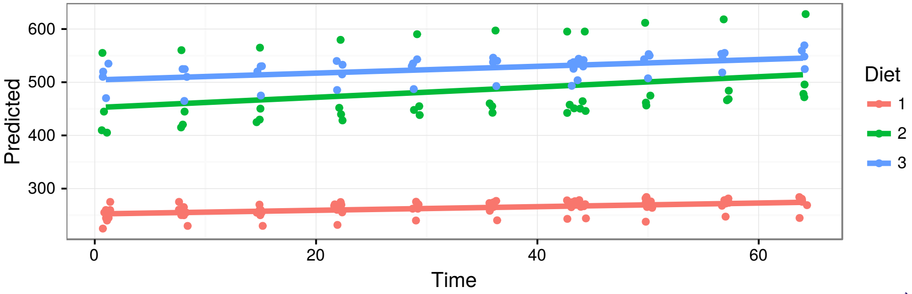
```
# Analysis of Deviance Table (Type II tests)
#
# Response: weight
#           Chisq Df Pr(>Chisq)
# Time       83.2  1    < 2e-16 ***
# Diet      169.3  2    < 2e-16 ***
# Time:Diet  17.3  2    0.00018 ***
# ---
# Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Смотрим на предсказания модели

```
MyData <- expand.grid(Time = unique(bw$Time), Diet = factor(1:3))

MyData$Predicted <- predict(M3_5, newdata = MyData, level = 0)

ggplot(MyData, aes(x = Time, y = Predicted,  color = Diet)) +
  geom_line( size = 1.5) +
  geom_point(data = bw, aes(x = Time, y = weight),
             position = position_jitter())
```



Summary

Проблему гетерогенности дисперсии можно решить двумя способами:

1. Преобразование перменных
2. Введение в модель той или иной структуры дисперсии, учитывающей тот или иной набор ковариат дисперсии.

Что почитать

- Zuur, A.F. et al. 2009. Mixed effects models and extensions in ecology with R. - Statistics for biology and health. Springer, New York, NY.
- Pinheiro J, Bates D (2000) Mixed effects models in S and S-Plus. Springer-Verlag, New York, USA