



**21156030: Métodos Numéricos Avanzados**

## **Tarea 3**

**Hecho por Álvaro Monforte Marín**

**11 de Septiembre de 2024**

# Copyright



Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 3.0 España. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/> o envíe una carta a Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Índice general

<b>Copyright</b>	<b>I</b>
<b>Índice general</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción al problema</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento de la ecuación de Laplace	1
1.1.1. Planteamiento de la ecuación de Laplace en coordenadas polares	1
1.1.2. Condiciones de frontera	1
1.2. Adimensionalización de la ecuación de Laplace	1
1.2.1. Variables adimensionales	1
1.2.2. Ecuación adimensionalizada	1
1.2.3. Condiciones de frontera adimensionalizadas	2
1.2.4. Discretización de la ecuación de Laplace	2
1.2.5. Condiciones de frontera discretizadas	2
1.3. Métodos Iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel	2
1.3.1. Método de Jacobi	2
1.3.2. Método de Gauss-Seidel	3
1.4. Método de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR)	3
1.5. Estabilidad del Método	3
1.6. Ventajas e Inconvenientes de SOR	3
1.6.1. Ventajas	3
1.6.2. Inconvenientes	3



# Introducción al problema

## 1.1. Planteamiento de la ecuación de Laplace

### 1.1.1. Planteamiento de la ecuación de Laplace en coordenadas polares

Plantear, en un sistema de coordenadas polares, las ecuaciones que determinan la temperatura en los puntos:

- $u(\theta, r)$ , con  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \dots$  y  $r = 0, \frac{R}{4}, \frac{2R}{4}, \dots$

La ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.1)$$

### 1.1.2. Condiciones de frontera

- En  $r = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$  (frontera de Neumann).
- En  $r = R$ ,  $u(R, \theta) = T_1$  (frontera de Dirichlet).
- En  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ ,  $u(\theta = 0) = u(\theta = \pi) = T_0$ .

## 1.2. Adimensionalización de la ecuación de Laplace

Para simplificar la resolución del problema, adimensionalizamos la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

### 1.2.1. Variables adimensionales

Definimos nuevas variables adimensionales para el radio y el ángulo:

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\pi}$$

Así,  $\tilde{r} \in [0, 1]$  y  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ .

La función de temperatura  $u(r, \theta)$  también se adimensionaliza utilizando un valor característico de temperatura  $T_{ref}$ :

$$\tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \frac{u(r, \theta)}{T_{ref}}.$$

### 1.2.2. Ecuación adimensionalizada

Partimos de la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.2)$$

Sustituyendo  $r = R\tilde{r}$  y  $\theta = \pi\tilde{\theta}$ , obtenemos la ecuación adimensionalizada:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{R\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{R^2 \tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} = 0 \quad (1.3)$$

Multiplicamos por  $R^2$  para simplificar, obteniendo:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} = 0 \quad (1.4)$$

### 1.2.3. Condiciones de frontera adimensionalizadas

Las condiciones de frontera también se deben expresar en términos de las variables adimensionales:

- En  $\tilde{r} = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} = 0$  (condición de Neumann).
- En  $\tilde{r} = 1$ ,  $\tilde{u}(1, \tilde{\theta}) = \frac{T_1}{T_{ref}}$  (condición de Dirichlet).
- En  $\tilde{\theta} = 0$  y  $\tilde{\theta} = 1$ ,  $\tilde{u}(0, \tilde{r}) = \tilde{u}(1, \tilde{r}) = \frac{T_0}{T_{ref}}$ .

### 1.2.4. Discretización de la ecuación de Laplace

Discretizamos la ecuación de Laplace adimensionalizada utilizando el método de diferencias finitas en una malla de tamaño  $N_{\tilde{r}} \times N_{\tilde{\theta}}$ , con los pasos de malla:

$$\Delta \tilde{r} = \frac{1}{N_{\tilde{r}} - 1}, \quad \Delta \tilde{\theta} = \frac{1}{N_{\tilde{\theta}} - 1}$$

La ecuación de Laplace adimensionalizada es:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} = 0 \quad (1.5)$$

La discretización en diferencias finitas de la ecuación queda:

$$\frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}}{\Delta \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i} \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{2\Delta \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}_i^2} \frac{\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}}{\Delta \tilde{\theta}^2} = 0 \quad (1.6)$$

Donde  $i$  y  $j$  son los índices que representan las posiciones discretizadas en  $\tilde{r}$  y  $\tilde{\theta}$ , respectivamente. Los valores de  $\tilde{r}_i$  corresponden a la posición radial  $i$ -ésima en la malla.

### 1.2.5. Condiciones de frontera discretizadas

Las condiciones de frontera se discretizan de la siguiente manera:

- En  $i = 0$  (correspondiente a  $\tilde{r} = 0$ ), utilizamos la condición de Neumann  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} = 0$ , que se discretiza como:

$$\tilde{u}_{1,j} = \tilde{u}_{0,j}$$

- En  $i = N_{\tilde{r}} - 1$  (correspondiente a  $\tilde{r} = 1$ ), aplicamos la condición de Dirichlet  $\tilde{u}(1, \tilde{\theta}) = \frac{T_1}{T_{ref}}$ , es decir:

$$\tilde{u}_{N_{\tilde{r}}-1,j} = \frac{T_1}{T_{ref}}$$

- En  $j = 0$  y  $j = N_{\tilde{\theta}} - 1$  (correspondiente a  $\tilde{\theta} = 0$  y  $\tilde{\theta} = 1$ ), aplicamos la condición de Dirichlet  $\tilde{u}(0, \tilde{r}) = \tilde{u}(1, \tilde{r}) = \frac{T_0}{T_{ref}}$ :

$$\tilde{u}_{i,0} = \tilde{u}_{i,N_{\tilde{\theta}}-1} = \frac{T_0}{T_{ref}}$$

## 1.3. Métodos Iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel

### 1.3.1. Método de Jacobi

El método de Jacobi consiste en iterar sobre la malla, calculando el valor de  $\tilde{u}_{i,j}$  en la siguiente iteración como una media ponderada de los valores actuales de los puntos vecinos:

$$\tilde{u}_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{\Delta \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i^2 \Delta \tilde{\theta}^2} \right)} \left[ \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^{(n)} + \tilde{u}_{i-1,j}^{(n)}}{\Delta \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i^2} \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^{(n)} + \tilde{u}_{i,j-1}^{(n)}}{\Delta \tilde{\theta}^2} \right] \quad (1.7)$$

### 1.3.2. Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es similar al de Jacobi, pero en lugar de utilizar los valores de la iteración anterior en todos los puntos, usa los valores más actualizados conforme avanza en la malla. Esto mejora la convergencia, ya que incorpora los últimos valores disponibles durante la misma iteración:

$$\tilde{u}_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{\Delta \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i^2 \Delta \tilde{\theta}^2} \right)} \left[ \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^{(n+1)} + \tilde{u}_{i-1,j}^{(n+1)}}{\Delta \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i^2} \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^{(n+1)} + \tilde{u}_{i,j-1}^{(n+1)}}{\Delta \tilde{\theta}^2} \right] \quad (1.8)$$

### 1.4. Método de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR)

Para mejorar la velocidad de convergencia del método de Gauss-Seidel, puedes aplicar el método de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR), donde el valor de  $\tilde{u}_{i,j}$  se actualiza usando una combinación ponderada del valor anterior y el valor obtenido en la iteración actual, controlada por el parámetro de sobrerrelajación  $\omega$ :

$$\tilde{u}_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \omega) \tilde{u}_{i,j}^{(n)} + \omega \cdot \tilde{u}_{i,j}^{(n+1)} (\text{Gauss-Seidel}) \quad (1.9)$$

Aquí,  $\omega$  es el parámetro de sobrerrelajación:

- Si  $\omega = 1$ , el método se reduce a Gauss-Seidel.
- Si  $\omega > 1$ , puede acelerar la convergencia, pero si es demasiado alto, puede hacer el método inestable.
- Si  $\omega < 1$ , el método se ralentiza, pero es más estable.

### 1.5. Estabilidad del Método

La estabilidad del método iterativo depende de varios factores:

- **Tamaño de la malla:** El número de nodos  $N_{\tilde{r}}$  y  $N_{\tilde{\theta}}$  influye en la convergencia. Una malla más densa tiende a converger más lentamente.
- **Valor del parámetro  $\omega$ :** El valor óptimo de  $\omega$  en SOR es clave para balancear la velocidad de convergencia y la estabilidad del método. Para muchos problemas, valores óptimos se encuentran entre  $1 < \omega < 2$ , aunque en la práctica puede variar y es común ajustarlo experimentalmente.
- **Tolerancia:** Debes establecer un criterio de convergencia basado en una tolerancia, por ejemplo:

$$\max \left| \tilde{u}_{i,j}^{(n+1)} - \tilde{u}_{i,j}^{(n)} \right| < \epsilon \quad (1.10)$$

donde  $\epsilon$  es un valor pequeño (por ejemplo,  $10^{-6}$ ).

### 1.6. Ventajas e Inconvenientes de SOR

#### 1.6.1. Ventajas

- **Velocidad:** SOR puede converger mucho más rápido que Jacobi o Gauss-Seidel si  $\omega$  es adecuado.

#### 1.6.2. Inconvenientes

- **Inestabilidad:** Si  $\omega$  es demasiado grande, el método puede volverse inestable.
- **Ajuste de  $\omega$ :** Determinar el valor óptimo de  $\omega$  puede requerir ajustes experimentales, lo que implica una desventaja si el tiempo es limitado.