

Prov: Algebra och Funktioner

Matematik 3b

Namn: _____ Datum: _____

1. (1p)

Bestäm graden och koefficienten för den högsta gradtermen i polynomet

$$p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$$

2. (1p)

Vilka av följande uttryck är polynom? Markera alla korrekta alternativ.

☐ a) $f(x) = 7$

☐ b) $g(x) = 3x^4 - |x| + 2$

☐ c) $h(x) = x^3 - \frac{5}{x} + 1$

☐ d) $k(x) = 4x^5 - 2x^2 + x - 9$

☐ e) $m(x) = x^{-\frac{1}{2}} + 5x$

3. (1p)

Hur många nollställen kan ett femtegradspolynom maximalt ha? Motivera ditt svar.

4. (2p)

Givet polynomet $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

a) Beräkna $p(2)$.

b) Är $x = 2$ ett nollställe till $p(x)$? Motivera ditt svar.

5. (1p)

Polynomet $p(x) = (x-2)(x+3)(x-5)$ är skrivet på faktorerad form. Bestäm polynomets nollställen.

6. (1p)

Förenkla uttrycket

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4}$$

7. (1p)

För vilka värden på x är uttrycket $\frac{2x + 5}{x^2 - 5x + 6}$ inte definierat?

8. (1p)

Förenkla uttrycket

$$\frac{3x + 6}{x^2 + 2x}$$

9. (1p)

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

10. (1p)

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

11. (2p)Lös ekvationen $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **12. (2p)**

Beräkna

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

och skriv svaret som ett ende rationellt uttryck.

13. (2p)

Beräkna

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} : \frac{x - 3}{x + 1}$$

och förenkla svaret.

14. (3p)Ett polynom $p(x)$ av tredje graden har nollställena $x = -2$, $x = 1$ och $x = 3$. Dessutom gäller att $p(0) = 12$.

a) Skriv polynomet på faktorerad form.

b) Bestäm polynomet på standardform.

15. (2p)Lös ekvationen $2x^4 - 8x^2 = 0$ fullständigt.**16. (2p)**

Förenkla uttrycket

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x + 2}{x - 2}$$

17. (2p)

Lös ekvationen

$$\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x+2}$$

18. (2p)

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

19. (2p)

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2}$$

20. (3p)

Nedan visas grafen till ett fjärdegradspolynom $p(x)$.

../../../../resources/images/polynom_graf.png

- a) Bestäm polynomets nollställen grafiskt.
- b) Vad kan du säga om nollställenas karaktär (enkla eller dubbla)?

21. (3p)

Funktionen $f(x)$ är definierad som

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{om } x < 2 \\ 5 & \text{om } x = 2 \\ 3x - 1 & \text{om } x > 2 \end{cases}$$

- a) Bestäm vänstergränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ och högergränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

- b) Existerar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Motivera ditt svar.
- c) Är funktionen kontinuerlig i $x = 2$? Motivera ditt svar.

22. (3p)

Ett företag tillverkar muggar. Produktionskostnaden är 5000 kr i fasta kostnader plus 15 kr per mugg. Låt x vara antalet tillverkade muggar.

- a) Skriv ett uttryck för den totala kostnaden $K(x)$ för att tillverka x muggar.
- b) Skriv ett uttryck för kostnaden per mugg som en funktion av x .
- c) Bestäm gränsvärdet när antalet muggar blir mycket stort. Vad betyder detta i praktiken?

23. (3p)

Bestäm konstanterna A och B så att likheten

$$\frac{5x - 1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

gäller för alla x där uttrycken är definierade.

24. (3p)

Lös ekvationen

$$\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{8}{x^2 - 1}$$

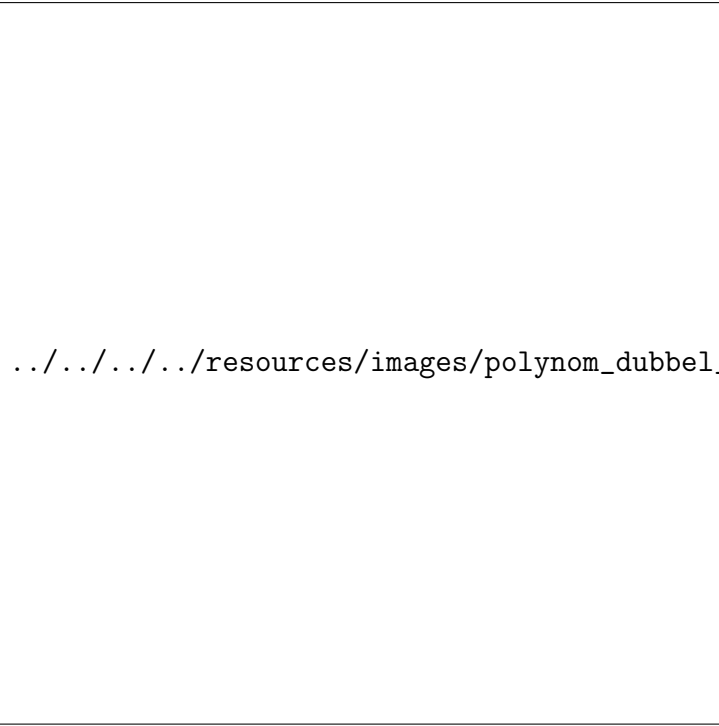
25. (3p)

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

26. (4p)

Ett polynom $p(x)$ av fjärde graden har nollställena $x = -1$ (dubbel rot), $x = 2$ och $x = 4$. Polynomet går genom punkten $(0, 8)$.



../../../../resources/images/polynom_dubbel_rot.png

- a) Skriv polynomet på faktorerad form.
- b) Bestäm polynomet på standardform.

27. (4p)

En rektangulär trädgård ska inhägnas med 100 meter staket. Låt x vara bredden på trädgården (i meter).

- a) Uttryck trädgårdens längd som en funktion av x .
- b) Skriv ett uttryck för trädgårdens area $A(x)$ som en funktion av x .
- c) Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x)$ och $\lim_{x \rightarrow 50^-} A(x)$. Vad betyder dessa gränsvärden i praktiken?
- d) Använd gränsvärdesanalys för att förklara varför arean inte kan bli oändligt stor.

Totalt: 65 poäng