Facit: Repetitionsuppgifter – Matematik 2b

Fabian Tingstrand

12 juni 2025

1 Analys av andragradsfunktioner

1. För funktionen $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

a) Nollställen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$.
Använd pq-formeln: $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$
Nollställena är $x = 5$ och $x = 1$.

b) Symmetrilinjen: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

c) Extrempunkten: $(3, f(3)) = (3, 9 - 18 + 5) = (3, -4)$
Eftersom $a = 1 > 0$ är detta ett minimum.

2. Grafen till andragradsfunktionen:

a) Nollställen: Från grafen kan vi avläsa att funktionen skär x-axeln i ungefär $x \approx -1,3$ och $x \approx 3,3$.

b) Symmetrilinjen: Eftersom grafen har sitt maximum ungefär vid $x = 1$, är symmetrilinjen $x = 1$.

c) Funktionsuttrycket: Vi kan se att grafen har formen av en nedåtvänd parabel, så $a < 0$.
Symmetrilinjen är $x = 1$, vilket ger $\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$.
Grafen går genom punkten $(0, 3)$, så $f(0) = c = 3$.
Grafen går också genom punkten $(1, 4)$, så $f(1) = a + b + c = 4$. Med $b = -2a$ och $c = 3$ får vi:
$a - 2a + 3 = 4 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$
Därmed är $b = -2a = -2 \cdot (-1) = 2$ och $c = 3$.
Funktionsuttrycket är $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

3. För funktionen $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$:

a) Nollställen: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 2 = 0$
Dividera med 3: $x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$
Använd pq-formeln: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + \frac{8}{3}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{12+8}{3}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{20}{3}}}{2}$
$x \approx -1,63$ eller $x \approx 0,41$

b) Symmetrilinjen: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 3} = \frac{-6}{6} = -1$

c) Extrempunkten: $(-1, f(-1)) = (-1, 3 - 6 - 2) = (-1, -5)$
Eftersom $a = 3 > 0$ är detta ett minimum.

4. För funktionen $f(x) = -x^2 + 4x + 5$:

a) Nollställen: $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$
Använd pq-formeln: $x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$
Nollställena är $x = 5$ och $x = -1$

b) Symmetrilinjen: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

c) Extrempunkten: $(2, f(2)) = (2, -4 + 8 + 5) = (2, 9)$
Eftersom $a = -1 < 0$ är detta ett maximum.

5. Grafen till andragradsfunktionen:

a) Nollställen: Från grafen kan vi avläsa att funktionen skär x-axeln i ungefär $x = 1$ och $x = 3$.

b) Symmetrilinjen: Eftersom grafen har sitt minimum ungefär vid $x = 2$, är symmetrilinjen $x = 2$.

c) Funktionsuttrycket: Vi kan se att grafen har formen av en uppåtvänd parabel, så $a > 0$.
Symmetrilinjen är $x = 2$, vilket ger $\frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$.
Grafen går genom punkten $(0, 3)$, så $f(0) = c = 3$.
Grafen går också genom punkten $(1, 0)$, så $f(1) = a - 4a + 3 = 0 \Rightarrow -3a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$.
Därmed är $b = -4a = -4$ och $c = 3$.
Funktionsuttrycket är $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

6. För andragradsfunktionen med nollställena $x = -2$ och $x = 3$ samt $f(0) = -6$:

a) Funktionsuttrycket: Vi vet att $f(x) = a(x - (-2))(x - 3) = a(x + 2)(x - 3)$
Utveckla: $f(x) = a(x^2 - 3x + 2x - 6) = a(x^2 - x - 6)$
Vi vet att $f(0) = -6$, så $f(0) = a(0^2 - 0 - 6) = -6a = -6 \Rightarrow a = 1$
Funktionsuttrycket är $f(x) = x^2 - x - 6$

b) Symmetrilinjen: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = 0,5$

c) Extrempunkten: $(0,5, f(0,5)) = (0,5, 0,25 - 0,5 - 6) = (0,5, -6,25)$
Eftersom $a = 1 > 0$ är detta ett minimum.

7. För andragradsfunktionen med extrempunkt i $(1, -4)$ och $f(0) = 2$:

a) Funktionsuttrycket: Eftersom extrempunkten är $(1, -4)$ är symmetrilinjen $x = 1$.
Detta ger $\frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$
Vi vet att $f(1) = -4$, så $f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = -4$
Vi vet också att $f(0) = 2$, så $f(0) = c = 2$
Från $a + b + c = -4$ och $b = -2a$ får vi: $a - 2a + 2 = -4 \Rightarrow -a = -6 \Rightarrow a = 6$
Därmed är $b = -2a = -12$ och $c = 2$
Funktionsuttrycket är $f(x) = 6x^2 - 12x + 2$

b) Nollställen: $f(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0$
Använd pq-formeln: $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$
Nollställena är $x \approx 0,18$ och $x \approx 1,82$

c) Symmetrilinjen: $x = 1$ (som vi redan bestämt)

2 Problemlösning med andragradsfunktioner

1. För bollen som kastas uppåt med funktionen $h(t) = 20t - 5t^2$:

a) Bollen når sin högsta höjd när $h'(t) = 0 \Rightarrow 20 - 10t = 0 \Rightarrow t = 2$ sekunder.

b) Höjden blir då $h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 40 - 20 = 20$ meter.

c) Bollen träffar marken när $h(t) = 0 \Rightarrow 20t - 5t^2 = 0 \Rightarrow 5t(4 - t) = 0$
Detta ger $t = 0$ eller $t = 4$. Eftersom $t = 0$ är starttiden, träffar bollen marken efter $t = 4$ sekunder.

2. För rektangeln med omkrets 24 cm:

a) Omkretsen är $2x + 2y = 24$, där x är bredden och y är längden.
Löser ut y: $y = \frac{24-2x}{2} = 12 - x$

b) Arean är $A(x) = x \cdot y = x(12 - x) = 12x - x^2$

c) Eftersom både x och y måste vara positiva, gäller $x > 0$ och $12 - x > 0 \Rightarrow x < 12$.
Alltså kan x anta värdena $0 < x < 12$.

d) Arean är maximal när $A'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$ cm.

e) Den maximala arean är $A(6) = 12 \cdot 6 - 6^2 = 72 - 36 = 36$ cm^2.