Inlämningsuppgift: Hållbar produktion

Matematik 3b

Viktor Arohlén

Översikt

Arbetsform: Individuellt

Tidsram: Två lektionspass + hemarbete

Inlämning: Handskrivna lösningar (skanna/fotografera om du lämnar in digital)

Digitalt verktyg: Endast GeoGebra för kontroll

Genomförande

- Lös alla deluppgifter på papper med tydlig struktur.
- Använd GeoGebra endast för kontroll av grafer, derivator och optimering. Notera i lösningen när och hur verktyget användes.
- Visa alla beräkningssteg, motiveringar och slutsatser.
- Lämna in: (1) Handskriven lösning (2) Skannad/fotograferad lösning

Del A – Produktionsmodell med linjära begränsningar

Figur 1: Produkterna som tillverkas

Situation: Ett företag producerar energidryck (x) och proteinbars (y).

Produktionen begränsas av:

- Tillgänglig arbetstid (max 50 timmar)
- Tillgängligt förpackningsmaterial (max 40 kg)
- Avtal med kunder kräver minst 5 enheter av varje produkt

Detta ger följande system av olikheter:

$$2x + y \leq 50 \quad \text{(Arbetstid i timmar)}$$

$$x + 2y \leq 40 \quad \text{(Förpackningsmaterial i kg)}$$

$$x \geq 5, \quad y \geq 5 \quad \text{(Minimiproduktion enligt avtal)}$$

1. Modellering

- Skriv upp vad x och y betyder.
- Förklara vad olikheterna betyder.
- Rita det tillåtna området i ett koordinatsystem.
- Skriv upp målet: maximera vinsten $V = 25x + 30y$.

2. Analys

- Beräkna alla hörnpunkter. Visa uträkningarna.
- Vilken hörnpunkt ger högst vinst? Hur mycket blir vinsten?
- Kontrollera ditt svar i GeoGebra.

3. Reflektion

- Beskriv två nya situationer (t.ex. mer arbetstid eller annat avtal).
- Hur ändras olikheterna? Vad händer med det tillåtna området?

Del B – Från sekant till tangent

Efterfrågekurvan beskriver priset:

$$P(x) = -0.2x^2 + 6x + 10$$

där P är priset i kronor och x är antalet sålda enheter (i hundratal).

1. Sekant mellan två punkter

- Beräkna $P(5)$ och $P(6)$.
- Beräkna sekantens lutning mellan $x = 5$ och $x = 6$.
- Skissa grafen och markera sekanten mellan punkterna.

2. Närmare tangenten

Nu ska vi undersöka vad som händer när punkterna kommer närmare varandra.

- Beräkna lutningen mellan $x = 5$ och $x = 5 + h$ för:
- $h = 1$
- $h = 0.5$
- $h = 0.1$
- Använd formeln: $k = \frac{P(5+h)-P(5)}{h}$.
- Skriv resultaten i en tabell med kolumnerna: h, $P(5 + h)$, och k.
- Vad händer med lutningen när h blir mindre?

3. Derivatans definition

- Skriv upp derivatans definition: $P'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{P(5+h)-P(5)}{h}$.
- Sätt in $P(x) = -0.2x^2 + 6x + 10$ och förenkla uttrycket.
- Beräkna gränsvärdet. Visa alla steg.
- Kontrollera ditt svar i GeoGebra

4. Tolkning

- Vad betyder värdet på $P'(5)$ i det här sammanhanget?
- Är priset stigande eller fallande när $x = 5$? Hur vet du det?

Del C – Villkor för deriverbarhet

⚠️ **OBSERVERA: Denna del är enbart för elever som siktar på högre betyg (C-A).**

Om du siktar på E-nivå kan du hoppa över Del C och fortsätta direkt till Del D.

Företaget har en produktionseffektivitetsfunktion som beskriver kvaliteten Q beroende på produktionstid x (i timmar):

$$Q(x) = \begin{cases} -0.5x^2 + 6x - 1 & \text{om } x < 4 \\ 2x + 7 & \text{om } x \geq 4 \end{cases}$$

Funktionen är styckvis definierad eftersom produktionsprocessen ändras efter 4 timmar (t.ex. byte av skift eller maskin).

Vi ska undersöka om funktionen är kontinuerlig och deriverbar i punkten $x = 4$, vilket är viktigt för att förstå om produktionen kan övergå smidigt eller om det sker ett abrupt skifte.

1. Kontinuitet

- Beräkna funktionsvärdet $Q(4)$ med den högra delen av funktionen.
- Beräkna gränsvärdet när x närmar sig 4 från vänster: $\lim_{x\to 4^-} Q(x)$.
- Beräkna gränsvärdet när x närmar sig 4 från höger: $\lim_{x\to 4^+} Q(x)$.
- Jämför de tre värdena. Är funktionen kontinuerlig i $x = 4$? Motivera.

2. Deriverbarhet

För att funktionen ska vara deriverbar måste derivatan från vänster och höger vara lika.

- Derivera den vänstra delen: $Q(x) = -0.5x^2 + 6x - 1$ för $x < 4$.
- Beräkna $Q'(4^-)$ (derivatan från vänster).
- Derivera den högra delen: $Q(x) = 2x + 7$ för $x \geq 4$.
- Beräkna $Q'(4^+)$ (derivatan från höger).
- Jämför värdena. Är funktionen deriverbar i $x = 4$? Motivera.
- Rita en skiss av funktionen och markera punkten $x = 4$.

3. Exempel och resonemang

- Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte deriverbar (t.ex. absolutbeloppsfunktionen).
- Förklara varför din funktion inte är deriverbar i en viss punkt.
- Vad skulle det betyda i produktionssammanhang om en funktion är kontinuerlig men inte deriverbar? (T.ex. plötslig förändring i produktionshastighet)

Del D – Marginalintäkter med GeoGebra

Företaget från Del A har också en intäktsfunktion för sin totala försäljning:

$$R(x) = -0.25x^3 + 3x^2 + 12x$$

där R är intäkten i tusen kronor (tkr) och x är antalet sålda enheter (i hundratal).

Marginalintäkten $R'(x)$ visar hur mycket intäkten ökar när man säljer en enhet till.

1. Digital kontroll

- Rita funktionen $R(x)$ i GeoGebra.
- Använd GeoGebra för att hitta derivatan $R'(x)$.
- Rita även $R'(x)$ i samma koordinatsystem.
- Skriv ner vilka kommandon du använde.

2. Analys på papper

- Derivera $R(x)$ för hand och skriv upp $R'(x)$.
- Lös ekvationen $R'(x) = 0$. Visa alla steg.
- Vilka x-värden är rimliga i produktionssammanhanget? (Tänk på att $x \geq 0$.)
- Vid vilket x-värde är marginalintäkten som störst? Använd GeoGebra-grafen och förklara.

3. Koppling till Del A

- I Del A optimerade du vinsten $V = 25x + 30y$. Hur skiljer sig det från att optimera intäkten $R(x)$?
- Varför kan det vara viktigt att känna till marginalintäkten när man planerar produktion?
- Hur skulle du kunna använda både linjär optimering (Del A) och derivata (Del D) tillsammans för att fatta smarta produktionsbeslut?

Sammanställning och inlämning

- Kontrollera att varje del har rubrik, beräkningar och slutsatser.
- Skriv en sammanfattning (5–6 meningar) med de viktigaste insikterna.
- Lämna in enligt lärarens instruktioner.