Facit

Övningsprov: Algebra och Funktioner

Matematik 3b

Uppgift 1

Ledtråd: Graden är den högsta exponenten. Koefficienten är talet framför den termen.

Lösning: Polynomet har termen $3x^4$ som högsta gradterm.

Svar: Graden är 4 och koefficienten för högsta gradtermen är 3.

Uppgift 2

Ledtråd: Ett polynom har endast heltalspotenser av x och inga x i nämnare eller under rot.

Lösning:

- a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$ (polynom)
- b) $g(x) = \frac{1}{x} + x^2 = x^{-1} + x^2$ (negativ exponent)
- c) $h(x) = \sqrt{x} + 3 = x^{1/2} + 3$ (bråkexponent)
- d) $k(x) = 4x^5 - 2x^3 + x - 9$ (polynom)
- e) $m(x) = x^{-2} + 5x$ (negativ exponent)

Svar: a) och d) är polynom.

Uppgift 3

Ledtråd: Tänk på sambandet mellan polynomets grad och antalet nollställen.

Lösning: Ett polynom av grad n kan ha högst n nollställen.

Svar: Maximalt 5 nollställen.

Uppgift 4

Ledtråd:

- a) Sätt in $x = 2$ i polynomet
- b) Ett nollställe innebär att $p(x) = 0$

Lösning:

a) $p(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$

b) Eftersom $p(2) = 0$ är $x = 2$ ett nollställe.

Svar: a) $p(2) = 0$ b) Ja, $x = 2$ är ett nollställe.

Uppgift 5

Ledtråd: Nollställena fås när varje faktor är lika med noll.

Lösning:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$
$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Svar: $x = 2$, $x = -3$, $x = 5$

Uppgift 6

Ledtråd: Faktorisera täljaren med konjugatregeln: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Lösning:

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x + 4} = x - 4$$

Svar: $x - 4$

Uppgift 7

Ledtråd: Ett rationellt uttryck är inte definierat när nämnaren är noll.

Lösning: Nämnaren är $x - 3$. Sätt $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Svar: $x = 3$

Uppgift 8

Ledtråd: Bryt ut gemensamma faktorer i täljare och nämnare.

Lösning:

$$\frac{3x + 6}{x^2 + 2x} = \frac{3(x + 2)}{x(x + 2)} = \frac{3}{x}$$

Svar: $\frac{3}{x}$

Uppgift 9

Ledtråd: För kontinuerliga funktioner: sätt in värdet direkt.

Lösning:

$$\lim_{x \to 3}(2x + 5) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$$

Svar: 11

Uppgift 10

Ledtråd: Faktorisera täljaren och förkorta innan du sätter in värdet.

Lösning:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Svar: 4

Uppgift 11

Ledtråd: Använd variabelsubstitution $t=x^2$ för att få en andragradsekvation.

Lösning: Låt $t=x^2$:

$$\begin{aligned} t^2-5t+4&=0\\ (t-1)(t-4)&=0\\ t=1 \text{ eller } t&=4 \end{aligned}$$

Återsubstitution:

- $x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$
- $x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

Svar: $x=\pm 1,\pm 2$

Uppgift 12

Ledtråd: Hitta gemensam nämnare och addera.

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}&=\frac{2(x-2)+3(x+1)}{(x+1)(x-2)}\\ &=\frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)}\\ &=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$

Uppgift 13

Ledtråd: Division av bråk: multiplicera med inverterade bråket.

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-9}{x+3} : \frac{x-3}{x+1} &= \frac{x^2-9}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x-3} \\ &= \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x-3} \\ &= x+1\end{aligned}$$

Svar: $x+1$

Uppgift 14

Ledtråd:

- a) Använd nollställena för att skriva faktorerna
- b) Multiplicera ut steg för steg

Lösning:

a) $p(x) = a(x+2)(x-1)(x-3)$

Använd $p(0) = 12$:

$$a(2)(-1)(-3) = 6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

Svar: $p(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3)$

b) Multiplicera ut:

$$\begin{aligned}p(x) &= 2(x+2)(x^2-4x+3) \\ &= 2(x^3-2x^2-5x+6) \\ &= 2x^3-4x^2-10x+12\end{aligned}$$

Svar: a) $p(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3)$ b) $p(x) = 2x^3-4x^2-10x+12$

Uppgift 15

Ledtråd: Bryt ut $2x^2$ först, sedan faktorisera $x^2 - 4$.

Lösning:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 0 \\ 2x^2(x^2 - 4) &= 0 \\ 2x^2(x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Svar: $x = 0$ (dubbelrot), $x = \pm 2$

Uppgift 16

Ledtråd: Faktorisera alla uttryck innan förenkling.

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x+2}{x-2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} \cdot \frac{x+2}{x-2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Svar: 1

Uppgift 17

Ledtråd: Korsmultiplicera och lös den linjära ekvationen.

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} &= \frac{2}{x+2} \\ 3(x+2) &= 2(x-1) \\ 3x + 6 &= 2x - 2 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Svar: $x = -8$

Uppgift 18

Ledtråd: Faktorisera täljaren och förkorta.

Lösning:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1} (x+2) = 1$$

Svar: 1

Uppgift 19

Ledtråd: Bryt ut högsta potensen av x i täljare och nämnare.

Lösning:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x+1}{x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x^2})}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

Svar: 3

Uppgift 20

Ledtråd:

- Nollställen är där grafen skär/tangerar x-axeln
- Dubbel rot: grafen tangerar (vänder vid) x-axeln
- Enkel rot: grafen skär x-axeln

Lösning: Från grafen kan vi se att polynomet har nollställen vid $x \approx 2$ och $x \approx 3.5$ (enkla rötter där grafen skär x-axeln) samt vid $x = 5$ (dubbel rot där grafen tangerar x-axeln).

Svar: a) Nollställen: $x \approx 2$, $x \approx 3.5$, $x = 5$ b) Vid $x = 5$ är det en dubbel rot (tangerar), övriga är enkla rötter (skär).

Uppgift 21

Ledtråd:

- Vänstergränsvärde: använd formeln för $x < 2$
- Högergränsvärde: använd formeln för $x > 2$
- Kontinuitet: gränsvärdet måste existera och vara lika med funktionsvärdet

Lösning:

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 + 1 = 5$ och $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

b) Ja, $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ eftersom vänster- och högergränsvärdet är lika.

c) Ja, funktionen är kontinuerlig eftersom $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$.

Svar: a) Båda gränsvärdena $= 5$ b) Ja, gränsvärdet existerar c) Ja, kontinuerlig

---

Uppgift 22

Ledtråd:

- a) Total kostnad = fasta kostnader + rörliga kostnader
- b) Kostnad per mugg = total kostnad delat med antal
- c) När $x \to \infty$, vad händer med $\frac{5000}{x}$?

Lösning:

a) $K(x) = 5000 + 15x$

b) $k(x) = \frac{5000+15x}{x} = \frac{5000}{x} + 15$

c) $\lim_{x\to\infty} k(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{5000}{x} + 15) = 0 + 15 = 15$ kr/mugg

Svar: a) $K(x) = 5000+15x$ b) $k(x) = \frac{5000}{x}+15$ c) 15 kr/mugg (de fasta kostnaderna fördelas på fler muggar)

Uppgift 23

Ledtråd: Använd partialbråksuppdelning. Sätt lämpliga värden på x för att eliminera en variabel i taget.

Lösning:

$$\frac{5x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

Därmed: $5x-1 = A(x+2)+B(x-2)$
Sätt $x=2$: $9 = 4A \Rightarrow A = \frac{9}{4}$
Sätt $x=-2$: $-11 = -4B \Rightarrow B = \frac{11}{4}$

Svar: $A = \frac{9}{4}$, $B = \frac{11}{4}$

Uppgift 24

Ledtråd: Skriv om vänsterledet med gemensam nämnare, sedan multiplicera bort nämnarna.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} &= \frac{8}{x^2-1} \\
\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{8}{(x-1)(x+1)} \\
(x+1)^2-(x-1)^2 &= 8 \\
x^2+2x+1-(x^2-2x+1) &= 8 \\
4x &= 8 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Svar: $x = 2$

Uppgift 25

Ledtråd: Multiplicera ut $(x+h)^2$ och förenkla. Bryt sedan ut h från täljaren.

Lösning:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

Svar: $2x$

Uppgift 26

Ledtråd:

- a) Dubbel rot betyder faktorn ska vara upphöjd till 2
- b) Multiplicera ut systematiskt, två faktorer i taget

Lösning:

a) $p(x) = a(x+1)^2(x-2)(x-4)$

Använd $p(0) = 8$:

$$a(1)^2(-2)(-4) = 8a = 8 \Rightarrow a = 1$$

Svar: $p(x) = (x+1)^2(x-2)(x-4)$

b) Multiplicera ut:

$$\begin{aligned}p(x) &= (x+1)^2(x-2)(x-4)\\ &= (x^2+2x+1)(x^2-6x+8)\\ &= x^4-3x^3-6x^2+8x+8\end{aligned}$$

Svar: a) $p(x) = (x+1)^2(x-2)(x-4)$ b) $p(x) = x^4-3x^3-6x^2+8x+8$

Uppgift 27

Ledtråd:

- a) Omkrets $= 2 \cdot \text{bredd} + 2 \cdot \text{längd}$
- b) Area $= \text{bredd} \times \text{längd}$
- c) Vad händer när bredden blir mycket liten eller mycket stor?
- d) Analysera funktionen $A(x) = 50x - x^2$ när x blir stor

Lösning:

a) Från $2x + 2l = 100$ får vi $l = 50 - x$

b) $A(x) = x \cdot l = x(50 - x) = 50x - x^2$

c) $\lim_{x \to 0^+} A(x) = 0$ och $\lim_{x \to 50^-} A(x) = 0$

d) Arean kan inte bli oändligt stor eftersom $A(x) = 50x - x^2$. När x ökar mycket blir $-x^2$-termen dominerande och arean minskar. Funktionen har ett maximum (vid $x = 25$ ger $A = 625$ m^2).

Svar: a) $l = 50 - x$ b) $A(x) = 50x - x^2$ c) Båda gränsvärdena $= 0$ (trädgården blir en linje) d) Arean begränsas av $-x^2$-termen som dominerar för stora x