

Extrakter från Nationella Prov Matematik 3b: Polynom, Rationella Uttryck och Gränsvärde

Sammanställda uppgifter med källhänvisning

October 4, 2025

1 Polynom, Polynomekvationer och Egenskaper

Dessa uppgifter rör polynom, derivering, extremvärden, terrasspunkter och lösning av polynomekvationer.

1.1 Standarduppgifter (E/C-nivå)

- Lös ekvationen $0 = (x^2 - 1)(x - 4)$. (Här är det troligt att ekvationen egentligen skulle vara $0 = (x^2 - 4)(x - 1)$ baserat på centralt innehåll, men den angivna formuleringen används) (NP Ma3b HT12, uppg. 4)
- Derivera $f(x) = 10 + 6x + 3x^4$. (NP Ma3b HT12, uppg. 5a)
- Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = 3x^4 + 7x^2 + 3$. (NP Ma3b HT13, uppg. 1b)
- Vilken grad har funktionen f då $f(x) = 3x^4 + 7x^2 + 3$? (NP Ma3b HT13, uppg. 1a)
- Lös ekvationen $0 = (x + 2)(x - 3)(x + 4)$. (NP Ma3b HT13, uppg. 4)
- Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = 4x^3 - 12x + 1$. (NP Ma3b VT14, uppg. 1)
- Lös ekvationen $0 = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$. (NP Ma3b VT14, uppg. 6)
- Bestäm extrempunkternas koordinater och karaktär för $f(x) = 4x^3 - 12x + 1$. (NP Ma3b VT14, uppg. 13)
- Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = 4x^3 + 7x + 2$. (NP Ma3b HT14, uppg. 1a)
- Bestäm ett tal A och ett tal B så att tredjegradsekvationen $x(x + A)(x + B) = 0$ får lösningarna $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ och $x_3 = -7/3$. (NP Ma3b HT14, uppg. 6)
- Ange graden för polynomet $5x^5 + 4x^7 + 3x^3 - 8$. (NP Ma3b HT15, uppg. 1)
- Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3$. (NP Ma3b VT15, uppg. 5a)
- Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = 2.5x^5 + 4x^2$. (NP Ma3b VT16, uppg. 5a)
- För funktionen f gäller att $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$. Bestäm $f'(x)$. (NP Ma3b VT17, uppg. 3a)
- För funktionen f gäller att $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$. Bestäm $f'(1)$. (NP Ma3b VT17, uppg. 3b)
- För funktionen $f(x) = 3x^2 - 6x - 10$: Ett av alternativen A–D är korrekt. (T.ex. Har grafen till funktionen en terrasspunkt?) (NP Ma3b VT17, uppg. 3c)
- Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = 4x^3 - 12x$. (NP Ma3b VT22, uppg. 6a)
- Lös ekvationen $3x^4 = 8x^2 - 4$. (Bikvadratisk ekvation) (NP Ma3b VT22, uppg. 7)
- Funktionen f ges av $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$. Använd derivata och bestäm koordinaterna för eventuella maxi- och minipunkter. (NP Ma3b VT22, uppg. 14)
- Har funktionen $f(x) = x^3 + 3x$ terrasspunkt? Motivera. (NP Ma3b VT22, uppg. 16)

1.2 Avancerade uppgifter och resonemang (A-nivå)

- För polynomfunktionen f gäller att $f'(x) > 0$ för alla x . Undersök hur många reella lösningar ekvationen $f(x) = 0$ har. (Resonemang, strängt växande funktion) (NP Ma3b HT13, uppg. 22)
- För funktionen f gäller att $f'(2) = -1$ och $f''(4) = 0$. Bestäm $f'(6)$. (Resonemang om derivatans symmetri) (NP Ma3b HT12, uppg. 24)
- Funktionen $f(x) = x^3 + 3x + 10$. Undersök om den har en terrasspunkt. (NP Ma3b HT15, uppg. 22)
- För funktionen f gäller att $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$. Undersök hur många reella lösningar ekvationen $f(x) = 0$ har. (NP Ma3b VT17, uppg. 17)
- För funktionen f gäller att $f(x) = 2.9x^3 + kx^2 + kx$ där $k > 0$. Grafen till funktionen har en terrasspunkt för ett visst värde på k . Bestäm detta värde på k . (NP Ma3b VT16, uppg. 25)
- Visa att oavsett vilket värde a har, är tangenternas riktningskoefficienter i punkterna $(a, f(a))$ och $(-a, f(-a))$ lika stora för funktionen $f(x) = kx^3$. (NP Ma3b VT17, uppg. 25)
- Bevisa att tangenten till kurvan $y = 1/x$ har arean 2 areaenheter oavsett var tangenten tangerar kurvan. (Involverar rationellt uttryck och generell algebra) (NP Ma3b VT14, uppg. 16)
- Visa att tangenterna till graferna i punkterna $(a, f(a))$ och $(3a, g(3a))$ är parallella oavsett värde på a då $f(x) = 4x^3$ och $g(x) = 12x$. (NP Ma3b VT22, uppg. 18)

2 Rationella Uttryck och Algebraisk Hantering

Dessa uppgifter fokuserar på hantering och förenkling av rationella uttryck samt förståelse för deras definitions mängd.

- Förenkla $\frac{(x+3)^5}{(x+3)^{10}}$ så långt som möjligt. (NP Ma3b VT14, uppg. 4a)
- Förenkla $\frac{a^2-1}{a^2+a}$ så långt som möjligt. (NP Ma3b VT14, uppg. 4b)
- Förenkla $x(x+7)(x-7) + 3$ så långt som möjligt. (NP Ma3b HT14, uppg. 5a)
- Förenkla $\frac{1}{x+1} - 1$ så långt som möjligt. (NP Ma3b HT14, uppg. 5b)
- Förenkla $\frac{x^3+6x}{x^3-5x}$ så långt som möjligt. (NP Ma3b VT22, uppg. 8a)
- Förenkla $\frac{x^2+12x+18}{2(x^2-9)}$ så långt som möjligt. (NP Ma3b VT22, uppg. 8b)
- För vilket värde på x är uttrycket $\frac{10x+2}{6x-3}$ inte definierat? (NP Ma3b HT15, uppg. 3)
- Bestäm konstanten a så att $\frac{x^2-a}{(x-1)(x+3)}$ kan förkortas. (NP Ma3b VT15, uppg. 15)
- Förenkla $\frac{(x+4)^3}{(x+4)^4}$ (Förenkling av rationellt uttryck) (NP Ma3b HT13, uppg. 5b)
- Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som: får värdet 0 då $x = -1$; är inte definierat för $x = 3$; är inte definierat för $x = -4$. (NP Ma3b VT13, uppg. 9b)
- Lös ekvationen $\frac{2}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$. (Rationell ekvation) (NP Ma3b VT14, uppg. 14)
- För funktionen $f(x) = \frac{x-1}{x-6}$: Har Sofia rätt att största värdet nås vid $x = 6$? Motivera. (Resonemang om definitions mängd) (NP Ma3b HT14, uppg. 19a)

3 Gränsvärde och Kontinuerliga Funktioner

Dessa uppgifter inkluderar gränsvärdesberäkningar (asymptoter och definition) samt resonemang kring diskreta och kontinuerliga funktioner.

- Vilket av alternativen A-D beskrivs bäst med en diskret funktion? (NP Ma3b HT12, uppg. 6)
- Bestäm derivatan till $f(x) = A/x$ med hjälp av derivatans definition. (Involverar gränsvärde) (NP Ma3b HT12, uppg. 16)
- Förklara varför integralen $\int_0^6 100x^2 dx$ ger ett för litet värde när den används för att räkna ut hur mycket pengar som finns i en burk på Marios 6-årsdag. (Jämförelse diskret/kontinuerlig) (NP Ma3b HT12, uppg. 25)
- Rita i koordinatsystemet en skiss som visar hur grafen till funktionen f kan se ut om den är ****kontinuerlig****, går genom $(1, 3), (3, 3), (5, 3)$ och $f'(1) > 0, f'(3) < 0, f'(5) > 0$. **[KOORDINATSYSTEM]** (NP Ma3b VT13, uppg. 4)
- Bestäm den övre gränsen för antalet fiskar (N) i populationsmodellen $N(t) = 3000 + \frac{15000}{e^{0.5t}}$. (Gränsvärde $t \rightarrow \infty$) (NP Ma3b VT13, uppg. 10b)
- Bestäm $S'(4)$ då S är en ****kontinuerlig funktion**** och $S(x+h) = S(x)+hx$. (Derivatans definition) (NP Ma3b VT13, uppg. 24)
- Bestäm konstanten A så att $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^2+4x}{7x^2+5} = 4/7$. (NP Ma3b HT13, uppg. 15)
- Enligt modellen $N(t) = \frac{11}{1+3.4e^{-0.03t}}$ kommer antalet människor att närma sig en övre gräns. Bestäm denna övre gräns. (Gränsvärde $t \rightarrow \infty$) (NP Ma3b HT13, uppg. 20b)
- Vilka två figurer A-F visar en graf till en diskret funktion? Vilka två visar en graf till en funktion som är ****kontinuerlig**** för alla x ? **[FIGURER]** (NP Ma3b HT14, uppg. 3a), (NP Ma3b HT14, uppg. 3b)
- Vad måste gälla för att linjen $y = f(x)$ ska tangera kurvan $y = g(x)$ i den punkt där $x = a$? (Villkor för tangering/Kontinuitet och derivata) (NP Ma3b HT14, uppg. 15)
- Bestäm $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h-1}{h}$ och svara exakt. (Gränsvärde relaterat till derivatan av 3^x) (NP Ma3b VT15, uppg. 10)
- Bestäm den undre gränsen för vattentemperaturen enligt modellen $T(x) = 17e^{-0.693x}+5$. (Gränsvärde $x \rightarrow \infty$) (NP Ma3b VT15, uppg. 19d)
- Bestäm derivatan till $f(x) = 1/(\sqrt{ax})$ med hjälp av derivatans definition. (Involverar gränsvärde) (NP Ma3b VT16, uppg. 17)
- Bestäm derivatan till $f(x) = 5/x^2 - a/x^2$ med hjälp av derivatans definition. (NP Ma3b VT22, uppg. 17)

4 Problemlösning och Digitala Verktyg

Dessa uppgifter kräver modellering, optimering av funktioner (inklusive polynom) och/eller användning av digitala verktyg för att lösa uppgifterna.

- ****Optimering (Polynom):**** Rätblockets maximala volym. Beräkna största möjliga volym med derivata, där sidorna är $3x$, $(6-x)$ och $(6-x)$. **[FIGUR]** (NP Ma3b HT12, muntlig uppg. 1)
- ****Linjär Optimering:**** Sture (pallar x , byråer y). Max vinst under tidsbegränsningar. **[OLIKHETER]** (NP Ma3b HT12, uppg. 20b)
- ****Optimering (Differensfunktion):**** Bestäm det kortaste avståndet i y -led mellan graferna till $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1$ och $g(x) = 7.5x - 1.8$ då $x > 0$. (NP Ma3b HT13, muntlig uppg. 1)
- ****Optimering (Modellering):**** Karin ska bygga rektangulära rastgårdar. Bestäm x så att arean blir maximal. **[FIGUR]** (NP Ma3b HT13, uppg. 12)

- ****Optimering (Derivata av V'):**** Vilka värden kan hastigheten $V'(t)$ anta under Albins åtta första levnadsår, där $V(t)$ är en tredjegradsfunktion? (NP Ma3b HT13, uppg. 23)
- ****Linjär Optimering (A-nivå):**** Skräddaren (kostymer/jackor) maximerar vinst $V = 300x + 250y$ under tygvillkor. (NP Ma3b HT13, uppg. 24)
- ****Linjär Optimering:**** Bagare (Hurtig/Nyttig) maximerar vinst under begränsningar. (NP Ma3b VT14, uppg. 23)
- ****Optimering (Area/Modeling):**** Glasmästaren. Beräkna det mått på bredden som ger spegelns största area, där spegeln har ett hörn på en avskuren kant. **[FIGUR]** (NP Ma3b VT14, uppg. 25)
- ****Ekvationslösning (Digitalt verktyg):**** Lös ekvationen $4x^3 - 17x = 5$. (NP Ma3b HT14, uppg. 22)
- ****Optimering (Inkomst):**** Beräkna med hjälp av derivata vilken prishöjning x som ger den största dagsinkomsten $f(x) = -1.05x^2 + 5x + 3000$. (NP Ma3b HT14, uppg. 12)
- ****Linjär Optimering:**** Ellen och David (Tvålar). Bestäm antal av varje sort för att tjäna så mycket pengar som möjligt $V = 15x + 10y$. (NP Ma3b HT15, uppg. 23)
- ****Optimering (Låda):**** Bestäm sidlängden x cm för den låda som har största volymen, given kartongmått (60×30 cm). **[FIGUR]** (NP Ma3b VT13, muntlig uppg. 2)
- ****Linjär Optimering:**** Bestäm det största och det minsta värde som funktionen $V = 500x - 200y$ kan anta under givna olikhetsvillkor. (NP Ma3b VT16, uppg. 24)
- ****Optimering (Area/Modeling):**** Bestäm bredden x på de rektangulära tygservetterna så att arean blir så stor som möjligt, givet kurvan $y = -0.5x^3 + 3x + 3$. (NP Ma3b VT16, uppg. 24)
- ****Linjär Optimering:**** Julius och Sophia (Sittkuddar). Maximera vinst $V = 500x + 400y$. (NP Ma3b VT22, uppg. 24)
- ****Digitalt verktyg:**** Använd ditt digitala verktyg för att beräkna ett värde på $f'(2)$ för $f(x) = (2x - 1)^5$. (NP Ma3b VT22, uppg. 19)
- ****Area (Integration/Modeling):**** Bestäm a så att arean av det streckade området blir lika stort som arean av det gråmarkerade området ($y = e^x$). **[FIGUR]** (NP Ma3b VT17, uppg. 27)