# Analízis II. vizsgatételek

Vághy Mihály

# Tartalomjegyzék

# 1. Tétel

## 1.1. Függvénysorozat

Függvénysorozat egy olyan hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$-hez hozzárendel egy

$$f_n(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor a sorozatot $(f_n)$-el jelöljük.

## 1.2. Pontonként konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)$ sorozat pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall x \in [a, b]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \varepsilon.$$

Ekkor $\lim f_n = f$.

## 1.3. Egyenletesen konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)$ sorozat egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big| f_n(x) - f(x) \Big| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

## 1.4. Pontonként konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$, azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f.$$

## 1.5. Egyenletesen konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a,b]$.

## 1.6. Weierstrass kritérium

Adottak az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy az $f_n$ függvények korlátosak, és $|f_n(x)| < a_n$. Ekkor ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

egyenletesen konvergens.

**Bizonyítás**
A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy kritérium miatt tudjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N$, melyre

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} \left| f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

## 1.7. Összegfüggvény folytonossága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények folytonosak, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ is folytonos.

**Bizonyítás**
Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = F_n(x) + R_n(x).$$

Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N$ küszöbindex, melyre $n > N$ esetén

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| R_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ebből kapjuk, hogy $\left| R_n(x) - R_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x, x_0 \in [a, b]$.
Mivel $F_n(x)$ véges sok folytonos függvény összege, ezért önmaga is folytonos, tehát $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén $\left| F_n(x) - F_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Azt kaptuk tehát, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \left| F_n(x) - F_n(x_0) \right| + \left| R_n(x) - R_n(x_0) \right| < \varepsilon$$

tehát a függvény folytonos.

## 1.8. Összefüggvény integrálhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, ahol $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx.$$

## 1.9. Összegfüggvény deriválhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$

egyenletesen konvergensek. Ekkor $g(x) = f'(x)$, azaz

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

# 2. Tétel

## 2.1. Fourier sor

Az $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ $[-\pi, \pi]$-n integrálható függvény Fourier sora

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big)$$

ahol a Fourier együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

A sort közelíthetjük az $n$-edik Fourier polinommal

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

## 2.2. Deriváltfüggvény Fourier sora

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $2\pi$ periódusú, differenciálható függvény. Ekkor $f'$ Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható, azaz

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Big( -a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx) \Big).$$

**Bizonyítás**

Vizsgáljuk meg $f'$ Fourier együtthatóit!

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = 0$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left( f(x) \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \right) =$$

$$= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = k b_k.$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\beta_k = -k a_k.$$

## 2.3. Fourier sorok konvergenciája

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $2\pi$ periódusú függvény. Tegyük fel, hogy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon $f$ megfelel a Dirichlet feltételnek, azaz szakaszonként folytonos, legfeljebb véges sok szakadási hellyel, amelyek elsőfajú szakadások. Legyen továbbá az $x_0$ szakadási pontokban

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Ekkor $f$-t előállítja a Fourier sora.

## 2.4. Bessel-egyenlőtlenség

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

**Bizonyítás**

Tudjuk, hogy

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \Bigg( \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx + b_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx \right\} -$$

$$-a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + 2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} a_j a_k \cos(jx) \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_j b_k \sin(jx) \sin(kx) dx \right\} +$$

$$+2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} a_j b_k \cos(jx) \sin(kx) dx \right\} -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right\} +$$

$$+a_0 \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx \right\} \Bigg).$$

Ekkor a trigonometrikus függvényrendszer ortogonalitása miatt azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( a_k^2 + b_k^2 \right) - \frac{a_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \frac{b_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) - a_0^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

## 2.5. Parseval egyenlőség Fourier soroka

Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big).$$

Ekkor

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

# 3. Tétel

## 3.1. Kétváltozós függvény értelmezése, ábrázolása

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$f : S \mapsto \mathbb{R}$$

kétváltozós függvény, ahol $S$ pontjaihoz $(x, y) \mapsto u$. Ekkor $x, y$ független változók, $u$ függő változó.
Kétváltozós függvényeket három dimenzióban könnyen tudunk ábrázolni, az $xy$ sík legyen az értelmezési tartomány, és az $(x, y, 0)$ ponthoz rendeljük hozzá az $\big(x, y, f(x, y)\big)$ pontot. Ábrázolhatjuk még két dimenzióban a felület szintvonalait, ilyenkor az $f(x, y) = k$ görbét ábrázoljuk.

## 3.2. Folytonosság pontban

Adott $f$ kétváltozós függvény és $(x_0, y_0) \in D_f$. Ekkor $f$ folytonos az $(x_0, y_0)$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x, y) \in D_f$, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

## 3.3. Sorozatfolytonosság pontban

Adott $f$ függvény sorozatfolytonos a $P_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (P_n) \subset D_f$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$ esetén $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$.

## 3.4. Bolzano tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $S$ összefüggő. Legyen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, melyekre $a = f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2) = b$. Ekkor $\forall c \in (a, b)$ számhoz $\exists (x_0, y_0) \in S$, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

**Bizonyítás**
Mivel $S$ folytonos, létezik az $(x_1, y_1)$ és $(x_2, y_2)$ pontokat összekötő folytonos görbe, azaz létezik $\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ függvény, melyre $\gamma(\alpha) = (x_1, y_1)$ illetve $\gamma(\beta) = (x_2, y_2)$. Ekkor az $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ függvényre az egydimenziós Bolzano tétel miatt $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ekkor $(x_0, y_0) := \gamma(\xi)$-re valóban $f(x_0, y_0) = c$.

## 3.5. Weierstrass tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $S$ korlátos és zárt. Ekkor $R_f$ korlátos és zárt.

## 3.6. Egyenletes folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy $f$ egyenletesen folytonos $S$-ben ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall P, P' \in S$, $\|P - P'\| < \delta$ esetén $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$. Ekkor $\delta = \delta(\varepsilon)$ az $\varepsilon$-hoz tartozó folytonossági modulus.

# 4. Tétel

## 4.1. Függvény határértéke

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ függvény, és legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont $D_f$-ben. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, melyre $(x, y) \in S$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $\big|f(x, y) - L\big| < \varepsilon$.

## 4.2. Parciális derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in intS$. Ekkor a függvény $x$ szerinti parciális deriváltja az $(x_0, y_0)$ pontban

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan a függvény $y$ szerinti parciális deriváltja az $(x_0, y_0)$ pontban

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

### 4.2.1. Geometriai jelentés

Rögzített $y_0$ mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x, y_0)$ függvényt. Ekkor $f_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$, tehát a definiált metszetfüggvény meredekségét kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a parciális deriváltak a felület érintősíkjának $x$ és $y$ irányú meredekségét adják meg.

## 4.3. Parciális deriváltak és folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ahol $S \subset \mathbb{R}^2$, és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete $(x_0, y_0)$-nak, amiben $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le K \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$$

teljesül $\forall(x, y) \in U$ esetén. Ekkor $f$ folytonos $(x_0, y_0)$-ban.

**Bizonyítás**

Vizsgáljuk meg az $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ kifejezést, ahol $(x, y) \in U$.

$$\big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| = \big|f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\big| \le$$

$$\le \big|f(x, y) - f(x_0, y)\big| + \big|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\big|.$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0)$$

alkalmas $\xi_x, \xi_y$ esetén. Ekkor

$$\big|f(x,y) - f(x_0,y_0)\big| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0)\right| \leq$$
$$\leq K|x - x_0| + K|y - y_0|.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big|f(x,y) - f(x_0,y_0)\big| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $f$ valóban folytonos.

## 4.4. Magasabb rendű parciális deriváltak

### 4.4.1. Másodrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy $f$ kétváltozós függvény kétszer differenciálható az értelmezési tartomány $(x, y)$ belső pontjában. Ekkor a másodrendű parciális deriváltak a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltjai az $(x, y)$ pontban. A másodrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

### 4.4.2. $n$-edrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy $f$ kétváltozós függvény $n$-szer differenciálható az értelmezési tartomány $(x, y)$ belső pontjában. Az $n$-edrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^k \partial x^m} \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^m}$$

alakúak, ahol $k + m = n$.

## 4.5. Parciális deriválások sorrendje, felcserélhetősége

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete $(x_0, y_0)$-nak, amiben $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és folytonosak az $(x_0, y_0)$ pontban. Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

teljesül $\forall (x, y) \in U$ esetén.

# 5. Tétel

## 5.1. Teljes differenciálhatóság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, ha $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o\big(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\big)$$

teljesül elegendően kicsi $\Delta x, \Delta y$ esetén, ahol $A, B, C$ függetlenek $\Delta x$-től és $\Delta y$-tól.

## 5.2. Kapcsolat a parciális deriváltakkal

Ha $f$ differenciálható az $(x_0, y_0) \in intD_f$ pontban, akkor

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad C = f(x_0, y_0).$$

**Bizonyítás**

1. Legyen $\Delta x = \Delta y = 0$. Ekkor valóban
$$f(x_0, y_0) = C.$$
2. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor
$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = A\Delta x + f(x_0, y_0) + o(|\Delta x|).$$
Ebből kapjuk, hogy
$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$
amiből nyilván
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\right) = A.$$
3. Az előzőhöz analóg módon kapjuk, hogy
$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

## 5.3. Gradiens

Ha az $f$ függvény differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, akkor ebben a pontban a derivált egy kétdimenziós vektor, a gradiens

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Ha egy függvény egy $S$ tartomány minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\nabla f : S \mapsto \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

## 5.4. Folytonosság és differenciálhatóság

### 5.4.1. Tétel

Ha $f$ differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, akkor itt folytonos.

**Bizonyítás**
Tudjuk, hogyha $f$ differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, akkor

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + f(x_0,y_0) + o\big(\|(\Delta x, \Delta y)\|\big).$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x_0, y_0).$$

### 5.4.2. Tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel $\exists U$ környezete $(x_0, y_0)$-nak, ahol $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és folytonosak. Ekkor $f$ differenciálható $(x_0, y_0)$-ban.

**Bizonyítás**
Vizsgáljuk meg az

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

kifejezés értékét!

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x$$

$$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

alkalmas $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ esetén. Ekkor a parciális deriváltak folytonossága miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_1+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta y).$$

Ekkor

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)\Delta x + o(\Delta y)\Delta y$$

azaz $f$ valóban differenciálható.

## 5.5. Érintősík egyenlete, normálvektor

Ha az $f$ függvény differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, akkor az ehhez a ponthoz tartozó érintősík egyenlete

$$S: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - \big(z - f(x_0, y_0)\big) = 0.$$

Ekkor a sík normálvektora

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

# 6. Tétel

## 6.1. Iránymenti derivált

Adott $f$ kétváltozós függvény és $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ekkor az $\alpha$ irányú iránymenti derivált (ha létezik a határérték)

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos\alpha, y_0 + \varrho \sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

Adott $v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány esetén, ahol $\|v\| = 1$, az iránymenti derivált

$$D_v(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho v_1, y_0 + \varrho v_2) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

### 6.1.1. Tétel

Ha $f$ differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, akkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén, és

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) v.$$

**Bizonyítás**

A differenciálhatóság miatt

$$f(x_0 + \varrho \cos\alpha, y_0 + \varrho \sin\alpha) - f(x_0, y_0) = \varrho \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varrho \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(|\varrho|).$$

Ekkor

$$\frac{f(x_0 + \varrho \cos\alpha, y_0 + \varrho \sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

így nyilván

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos\alpha, y_0 + \varrho \sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

## 6.2. Láncszabály

1. Kétváltozós belső függvény, egyváltozós külső függvény.
   Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és

   $$F(x, y) = f\big(\varphi(x, y)\big).$$

   Tegyük fel, hogy $\varphi$ differenciálható $(x, y)$-ban, illetve $f$ differenciálható $\varphi(x, y)$-ban. Ekkor $F$ is differenciálható, és

   $$\nabla F(x, y) = \Big(f'\big(\varphi(x, y)\big) \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), f'\big(\varphi(x, y)\big) \tfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\Big) = f'\big(\varphi(x, y)\big) \nabla \varphi(x, y).$$

2. Két darab egyváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.
   Legyen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$
   Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi$ differenciálhatók $t$-ben, illetve $f$ differenciálható $\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$-ben. Ekkor $F$ is differenciálható, és
   $$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t).$$
3. Két darab kétváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.
   Legyen $f(u,v) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(x,y) = f\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big).$$
   Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi$ differenciálhatók $(x,y)$-ban, illetve $f$ differenciálható $\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$-ban. Ekkor $F$ is differenciálható, és
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\varphi(x,y, \psi(x,y)\big)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)$$
   $$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)$$
   azaz
   $$\nabla F(x,y) = \nabla f(u,v)\begin{pmatrix}\nabla\varphi(x,y)\\ \nabla\psi(x,y)\end{pmatrix}.$$

## 6.3. Második derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in S$. Azt mondjuk, hogy $f$ kétszer differenciálható a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és a$\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak differenciálhatók a pontban.

## 6.4. Hesse mátrix

Ha az $f$ függvény kétszer differenciálható az $(x_0, y_0)$ pontban, akkor értelmezhetők a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ és a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ parciális deriváltak. Ekkor a ponthoz tartozó Hesse mátrix

$$H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \nabla\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}.$$

## 6.5. Lagrange-féle középértéktétel

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in intD$, és $U$ egy olyan környezete, ahol $f$ differenciálható és $U \subset D$. Ekkor $\forall(x,y) \in U$-hoz $\exists\theta \in (0,1)$, melyre

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \nabla f\big(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y\big)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, illetve $\Delta y = y - y_0$.

**Bizonyítás**
Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

ahol $F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor $F(0) = f(x_0, y_0)$ és $F(1) = f(x, y)$. A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \theta \in (0,1)$, melyre

$$F'(\theta) = F(1) - F(0).$$

Továbbá a láncszabály miatt

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $\theta$-ra

$$F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

# 7. Tétel

## 7.1. Implicitfüggvény-tétel, implicit deriválás

Tegyük fel, hogy $F$ kétváltozós függvény differenciálható az $(x_0, y_0)$ pont környezetében és $F(x_0, y_0) = 0$ illetve $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Ekkor $\exists I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ intervallum, melyre $\forall x \in I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ egyenletnek pontosan egy $y = f(x) \in I_2$ megoldása van. Tehát egyértelműen létezik $f : I_1 \mapsto I_2$ függvény, melyre

1. $f(x_0) = y_0$
2. $\forall x \in I_1$ esetén $f(x) \in I_2$
3. $\forall x \in I_1$ esetén $F\big(x, f(x)\big) = 0$
4. $\forall x \in I_1$ esetén $\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big) \neq 0$.

Továbbá $f$ differenciálható $I_1$-ben és

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big)}.$$

## 7.2. Másodrendű Taylor formula

Tegyük fel, hogy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0) \in intD$-ben. Ekkor

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

ahol $L_2$ a Lagrange-féle maradéktag.

**Bizonyítás**

Legyen $F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ függvény és

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Ekkor

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$
$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2.$$

Felírva $F$-re a másodrendű Taylor formulát

$$F(1) - F(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

azonban $F(1) - F(0) = f(x,y) - f(x_0, y_0)$. Ezzel kapjuk is a bizonyítandót.

## 7.3. Szélsőérték

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor $(x_0, y_0) \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall (x, y) \in U$ esetén

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \Big(f(x,y) \leq f(x_0, y_0)\Big).$$

Ha $U = D_f$, akkor $(x_0, y_0)$ globális szélsőérték.

## 7.4. Szükséges feltétel szélsőérték létezéséhez

Tegyük fel, hogy $f$ differenciálható. Ekkor ha $(x, y)$ szélsőérték, akkor

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

**Bizonyítás**

Legyen $f_1(x) = f(x, y_0)$ a kétváltozós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha $x_0$ szélsőérték, akkor $f_1'(x_0) = 0$ kell, azonban $f_1'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ szükséges.

## 7.5. Stacionárius pont

Azt mondjuk, hogy $(x, y)$ stacionárius pontja $f$-nek, ha

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

## 7.6. Nyeregpont

Azt mondjuk, hogy $(x, y)$ nyeregpont, ha stacionárius pont, de nem szélsőérték.

# 8. Tétel

## 8.1. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez I.

Tegyük fel, hogy $f$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0)$-ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $\det H > 0$ esetén $(x_0, y_0)$-ban lokális szélsőérték van, ami
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ esetén maximum
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ esetén minimum
2. $\det H = 0$ esetén további vizsgálat szükséges
3. $\det H < 0$ esetén $(x_0, y_0)$ nyeregpont.

## 8.2. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez II.

Tegyük fel, hogy $f$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0)$-ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $H > 0$ esetén $(x_0, y_0)$ lokális minimumhely
2. $H < 0$ esetén $(x_0, y_0)$ lokális maximumhely
3. ha $H$ szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.
4. ha $H$ indefinit, akkor $(x_0, y_0)$ nyeregpont.

## 8.3. Lokális szélsőérték jellemzése $n$-változós függvényekre

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor $x_0 \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall x \in U$ esetén

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \Big(f(x) \leq f(x_0)\Big).$$

Ha $U = D_f$, akkor $x_0$ globális szélsőérték.
Szükséges feltétele a szélsőérték létezésének, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

**Bizonyítás**
Legyen $f_1(x) = f(x, x_2, \ldots, x_n)$ az $n$-válzotós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha $y_0$ szélsőérték, akkor $f_1'(y_0) = 0$ kell, azonban $f_1'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\forall \frac{\partial f}{\partial x_k}(y_0) = 0$ szükséges.

## 8.4. Feltételes szélsőérték feladat megfogalmazása

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétválzotós differenciálható függvény és $\varphi(x, y) = 0$ feltétel. A feladat, hogy megkeressük a

$$\min_{\varphi(x,y)=0} f(x, y) \qquad \max_{\varphi(x,y)=0} f(x, y)$$

szélsőértékhelyeket és szélsőértékeket.

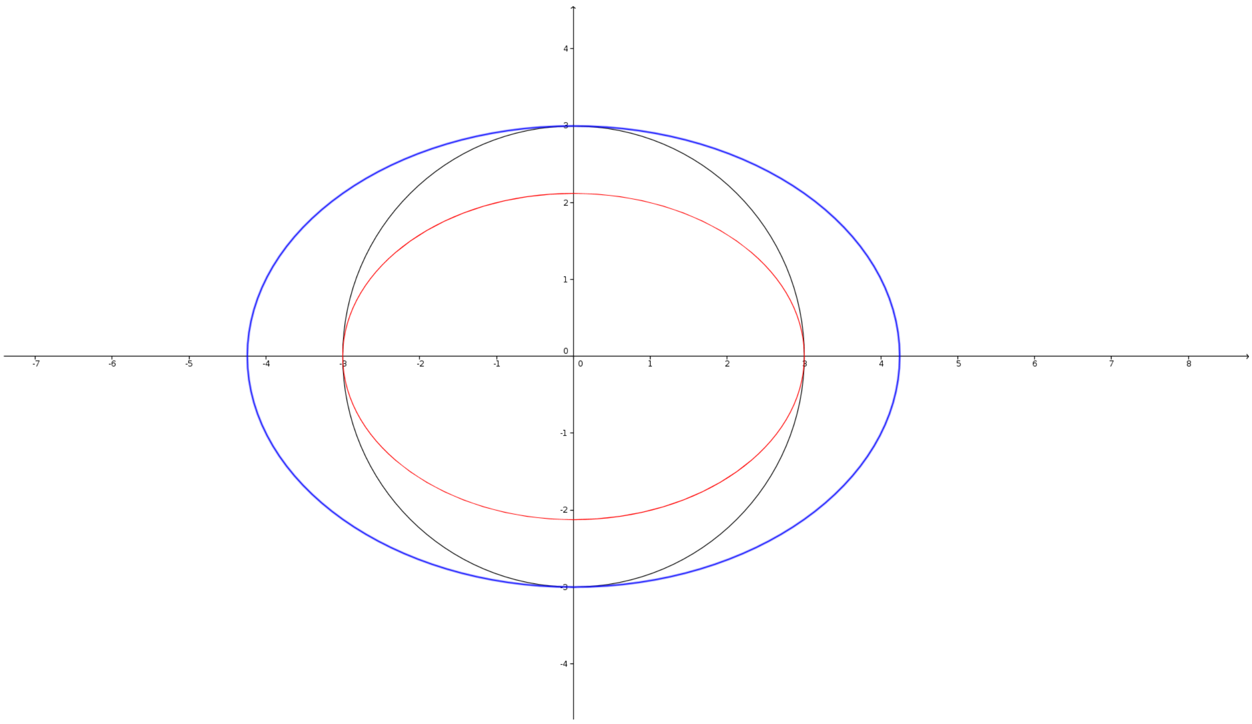
### 8.4.1. Szemléletes jelentés

Tekintsük a kétdimenzióban a $\varphi(x,y)=0$ függvényt és az $f(x,y)=c$ szinvonalakat. Mivel $f$ differenciálható, ezért ezek a szintvonalak monoton, folytonos módon változnak. Ekkor azokat a szintvonalakat keressük, amik "először" (minimum esetén) vagy "utoljára" (maximum esetén) metszik a $\varphi(x,y)=0$ görbét. Ezek a szintvonalak érinteni fogják a görbét, mondjuk az $(x,y)$ pontban. Az érintés miatt

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}=\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)}=\lambda.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\nabla f(x,y)-\lambda\nabla\varphi(x,y)=0.$$



A képen a $\varphi(x,y)=x^2+y^2-9=0$ feltételt láthatjuk (fekete kör), illetve az $f(x,y)=x^2+2y^2$ szinvonalait $c=9$ (piros ellipszis) és $c=18$ (kék ellipszis) esetben. A szintvonalak közül a piros az, ami "először" metszi a $\varphi(x,y)=0$ görbét, így ezen a szintvonalon helyezkednek el a feltételes minimumhelyek. Hasonlóan a kék metszi "utoljára" a görbét, így ezen a szinvonalon helyezkednek el a feltételes maximumhelyek.

## 8.5. Lagrange-féle multiplikátor szabály

Adott $f$ kétváltozós, differenciálható függvény, melynek tekintsük a megszorítását az $\{(x,y)\,|\,\varphi(x,y)=0\}$ halmazon. Legyen $F:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y).$$

Ekkor ha $(x_0, y_0)$-ban feltételes szélsőértéke van $f$-nek a $\varphi(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

# 9. Tétel

## 9.1. Függvényrendszer, koordinátatranszformáció

Adottak $\Phi, \Psi : D \mapsto \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\Phi(x, y) = \xi$ és $\Psi(x, y) = \eta$. Ekkor $F : D \mapsto \mathbb{R}^2$ egy függvényrendszer vagy vektormező, melyre

$$F(x, y) = \big(\Phi(x, y), \Psi(x, y)\big) = (\xi, \eta).$$

Az ilyen függvényrendszereket koordinátatranszformációként is felfoghatjuk $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ hozzárendelésként.

## 9.2. Jacobi mátrix, Jacobi determináns

Ha a $\Phi, \Psi$ függvények differenciálhatóak, akkor $F$ is differenciálható, és a derivált a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi(x, y) \\ \nabla \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $D(x, y) = \det \mathcal{J}(x, y) = \frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)}$ a Jacobi determináns.

## 9.3. Homogén lineáris transzformáció, Jacobi mátrixa

A transzformációt így értelmezzük

$$\xi = ax + by$$
$$\eta = cx + dy,$$

A rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánsa $D(x, y) = ad - bc$.

## 9.4. Invertálhatóság

Tegyük fel, hogy a $\Phi, \Psi$ függvények injektívek. Ekkor az $F$ leképezés invertálható, és az inverz rendszer alakja

$$x = g(\xi, \eta)$$
$$y = h(\xi, \eta).$$

## 9.5. Inverz rendszer Jacobi mátrixa

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatók. Ekkor a Jacobi mátrix

$$\mathcal{K}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial h}{\partial \eta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g(\xi, \eta) \\ \nabla h(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

### 9.5.1. Tétel

Tegyük fel, hogy egy vektormező Jacobi mátrixa invertálható egy $(x, y) \in intD$ pontban. Ekkor a vektormező invertálható és

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \Big(\mathcal{J}(x,y)\Big)^{-1}.$$

Továbbá

$$D(\xi,\eta) = \frac{1}{D(x,y)}.$$

**Bizonyítás**

Tudjuk, hogy

$$\xi = \Phi\big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big)$$
$$\eta = \Psi\big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big).$$

Ekkor a láncszabály miatt

$$\nabla\xi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \nabla\Phi(x,y)\begin{pmatrix}\nabla g(\xi,\eta)\\ \nabla h(\xi,\eta)\end{pmatrix}$$

$$\nabla\eta(\xi,\eta) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \nabla\Psi(x,y)\begin{pmatrix}\nabla g(\xi,\eta)\\ \nabla h(\xi,\eta)\end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{D(x,y)}.$$

Ezek alapján

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \frac{1}{D(x,y)}\begin{pmatrix}\frac{\partial \Psi}{\partial y} & -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\\ -\frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{pmatrix} = \Big(\mathcal{J}(x,y)\Big)^{-1}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

# 10. Tétel

## 10.1. Riemann integrál két dimenzióban

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt mérhető halmaz, és rajta egy $f : R \mapsto \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

felosztás, ahol $\forall R_k$ mérhető és $\forall R_k \cap R_j = \emptyset$. Legyen továbbá

$$m_k = \inf \left\{ f(x,y) \middle| x, y \in R_k \right\}$$

$$M_k = \sup \left\{ f(x,y) \middle| x, y \in R_k \right\}$$

és

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k) m_k \leq V(S) \leq \sum_{k=1}^{n} A(R_k) M_k = S_n$$

ahol

$$S = \left\{ (x,y,z) \middle| (x,y) \in R, z \in [0, f(x,y)] \right\}.$$

Ekkor $f$ folytonossága miatt a Heine-tétel által $f$ egyenletesen folytonos. Emiatt $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta_0 > 0$, amelyre $\delta < \delta_0$ esetén $M_k - m_k < \varepsilon$. Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k)(M_k - m_k) < \sum_{k=1}^{n} A(R_k)\varepsilon = \varepsilon A(R).$$

Tehát

$$\lim_{\delta \to 0} \big( \inf S_n \big) = \lim_{\delta \to 0} \big( \sup s_n \big)$$

azaz az integrál értelmezhető. Ekkor a keresett térfogat

$$V(S) = \iint_R f(x,y) dR = \iint_R f(x,y) d(x,y).$$

## 10.2. Integrálás télalap alakú tartományon

Legyen $R = [a,b] \times [c,d]$. Ekkor

$$\iint_R f(x,y) d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy.$$

**Bizonyítás**

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot $n$ egyenlő részre, a $[c,d]$ intervallumot pedig $m$ egyenlő részre. Legyen továbbá az így létrehozott $R_{ij}$ téglalapokra $(\xi_i, \eta_j) \in R_{ij}$. Ekkor az integrál közelítő összege

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} V_{nm} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_c^d f(\xi_i,y)dy\Delta x = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx.$$

Hasonlóan

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} V_{nm} = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\int_a^b f(x,\eta_j)dx\Delta y = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} V_{nm} = \iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy.$$

## 10.3. Normáltartomány

Adott $R\subset\mathbb{R}^2$ $x$ szerinti normáltartomány, ha $\exists[a,b]$, továbbá $\exists\Phi_1\le\Phi_2:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\Big| x\in[a,b], y\in\big[\Phi_1(x),\Phi_2(x)\big]\Big\}.$$

Hasonlóan $R\subset\mathbb{R}^2$ $y$ szerinti normáltartomány, ha $\exists[c,d]$, továbbá $\exists\Psi_1\le\Psi_2:[c,d]\mapsto\mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\Big| y\in[c,d], x\in\big[\Psi_1(y),\Psi_2(y)\big]\Big\}.$$

## 10.4. Integrálás síkbeli normáltartományon

Legyen $R$ egy $x$ szerinti normáltartomány. Ekkor

$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_a^b\int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)dydx.$$

Hasonlóan, ha $R$ egy $y$ szerinti normáltartomány, akkor

$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_c^d\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

## 10.5. Áttérés polárkoordinátákra kettős integrálban

Az áttérés során az $(x,y)$ koordinátákról térünk át az $(r,\varphi)$ koordinátkra, ahol $r$ az origótól vett távolság, $\varphi$ pedig az $x$-tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$.
Legyen adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és $T$ az integrálás tartománya. Legyen továbbá a koordinátatranszformáció után az integrálási tartomány $T'$. Az integrál

$$\iint_T f(x,y)d(x,y) = \iint_{T'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd(r,\varphi).$$

# 11. Tétel

## 11.1. Polárkoordináták a síkon

Adott $P(x, y)$ pont a síkon. Ennek a pontnak a polárkoordinátái $(r, \varphi)$, ahol $r$ az origótól vett tálvság, $\varphi$ pedig az $x$-tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} = \arccos \frac{x}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

### 11.1.1. Jacobi mátrixa

Az áttérés során az $(x, y)$ koordinátákról térünk át az $(r, \varphi)$ koordinátkra, ahol $r$ az origótól vett távolság, $\varphi$ pedig az $x$-tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$.

## 11.2. Általános helyettesítés kettős integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$x = \Phi(u, v)$$

$$y = \Psi(u, v)$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \Big\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \Big| \big( \Phi(u, v), \Psi(u, v) \big) \in R \Big\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_{R'} f\big(\Phi(u, v), \Psi(u, v)\big) D(u, v) d(u, v)$$

ahol $D(u, v)$ a Jacobi determináns.

## 11.3. Riemann integrál három dimenzióban, szemléletes jelentés

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ háromváltozós függvény. Az

$$\iiint_T f(x,y,z)d(x,y,z)$$

integrált a kétváltozós esettel analóg módon közelítésekkel értelmezzük, először egy mértéket definiálunk, kockás közelítéssel (kétdimenzióban négyzetes). Ezután a közelítőösszeget definiáljuk az eddigiekkel analóg módon.
Tegyük fel, hogy adott $T$ tartomány, melyen az $f$ háromváltozós függvény nemnegatív értékeket vesz fel. Ekkor legyen az $f$ függvény sűrűségfüggvény, tehát $f(x,y,z)$ az $(x,y,z)$ pont sűrűségét jelenti. Így az

$$\iiint_T f(x,y,z)d(x,y,z)$$

integrál a $T$ tartomány (háromdimenziós test) tömegét fogja jelenteni.

## 11.4. Hármas integrál kiszámítása intervallumon

Adott $f$ háromváltozós függvény és $T = [a,b] \times [c,d] \times [e,g] \subset \mathbb{R}^3$ intervallum. Az integrál értéke

$$\iiint_T f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x,y,z)dzdydx$$

illetve a kettős integrálhoz hasonlóan, az integrálok tetszőleges permutációja megfelelő.

## 11.5. Hármas integrál kiszámítása normáltartományon

Adott $f$ háromváltozós függvény és

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in S \subset \mathbb{R}^2, z \in \big[F_1(x,y), F_2(x,y)\big]\right\}$$

$(x,y)$ szerinti normáltartomány. Az ingetrál értéke

$$\iiint_T f(x,y,z)d(x,y,z) = \iint_S \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)dzd(x,y).$$

Ha $S$ intervallum, vagy normáltartomány, akkor tovább egyszerűsödik a képlet.

# 12. Tétel

## 12.1. Hengerkoordináták, Jacobi determináns

Egy $(x, y, z)$ pont hengerkoordinátái $(r, \theta, z)$ ahol $(r, \theta)$ a pont vetületének polárkoordinátái és

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánsa (harmadik sor szerint kifejtve)

$$D(r, \theta, z) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

## 12.2. Gömbi polárkoordináták, Jacobi determináns

Egy $(x, y, z)$ pont gömbi polárkoordinátái $(r, \theta, \varphi)$, ahol $r$ az origótól vett távolság, $\theta$ a pontba mutató vektor vetületének az $x$-tengellyel bezárt szöge, $\varphi$ pedig a pontba mutató vektor $z$-tengellyel bezárt szöge.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determinána (utolsó sor szerint kifejtve)

$$D(r, \theta, \varphi) = \cos\varphi\big(r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\big) +$$

$$+ r\sin\varphi\big(r\sin^2\varphi\cos^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\big) = r^2\sin\varphi\cos^2\varphi + r^2\sin^3\varphi = r^2\sin\varphi.$$

## 12.3. Általános helyettesítés hármas integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u, v, w) \\ y &= \Psi(u, v, w) \\ z &= \Xi(u, v, w) \end{aligned}$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \Big| \big(\Phi(u,v,w), \Psi(u,v,w), \Xi(u,v,w)\big) \in R\Big\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x,y,z)d(x,y,z) = \iint_{R'} f\big(\Phi(u,v,w), \Psi(u,v,w), \Xi(u,v,w)\big)D(u,v,w)d(u,v,w)$$

ahol $D(u,v,w)$ a Jacobi determináns.

## 12.4. Improprius kettős integrál kiszámítása nem korlátos tartományon

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $R$ nem korlátos. Tegyük fel, hogy $\exists R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R$ mérhető tartománysorozat, melyre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d(x,y) < \infty$$

és független az $(R_n)$ sorozat megválasztásától, akkor $f$ improprius értelemben integrálható

$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d(x,y).$$

### 12.4.1. Tétel

Tegyük fel, hogy $\exists (R_n)$ mérhető tartománysorozat, melyre az integrálok egyenletesen korlátosak, azaz $\exists M$, melyre $\forall n$ esetén

$$\iint_{R_n} \big|f(x,y)\big|d(x,y) \leq M$$

teljesül. Ekkor $f$ improprius értelemben integrálható és minden más megfelelő $(S_n)$ mérhető tartománysorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)d(x,y) = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d(x,y) = \iint_R f(x,y)d(x,y).$$

### 12.4.2. Haranggörbe integrálja az egész síkon

Adott $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Legyen

$$R_n = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| x^2 + y^2 \in \big[0, n^2\big]\Big\}$$

illetve polárkoordinátákra áttérve

$$R'_n = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \middle| r \in [0,n], \varphi[0,2\pi]\right\}.$$

Ekkor $R_n$ nyilván mérhető, az integrál

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \iint_{R'_n} re^{-r^2} d(r,\varphi) = \pi \int_0^n 2re^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^n = \pi - \pi e^{-n^2}.$$

Látható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y) d(x,y) = \pi$$

tehát a függvény improprius értelemben integrálható és

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \pi.$$

### 12.4.3. Következmény

Mivel minden más tartománysorozatra ugyanezt az eredményt kapjuk, ezért

$$S_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| |x|,|y| \in [0,n]\right\}$$

esetén

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

# 13. Tétel

## 13.1. Improprius integrál kiszámítása nem korlátos függvényre

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ nem korlátos függvény, azaz legyen $f$ folytonos függvény néhány pont kivételét, ahol nincs véges határértéke. Tegyük fel, hogy $\exists R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R$ tartománysorozat, ahol $f$ folytonos $\forall R_n$ tartományon és $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$. Ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d(x,y) < \infty$$

és független az $(R_n)$ sorozat megválasztásától, akkor $f$ improprius értelemben integrálható.

## 13.2. Hatványfüggvény integrálja az egységkörben

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}.$$

ahol $\alpha > 0$ és az integrálási tartomány

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \in [0,1]\right\}.$$

Legyen

$$R_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right\}$$

illetve áttérve polárkoordinátákra

$$R' = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \middle| r \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \varphi \in [0,2\pi]\right\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} f(x,y)d(x,y) = \iint_{R_n'} \frac{1}{r^\alpha} r d(r,\varphi) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha-1}} d\varphi dr = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr.$$

Tudjuk, hogy ez az integrál akkor és csak akkor véges, hogyha $\alpha - 1 < 1$, azaz $\alpha < 2$. Azt kaptuk tehát, hogy a hatványfüggvény $0 < \alpha < 2$ esetében integrálható az egységkörön.

## 13.3. Integrálhatóság feltétele nem korlátos függvényre

Tegyük fel, hogy az $f : R \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény nem korlátos az $R$ mérhető tartomány egy pontjának környezetében, legyen ez (az egyszerűség kedvéért) az origó. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < \alpha < 2, M > 0$ melyekre

$$\left|f(x,y)\right| \leq \frac{M}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}$$

teljesül $R$-en. Ekkor $f$ improprius értelemben integrálható.

## 13.4. Komplex függvény értelmezése, ábrázolás

Adott $S \subset \mathbb{C}$. Ekkor $f : S \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény, ahol $S$ pontjaihoz $z = x + iy \mapsto w = u + iv$. Ekkor $z$ független változó, $w$ függő változó.
Komplex függvényeket két komplex sík segítségével tudunk ábrázolni. Ebben az esetben az első számsíkra az értelmezési tartományt, a másikra az értékkészletet rajzoljuk. Ilyenkor célszerű egyszerű alakzatok képét megvizsgálni (egyenesek, körök, téglalapok), illetve egyes pontok képét is ábrázolhatjuk.

# 14. Tétel

## 14.1. Vonal definíciója

### 14.1.1. $\mathbb{R}^2$

Adott $[a,b] \in \mathbb{R}$ véges intervallum és $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$ függvény, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Ekkor legyen $\Gamma$ görbe

$$\Gamma = \Big\{ y(t) \in \mathbb{R}^2 \Big| t \in [a,b] \Big\}.$$

A görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak, illetve sima, ha a koordináta-függvényei simák. Zárt görbe esetén $\gamma(a) = \gamma(b)$.

### 14.1.2. $\mathbb{R}^3$

Adott $[a,b] \in \mathbb{R}$ véges intervallum és $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ függvény, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Ekkor legyen $\Gamma$ görbe

$$\Gamma = \Big\{ y(t) \in \mathbb{R}^3 \Big| t \in [a,b] \Big\}.$$

A görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak, illetve sima, ha a koordináta-függvényei simák. Zárt görbe esetén $\gamma(a) = \gamma(b)$.

## 14.2. Kétváltozós valós függvény integrálja vonal mentén

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvény és

$$\Gamma = \Big\{ \gamma(t) \Big| t \in [a,b] \Big\} \in R$$

sima görbe, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Ekkor f $\Gamma$ görbe menti vonalintegrálja

$$\int_\Gamma f(x,y)ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

**Bizonyítás**

Írjunk fel egy közelítő összeget! Legyen

$$\mathcal{F} = \big\{ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \big\}$$

felosztás. Közelítsük a vonalintegrált téglalapokkal, melynek a magassága $f\big(\gamma(t_i)\big)$ az alapja pedig

$$\sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2}.$$

Ekkor a közelítő összeg

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2+\left(\frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2}(t_{i+1}-t_i).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$, melyekre

$$\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{t_{i+1}-t_i} = x'(\xi_i) \qquad \frac{y(t_{i+1})-y(t_i)}{t_{i+1}-t_i} = y'(\eta_i).$$

Ekkor

$$I_n = f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}\Delta t_i.$$

Vegyük észre, hogy ez egy Riemann összeg, azaz

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \delta(\mathcal{F})\to 0}} I_n = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

### 14.2.1. Szemléletes jelentés

Állítsunk a görbe minden $(x,y)$ pontjában az $xy$ síkra merőleges $f(x,y)$ hosszú szakaszt. A vonalintegrál értéke megadja a keletkező felület nagyságát.

## 14.3. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén

Adott $F : R \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

vektormező és

$$\Gamma = \Big\{\gamma(t)\Big| t\in[a,b]\Big\} \in R$$

sima görbe. Ekkor a vektormező vonalintegrálja

$$\int_\Gamma F\big(\underline{r}\big)d\underline{r} = \int_a^b \big\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot\gamma(t)\big\rangle dt = \int_a^b \Big(f\big(\gamma(t)\big)\dot x(t) + g\big(\gamma(t)\big)\dot y(t)\Big)dt.$$

### 14.3.1. Szemléletes jelentés

Egy testet mozgatva a $\Gamma$ görbe mentén, ha minden $(x,y)$ pontban $F(x,y)$ erő hat a testre, akkor a vonalintegrál értéke megadja a végzett munkát.

## 14.4. Potenciálos vektormező

Azt mondjuk, hogy $F$ potenciálos vektormező, ha $\exists f$ differenciálható függvény, melyre $F = \nabla f$.

### 14.4.1. Tétel

Adott $F$ potenciálos vektormező, aminek potenciálja $f$ és adott

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \middle| t \in [a,b] \right\}$$

sima görbe. Ekkor

$$\int_\Gamma F\big(\underline{r}\big) d\underline{r} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

**Bizonyítás**

$$\int_\Gamma F\big(\underline{r}\big) d\underline{r} = \int_a^b \big\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot{\gamma}(t) \big\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) dt = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

## 14.5. Potenciálkeresés

Adott

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix}$$

vektormező. Ahhoz, hogy $F$ potenciálos legyen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

kell. Ekkor $g$-t integrálva $x$ szerint, illetve $h$-t integrálva $y$ szerint kapjuk a $G(x,y), H(x,y)$ függvényeket. Ezen függvények közös része lesz a keresett potenciál.

### 14.5.1. Potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele

Adott $F$ vektormező és $\Gamma$ zárt, sima görbe. Ekkor $F$ potenciálos akkor és csak akkor, ha

$$\oint_\Gamma F\big(\underline{r}\big) d\underline{r} = 0.$$

**Bizonyítás**

(Csak szükségesség)

Tegyük fel, hogy $F$ potenciálos, potenciálja $f$. Ekkor

$$\oint_\Gamma F\big(\underline{r}\big) d\underline{r} = f(b) - f(a) = 0.$$

# 15. Tétel

## 15.1. Fourier sor komplex alakja, együtthatók meghatározása

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $2\pi$ szerint periodikus, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

**Bizonyítás**
Tudjuk, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n \operatorname{sgn}(n)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

## 15.2. Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big| dx < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor a függvény Fourier transzformáltja $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(f, s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

## 15.3. Fourier transzformáció tulajdonságai

1. Ha $f$ páros, akkor
$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(st) dt.$$
2. Ha $f$ páratlan, akkor
$$\hat{f}(s) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(st) dt.$$
3. $\hat{f}$ folytonos
4. Linearitás
$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g, s) = \alpha \mathcal{F}(f, s) + \beta \mathcal{F}(g, s)$$
5. Átskálázás
$$\mathcal{F}\big(f(ax), s\big) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right) \qquad (a \neq 0)$$
6. Időeltolás
$$\mathcal{F}\big(f(x - x_0), s\big) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}\big(f(x), s\big)$$
7. Frekvenciaeltolás
$$\mathcal{F}\Big(e^{ikx} f(x), s\Big) = \mathcal{F}\big(f(x), s - k\big)$$

**Bizonyítás**

1. Tudjuk, hogy
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(st) dt.$$
Ekkor ha $f$ páros, akkor
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(st) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(st) dt.$$
2. Tudjuk, hogy
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(st) dt.$$
Ekkor ha $f$ páratlan, akkor
$$\hat{f}(s) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin(st) dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(st) dt.$$
3. Az egyenletes konvergenciából következik.

4. Az integrálás linearitásából következik.

5.
$$\mathcal{F}\big(f(ax),s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-isx}dx \underset{\substack{\frac{1}{a}y=x \\ \frac{1}{a}dy=dx}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\operatorname{sgn} a\infty}^{\operatorname{sgn} a\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\frac{1}{a}dy =$$
$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}dy = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\left(f(x),\frac{s}{a}\right)$$

6.
$$\mathcal{F}\big(f(x-x_0),s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-isx}dx \underset{\substack{y=x-x_0 \\ dy=dx}}{=}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-is(y+x_0)}dy = e^{-isx_0}\mathcal{F}\big(f(x),s\big)$$

7.
$$\mathcal{F}\Big(e^{ikx}f(x),s\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s-k)x}dx = \mathcal{F}\big(f(x),s-k\big)$$

## 15.4. Inverz Fourier transzformáció

Legyen $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz
$$\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|dx < \infty$$
melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol
$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$
Ekkor
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)e^{isx}ds.$$

# 16. Tétel

## 16.1. Parseval egyenlet Fourier transzformációra

Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right| dx < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|f''(x)\right| dx < \infty.$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(s)\right|^2 ds.$$

**Bizonyítás**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{isx}dsdx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dxds =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\hat{f}(-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(s)\right|^2 ds$$

## 16.2. Konvolúció

Adottak $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvények. Ekkor a két függvény konvolúciója

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

## 16.3. Konvolúció és FT kapcsolata

1.
$$\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f, s)\mathcal{F}(g, s)$$

2.
$$\mathcal{F}(fg, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)$$

**Bizonyítás**

1.

$$\mathcal{F}(f * g, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy\right)e^{-isx}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-isy}dy\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-is(x-y)}dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f, s)\mathcal{F}(g, s)$$

2.

$$\mathcal{F}(fg,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irx}dr g(x)e^{-isx}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i(s-r)x}dx\right)dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)\hat{g}(s-r)dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f,s) * \mathcal{F}(g,s)$$

## 16.4. Dirac delta

Adott $\varepsilon > 0$. Ekkor legyen

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

A Dirac delta

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x).$$

# 17. Tétel

## 17.1. $n$-edrendű lineáris differenciálegyenlet

Adott $L$ lineáris operátor, melyre

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} y^{(k)}.$$

Homogén differenciálegyenlet (HDE) esetén $L[y] = 0$ megoldásait keressük, inomogén differenciálegyenlet (IDE) esetén $L[y] = f(x)$ megoldásait keressük.

## 17.2. Függvények függetlensége

Adottak az $y_1, y_2, \ldots, y_n : D \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Azt mondjuk, hogy a függvények lineárisan függetlenek, ha

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) \equiv 0$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall c_k = 0$.

## 17.3. Wronski determináns

Adottak $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n-1)$-szer differenciálható függvények. Ekkor a Wronski determináns

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}. \end{vmatrix}$$

## 17.4. Tétel

Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények lineárisan összefüggők akkor és csak akkor, ha

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0.$$

**Bizonyítás**

Tegyük fel, hogy a függvények összefüggők. Ekkor van köztük egy $y_k$ függvény, melyre

$$y_k = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j.$$

Hasonlóan

$$y_k' = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j'.$$

A gondolatmenetet követve láthatjuk, hogy a mátrix $k$-adik oszlopa előáll a többi lineáris kombinációjaként, ezért a determináns nulla.
Most tegyük fel, hogy a determináns nulla. Tudjuk, hogy ekkor az oszlopok összefüggő rendszert alkotnak, amiből az előző gondolatmenet mentén láthatjuk, hogy az $y_k$ függvények összefüggő rendszert alkotnak.

## 17.5. Megoldások terének jellemzése

Az $L[y] = 0$ egyenletnek létezik $n$ darab lineárisan független megoldása, melyekre az összes többi megoldás ezek lineáris kombinációja.

**Bizonyítás**

A tétel második részét látjuk be. Tudjuk, hogy $L[y] = L[y_k] = 0$, tehát

$$W[y, y_1, \ldots, y_n] = 0.$$

Mivel

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$$

így

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k.$$

# 18. Tétel

## 18.1. Homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet

Ebben az esetben

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

A HDE megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keresve

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x} P(\lambda) = 0 \implies P(\lambda) = 0.$$

### 18.1.1. Első eset

Tegyük fel, hogy $P$ $n$ különböző gyöke mind valós, legyenek a gyökök $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ekkor az alapmegoldások

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

### 18.1.2. Második eset

Tegyük fel, hogy $P$ $m$ darab gyöke $k_m$-szeres gyök, ahol nyilván $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Ekkor az alapmegoldások

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1}(x) &= x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\ y_{k_1+1}(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2}(x) &= x^{k_2 - 1} e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2+\cdots+1}(x) &= e^{\lambda_m x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x} \end{aligned}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j-1} c_{jl} x^l e^{\lambda_j x}.$$

#### 18.1.3. Harmadik eset

Tegyük fel, hogy az egyenletnek gyöke a $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex szám. Ekkor tudjuk, hogy $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ is gyök. A két alapmegoldás

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)\big) \\ u_2(x) &= e^{\overline{\lambda} x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)\big). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás, ezért a fenti megoldásokból definiáljuk az új, valós alapmegoldásokat

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ y_2(x) &= \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x). \end{aligned}$$

#### 18.1.4. Negyedik eset

Többszörös komplex gyököknél hasonlóan kell eljárni, mint többszörös valós gyököknél.

## 18.2. IDE megoldások struktúrája

Adott $L[y] = f(x)$ IDE. Ha $y_1, y_2$ megoldások, akkor $y = y_1 - y_2$ megoldása az $L[y] = 0$ HDE-nek. Ha $y_1$ megoldása az HDE-nek és $y_2$ megoldása a IDE-nek, akkor $y = y_1 + y_2$ megoldása az IDE-nek.

## 18.3. Állandók variálása

Adott

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x).$$

Legyenek az $L[y] = 0$ homogén differenciálegyenlet alapmegoldásai az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények. Ekkor a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x) y_k(x)$$

ahol

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} d \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

ahol $W$ a Wronski mátrix. Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x).$$

**Bizonyítás**

Állítsuk az $\gamma_k, y_k$ függvényekre a következő feltételeket

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k &= 0 \\
\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k' &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} &= f
\end{aligned}$$

azaz

$$W \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Ekkor $y_p = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$ esetén

$$y_p' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k'.$$

Hasonlóan

$$y_p^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(m-1)} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(m)}$$

illetve

$$y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Ebből

$$L[y_p] = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k L[y_k] = f.$$

Tehát $y_p = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$ valóban megoldása az IDE-nek. Mivel $W \neq 0$, így a feltételekből azonnal következik, hogy

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} d \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

## 18.4. Kezdetiérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y^{(k)}(x_0) = \xi_{k+1}$ teljesül, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

## 18.5. Peremérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y(x_k) = \xi_k$ teljesül, $k = 1, 2, \dots, n$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

# 19. Tétel

## 19.1. Komplex függvény kanonikus alakja

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor a függvény kanonikus alakja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ahol $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

## 19.2. Függvény határértéke

Adott $f$ függvény határértéke a $z_0$ pontban $H$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $\big|f(z) - H\big| < \varepsilon$ teljesül.

## 19.3. Folytonos függvény

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor $f$ folytonos $z_0 \in D_f$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall z \in D_f$, $|z - z_0| < \delta$ esetén $\big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon$.

## 19.4. Differenciálhatóság

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor $f$ differenciálható a $z_0 \in intD_f$ pontban, ha

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} < \infty.$$

## 19.5. Analitikus függvény

Azt mondjuk, hogy az $f$ komplex függvény analitikus, ha differenciálható $\forall z \in D_f$-ben.

## 19.6. Cauchy-Riemann egyenletek

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. $f$ differenciálható a $z_0 \in intD_f$ pontban akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

**Bizonyítás**

Tegyük fel, hogy $f$ differenciálható a $z_0$ pontban. Ekkor

$$f'(z_0) = \lim_{r \to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) + iv(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \lim_{r \to 0} \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Hasonlóan

$$f'(z_0) = \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) + iv(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{is} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{is} + i \lim_{s\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{is} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ebből azonnal kapjuk az állítást.
Most tegyük fel, hogy a függvény kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket. Ekkor

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{r+is\to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0 + s) + iv(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r + is} =$$

$$= \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r + \frac{\partial u}{\partial y}s + i\frac{\partial v}{\partial x}r + i\frac{\partial v}{\partial y}s + o(|h|)}{r + is} = \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r - \frac{\partial v}{\partial x}s + i\frac{\partial v}{\partial y}r + i\frac{\partial u}{\partial x}s + o(|h|)}{r + is} =$$

$$= \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(r + is) + \frac{\partial v}{\partial x}(-s + ir) + o(|h|)}{r + is} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a határérték létezik, így a függvény differenciálható.

## 19.7. Harmonikus függvény

Adott $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, kétszer differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy $u$ harmonikus, ha

$$\Delta u = 0$$

teljesül $D_u$-n.

## 19.8. Harmonikus függvények kapcsolata az analitikus fügvénnyel

Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható, akkor $u, v$ harmonikusak.

**Bizonyítás**
A Cauchy-Riemann egyenletekből

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Az első egyenletet $x$ szerint, a másodikat $y$ szerint deriválva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Ebből

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Hasonlóan be lehet látni, hogy $v$ harmonikus.

## 19.9. Harmonikus társ

Adott $u : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, ahol $D$ egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor $\exists v : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, amelyre $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ differenciálható. Akkor $v$ az $u$ harmonikus társa és fordítva.

# 20. Tétel

## 20.1. Elemi függvények

### 20.1.1. Exponenciális függvény

Az exponenciális függvény

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

1. A függvény analitikus és $\big(e^z\big)' = e^z$.
2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
3. A függvény $2\pi i$ szerint periodikus.

**Bizonyítás**

1. A függvény kanonikus alakja
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$
Legyen $u(x,y) = e^x \cos y$ és $v(x,y) = e^x \sin y$ így $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
Azt látjuk, hogy a függvény eleget tesz a Cauchy-Riemann egyenleteknek, tehát differenciálható.
$$\big(e^z\big)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$
2. 
$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\big(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)\big) =$$
$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2}$$
3. 
$$e^{z+2\pi i} = e^x\big(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\big) = e^z.$$

### 20.1.2. Logaritmus függvény

A logaritmus függvény $z \neq 0$ esetén

$$\ln z = \ln|z| + i(\operatorname{arc} z + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

A logaritmus főértéke $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{arc} z$.

1.
$$e^{\ln z} = z$$

2. $z_1, z-2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$\ln(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3.
$$\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$$

**Bizonyítás**

1.
$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i(\operatorname{arc} z + 2k\pi)} = |z| e^{i \operatorname{arc} z} = |z|\big(\cos(\operatorname{arc} z) + i \sin(\operatorname{arc} z)\big) = z$$

2.
$$\ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\big(\operatorname{arc}(z_1 z_2) + 2k\pi\big) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2 + 2k\pi) =$$
$$= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i$$

3.
$$\big(e^{\operatorname{Ln} z}\big)' = e^{\operatorname{Ln} z} \operatorname{Ln}' z = 1 \implies \operatorname{Ln}' z = \frac{1}{z}$$

### 20.1.3. Hatványfüggvény

A hatványfüggvény
$$z^{\lambda} = e^{\lambda \ln z}.$$

A függvény főértékét kapjuk meg, ha a logaritmus főértékét használjuk.

## 20.2. Komplex vonalintegrál

Legyen az $L$ görbe egy felosztása $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, illetve legyen a $k$-adik ív tetszőleges pontja $\xi_k$. Ekkor

$$\int_L f(z) dz = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta_n \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big)$$

ahol $\delta_n$ a leghosszabb ív hossza. Ha a görbe zárt, akkor az $\oint_L$ jelölést használjuk.

## 20.3. Vonalintegrál tulajdonságai

1. Linearitás
$$\int_L (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_L f dz + \beta \int_L g dz$$
2. 
$$\int_{-L} f dz = -\int_L f dz$$
3. Ha $L = L_1 + L_2$, ahol $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, akkor
$$\int_L f dz = \int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz.$$
4. Ha $f$ folytonos, akkor létezik $\int_L f dz$.
5. Ha $f$ korlátos és $\big|f(z)\big| \leq M$ $\forall z \in L$ esetén, akkor
$$\left| \int_L f dz \right| \leq M s(L).$$

## 20.4. Vonalintegrál kiszámítása

Legyen az $L$ görbe paraméteres megadása
$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$
Ekkor
$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f\big(x(t) + iy(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta f\Big(r(t)e^{i\theta(t)}\Big)\Big(r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t)\Big)dt.$$

### 20.4.1. Newton-Leibniz formula

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függévény. Tegyük fel, hogy létezik $F$ analitikus komplex függvény, melyre $F' = f$. Ekkor
$$\int_L f(z)dz = F\big(z(\beta)\big) - F\big(z(\alpha)\big)$$
ahol
$$L = \Big\{ z(t) = x(t) + iy(t) \Big| t \in [\alpha, \beta] \Big\}.$$

## 20.5. Cauchy féle alaptétel

Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $L \subset D$ egy sima, zárt görbe. Ekkor ha az $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény analitikus, akkor
$$\oint_L f(z)dz = 0.$$

## 20.6. Cauchy féle integrálformula

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitikus függvény. Adott $z_0 \in intD$ és $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi $z_0$-t. Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

## 20.7. Taylor sorfejtés

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény, amely differenciálható $z_0$ környezetében. Ekkor $f$ $z_0$-ban Taylor sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi $z_0$-t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

## 20.8. Laurent sorfejtés

Legyen $f$ analitikus egy

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z - z_0| \in (r, R) \right\}$$

körgyűrűben. Ekkor ebben a körgyűrűben $f$ Laurent sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi $z_0$-t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$