

DIGITÁLIS JELFELDOLGOZÁS

SZÓBELI VIZSGA

2015. június 3.

**PÁZMÁNY PÉTER
KATOLIKUS EGYETEM
INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI
ÉS BIONIKAI KAR**

Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen füzet a 2014/15/2. tanulmányi időszakának Digitális jelfeldolgozás tárgy szóbeli vizsgájához lett kiadva. A füzet a félév során leadott tananyagot tekinti át fejezetenként a legfontosabb összefüggéseket kiemelve.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott tételek körében előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

Eredményes felkészülést kívánunk!

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2015



Ez a kiadvány a *Creative Commons Nevezd meg! – Ne add el! 4.0 Nemzetközi licenc* alá tartozik.
A licenc megtekintéséhez látogasson el a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/> oldalra.

A kiadványban szereplő tartalmi elemek
harmadik személytől származó véleményt, értesülést tükröznek.
Az esetlegesen előforduló tárgyi tévedésekből fakadó visszás helyzetek
kialakulásáért, illetve azok következményeiért a kiadó nem vállal felelősséget!

Tartalomjegyzék

Témakörök.....	4
Analóg jelek.....	4
Általános leírásuk	4
Jelek leírása a transzformált tartományban.....	5
Jelek lineáris időinvariáns transzformációja (jelek szűrése).....	5
Analóg-digitális átalakítás	7
Mintavételezés	7
Kvantálás	8
Digitális jelek.....	11
Tulajdonságok.....	11
Digitális jelek lineáris és időinvariáns transzformációi.....	12
Szűrők.....	13
Szűrők típusai	13
Rekurzív architektúra.....	14
Differenciaegyenlet.....	14
Komplexitás és kanonikus alak.....	16
Z-transzformáció.....	17
Rendszerek jellemzése a Z-transzformáció segítségével.....	18
Zérus és pólus	18
A rendszer impulzusválasza.....	18
Zérus-pólus diagram	19
BIBO stabilitás.....	19
Gyökinverzió, minimálfázis.....	19
Spektrális analízis	20
Jelentőség.....	20
Spektrum megismerése	20
DFT	20
FFT.....	21
Szűrőtervezés.....	22
Digitális szűrőtervezés	22
Kauzalitás és FIR mivolt megvalósítása	22
Adaptív jelfeldolgozás.....	23
Wiener-szűrés	23
Algoritmikus megoldás.....	24
Lineáris prediktív kódolás	25
A spektrális hatékonyság növelése adaptív jelfeldolgozással.....	25
Jegyzetek	27

Témakörök

Analóg jelek

Definíció Az $x(t)$, $t \in X$ folytonos függvényt *analóg jelnek* nevezzük, ahol $X \subseteq \mathbb{R}$. Ennek értelmezése a következő:

Az $x(t)$ érték valamilyen számszerűsített fizikai mennyiség (pl. feszültség, hangnyomás, fényerősség stb.) a t időpillanatban.

Általános leírásuk

Az analóg jelek értelmezés tartományuktól és értékkészletüktől függően többféleképpen lehetnek:

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(t)$, $t \in X$ analóg jel *véges tartójú*, ha $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(t)$, $t \in X$ analóg jel *belépő (kauzális)*, ha $\forall t < 0$ esetén $x(t) = 0$.

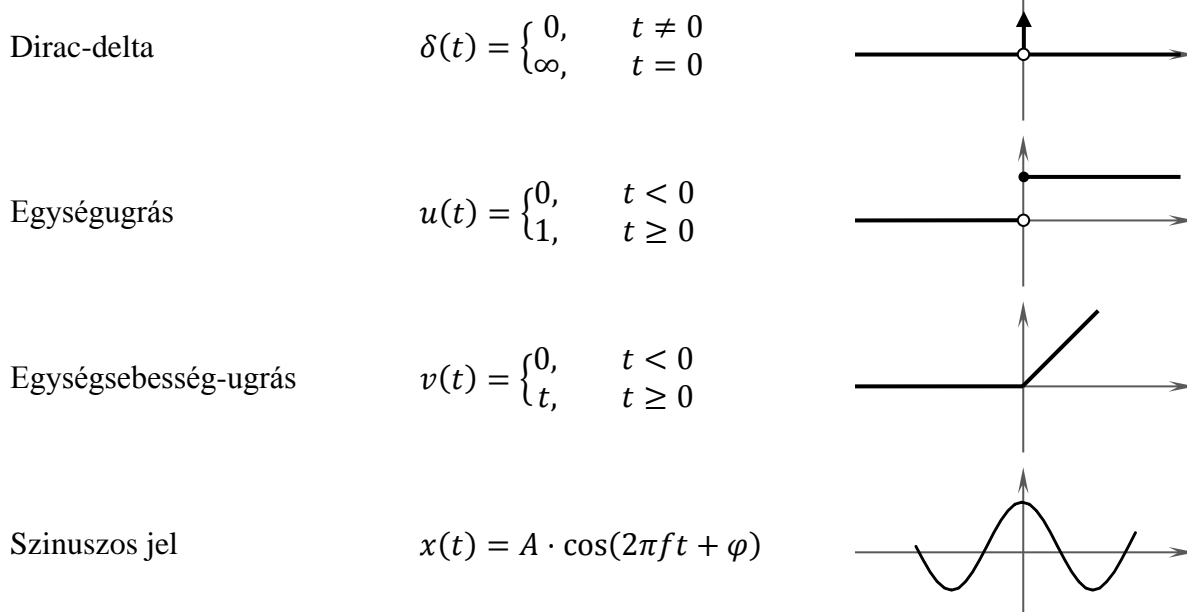
Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ analóg jel *véges átlagú*, ha

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right) < \infty$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ analóg jel *véges átlagenergiájú*, ha

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \right) < \infty$$

Egyszerű jelek



Periodikus jelek

Definíció Az $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ analóg jel *periodikus*, ha $x(t) = x(t + kT)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Az ebben szereplő rögzített $T \in \mathbb{R}$ számot *periódusidőnek* nevezzük.

Jelek leírása a transzformált tartományban

Legyen $x(t)$ egy periodikus, analóg jel T periódusidővel. Próbáljuk meg felírni $x(t)$ -t a következő végtelen sor összegeként:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{jk2\pi ft}$$

ahol $f = \frac{1}{T}$ és a felírásban szereplő x_k mennyiség a következőképp áll elő:

$$x_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-jk2\pi ft} dt$$

Fourier-transzformáció

Legyen adott egy $x(t)$ analóg jel, melyre teljesül, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Ennek Fourier-transzformáltja:

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

melyből $x(t)$ a következőképpen kapható meg:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(t)$ analóg jel *sávkorlátozott*, ha $x(f)$ véges tartójú.

Laplace-transzformáció

Legyen adott egy $x(t)$ analóg jel, melyre $\exists \alpha$, hogy $\int_0^{\infty} |x(t)| \cdot e^{-\alpha t} dt < \infty$. Ennek Laplace-transzformáltja:

$$x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

ahol $s = \alpha + j2\pi f$. Ebből $x(t)$ a következőképpen kapható vissza:

$$x(t) = \oint_G x(s) e^{st} ds$$

Jelek lineáris időinvariáns transzformációja (jelek szűrése)

Definíció Legyen \mathcal{T} a rendszeroperátor (vagyis $y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$). A rendszer *lineáris*, ha

$$\mathcal{T}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{T}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{T}\{x_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

Definíció Legyen \mathcal{T} a rendszeroperátor. A rendszer *időinvariáns*, ha

$$\mathcal{T}\{x(t + \tau)\} = y(t + \tau), \quad \forall \tau$$

Rendszer leírása az impulzusválasszal

Először lássuk be, hogy teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = x(t)$$

Vagyis a $\delta(t)$ a konvolúció egységeleme: $x(t) * \delta(t) = x(t)$

Ennek felhasználásával keressük egy rendszer $x(t)$ bemenő jelre adott $y(t)$ válaszát:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{T}\{\delta(t - \tau)\} d\tau = x(t) * h(t)$$

ahol $h(t) = \mathcal{T}\{\delta(t)\}$.

A transzformált tartományra való áttéréssel a konvolúciók szorzássá vihetők át.

	t -időtartomány	f -frekvenciatartomány	s -tartomány
végrehajtás	–	\mathcal{F}	\mathcal{L}
fizikai értelmezés	limitált	teljesen informatív	nem informatív
hogyan lehet hálózati- analízist végezni	differenciálegyenlet, nehéz	könnyű $\left(\frac{d}{dt} = j\omega\right)$	könnyű (s)

Analóg-digitális átalakítás

Az analóg-digitális átalakítás célja az $x(t)$ analóg jel mintavételezése, kvantálása és kódolása révén történő x_k jellé való átalakítása. E feladat alapkérdései a hatékonyság (mennyire tömöríthető a kapott bitsorozat) és az információveszteség (visszaállítható-e az eredeti analóg jel a mintavételezettből).

Mintavételezés

Definíció Legyen $x(t)$ tetszőleges analóg jel. Az ebből előállított $x_k = x(t_0 + kT)$ jelet *mintavett jelnek* nevezzük, ahol T a mintavételi idő, t_0 pedig a mintavételezés kezdőpontja, valamint $k \in \mathbb{Z}$.

Mintavételi tétel

Szeretnénk valamilyen feltételt találni arra vonatkozóan, hogy egy x_k mintavételezett jelből mikor állítható vissza veszteség nélkül az $x(t)$ analóg jel. Ehhez tekintsük először, hogy minként áll elő ez előbbi a Fourier-transzformáltjából:

$$x(t) = \int_{-B}^B x(f) e^{j2\pi f t} df$$

ahol B a sávszélesség. Az x_k mintavett jelet az $x(t)$ -ből $t = kT$ helyettesítéssel kapjuk meg:

$$x_k = x(t) \Big|_{t=kT} = \int_{-B}^B x(f) e^{j2\pi f kT} df$$

Legyen $x_m(f)$ a mintavett jel a frekvenciatartományban:

$$x_m(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(f + \frac{k}{T}\right)$$

melyre ekkor teljesül, hogy $x_m(f) = x(f)$, ha $\frac{1}{T} \geq 2B$ és $|f| \leq B$. Ezért hát vehetjük az $x_m(f)$ Fourier-transzformáltját:

$$x_m(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{-jk2\pi f T}$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{1/T} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} x_m(f) e^{jk2\pi f T} df = T \int_{-B}^B x(f) e^{j2\pi f kT} df = T x_k$$

Innen az $x(t)$ előáll mint $x(t) = T \sum_k x_k \cdot e^{-jk2\pi f t}$, vagyis

$$x(t) = \int_{-B}^B x(f) e^{j2\pi f t} df = T \int_{-B}^B \left(\sum_k x_k \cdot e^{-jk2\pi f T} \right) e^{j2\pi f t} df = T \sum_k x_k \underbrace{\int_{-B}^B e^{j2\pi f (t-kT)} df}_{h(t-kT)}$$

vagyis azt kapjuk, hogy

$$x(t) = T \sum_k x_k h(t - kT)$$

Tétel (Mintavételi tétel) *Legyen adott egy $x(t)$ analóg jel. Ha teljesül, hogy a mintavételi frekvencia legalább akkora, mint a sáv szélesség kétszerese, azaz $f_s \geq 2B$, akkor az x_k mintavett jelből az $x(t)$ eredeti analóg jel visszaállítható, mégpedig:*

$$x(t) = T \sum_k x_k h(t - kT)$$

ahol $h(t)$ a következő aluláteresztő szűrőt valósítja meg:

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

Gyakorlati mintavételezés

A mintavételezés alapját képező pillanatszerű érték-vételezés a gyakorlatban nem teljesülhet, mivel nincs olyan kapcsoló, mely képes lenne csupán egyetlen pillanatban mintát venni a jelből. Ehelyett a kapcsoló a mintavételezés során nagyon rövid ideig tartó mintákat vesz, és ennek átlagát tekinti az adott időpillanathoz tartozó mintának.

Ha figyelembe vesszük azt, hogy túlmintavételezés esetén, vagyis amikor $f_s > 2B$, több adat keletkezik, melynek továbbításához nagyobb sáv szélesség kell, akkor felvetődik a kérdés, hogy miért nem a lehető leggazdaságosabb $f_s = 2B$ mintavételi frekvencia mellett történik a mintavételezés. A válasz erre az, hogy az $f_s = 2B$ frekvenciával mintavett jel analóg átalakításához a $h(t)$ aluláteresztő szűrőnek ideálisnak kéne lennie, ilyet pedig a gyakorlatban nem lehet megvalósítani.

Kvantálás

A kvantálás feladata, hogy a mintavett jelet a kvantálási szinteknek megfelelő, digitálisan is értelmezhető jellé alakítsa, mégpedig úgy, hogy az egyes mintákat a legközelebbi kvantálási szintre kerekíti.

Jel-zaj viszony

A jel-zaj viszony (Signal-to-Noise Ratio, SNR) két teljesítmény jellegű mennyiség hányadosaként azt fejezi ki, hogy hogyan viszonyul a jel teljesítménye a háttérzajhoz:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{jel}}}{P_{\text{zaj}}} = \left(\frac{A_{\text{jel}}}{A_{\text{zaj}}} \right)^2, \quad \text{SNR}^{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{jel}}}{P_{\text{zaj}}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{\text{jel}}}{A_{\text{zaj}}} \right)$$

ahol P az átlagos teljesítmény, A pedig az amplitúdó négyzetes átlaga. Sokszor a decibelskálán feltüntetett érték az informatívabb.

Kvantálók típusai

Ekvidisztáns kvantáló

Tegyük fel, hogy a kvantálás $-C$ és C közötti jelszintekre történik, mégpedig ezt a szakaszt több részre osztva, úgy, hogy az osztópontok közti távolság Δ . Ez azt jelenti, hogy $N = \frac{2C}{\Delta}$ darab kvantálási szint van. Jelölje a kvantált (kerekített) jelet \hat{x} . Ekkor a kvantálás hibáját leírhatjuk az ε valószínűségi változóval, mely $\varepsilon = x - \hat{x} \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$. Mivel a kvantálás során a kerekítés zajként jelentkezik az eredeti jelhez képest, fontos mutatószám az SNR érték, mely lineáris kvantálóra a következőképp számolható:

$$P_{\text{jel}} = \frac{C^2}{2}, \quad P_{\text{zaj}} = \mathbb{E}(\varepsilon^2) = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} u^2 \mathbb{P}(u) du = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} u^2 \frac{1}{\Delta} du = \frac{\Delta^2}{12}$$

és ebből:

$$\text{SNR} = \frac{C^2/2}{\Delta^2/12} = \frac{3}{2} \frac{4C^2}{\Delta^2} = \frac{3}{2} N^2 = \frac{3}{2} 2^n$$

ahol n a lineáris kvantáló bitszáma.

Logaritmikus kvantáló

Ha a kvantálás ekvidisztáns, akkor például beszédjelek esetén a felhasználók a rájuk jellemző hangtartomány miatt különböző SNR értéket kapnak: ugyanazon a lineáris kvantálón egy $[-C, C]$ maximális kivezérlésű jel SNR értéke $\text{SNR} = \frac{3}{2} \frac{4C^2}{\Delta^2}$, mely egy fele annyira kivezérelt

jel esetén, ahol $x_k \in \left[-\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right]$ a jel-zaj viszony romlik: $\text{SNR}' = \frac{12}{2\Delta^2} \left(\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \text{SNR}$

A megoldás az, hogy az ekvidisztáns kvantáló x_i osztópontjait valamilyen ℓ függvénnyel módosítva $y_i = \ell(x_i)$ osztópontokkal megvalósított kvantálót kapunk.

$$\frac{d}{dx} \ell(x_i) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_i} = \frac{2C}{N} \frac{1}{\Delta x_i} \rightarrow \Delta x_i = \frac{1}{\ell'(x_i)} \frac{2C}{N}$$

Az SNR számolásához:

$$P_{\text{jel}} = \mathbb{E}(x^2) = \int_{-C}^C x^2 p(x) dx$$

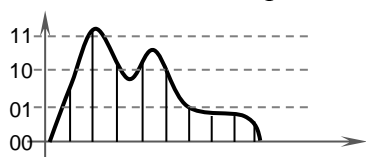
$$P_{\text{zaj}} = \mathbb{E}(\varepsilon^2) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\varepsilon^2 | x \in \Delta x_i) \mathbb{P}(x \in \Delta x_i) = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{12} p(x_i) \Delta x_i = K \int_{-C}^C \frac{1}{\ell'^2(x)} p(x) dx$$

ahol K valamilyen konstans. Ebből az SNR a következő:

$$\text{SNR} = K' \frac{\int_{-C}^C x^2 p(x) dx}{\int_{-C}^C \frac{1}{\ell'^2(x)} p(x) dx}$$

Differenciális kvantálás

A differenciális kvantálás fölhasználja, hogy az előző minta meghatározó a kurrens mintára nézve. Megvalósíthatja ezt például úgy, hogy ahelyett, hogy a kivezérelt jel minden mintájához annak feszültségértékét rendeli hozzá, csak azt mutatja meg, hogy a jel csökkent vagy nőtt-e az előzőhöz képest.



hagyományos kvantálás: 01 11 10 10 10 01 01 01 00

differenciális kvantálás: 1 1 0 0 1 0 0 0 0

E módszer hátrányossága, hogy nem követi pontosan az eredeti jelalakot (pl. a nagy 01-11 ugrás ugyanúgy 1 mint a kisebb 10-11 ugrás; valamint az 10-10 változás nélküli állapotot is vagy csökkenésként (0) vagy növekedésként (1) értelmezi).

A differenciális kvantálás másik megvalósítása az, amikor az eddig beérkezett jelből ismerve azt, hogy mi a következő jelek valószínűsége, a valószínűbb (gyakrabban előforduló) jelhez rövid kódot rendelünk:

		\mathbb{P}	buta kód	okos kód
	...rt!	0,999	00	0
Kérek egy jó pohár sö...	...tét gépolajat!	0,0005	01	10
	...rétet a puskámba!	0,0003	10	110
	...ntésből maradt lét!	0,0002	11	111

Lloyd-Max algoritmus*remintem ez nem logaritmus!*

Keressük az optimális logaritmikus kvantálót megvalósító ℓ_{opt} függvényt, vagyis a feladat azon ℓ_{opt} meghatározása, ami mellett

$$\ell_{opt} := \max_{\ell(x)} \text{SNR}$$

Ez a feladat rendkívül nehéz, mivel a jel valószínűségi eloszlása, $p(x)$, nem ismert. Ezért szub-optimális megoldást keresünk, ahol ℓ_{subopt} független $p(x)$ -től:

$$x^2 \sim \frac{1}{\ell'^2(x)} \rightarrow \ell'(x) \sim \frac{1}{x} \rightarrow \ell_{subopt} \sim \log(x) \quad ? \text{ Biztos?}$$

A Lloyd-Max algoritmus a következőképpen jár el: Kiinduláskor két halmazt tekint:

$\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$ a kvantálási szintek közti különbségek halmaza,

$Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ a kvantáló osztópontjainak halmaza.

Az algoritmus a hűségkritérium megfelelő mértékű csökkenéséig fut, mely hűségkritérium:

$$J(\Delta, Q) := \sum_{i=1}^N \int_{\Delta_i} (x - q_i)^2 p(x) \, dx$$

Az algoritmus lépései a következők:

Ha az adott lépésben optimális Q ismert, akkor

$$\Delta_{\ell, opt} := \{x: (x - q_{\ell})^2 < (x - q_i)^2, \forall i \neq \ell\}$$

Ha az adott lépésben optimális Δ ismert, akkor

$$q_{\ell, opt} := \frac{\int_{\Delta_{\ell}} x p(x) \, dx}{\int_{\Delta_{\ell}} p(x) \, dx} = \mathbb{E}(x|x \in \Delta_{\ell}) \quad \forall \ell$$

Ez a rekurzív algoritmus, mely a

$$\Delta(0), Q(0) \rightarrow \Delta_{opt}(1), Q(0) \rightarrow \Delta_{opt}(1), Q_{opt}(1) \rightarrow \Delta_{opt}(2), Q_{opt}(1) \rightarrow \dots$$

útvonalon halad, megtalálja a globális szélsőértéket.

Digitális jelek

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ függvény *digitális jel*, ha értékkészlete diszkrét értékekből áll, vagyis $x(n) \in \mathbb{N}$.

Tulajdonságok

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$ digitális jel *véges idejű (tartóú)*, ha $x(n) \neq 0$ csak $n \in [A, B]$ esetén teljesül.

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$ digitális jel *kauzális (belépő)*, ha $x(n) = 0$, $n < 0$.

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$ digitális jel *véges átlagú*, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) < \infty$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$ digitális jel *véges energiájú*, ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) < \infty$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$ digitális jel *véges átlagenergiájú*, ha

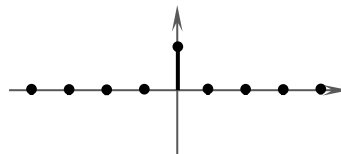
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2(n) < \infty$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az $x(n)$ digitális jel *periodikus N periódusidővel*, ha $\exists N$ melyre $x(n) = x(n + kN)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Speciális jelek

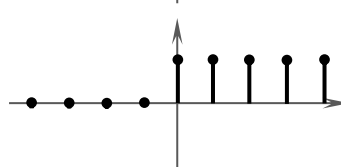
Dirac-impulzus

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



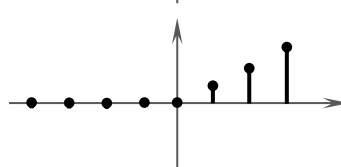
Egységugrás

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



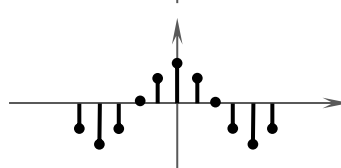
Egységsebesség-ugrás

$$v(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & n \geq 0 \end{cases}$$



Színuszos jel

$$x(n) = A \cdot \cos(2\pi f n)$$



Digitális jelek közül csak olyan szinuszos jel lehet periodikus, melynek frekvenciája f racionális szám, azaz $f \in \mathbb{Q}$.

Digitális jelek lineáris és időinvariáns transzformációi

Definíció Legyen \mathcal{T} a rendszeroperátor (vagyis $y(n) = \mathcal{T}\{x(n)\}$). A rendszer *lineáris*, ha

$$\mathcal{T}\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = a_1 \mathcal{T}\{x_1(n)\} + a_2 \mathcal{T}\{x_2(n)\} = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

Definíció Legyen \mathcal{S} az eltolási operátor, vagyis $\mathcal{S}^k\{x(n)\} = x(n - k)$. A rendszer *lineáris és időinvariáns*, ha

$$\mathcal{T}\{\mathcal{S}^k\{x(n)\}\} = \mathcal{S}^k\{\mathcal{T}\{x(n)\}\}, \quad \forall n$$

Az ilyen lineáris és időinvariáns rendszerek jelölésére az LTIS (Linear Time Invariant System) rövidítést használjuk.

LTIS leírása az impulzusválasszal

Először lássuk be, hogy teljesül az alábbi egyenlőség:

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) = x(n)$$

Vagyis a $\delta(n)$ a konvolúció egységeleme: $x(n) * \delta(n) = x(n)$

Ennek felhasználásával keressük egy rendszer $x(n)$ bemenő jelre adott $y(n)$ válaszát:

$$\begin{aligned} y(n) = \mathcal{T}\{x(n)\} &= \mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - k) x(k)\right\} = \mathcal{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \mathcal{S}^k\{\delta(n)\}\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \mathcal{S}^k\{\mathcal{T}\{\delta(n)\}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n - k) = x(n) * h(n) \end{aligned}$$

ahol $h(n) = \mathcal{T}\{\delta(n)\}$.

Ha ezt kauzális esetre vizsgáljuk, akkor ugyanezen levezetés számáiban a futóindex a $[0, \infty)$ intervallumot járja be, és itt is teljesül, hogy $y(n) = x(n) * h(n)$.

Ugyanúgy, mint az analóg jelek esetében, itt is igaz, hogy a transzformált tartományra való áttéréssel a konvolúciók szorzássá vihetők át.

BIBO-stabilitás

Definíció Azt mondjuk, hogy egy $x(n)$ digitális jel transzformációját megvalósító szűrő *BIBO stabil*, ha minden korlátos bemenetre korlátos kimenetet ad, vagyis

$$\exists M_x, M_y: |x(n)| \leq M_x \Rightarrow |y(n)| \leq M_y \quad \forall n$$

Nézzük most, hogy milyen olyan feltételt tudunk megadni $h(n)$ -re, melyből a BIBO stabilitás következik!

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n - k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k) x(n - k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n - k)| \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| M_x = M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq M_y \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \end{aligned}$$

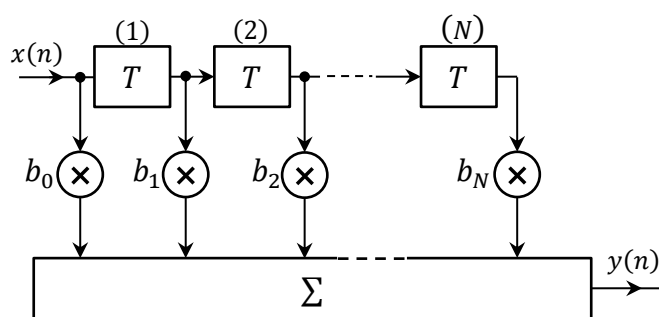
vagyis a stabilitás feltétele, hogy $h(n)$ abszolút értékben szummábilis legyen.

Szűrők

Egy T szűrőt az operátorok $Op = \{+, \times, \mathcal{S}\}$ halmaza és a topológia valósít meg. A szűrőkkel kapcsolatos két alapkérdés az analízis és a szintézis (vagyis $h(n)$ felírása a szűrő hálózatából és fordítva).

Szűrők típusai

FIR (Finite Impulse Response, véges impulzusválaszú)

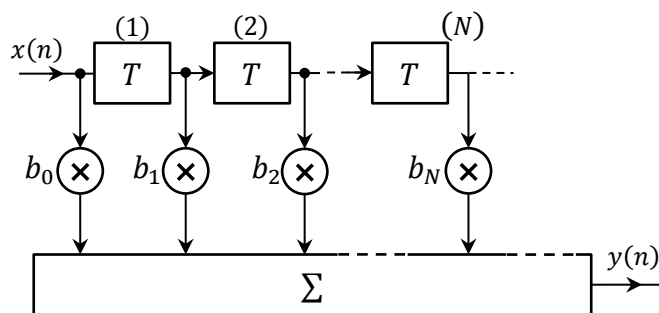


$$y(n) = \sum_{j=0}^N b_j x(n-j)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

$$h(j) = \begin{cases} b_j, & j = 0, \dots, N \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

IIR (Infinite Impulse Response, végtelen impulzusválaszú)

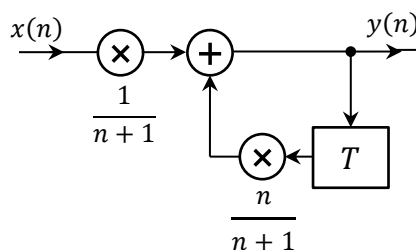


$$y(n) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x(n-j)$$

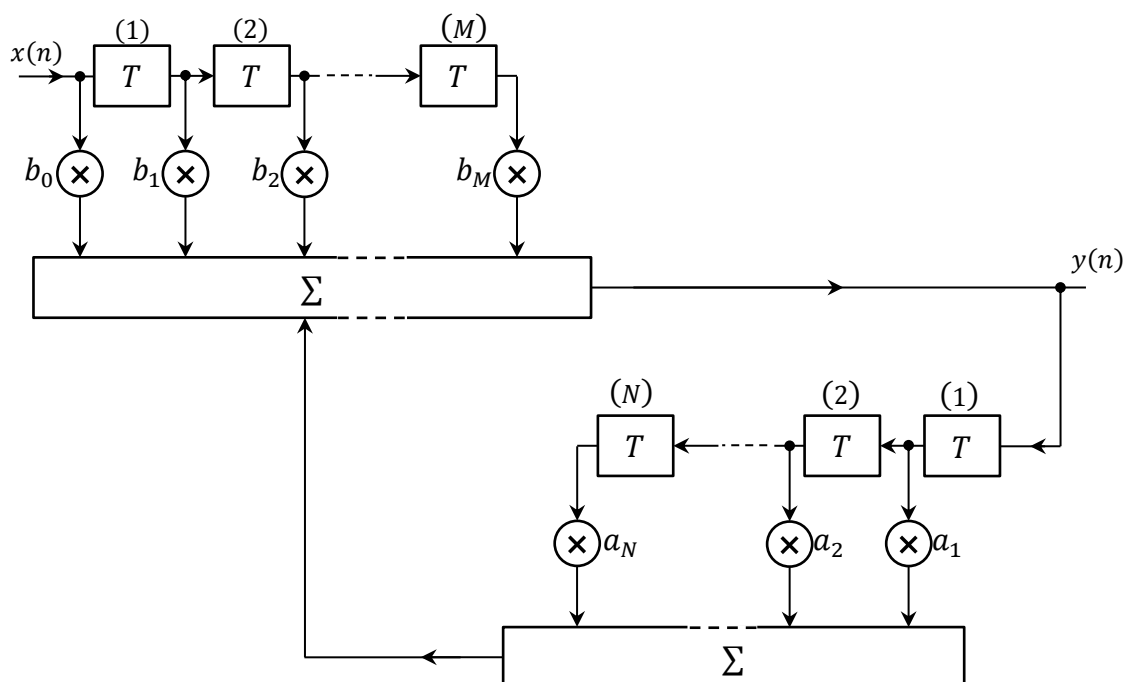
Ez a szűrő ilyen megvalósítással végtelen komplexitású, nem implementálható. Ha azonban a megvalósítást rekurzióval végezzük, azaz például

$$y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k) \rightarrow (n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = n \cdot y(n-1) + x(n)$$

akkor a látszólag végtelen komplexitású szűrő egyetlen késleltetővel megvalósítható:



Rekurzív architektúra



A fenti ábrán megvalósított szűrő egy általános rekurzív megvalósítású szűrő, melynek kimenete:

$$y(n) = - \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i y(n-i)}_{\text{visszacsatolt}} + \underbrace{\sum_{j=0}^M b_j x(n-j)}_{\text{előreccsatolt}}$$

Ez egy N -edrendű lineáris differencia-egyenletet határoz meg:

$$a_0 y(n) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)}$$

Differenciaegyenlet

Legyen adott a $\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$ differenciaegyenlet az $y(-1), \dots, y(-N)$ kezdeti értékekkel. Ennek megoldása a következő:

Alkalmazzuk az argumentumban való kivonás helyett a visszaléptetési operátort, és emeljük ki a jeleket. Ennek során két változót kapunk, melyeket jelöljünk D -vel és ρ -val:

$$D := \sum_{i=0}^N a_i \mathcal{S}^i, \quad \rho(n) := \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

E változókkal a differenciaegyenlet:

$$Dy(n) = \rho(n)$$

A differenciaegyenlet megoldását a homogén valamint az inhomogén partikuláris megoldás összegeként kapjuk, vagyis $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$.

$$y_h(n): Dy_h(n) = 0, \quad y_p(n): Dy_p(n) = \rho(n)$$

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) \rightarrow D(y_h(n) + y_p(n)) = Dy_h(n) + Dy_p(n) = \rho(n)$$

Ezt követően elégítjük ki a kezdeti feltételeket, vagyis a megoldás általános menete:

1. homogén megoldás, 2. partikuláris megoldás, 3. általános megoldás, 4. kezdeti feltételek

1. Homogén egyenlet megoldása

Lássuk be, hogy $\mathcal{S}\{f(n)\} = \text{const} \cdot f(n)$, ahol $f(n) = \lambda^n$. Ez teljesül, hiszen $\mathcal{S}\{\lambda^n\} = \lambda^{-1}\lambda^n$ ahol λ^{-1} valóban konstans. Ebből kiindulva:

$$D\lambda^n = 0 = \sum_{i=0}^N a_i \mathcal{S}^i\{\lambda^n\}$$

Kiemelve és leosztva λ^N -el, majd pedig beszorozva λ^N -el azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^N c_i \lambda^{N-i} = 0$$

2. Inhomogén rész partikuláris megoldása

A $D y_p(n) = \rho(n)$ inhomogén egyenletet próbafüggvény segítségével oldjuk meg. Néhány alapvető próbafüggvény:

$\rho(n)$	$y(n)$
$M \cdot u(n)$	$K \cdot u(n)$
$M \cdot r^n \cdot u(n)$	$K \cdot r^n \cdot u(n)$
$\cos(2\pi f n)$	$\left. \begin{array}{l} \cos(2\pi f n) \\ \sin(2\pi f n) \end{array} \right\} A \cos(2\pi f n) + B \sin(2\pi f n)$
$\sin(2\pi f n)$	
$u(n) \cdot n^M \cdot r^n$	$\sum_{k=0}^M b_k n^{M-k} r^n$

3. Általános megoldás

$$y(n) = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^n + y_p(n)$$

4. Kezdeti feltételek kielégítése

Keressük a c_i konstans együtthatókat az $y(-N), \dots, y(-1)$ ismeretében. Ehhez az iterációt fölhasználva az általános megoldásból azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^l = -y_p(l) + y(l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer határoz meg: $\Lambda \mathbf{c} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p$ *Vandermonde mátrix*

Példa

Oldjuk meg az $y(n) + 1,5y(n-1) + 0,5y(n-2) = x(n) + 0,5x(n-1)$ differenciaegyenletet $x(n) = u(n)$ gerjesztés és $y(-1) = y(-2) = 1$ kezdeti feltételek mellett.

1.)

$$\lambda^2 + 1,5\lambda + 0,5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2}}{2} \rightarrow \lambda_1 = -0,5; \lambda_2 = -1$$

2.)

$$y_p = M \cdot u(n) \rightarrow M + 1,5M + 0,5M = 1 + 0,5 \\ M = 0,5$$

3.)

$$y(n) = c_1(-0,5)^n + c_2(-1)^n + 0,5$$

4.)

$$y(0) = -1,5y(-1) - 0,5y(-2) + x(0) + 0,5x(-1) = -1,5 - 0,5 + 1 = -1$$

$$y(n)|_{n=0}: c_1 + c_2 + 0,5 = -1$$

$$y(1) = -1,5y(0) - 0,5y(-1) + x(1) + 0,5x(0) = 1,5 - 0,5 + 1 + 0,5 = 2,5$$

$$y(n)|_{n=1}: -0,5c_1 - c_2 + 0,5 = 2,5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2,5 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = 1; c_2 = -2,5$$

$$\underline{\underline{y(n) = [1(-0,5)^n - 2,5(-1)^n + 0,5]u(n)}}$$

Komplexitás és kanonikus alak**Válaszjel számítása**

Egy a és b paraméterivel adott hálózat analízisének feladata a rendszer impulzusválaszának megadása. Legyen relaxált a rendszer, vagyis $y(-1) = \dots = y(-N) = 0$. Tegyük fel, hogy ismerjük a rendszer differenciaegyenletéből kiszámítható λ_i együtthatókat. Ekkor

$$h(n) = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^n$$

melyre ha $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$, akkor ebből a BIBO stabilitás következik.

Komplexitás

Egy rendszer *komplexitása* alatt a benne található késleltetők számát értjük.

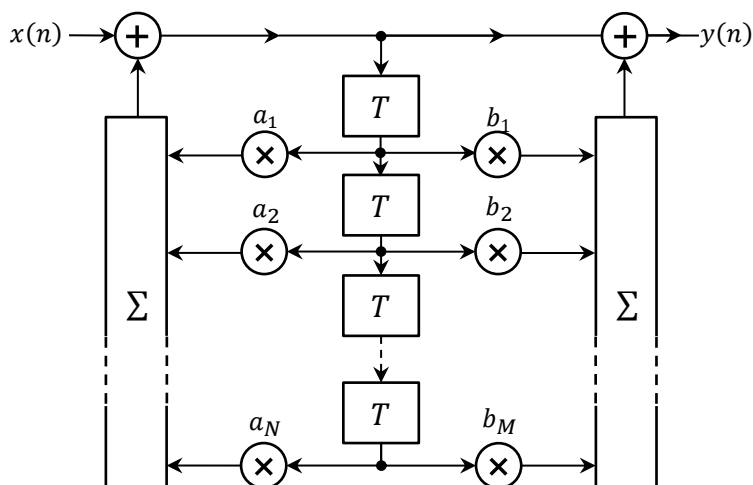
A 14. oldalon felírt rekurzív architektúra komplexitása eszerint

$$O(M + N)$$

ez azonban a kanonikus alakra való áttéréssel

$$O(\max\{M, N\})$$

nagyságrenddé vihető át, mely jóval kisebb az előző komplexitásnál.



Z-transzformáció

Definíció Egy tetszőleges $x(n)$ digitális jel *Z-transzformáltja* alatt a következő sorösszeget értjük:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X(z)$$

Ebből az eredeti jel inverz Z-transzformációval kapható meg:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(n)$$

Az $x(n)$ jelben szereplő $n \in \mathbb{Z}$, míg az $X(z)$ jelben szereplő $z \in \mathbb{C}$.

RoC

A RoC (Region of Convergence) jelentése az a komplex számhalmaz, melynek elemeire még teljesül, hogy a Z-transzformált (előállítás) véges.

$$RoC = \{z \in \mathbb{C} : |X(z)| < \infty\}$$

RoC-vizsgálat

$$\begin{aligned} |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\rho^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)|\rho^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|\rho^{-n} = \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)|\rho^n}_{\rho < B} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|\rho^{-n}}_{\rho > A} \end{aligned}$$

Tehát $RoC = \{z \in \mathbb{C} : A < |z| < B\}$.

Nevezetes Z-transzformáltak

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = 1$$

~~RoC irreleváns~~ $RoC: teljes z$

$$\mathcal{Z}\{u(n)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$RoC = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u(n)\} = \frac{z}{z-a}$$

$$RoC = \{z \in \mathbb{C} : |z| > a\}$$

$$\mathcal{Z}\{-a^n u(-n-1)\} = \frac{z}{z-a}$$

$$RoC = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |a|\}$$

Tulajdonságok

1.) linearitás

$$\mathcal{Z}\{\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)\} = \alpha_1 \mathcal{Z}\{x_1(n)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{x_2(n)\} = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$$

2.) időbeli eltolás

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{S}^k\{x(n)\}\} = \mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k}X(z)$$

3.) derivált

$$\mathcal{Z}\{n \cdot x(n)\} = -z \frac{dx(z)}{dz}$$

4.) konvolúció

$$\mathcal{Z}\{x(n) * y(n)\} = X(z)Y(z)$$

Rendszerek jellemzése a Z-transzformáció segítségével

Zérus és pólus

Definíció Legyen $f(z)$ analitikus függvény. Ha $f(z_0) = 0$ és $f(z)$ felírható mint

$$f(z) = (z - z_0)^n \tilde{f}(z)$$

ahol $\tilde{f}(z) \neq 0$ és analitikus valamely $n \geq 1$ számra, akkor azt mondjuk, hogy z_0 n -szeres *zérusa* f -nek.

Definíció Legyen $f(z)$ analitikus függvény. Ha $f(z)$ felírható mint

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z)$$

ahol $h(z_0) \neq 0$ és analitikus valamely $n \geq 1$ számra, akkor azt mondjuk, hogy z_0 n -szeres *pólusa* f -nek.

A rendszer impulzusválasza

Ismeretes, hogy egy LTI rendszert leírhatunk az impulzusválasszal. A Z-transzformáció tulajdonságai közt pedig láttuk, hogy a konvolúciót szorzássá alakítja. E két tényt felhasználva keressük a rendszer impulzusválaszának megfelelő transzformáltat, az átviteli függvényt.

Legyen egy differenciaegyenletével adott rendszer:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

Vegyük mindkét oldal Z-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} X(z)$$

Innen a keresett $Y(z)$ kirendeázhető, mégpedig

$$Y(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} X(z)$$

Ha az $x(z)$ gerjesztő jel a Dirac-impulzus, akkor a jobboldalon álló $X(z)$ ennek transzformáltja, vagyis 1. Ha elnevezzük a fenti kifejezés számlálójában álló polinomot $B(z)$ -nek, a nevezőben lévő pedig $A(z)$ -nek, akkor a $H(z)$ átviteli függvény a következőképp írható:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

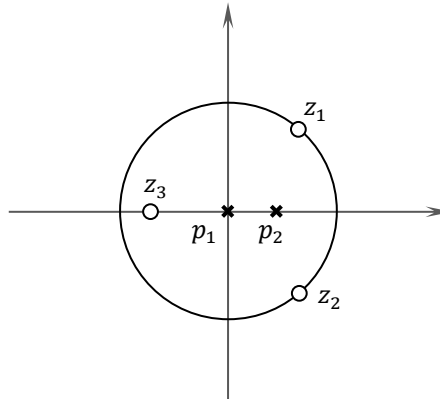
A $B(z) = 0$ egyenlet megoldásai (z_1, \dots, z_M) zérusok, az $A(z) = 0$ megoldásai (p_1, \dots, p_N) pedig pólusok lesznek. Így tehát az átviteli függvény írható mint

$$H(z) = \frac{z^{-M} b_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{z^{-N} a_0 (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} = z^{N-M} \frac{b_0 \prod_{m=1}^M (z - z_m)}{a_0 \prod_{n=1}^N (z - p_n)}$$

Ez a polinom per polinom alakú kifejezés többnyire egyszerűsíthető és így inverz Z-transzformációjával az impulzusválasz függvényt kapjuk.

Zérus-pólus diagram

A zérus-pólus diagram alkalmas egy rendszer leírására azáltal, hogy a komplex számsíkon ábrázolja a rendszer zérusait és pólusait. Ez a leírás a (később látott) gyökinvariancia miatt nem egyértelmű, de jellegre azonos rendszereket eredményez.



BIBO stabilitás

A BIBO stabilitás feltétele a Z-transzformált tartományon az, hogy a pólusok az egységkör belsejébe essenek, azaz hogy $p_i < 1, \forall i$.

Gyökinverzió, minimálfázis

Definíció A z_i gyök inverze alatt a $(\overline{z_i})^{-1}$ komplex számot értjük, ahol a felülvonás a komplex konjugálást jelenti.

Állítás Egy rendszer amplitúdó-karakterisztikája a gyökinverzióra (egy konstans szorzótól eltekintve) invariáns.

Ez azt jelenti, hogy a szűrő karakterisztikája nem változik, akár pólusokat, akár zérusokat invertálunk. Ennek haszna abban mutatkozik meg, hogy egy nem BIBO stabil rendszerből gyökinverzióval, a pólusok egységkörön belülré vitelével a rendszer BIBO stabillá tehető.

Definíció Azt mondjuk, hogy a $H(z)$ átviteli függvénnyel adott szűrő *minimálfázisú*, ha a szűrő és inverze is kauzális és stabil.

$H(z)$ stabilitása és kauzalitása azt jelenti, hogy pólusai (az $A(z)$ gyökei) az egységkörön belül vannak. $H(z)$ inverzének stabilitása és kauzalitása azt jelenti, hogy ennek pólusai (a $B(z)$ gyökei) is az egységkörön belülré esnek. Ez azt jelenti, hogy a minimálfázisú szűrő pólusai is és zérusai is az egységkörön belül vannak.

Spektrális analízis

A spektrális analízis célja, hogy az időben változó jelet a transzformált tartományban ismerje meg, és a különböző időpillanatokban tett megfigyelésekből képes legyen számos költség-csökkentő, hatékonyságnövelő vagy előrejelző funkciót megvalósítani.

Jelentőség

Több területen is jelenős haszon meríthető:

Kommunikációs technológia: sávszélesség és adatátviteli sebesség optimalizálása

Szeizmológia: földrengés-előrejelzés

Orvosi alkalmazások: epilepszia-előrejelzés

Rezgésanalízis: hibás gépelem mechanikai diagnosztikája

Spektrum megismerése

A spektrum megismerése a digitális jelfeldolgozás eszközeivel a következő útvonalon zajlik: a bejövő $x(t)$ jelből mintavételezés és kvantálás útján előállítjuk az $x(n)$ digitális jelet. Ebből diszkrét Fourier-transzformációval megkapjuk az $X_s(\omega)$ diszkrét Fourier-transzformáltat. Ebből az analóg frekvenciatartománybeli $X(\omega)$ jel szűréssel kapható.

DFT

Az $x(n)$ jel diszkrét Fourier-transzformáltjához (DFT) a következő úton juthatunk:

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}\{x(n)\delta(t - nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

$$X_s(\omega) \Big|_{\omega=\frac{k2\pi}{N}} = X\left(\frac{k2\pi}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n + lN)}_{\text{periodikus: } x_p(n)} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$$

Ha a digitális jel végső tartójú, akkor $x_p(n) = x(n)$, és így a DFT:

$$X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) := X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

vagyis egy lineáris egyenletrendszert kaptunk, melynek alakja

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

ahol $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]$, $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]$, a \mathbf{W} mátrix pedig

$$\mathbf{W} = [W_{kn}]_{\substack{k=0,\dots,N-1, \\ n=0,\dots,N-1}}, \quad W_{kn} := e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

Ha pedig ismerjük $X(k)$ -t akkor innen

$$X_s(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)P\left(\omega + k\frac{2\pi}{N}\right), \quad P(\omega) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-jn\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

Inverz DFT

Az inverz DFT végrehajtása a mátrixegyenletből triviálisan látható:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}$$

A \mathbf{W} mátrix tulajdonságai

Legyen $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Ekkor igazak az alábbiak:

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \quad W_N^{k+N} = W_N^k \quad \text{Ha } N = ML, \text{ akkor } W_N^{kM} = W_L^k$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}}^T, \text{ azaz unitér}$$

Komplexitás

A DFT komplexitása (az összeadások és szorzások száma) a következő:

$$\begin{aligned} \text{szorzás:} & \quad N^2 \text{ db} \\ \text{összeadás:} & \quad N(N-1) \text{ db} \end{aligned}$$

FFT

A DFT komplexitásának csökkentésére szolgál az FFT módszer. Lényege, hogy az adatokat több dimenzióban reprezentálja. Például:

Legyen $N = LM$. Sorvektor helyett történjék az ábrázolás egy $L \times M$ -es mátrixban, \mathbf{x} esetén oszlop-, \mathbf{X} esetén sorfolytonosan.

$$\mathbf{x} = [\dots] \text{ helyett } \begin{bmatrix} x(0,0) & \dots & x(0,M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L,0) & \dots & x(L,M) \end{bmatrix}, \quad x(n) \mapsto x(l,m) : n = mL + l$$

$$\mathbf{X} = [\dots] \text{ helyett } \begin{bmatrix} X(0,0) & \dots & X(0,M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X(L,0) & \dots & X(L,M) \end{bmatrix}, \quad X(k) \mapsto X(p,q) : k = \cancel{pM} + q$$

Ekkor a DFT így számolható:

$$X(p,q) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(mL+l) W_N^{(pM+q)(mL+l)} = \sum_{l=0}^{L-1} \left[\left(\sum_{m=0}^{M-1} x(m,l) W_M^{qm} \right) W_N^{ql} \right] W_L^{pl}$$

Bár a kifejezés látszólag bonyolultabb lett, komplexitása sokkal kedvezőbb:

Radix-2 pontos FFT esetén:

	L db M -dim DFT	LM db szorzás	M db L -dim DFT	összesen
szorzás:	LM^2	LM	L^2M	$N(M+L+1)$
összeadás:	$LM(M-1)$	0	$LM(L-1)$	$N(M+L-2)$

Szűrőtervezés

Digitális szűrőtervezés

A szűrőtervezés feladata egy olyan \mathbf{h} koefficiensvektor megadása, mely paraméterekkel egy kívánt $H_d(\omega)$ karakterisztikájú szűrőt valósíthatunk meg.

Adott $H_d(\omega)$ esetén a $h_d(n)$ impulzusválasz integrálással kapható:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(n \cdot \omega_c)}{n \cdot \omega_c}$$

Ezzel két baj van: nem FIR és nem kauzális (tehát megvalósíthatatlan és használhatatlan).

Kauzalitás és FIR mivolt megvalósítása

Egyrészt olyan $H_d(\omega)$ karakterisztikából kell kiindulni, melyből előállítható kauzális szűrő. Ennek megállapítására szolgál a Paley–Wiener-tétel.

Paley–Wiener-tétel

Tétel (Paley–Wiener-tétel a kauzalitásról) *Legyen adott egy kívánt átviteli karakterisztika $H_d(\omega)$. A $h_d(n)$ akkor stabil $\forall n$ -re, ha*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln(|H_d(\omega)|)| d\omega < \infty$$

Másrészt szükséges, hogy az impulzusválasz véges legyen. Ezt legegyszerűbben a

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, \dots, M-1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

levágással tehetjük meg. Ha ezt úgy valósítjuk meg, hogy a $h_d(n)$ függvényt valamilyen $w(n)$ függvénnyel szorozzuk meg, mely $w(n)$ függvény az előző esetben például

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \dots, M-1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

akkor ablakolásról beszélünk.

Nem minden „evidensnek látszó” ablakolófüggvény képes a $H_d(\omega)$ karakterisztikához hasonló szűrő előállítására, a levágás miatt elvesző egyes felharmonikusok a végső karakterisztikát jelentősen befolyásoló, ún. side lobes révén tönkreteszik a szűrőt.

Néhány szokásos ablakolófüggvény

négyszögletes

$$w(n) = 1$$

Bartlett

$$w(n) = 1 - \frac{2 \left| \left(n - \frac{M-1}{2} \right) \right|}{M-1}$$

Hanning

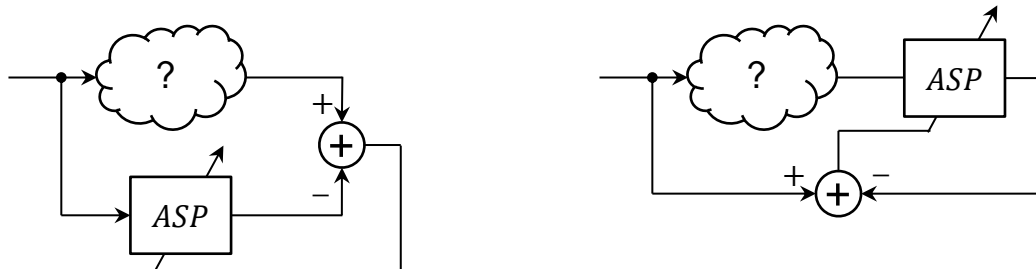
$$w(n) = 0,5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M-1} \right) \right)$$

Hamming

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos \left(\frac{2\pi n}{M-1} \right)$$

Adaptív jelfeldolgozás

Az adaptív jelfeldolgozás célja, hogy valamilyen ismeretlen rendszer hatását, viselkedését modellezni tudjuk, illetve ennek ismeretében a rendszer kimenetét megfelelően vegyük figyelembe. Ilyen ismeretlen rendszerre lehet példa egy idegrendszer vagy akár a komplexitása miatt megbecsülhetetlen internet. Ezt a feladatot látja el az ASP. Két lehetséges felépítés:



Wiener-szűrés

Legyen az ismeretlen rendszerbe belépő jel x_k , a kilépő jel d_k . Legyen ugyanez az x_k jel az ASP bemenete is, melyre a kimenet y_k . Végül képezzük a két kilépő jel különbségét:

$$e_k = d_k - y_k$$

Az ASP a következőt valósítja meg:

$$y_k = \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j}$$

Legyen x_k gyengén stacionárius sztochasztikus jel: $\mathbb{E}(x_k) = 0 \forall k$, és az autokorreláció $R(l) = \mathbb{E}(x_k x_{k-l})$. Tegyük fel, hogy az ismeretlen rendszerből kilépő d_k jel is ugyanilyen tulajdonságú. E két jel figyelembevételével a keresztkorrelációs függvény: $r(l) = \mathbb{E}(d_k x_{k-l})$. Defináljuk az autokorrelációs mátrixot

$$\mathbf{R} = [R_{ij}]_{i=0,\dots,J, j=0,\dots,J}, \quad R_{ij} = R(i-j) = \mathbb{E}(x_{k-i} x_{k-j})$$

és a keresztkorrelációs vektort

$$\mathbf{r} = [r_i]_{i=0,\dots,J}, \quad r_i = r(i) = \mathbb{E}(d_k x_{k-i})$$

Az autokorrelációs mátrix tulajdonságai

1.) Szimmetrikus

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$$

2.) Hermitikus

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{J+1} : \mathbf{a} \mathbf{R} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{R} \mathbf{a}$$

3.) Pozitív szemidefinit

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{J+1} : \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} \geq 0$$

4.) Sajátvektorai teljes ortonormált rendszert alkotnak

$$\mathbf{R} \mathbf{s}_i = \lambda_i \mathbf{s}_i \quad i = 0, \dots, J, \quad \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j = \delta_{i,j}$$

5.) Sajátértékei nemnegatívak

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

6.) A mátrix nyoma a sajátértékeinek összege

$$\text{trace}(\mathbf{R}) = \sum_{i=0}^J \lambda_i$$

A Wiener-szűrés alapfeladata

A Wiener-szűrő olyan \mathbf{w}_{opt} optimális együtthatóvektort ad, melyre az e_k jel négyzetes várható értéke a lehető legkisebb:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} : \min_{\mathbf{w}} \mathbb{E}(e_k^2)$$

Ez a fent bevezetett korrelációs vektor és mátrix felhasználásával:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} : \min_{\mathbf{w}} \{\mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} - 2 \mathbf{r}^T \mathbf{w}\}$$

Ez egy minimumkeresési feladat. A megfelelő deriválások után a feladat az alábbi roppant egyszerű mátrixegyenletre redukálódik:

$$\mathbf{R} \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{r}$$

Felvetődnek azonban a praktikus megvalósítás problémái, nevezetesen a real-time megoldhatóság és a megoldás menete ismeretlen \mathbf{R} és \mathbf{r} esetén.

Algoritmikus megoldás

Real-time megoldhatóság

Bizonyítható, hogy a

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \Delta \{\mathbf{R} \mathbf{w}(k) - \mathbf{r}\}$$

rekurzió megtalálja a \mathbf{w} koefficiensvektort. A konvergencia sebessége Δ helyes megválasztásától függ.

$$\Delta_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

Δ_{opt} esetén a rekurzió a lehető leggyorsabban konvergál. Ez azonban nem tökéletes megoldás, mivel a λ sajátértékek meghatározása nem könnyű feladat (és pláne nem gyorsabb, mint a mátrixinverziós megoldás). Mátrixinverzió nélkül is belátható azonban, hogy

$$\Delta_{\text{opt}} \approx \frac{2}{R(0)}$$

és ezzel a becsléssel a

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \frac{2}{R(0)} \{\mathbf{R} \mathbf{w}(k) - \mathbf{r}\}$$

rekurzió real-time megoldása a feladatnak.

Megoldás ismeretlen \mathbf{R} és \mathbf{r} esetén: Robbins-Monroe

Legyen $\tau^k = \{(x_k, d_k), k = 1, \dots, K\}$ K méretű tanulóhalmaz. Ekkor az algoritmus a következőre módosítva képes az \mathbf{R} és \mathbf{r} nélküli megoldásra:

$$w_l(k+1) = w_l(k) - \Delta(k) \left\{ d_k - \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j} \right\} x_{k-l}, \quad l = 0, \dots, J$$

Megjegyzendő, hogy itt Δ „visszatérése” nem jelent gondot, Δ többnyire a becslési módszer által előre meghatározott konstans.

Lineáris prediktív kódolás

Predikció esetén is működik mind a rekurzív módszer, mind pedig a Robbins-Monroe algoritmus. A tanulóhalmaz hossza ez esetben a megfigyelt idősor hossza mínusz a foksám:

$$K = L - J$$

Már korábban láttuk, hogy ha a kvantálási jelszintekhez rendelt azonos hosszúságú kódok helyett a gyakoribb jelszintekhez rövidebb, a ritkábbakhoz pedig hosszabb kódot rendelünk, akkor jelentős megtakarítás érhető el. Ezt valósítja meg a lineáris prediktív kódolás (LPC) mind az adó mind pedig a vevő oldalán.

A spektrális hatékonyság növelése adaptív jelfeldolgozással

Definíció A *spektrális hatékonyság* mérőszáma megmutatja, hogy mekkora az adatátviteli sebesség frekvenciánkénti hányadosa, vagyis megadja a $\frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}$ értéket.

A spektrális hatékonyság jelenleg a mobilszolgáltatások terén 0,52 ami messze elmarad az elméletileg lehetséges 5,6-es értéktől.

Multipath propagation

Kulcskérdés a rádiótávközlés esetén az, hogy a kisugárzott jel nemcsak egyenes vonalban terjed az adó és a vevő között, hanem visszaverődéseket és így késleltetést is szenved. Így az átvitel az ideálishoz képest egy reflexióból eredő tényezővel egészül ki.

$$H(f) = 1 + \underbrace{\rho e^{-j2\pi f\tau}}_{\text{reflektált}}$$

A szolgáltatás csak azon a területen nyújtható megfelelő minőséggel, ahol a bithiba-valószínűség a szolgáltatási küszöb alatt marad.

A szolgáltatási terület megnövelésére különféle módok állnak rendelkezésre:

Space diversity

Két antenna alkalmazásával a sugárzott jel még akkor is megfelelő minőségben fogható, ha az egyik antennára a reflexiók miatt használhatatlan jelsorozat érkezik. Ekkor a másik antennán fogott jel értelmes.

Hatalmas hátránya az antennák építési, üzemeltetési, karbantartási költségeinek megkétszereződése.

Frequency diversity

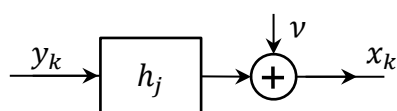
Két (megfelelően megválasztott) frekvenciasáv alkalmazása esetén az egyik sávban jelentkező leszívás a másikban nem jelentkezik, így szintén megfelelő az átvitel.

Hatalmas hátránya hogy az amúgy is telített rádióspektrumban két frekvenciasávot kell birtokolni, mely hatalmas költségekbe kerül.

ASP

Jó algoritmus találása esetén a hibák helyreállítása gyors, és mivel a DSP processzorok olcsón beszerezhetőek, a költségek nem számottevőek.

Kommunikációs modell



A modell a valóságban fellépő torzító hatásokat hivatott szemléltetni: az eredeti y_k bináris jelsorozat az időfüggő, ismeretlen csatornatorzítás (h_j) és az additív v zaj miatt módosul, az antennán az x_k jelet vesszük.

Ez a következő:

$$x_k = h_0 y_k + \sum_{n, n \neq k} h_{k-n} y_n + v_k$$

Ebből az eredeti y_k jel visszaállított \hat{y}_k formája Wiener-szűrés és kvantálás után nyerhető vissza. A szűrt jel:

$$\tilde{y}_k = \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j} = q_0 y_k + \sum_{n, n \neq k} q_{k-n} y_n + \eta_k$$

Ez Wiener szűréssel kapható, mely ismeretlen csatorna esetén a következőképp alakul:

$$\tau^k = \{(x_k, d_k), \quad k = 1, \dots, K\}$$

$$w_l(k+1) = w_l(k) - \Delta(k) \left\{ y_k - \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j} \right\} x_{k-l}, \quad l = 0, \dots, J$$

Mivel y_k ismeretlen, tanulóhalmaz nélkül két lehetséges módon tehetjük teljessé az algoritmust:

1. Időszakonként (csomagkapcsolt adatátvitelről lévén szó, a csomagok elején) meg-
egyezés szerinti y_k jelet küldünk, melynek torzulásából az algoritmus a tanuló periódus alatt kalibrációt végez.
2. Az y_k jelet az algoritmusban \hat{y}_k -val becsüljük.

Jegyzetek

Évközi eredmény

		max. jegy	kapott jegy
Kis zárthelyik	1. Kis zárthelyi dolgozat	5	
	2. Kis zárthelyi dolgozat	5	
	3. Kis zárthelyi dolgozat	5	
	4. Kis zárthelyi dolgozat	5	
	5. Kis zárthelyi dolgozat	5	
	Összesen	25	
	I. Elért jegyösszeg		
Házi feladat	1. Házi feladat	3	
	2. Házi feladat	3	
	3. Házi feladat	3	
	Összesen	9	
	II. Elért jegyösszeg		
	Nagy zárthelyi dolgozat	5	
	Összesen	5	
	III. Elért érdemjegy		
	(I. + II.)/50 + III./2 Féléves érdemjegy	5	

Ha a kis zárthelyi dolgozatok átlaga és a nagy zárthelyi dolgozat eredménye legalább 4-es, akkor a hallgató mentesül a vizsgadolgozat megírása alól, és csak szóbeli vizsgát kell tennie. Ez esetben a vizsga jegye meg van ajánlva a gyakorlati jegyére.

A vizsga jegyét fele részben a féléves érdemjegy, fele részben pedig a vizsgadolgozatra kapott jegy alkotja, melyhez kerekítési tényezőként hozzá jön a vizsga szóbeli részén nyújtott teljesítmény alapján megítélt pontszám.