Analízis (2.hét)
Vághy Mihály LSMJFW

1. Házi feladat

1.1. feladat

$$H := \left\{ \frac{3n-1}{2n+5} \quad | \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Látható, hogy a halmaz elemei egyben egy a_n sorozat elemei is, ahol

$$a_n = \frac{3n-1}{2n+5} = \frac{\frac{3}{2}\cdot(2n+5) - \frac{3}{2}\cdot 5 - 1}{2n+5} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{17}{2}}{2n+5} = \frac{3}{2} - \frac{17}{4n+10}$$

Látható, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, illetve az is, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

Ahhoz, hogy a minimumot megkapjuk, elég $n = 1$-et helyettesíteni. Az infimum egyenlő lesz a minimummal, a szuprémum a határérték lesz, maximum pedig nem létezik. Tehát

$$\min(H) = \inf(H) = \frac{2}{7} \quad \sup(H) = \frac{3}{2} \quad \max(H)\nexists$$

1.2. feladat

$$H := \left\{ \frac{k}{n} \quad | \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1 \right\}$$

Ennek a halmaznak nincsen sem minimuma, sem maximuma, hiszen

$$\sup(H) = \lim_{k\to n-1, n\to\infty} \frac{k}{n} = 1$$

illetve

$$\inf(H) = \lim_{k=1, n\to\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

1.3. feladat

$$H = (-1, 2) \cup (2, 3]$$

$$int(H) = (-1, 3) \quad ext(H) = (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \quad \partial H = \{-1, 3\}$$

A H halmaz nem nyílt, hiszen nem minden pontja belső pont (a 3 határpont), illetve nem is zárt, mert nem tartalmazza az összes határpontját.

$$M = [1, 2]$$

$$int(M) = (1, 2) \quad ext(M) = (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \quad \partial M = \{1, 2\}$$

Az M halmaz nem nyílt, de zárt.

$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$int(E) = \emptyset \quad ext(E) = \mathbb{R} \quad \partial E = \emptyset$$

Az E halmaz nem nyílt, de zárt (vagyis szerintem zárt, hiszen tartalmazza mind a nulla határpontját).

1.4. feladat

Tudjuk, hogy adott $a_1, a_2, ..., a_n >$ számokra

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

illetve

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Összeszorozva a két egyenlőtlenséget

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} = 1$$

Felszorozva n^2-el kapjuk is a bizonyítandót.

1.5. feladat

Legyen a téglalap kerülete adott K, továbbá legyen x az egyik oldala. Ekkor a másik oldal nyilván $\frac{K}{2} - x$. A területet felülről becsülhetjük, hiszen

$$T = x \cdot \left(\frac{K}{2} - x\right)$$

ahol

$$\sqrt{x \cdot \left(\frac{K}{2} - x\right)} \leq \frac{x + \frac{K}{2} - x}{2} = \frac{K}{4}$$

Ebből

$$T \leq \frac{K^2}{16}$$

Egyenlőség akkor, ha $x = \frac{K}{2} - x$, azaz $x = \frac{K}{4}$ (ekkor négyzetet kapunk).

1.6. feladat

$$a_n = 1 - 10^{-n} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

A definícióból

$$\left|1 - \frac{1}{10^n} - 1\right| < \frac{1}{10^3}$$

$$-\frac{1}{10^3} < -\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^3}$$

Az egyenlőség bal oldala nyilván teljesül, hiszen a vizsgált kifejezés negatív. Az kell, hogy

$$-\frac{1}{10^3} < -\frac{1}{10^n}$$

teljesüljön. Ehhez küszöbindexnek jó az $N = 4N = 3$).

*Megjegyzés:*Attól függ, hogy milyen küszöbindexet adunk meg, hogy hogyan definiáljuk azt. A jegyzetben is, illetve órán is úgy volt definiálva, hogyha $n > N$ akkor a_n benne van a vizsgált határérték ϵ-sugarú környezetében. Ebből azt kapjuk, hogy habár $n = 3$-ra még nem teljesül a fenti egyenlőtlenség, de nem is kell, hiszen csak akkor kell teljesülnie, ha $n > N$. A keddi gyakorlaton azonban volt egy feladat, ahol úgy jártunk el, mintha $n \geq N$ lenne a definícióban. Igazából ez azért lényegtelen, mert legtöbbször csak az érdekel minket, hogy megadható-e ilyen küszöbindex, nem az, hogy az olyan nagyon pontos legyen.

1.7. feladat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{n^3-7n^2+6n-10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1-\frac{7}{n}+\frac{6}{n^2}-\frac{10}{n^3}} = 0$$