Sztochasztikus folyamatok jegyzet

Oktató: Várdainé Kollár Judit

2017

PPKE ITK
Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Készítette: Jánossy Bálint

Mintaátlag: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Tapasztalati szórásnégyzet: $s_n^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$

Példa1.
Példa2.

Determinisztikus folyamat: Ha bizonyos körülmények együttese fennáll, az egyértelműen meghatározza az esemény folyását. (pl. 1 bar nyomáson a tiszta víz 100 °C fokon forr)

Sztochasztikus folyamat: Valamelyik szükséges körülmény hiányzik, az esemény lefolyása bizonytalanná válik. (pl. x bar nyomáson(x=?) a tiszta víz már nem biztos, hogy 100 °C fokon forr)

Véletlen jelenség: A lefolyását nem határozzák meg egyértelműen a körülmények.

Statisztikai minta: Véges sok, egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változó együttese. $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

Minta nagysága: Minta elemeinek száma. (pl. n=100 rúd, n=70 év

Empirikus(tapasztalati) **jellemzők**:

- **mintaközép/mintaátlag**: $\widehat{\xi} = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$
- **szórásnégyzet**: $s_n^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \widehat{\xi})^2}{n}$
- **korrigált tapasztalati szórásnégyzet**: $s_n^{*2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \widehat{\xi})^2}{n-1} = \dfrac{n}{n-1} \cdot s_n^2$

Becsléselmélet: X valószínűségi változó, ismerjük az eloszlás és a sűrűség függvényének a típusát. Ekkor:

$$f(x) = f(x, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$$

Torzítatlan becslés: $\widetilde{\Theta} = \widetilde{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $E(\widetilde{\Theta}) = \Theta$ (ahol $\widetilde{\Theta}$ a mi folyamatunk, Θ elméletileg)

Megbízhatóság(konfidencia) intervallum: Tfh. $\widetilde{\Theta}$ torzítatlan becslés, Θ ismeretlen. A $[\alpha_1, \alpha_2]$ intervallumot megbízhatósági intervallumnak nevezzük, ha adott $\varepsilon > 0$-ra $P(\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2) = 1 - \varepsilon$, ahol $P(\alpha_1 \leq \Theta \leq \alpha_2)$ annak a valószínűsége, hogy $\Theta \in [\alpha_1, \alpha_2]$

Maximum-Likelihood módszer: Tfh. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változó, sűrűség függvénye f_ξ Ekkor:

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\xi(x_i) \xrightarrow{jel.} L(\widetilde{\Theta}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$L(\widetilde{\Theta}, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ -t nevezzük Likelihood fv-nek.

Példa3.
Példa4.
Példa5.

Statisztikai hipotézisnek nevezzük a valószínűségi változók eloszlására vagy valamely paraméterére vonatkozó állításokat. (H_0, H_1)
Dönteni akarunk az állítás helyességéről.
H_0 hipotézisünk, hogy az állítás igaz.

Statisztikai próba feladata, hogy az X valószínűségi változóra vonatkozó statisztikai minta alapján döntsünk a H_0 hipotézisről. H_0-t vagy elfogadjuk, vagy elutasítjuk/elvetjük.

Statisztikai próba lényege: K kritikus tartomány megvalósítása, úgy hogy H_0 mellett számított $U = u(x_1, \ldots, x_n)$ vagy $T = t(x_1, \ldots, x_n)$ statisztikai érték kis valószínűséggel essen a K tartományba. (feladattól függ, hogy u-t vagy t-t számolunk)

Annak a valószínűségét, hogy H_0 fennáll és a próbastatisztika a K tartományba esik a **próba terjedelmének** nevezzük. (jel.: $P(u \in K) = \alpha$)

Hipotézis vizsgálat menete:

- Mintavétel
- H_0 hipotézis megalkotása, (ebből a) H_1 ellenhipotézis megfogalmazása
- Megadunk $0 < \alpha < 1$ korlátot, az elsőfajú hiba(H_0-t elvetjük, bár igaz) valószínűségére ($P(u \in K) = \alpha$)
- Konstruálunk egy statisztikai függvényt(próba függvényt) a minta elemeiből, illetve a H_0 hipotézisből
- Meghatározzuk a próba függvény eloszlását, ha H_0 teljesül
- Az 5. lépésben kapott eloszlás alapján meghatározzuk E (elfogadási), és K(kritikus) tartományokat ($E \bigcup K = R$ és $E \bigcap K = \emptyset$)

Az elfogadási tartomány tipikusan lehet:

- $E = [-a_\alpha, a_\alpha]$
- $E = [-a_\alpha, \infty)$
- $E = (-\infty, a_\alpha]$

Ha $u \in E$(vagy $t \in E$) elfogadjuk H_0-t.

Ha $u \in K$(vagy $t \in K$) elutasítjuk H_0-t, és H_1-et fogadjuk el.

Elsőfajú hiba: H_0 igaz, de $u \in K$, ezért H_0-t elvetjük.

Másodfajú hiba: H_0 nem igaz(H_1 igaz), mégis $u \in E$, tehát H_0-t elfogadjuk.

	H_0-t elfogadjuk	H_0-t elutasítjuk
H_0 igaz	$\surd$	elsőfajú hiba
H_0 hamis	másodfajú hiba	$\surd$

($\surd$ = nincs hiba, minden renben)

Az elsőfajú hiba csökkentése a másodfajú hiba növekedésével jár.

***u* próba**:
Adott n elemű minta $\xi_1, \dots, \xi_n$, amely $N(m, \sigma)$ eloszlású és független, σ ismert.

- 1 mintás u próba:

  H_0 hipotézis: $\overline{\xi} = m$.
  $0 < \alpha < 1$

Kétoldali próba	$H_0 : \overline{\xi} = m$ $H_1 : \overline{\xi} \neq m$	$E = [a_{-\alpha}, a_\alpha]$ $K = \mathbb{R} \setminus [a_{-\alpha}, a_\alpha]$
Egyoldali próba	$H_0 : \overline{\xi} = m$ $H_1 : \overline{\xi} > m$	$E = (-\infty, a_\alpha]$ $K = \mathbb{R} \setminus [a_{-\alpha}, \infty)$
	$H_0 : \overline{\xi} = m$ $H_1 : \overline{\xi} < m$	$E = [a_{-\alpha}, \infty)$ $K = \mathbb{R} \setminus (-\infty, a_\alpha]$

  Próba függvény: $u = \dfrac{\overline{\xi} - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad N(0,1)$

  Szignifikancia szint(legtöbbször): $\alpha \cong 0,01;\ 0,05$ vagy $0,1$ (elsőfajú hiba nagysága)

- 2 mintás u próba:

  pl. gyárban 2 futószalag
  Függetlennek kell lennie a 2 mintának(pl. nem független, ha 1 futószalag, csak 2 különböző napon)

  $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ és $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ független minták, $N(m_1, \sigma_1)$ és $N(m_2, \sigma_2)$ eloszlásúak, valamint σ_1, σ_2 ismert.

Kétoldali próba	$H_0 : m_1 = m_2$ $H_1 : m_1 \neq m_2$	$E = [a_{-\alpha}, a_\alpha]$ $K = \mathbb{R} \setminus [a_{-\alpha}, a_\alpha]$
Egyoldali próba	$H_0 : m_1 = m_2$ $H_1 : m_1 > m_2$	$E = (-\infty, a_\alpha]$ $K = \mathbb{R} \setminus [a_{-\alpha}, \infty)$
	$H_0 : m_1 = m_2$ $H_1 : m_1 < m_2$	$E = [a_{-\alpha}, \infty)$ $K = \mathbb{R} \setminus (-\infty, a_\alpha]$

  Próba függvény: $u = \dfrac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \quad N(0,1)$

Student féte *t* próba:
Normális eloszlású valószínűségi változó várható értékékére vonatkozó hipotézis.

A szórás ismeretlen, becsüljük $s_n^* = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \widehat{\xi})^2}{n-1}}$.

- 1 mintás t próba:

  $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eloszlása ismert $N(m, \sigma)$, $-\infty < m < \infty$; $\sigma > 0$.
  H_0 hipotézis: $E(\xi) = m$
  próba függvény(próbastatisztika): $t = \dfrac{\overline{\xi} - m}{s_n^*/\sqrt{n}}$
  Az n elemű mintát $(n-1)$ szabadság fokúnak nevezzük.
  $P(|t| > t_\alpha) = \alpha$ (egy/két oldali) $1-\alpha$ szignifikancia szinten

- 2 mintás t próba:

  $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1}$ és $\eta_1, \ldots, \eta_{n_2}$ független minták, σ_1, σ_2 ismeretlen.
  Próba függvény: $t_{(n_1-1+n_2-1)} = \dfrac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{(n_1-1){s_1^*}^2 + (n_2-1){s_2^*}^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_2+n_2}}$
  Paraméteres próba eloszlás valamelyik paraméterére vonatkozó hipotézis igazságát vizsgáljuk.

***F* próba**:
H_0 hipotézis: 2 minta szórása megegyezik az adott szignifikancia szinten.
H_0: $s_\xi^* = s_\eta^*$
Próbastatisztika:

$$F_{\xi,\eta}^* = max\left(\frac{s_\xi^*}{s_\eta^*}; \frac{s_\xi^*}{s_\eta^*}\right) > 1$$

Ism. u, t próbát alkalmazunk, ha a szórásuk megegyezett.

Fisher féle F próba:

$$\left.\begin{array}{r} x \\ y \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{Normál eloszlású,} & n \text{ db minta} \\ \text{független minták} & m \text{ db minta} \end{array}$$

$H_0 : \sigma_x = \sigma_y$
$H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y$

$$F^* = \frac{max(s_x^{*2}, s_y^{*2})}{min(s_x^{*2}, s_y^{*2})} = \frac{f_1}{f_2} \begin{array}{l} \longrightarrow \quad f_1 \text{ szabadságfoka}(s_x^{*2} > s_y^{*2}\text{esetén}) : \ n-1 \\ \longrightarrow \quad f_2 \text{ szabadságfoka}(s_x^{*2} > s_y^{*2}\text{esetén}) : \ m-1 \end{array}$$

$F_{krit.} < F^*_{emp.} \rightarrow H_0$-t elvetjük $1-\alpha$ szignifikancia szinten.
$F^*_{emp.} < F_{krit.} \rightarrow H_0$-t elfogadjuk.

Eddig paraméteres próbákat néztünk. u,t-nél m volt azonos, F-nél a σ.

Nem paraméteres póbák: χ^2 próbák

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $N(0,1)$, független valószínűségi változók. Legyen $\eta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. Ekkor η eloszlását n szabadságfokú $\boldsymbol{\chi^2}$ **eloszlás**nak nevezzük. $E(\eta) = n$ és $D^2(\eta) = 2n$

Megjegyzés: Cetrális határeloszlás-tétel alapján nagy n-re a χ^2 eloszlása normális eloszlással közelíthető.

Legyen $A_1, \ldots, A_r$ teljes eseményrendszer ($\sum_{i=1}^r A_i = I$ és $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ ahol $i \neq j$ és I a teljes esemény halmaz).
Vizsgáljuk H_0-t: $P(A_i) = p_i$. Ahol p_i $i = 1, \ldots, r$ nevezetes eloszlás. ($\sum_{i=1}^r p_i = 1$)
Ezt a hipotézis vizsgálatot nevezzük $\boldsymbol{\chi^2}$ **próbának**.

Tfh. n kisérlet során A_i ν_i-szer(ν = nű) következik be. $\sum_{i=1}^r \nu_i = n$
ν_i valószínűségi változók binomiális eloszlásúak. $E(A_i) = np_i$
$P(\nu_1 = k_1, \nu_2 = k_2, \ldots, \nu_r = k_r | H_0) \stackrel{fln.}{=\!=} P(\nu_1 = k_1) \cdot P(\nu_2 = k_2) \cdot \ldots \cdot P(\nu_r = k_r) =$
$\dfrac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$
Ez a **Polinomiális eloszlás**.
Megj.: Két változó esetén a binomiális eloszlást kapjuk.

$\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^r \dfrac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
H_0 hipotézis akkor igaz, ha $\nu_i \approx np_i$. Azaz, ha χ^2 kicsi, akor jó a próba.

χ^2 : r db standardizált binomiális eloszlású valószinűségi változók négyzetének összege.

Megj.: A binomiális eloszlás nagy n és kicsi p esetén közelíthető normál eloszlással. ($np > 10$)

$P(\chi^2 < \chi^2_{r-1}(x)) = 1 - \alpha$
$r-1$ szabadságfokú χ^2 eloszlás.
Ahány paraméter becsült az eloszlásból, az annyival csökkenti a szabadságfokát (az $r-1$-et). (pl. ha becsüljük a λ-t a poisson eloszlásnál, a szabadságfok máris $r-2$ lesz)

Illeszkedés vizsgálat

Van egy megfigyelt adatunk, és ehhez feltételezünk egy eloszlást.

Megfigyelt valószínűségi változók eloszlása megeggyezik-e az előre megadottal. Lehet diszkrét, vagy folytonos.

Diszkrét

Adott $(x_i, p_i(?))$ eloszlás $i = 1, \dots, k$ valamint $q_i(?) = P(X = x_i)$
Megfigyelés: $\xi_i, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Jelöljük $q_1, \dots, q_k$-val az eloszlásuk. (Azt adják meg, hogy x_i-t milyen valószínűséggel veszi fel)
$\nu_i = \{m : \xi_m = x_i\}$ (Megadja, hogy a megfigyelés során hányszor vette fel az elméleti értéket)
$H_0 : q_i = p_i$ azaz a két eloszlás megegyező $\forall i = 1, \dots, r$-re.
$H_1 : q_i \neq p_i$ legalább egy i-re.

(Ha(?)) $\nu_i \approx np_i$, alkalmazhatjuk a χ^2 próbát.
$q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$ (Ahol ν_i azt adja meg, hogy gyakorlatilag hányszor következett be. Az np_i pedig, hogy nevezetesen(az elméleti eloszlás szerint(?)) hányszor következett be.
Ez egy $(k-1)$ szabadságfokú χ^2 eloszlás.
$P(H_0$ igaz; $g > c_k) = \alpha$, ahol g a kiszámolt, c_k az elméleti(táblázatból) (elsőfajú hiba)
Az α-t adjuk meg, így minimalizáljuk az elsőfajú hibát.

Ha $g > c_k$ elvetjük H_0-t
Ha $g < c_k$ elfogadjuk H_0-t

Folytonos

Felosztjuk részintervallumokra, és ezeken nézem a ν_i-t és az np_i-t. (r intervallum esetén $i = 1, \dots, r$) Majd ezeket vizsgálom.

Homogenitás vizsgálat

$\left.\begin{matrix} x_i, \dots, x_n \\ y_i, \dots, y_n \end{matrix}\right\}$ minták függetlenek és azonos eloszlásúak $\begin{matrix} \nu_i \\ \mu_i \end{matrix}$ $\begin{cases} \text{az } i \text{ intervallumba eső} \\ \text{minta elemek száma/gyakoris} \end{cases}$

$$\chi^2 = n \cdot m \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m} \right)^2}{\nu_i + \mu_i} \right)$$ $r - 1$ szabadságfokú χ^2 eloszlást ad.

$\sum_{i=1}^{r} \nu_i = n$, $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = m$, I-t r részre osztjuk.
$H_0 : P(X < x) = P(Y < y) \quad p_i = q_i$
$H_1 : p_i \neq q_i$

Függetlenség vizsgálat

2 teljes esemény rendszert vizsgál, hogy van-e köztük kapcsolat.
$A_1, \ldots, A_r$ és $B_1, \ldots, B_s$ teljes eseményrendszer
H_0: $P(A_i \bigcap B_j) = P(A_i)P(B_j)$ azaz A_i, B_j független $\forall\ i = 1, \ldots, r\ j = 1, \ldots, s$-re.
H_1: nem függetlenek.
$\nu_{ij} = A_i \bigcap B_j$ gyakorisága n független kisérletben.

Próbastatisztika:

$$\xi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(\nu_{ij} - np_iq_i)^2}{bp_iq_i} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_i\nu_j}{n}\right)^2}{\frac{\nu_i\nu_j}{n}}$$

Ha $\xi^2_{(r-1)(s-1)} < c_k$, elfogadjuk $1-\alpha$ szinten H_0-t

Hipotézis vizsgálat vége, sztochasztikus folyamatok/Idősorok kezdete

Sztochasztikus folyamatok

Def: Legyen x_t; $t \in N$ valószínűségi változók halmaza. Ezt **diszkrét idejű** sztochasztikus folyamatnak nevezzük.

Megjegyzés: $t = 0 : x_0$ - most mérem, vizsgálom, észlelem
$t > 0 : x_t$ - jövő

Def: Legyen x_t; $t \in Z$ valószínűségi változók halmaza, diszkrét idejű sztochasztikus folyamat.

$$x_t \begin{cases} t < 0 : \text{múlt} & \text{Ezt fogjuk vizsgálni.} \\ t = 0 : \text{jelen} & \text{Ezt fogjuk vizsgálni.} \\ t > 0 : \text{jövő} & \text{Ezt akarjuk becsülni, sejteni.} \end{cases}$$

t bármi lehet (pl. év, hónap, perc, stb.)

Def: $x_t : \Omega \to R$ függvény valmailyen véletlen esemény értéke a t időpontban.
$\omega \in \Omega$ - az eseménytér egy fix állapota.
$x_0(\omega), x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)$ számsorozat a folyamat $\omega \in \Omega$-hoz tartozó trajektóriája/magvalósulása

Példa: ε_t - fehér zaj, ha független, azonos eloszlású valószínűségi változót jelöl.
$E(\varepsilon_t) = 0$

Példa: x_t; $t \in N$ kockadobás értéke $P(x_t = l) = \frac{1}{6}$, $l = 1, \ldots, 6$ esetén.

Példa: Véletlen bolyongás
"kis átmérőjű csőben bolyongtatunk egy részecskét"
Legyen ε_j egy lépés jelölése.

$$\left.\begin{aligned} P(\varepsilon_j = -1) &= \frac{1}{2} \quad \text{(balra léptem)} \\ P(\varepsilon_j = 1) &= \frac{1}{2} \quad \text{(jobbra léptem)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_j\text{-k azonos eloszlásúak, függetlenek}$$

$P(x_{t+1} = x_t + 1) = \frac{1}{2}$

$P(x_{t+1} = x_t - 1) = \frac{1}{2}$

Ennek egy alfajtája, amikor 2-t léphetek balra vagy jobbra.

Def: Az időben változatlan viselkedésű egyensúlyban lévő rendszereket nevezzük **stacionárius**nak.
(Pl. eső esésének valószínűsége + eső mennyiség várhatóérték)

Def: Egy x_t; $t \in Z$ folyamatot **erősen stacionáriusnak** nevezünk, ha $\forall k \in Z$-re az $(x_0, \ldots, x_n)$ eloszlása megegyezik $(x_{0+k}, \ldots, x_{n+k})$ eloszlásávan.
Azaz az eloszlásáára teljesül az *időinvariáns tulajdonság.*

Def: Az x_t; $t \in Z$ **gyengén stacionárius** folyamat, ha

- $E(x_t^2) < \infty \quad \forall t \in Z$
- $E(x_t) = E(x_0) \quad \forall t \in Z$
- $cov(x_0, x_m) = cov(x_{0+k}, x_{m+k}) \quad \forall k, m \in Z$ (időinvaráns)

$cov(x_t, x_s)$ a t. és s. időpontban lévő folyamatot hasonlítja össze.
Csak a t és az s távolságától függ (pl. t-s=1)

Def: Legyen x_t; $t \in Z$ gyengén stacionáris folyamat, ekkor $R_x(k) = cov(x_0, x_k)$ $k \in Z$ **kovariancia függvény**t.

Állítás: Az így definiált konvariancia függvény tulajdonsgai:

- $R_x(0) = D^2(x_t)$
- $R_x(k) = R_x(-k)$ (páros függvény)
- $cov(x_l, x_m) = R_x(m - l)$

Biz:

- $R_x(0) = cov(x_0, x_0) \overset{\text{gyengén stac.}}{=\!=\!=} cov(x_t, x_t) = D^2(x_t)$
- $R_x(k) = cov(x_0, x_k) \overset{\text{idő inv.}}{=\!=} cov(x_{0-k}, x_{k-k}) = cov(x_{-k}, x_0) = R_x(-k)$
- $cov(x_l, x_m) \overset{-l}{=} cov(x_{l-l}, x_{k-l}) = cov(x_0, x_{m-l}) = R_x(m - l)$

Ezen tulajdonságokból adódóan:
(Emlékeztető: ε_t fehér zaj, ha $E(\varepsilon_t) = 0$, $D^2(\varepsilon_t) = \sigma^2 > 0$)
fehér zaj tulajdonságai:

- $cov(x_0, x_0) = \sigma^2$
- $cov(x_i, x_j) = 0 \quad i \neq j$
- Az előző átalakítva: $R_x(i - j) = 0$

Fehér zaj pl. $\varepsilon_t \to N(0, 1)$
Mivel függetlenek $\to cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

MA foylamat - **Mozgó átlag** folyamat
Legyen $\xi_t = \sum\limits_{j=-m}^{n} \alpha_j \varepsilon_{t-j} \quad t \in Z$; ε_t fehér zaj, α_j együtthatók.

(pl. $3\varepsilon_{t-2} + 4\varepsilon_{t-1} + 3\varepsilon_t + 2\varepsilon_{t+1} = \xi_t$)
Ha $n = m$ $\alpha_j = \dfrac{1}{2n+1} \quad (\forall - m \leq j \leq m)$

$$\xi_t = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-m}^{m} \varepsilon_{t-j}$$

Álltalánosan:
$\sum\limits_{j \in Z} \alpha_j^2 < \infty$

$\Theta_t = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}$ **végtelen MA** folyamat.
Kauzális MA folyamat:
ha $\alpha_j = 0 \quad j < 0$ esetén
$\Theta_t = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}$
A jövő csak a jelentől és a múltól függ ??
$R_\Theta(k) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+k} \sigma^2$
Def: Azt mondjuk, hogy x_t **autoregresszív(AR)** folyamat, ha x_t gyengén stacionárius és előáll $x_{t+1} = \Phi x_t + \varepsilon_{t+1}$ rekurzióval. Ahol $\Phi \in R$, ε_{t+1} fehér zaj.
Megj. Ha $\Phi > 1 \quad x_t \Phi$ ütemben nő,
ha $\Phi < 1 \quad x_t \Phi$ ütemben csökken.

Példa
x_t - a tó vízállása t időpontban
$x_{t+1} = 0,9x_t + \varepsilon_{t+1}$, ahol ε_{t+1} a csapadék($\Phi < 1$ mert a tó vize párolog).

Def: Legyen Y_n valószínűségi változók sorozata és Y valószínűségi változó.
$E(Y_n^2) < \infty$; $E(Y^2) < \infty$
Azt mondjuk, hogy Y_n L^2 értelemben tart Y-hoz $(Y_n \to Y)$, ha $E((Y_n - Y)^2) \to 0 (n \to \infty)$

Tétel $|\Phi| < 1$, ε_t fehér zaj, ekkor előállítható:
$x_{t+1} = \Phi x_t + \varepsilon_{t+1}$ folyamat és ez AR folyamat lesz.

Def: $Y_t,\ Y$ valószínűségi változók $E(Y_t^2) < \infty$ és $E(Y^2) < \infty$.
Y_n L^2 értelemben tart Y-hoz, ha $\lim_{n\to\infty} E(Y_n - Y)^2 = 0$

Tétel: Legyen $|\Phi| < 1$, ε_t fehér zaj, ekkor $\exists x_t,\ t \in \mathbb{Z}$ AR-nak MA előállítása, melyre $\lim_{k\to\infty} E(x_t - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k \varepsilon_{t-k}) = 0$
x_t előáll ε_i ∞ soraként.

Biz.
$x_t = \Phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \phi(\phi x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \phi(\phi(\phi(x_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \ldots =$
$= \phi^{n+1} x_{t-(n-1)} + \phi^n \varepsilon_{t-n} + \phi^{n-1} \varepsilon_{t-n+1} + \ldots + \varepsilon_t$

$E(x_t - \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n \varepsilon_{t-n})^2 = E(\phi^{n+1} x_{t-(n+1)})^2 = \lim_{n\to\infty} \phi^{2n+2} E(x_{t-(n+1)})^2 = 0$

x_t és az ε_{t+k} korrelálatlanok $k \geq 1$

Tehát $cov(x_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$

mivel stac. $D^2(x_t) = D^2(x_{t-1})$

$D^2(x_t) = D^2(\phi x_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi^2 D^2(x_{t-1}) + \underbrace{D^2(\varepsilon_t)}_{\sigma^2} + \underbrace{2cov(\phi x_{t-1}, \varepsilon_t)}_{0} =$

Mivel stacionáriusak: $D^2(x_t) = D^2(x_{t-1})$ Valamint függetlenek, ezért a kovarianciájuk 0. Tehát:

$D^2(x_t)[1 - \phi^2] = \sigma^2 \Rightarrow D^2(x_t) = \dfrac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$ $\quad |\phi| < 1$-re érvénxes ($D^2 > 0$)

$E(x_t) = E(\phi x_{t-1} + \varepsilon_t) = \phi E(x_{t-1}) + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{0}$

ε_t fehér zaj, tehát $E(\varepsilon_t) = 0$.

$E(x_t) = E(x_{t-1})$
Mivel $\phi < 1$:
$E(x_t) = 0$

$R_x(k) \quad k = 0 \quad \dfrac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = R_x(0)$

$R_x(k) \quad k \neq 0 \quad R_x(-k) = R_x(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} \sigma^2 = \sigma^2 \phi^k \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \sigma^2 \phi^k \dfrac{1}{1 - \phi^2} =$
$R_x(k)$

Def: Legyen x_t, $t \in \mathbb{Z}$-re tetszőleges sztochaszikai folyamat.
Ekkor $z x_t = x_{t-1}$ kifejezésben z a **visszaléptatési operátor**.

Pl.
$(3 - z^2 - 4z + 5)x_t = 3x_{t-2} - 4x_{t-1} + 5x_t$
$x_t = 4\varepsilon_{t-3} + 5\varepsilon_{t-2} - 2\varepsilon_t \Rightarrow x_t = (4z^3 + 5z^2 - 2)\varepsilon_t$
$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow x_t(1 - \phi z) = \varepsilon_t$

Def: $ARMA$
x_t, $t \in \mathbb{Z}$ stacionárius folyamat (p, q)-ad rendű $ARMA$ folyamatnak nevezzük, ha:

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

ahol α_0 mindig 1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ és $\beta_0, \ldots, \beta_q$ rögzített konstansok, valamint ε_t fehér zaj.

$$x_t + \alpha_1 z x_t + \alpha_2 z^2 x_t + \ldots + \alpha_p z^p x_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 z \varepsilon_t + \beta_2 z^2 \varepsilon_t + \ldots + \beta_q z^q \varepsilon_t$$
$$x_t(1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_p z^p) = \varepsilon_t(\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_q z^q)$$

$$A(z)x_t = B(z)\varepsilon_t$$

Tétel 1. Ha $A(z)$ polinom $\forall$ gyöke a koplex sík egységkörén kívül van, azaz $\forall |z_i| > 1$ ha $A(z_i) = 0$, akkor az x_t $ARMA$ folyamatnak $\exists MA(\infty)$ **előállítása**:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$$

Biz. Legyenek $A(z)$ gyökei $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{Z}$ vagy $\in \mathbb{C}$, mind különböző.
Ekkor $A(z) = \alpha_p(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_p)$

$x_t \dfrac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t = \dfrac{B(z)}{\alpha_p} \dfrac{1}{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_p)} \varepsilon_t =$

Parciális törtekre bontható:

$\dfrac{B(z)}{\alpha_p} \left[\dfrac{L_1}{z - z_1} + \dfrac{L_2}{z - z_2} + \ldots + \dfrac{L_p}{z - z_p} \right] \varepsilon_t =$

Minden elem mértani sorra bontható:

$\dfrac{L_j}{z - z_j} = -\dfrac{L_j}{z_j} \dfrac{1}{1 - \dfrac{z}{t_j}} = -\dfrac{L_j}{z_j} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{z_j} \right)^i$

$= \dfrac{B(z)}{\alpha_p} \left[\sum_{j=1}^{p} \left(-\dfrac{L_j}{z_j} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\dfrac{z}{z_j} \right)^i \right] \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i z^i \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}$ ahol φ_i egy konstans(z^i-n kívüli tagok a szummákból)

Def: $A(z)\ x_t = B(z)\varepsilon_t$ $ARMA$ folyamat invertálható, ha $\exists \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j x_{t-j}$ előállítása.

Tétel 2. Ha $B(z)$ polinom olyan, hogy $\forall$ gyöke kívül van az egységkörön ($\forall |z_i| > 1$ ha $B(z_i) = 0$), akkor **invertálható**, és:

$$\varepsilon_t = \frac{A(z)}{B(z)} x_t$$

Pl.

$x_t - \dfrac{1}{4} x_{t-1} = 3\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$ $(2, 1)$ ARMA folyamat.

1. Feladat: Létezik-e az ARMA folyamatnak végtelen MA előállítása? Ha igen, adja meg!

$x_t(1 - \dfrac{1}{4} z^2) = \varepsilon_t(3 + z)$

$A(z) = 1 - \dfrac{1}{4} z^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 2$

A Tétel1. szerint előáll $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$. Most:

$x_t = \dfrac{3 + z}{1 - \dfrac{1}{4} z^2} \varepsilon_t$

$$\frac{3 + z}{\left(1 - \frac{1}{2} z\right)\left(1 + \frac{1}{2} z\right)} = \frac{A}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{B}{1 + \frac{z}{2}} = \frac{A + \frac{1}{2} Az + B - \frac{1}{2} Bz}{1 - \frac{1}{4} z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A + B \\ 1 &= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \quad \} \cdot 2 \end{aligned}\right\} \bigoplus$$

$5 = 2A \Rightarrow A = 2,5$
$3 = 2,5 + b \Rightarrow B = 0,5$

$$x_t = \left[\frac{2,5}{1-0,5z} + \frac{0,5}{1+0,5z}\right]\varepsilon_t = \left[2,5\sum_{j=0}^{\infty} 0,5^j z^j + 0,5\sum_{j=0}^{\infty} (-0,5)^j z^j\right]\varepsilon_t = \left[2,5\sum_{j=0}^{\infty} 0,5^j \varepsilon_{t-j} + 0,5\sum_{j=0}^{\infty} (-0,5)^j \varepsilon_{t-j}\right] = \left[\sum_{j=0}^{\infty} 2,5 \cdot 0,5^j + 0,5 \cdot (-0,5)^j\right]\varepsilon_{t-j}$$

2. Feladat: Invertálható-e az ARMA folyamat? Ha igen, adja meg az előállítását!

$B(z) = 3 + z \Rightarrow z_{1,2} = \pm 3$

A Tétel2. szerint invertálható. Tehát:

$$\varepsilon_t = \frac{1 - \frac{1}{4}z^2}{3+z} x_t$$

Mivel a számlálóban is van z, és nehéz egyszerűsíteni, ezért polinom oszást végzek:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}z^2 + 1 : z + 3 = -\frac{1}{4}z + \frac{3}{4} - \frac{5}{4(z+3)} \\ &\ominus -\frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{4}z \\ &\overline{\qquad\qquad} \\ &\qquad \frac{3}{4}z + 1 \\ &\quad \ominus \frac{3}{4}z + \frac{9}{4} \\ &\quad \overline{\qquad\quad} \\ &\qquad -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

A polinom oszás után:

$$\varepsilon_t = \left[-\frac{1}{4}z + \frac{3}{4} - \frac{5}{4(z+3)}\right]x_t = \frac{3}{4}x_t - \frac{1}{4}x_{t-1} - \frac{5}{4\cdot 3}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{z}{3}}}_{\text{mérteni sor}} x_t$$

Amiből a mértani sor miatt:

$$\varepsilon_t = \frac{3}{4}x_t - \frac{1}{4}x_{t-1} - \frac{5}{12}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^j z^j x_t \quad \text{ahol } z^j x_t = x_{t-j}$$

Sztochasztikus folyamatok - ELŐREJELZÉS

Adottak $x_1, \dots, x_T$ minták. Ekkor x_{T+1} megközelítése $\widehat{x}_{T+1}$.

Megj. Vannak előre jelezhető és előre nem jelezhető, bizonytalan folyamatok.

Feltevések: x_t (p, q) ARMA, stabil, invertálható.

Def: Oyan $\widehat{x}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j x_{t-j}$ becslést keresünk, ahol x_t $(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ múlból állítjuk elő, melyre $E(x_t - \widehat{x}_t)^2$ a legkisebb négyzetes közelítés.

$x_t = \dfrac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, ψ_k-k számolhatók.
$\widehat{x}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}$ ($j = 1$-től megy, mert előre jelzést akarunk)

Lemma: $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ ez a legjobb négyzetes közelítés. (azaz akkor a legjobb, ha $\gamma_j = \psi_j \ \ \forall j = 1, \dots$)

Biz. Tfh. $y_t = \sum_{j-1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}$ x_t-nek egy becslése/előrejelzése.
A becslés, akkor a legjobb, ha az $E(x_t - y_t)^2$ a lehető legkisebb.
$E(x_t - y_t)^2 = E(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} - \sum_{j-1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j})^2 = E(\psi_0 \varepsilon_t + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_j - \gamma_j) \varepsilon_{t-j})^2 = \psi_0^2 \underbrace{E(\varepsilon_t)^2}_{\sigma^2} + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_j - \gamma_j)^2 \underbrace{E(\varepsilon_{t-j})^2}_{\sigma^2}$

A köztes tag (2nem tudom mi) 0, mert ε_t fehér zaj $\Rightarrow E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

Akkor a legkisebb, ha $\psi_j = \gamma_j$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{x}_t = \sum_{j-1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \text{ alakban a legjobb} \\ &x_t = \frac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}\right\} \widehat{x}_t = x_t - \psi_0 \varepsilon_t = \frac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t - \psi_0 \varepsilon_t = \frac{B(z) - A(z)\psi_0}{A(z)} \varepsilon_t = \widehat{x}_t$$

$\widehat{x}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \ z^j \ \varepsilon_t$

Mivel $j = 1$-től megy a $j = 0$ tag az 0.
Azaz a számláló első tagja: $\beta_0 - 1\psi_0 = 0$
Amiből adódik, hogy $\psi_0 = \beta_0$

Tehát:

$$\widehat{x}_t = \frac{B(z) - A(z)\beta_0}{A(z)} \varepsilon_t$$

Mivel x_t-kel akarjuk előállítani, felhasználjuk, hogy $\varepsilon_t = \dfrac{A(z)}{B(z)} x_t$.

$$\widehat{x}_t = \frac{B(z) - A(z)\beta_0}{A(z)} \frac{A(z)}{B(z)} x_t = \frac{B(z) - A(z)\beta_0}{B(z)} x_t$$

Pl.: Van egy x_t mérési mintánk $A(z)$, $B(z)$ imert.
$25x_t - x_{t-2} = 8\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}$

$A(z) = 25x^2 - 1$
$B(z) = 8z^2 - 2z - 1$
$\beta_0 = 8$

Statisztikai folyamat paramétereinek becslése x_t stacionárius folyamat $m = E(x_t) \quad \forall t \in \mathbb{Z},\ R_x(k) = cov(x_0, x_t) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Például ε_t független azonos eloszlású, és $E(\varepsilon_0) = 0,\ D^2(\varepsilon_t) < \infty$, konstans (tehát fehér zaj)
$\varepsilon_t \quad t = 0, \dots, T$
$\overline{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_T}{T+1}$, ami a nyagyszámok törvénye miatt: $E\varepsilon_0$

Def: $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stacionárius folyamatot **ergodikus**nak nevezzük, ha $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_t}{T}$ tart az $E(x_0)$-hoz L^2 értelemben. $\left(\lim_{T\to\infty}(E(\frac{x_1+\ldots+x_T}{T} - E(x_0))^2) = 0\right)$

Tétel: Ha $R_x(k)$ kovariancia függvény olyan, hogy az $\lim_{k\to\infty} R_x(k) = 0$, akkor x_t folyamat **ergodikus**.

Következmény: x_t ARMA, tehát $x_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \varepsilon_{t-i}$, ekkor $R_x(k) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j \phi_{j+k} \sigma^2$

Mert:
$R_x(k)$ számolásához felhasználjuk, hogy $x_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \varepsilon_{t-i}$

$$R_x(k) = cov(x_t, x_{t+k}) = cov(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t+k-i}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \phi_j \phi_i cov(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t+k-i})$$

$$R_x(k) = \left\{\begin{matrix} 0 & t-j \neq t+k-i \\ \phi_j \phi_i \sigma^2 & t-j = t+k-i \end{matrix}\right\} \text{akkor nem 0, ha } i = j+k$$

Tehát valóban $R_x(k) = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j \phi_{j+k} \sigma^2$.

Tétel: Ha $\lim_{k\to\infty} R_x(k) = 0$, akkor x_t Gauss folyamat (azaz normál eloszlású folyamat), ekkor $\lim_{k\to\infty} \widehat{R}_x^n(k) = R_x(k)$

Konklúzió $x_1, \dots, x_n$, ekkor $\underbrace{E(x_t) \approx \overline{x}_n \text{ és } r_x(k) \approx \widehat{R}_x^n(k)}_{\text{legjobb becslések}}$ ($n > 50, n > 4k$ esetén)

Def: Legyen $x_t\ t \in \mathbb{Z}$ gyengén stacionárius folyamat, $R_x(k)\ k \in \mathbb{Z}$ kovariancia függvény. Ekkor: $\Phi_x(u) = \sum\limits_{u\in\mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk}$ végtelen sort, ha konvergens, $u \in [-\pi, \pi]$ a folyamat **sprektrális sűrűségg függvény**nek nevezzük

Tulajdonságai:

1. $\Phi_x(u) = \Phi_x(-u)$
   Bizonyítás: $\Phi_x(u) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk} \underset{\text{(páros)}}{\overset{R_x(k)=R_x(-k)}{=\!=\!=}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} R_x(-k) e^{-iuk} \underset{-k=j}{\overset{\text{új jelölés:}}{=\!=\!=}} \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} R_x(j) e^{iuj} = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} R_x(j) e^{-i(-u)j} = \Phi_x(-u)$

2. $\Phi_x(u) \geq 0$
   Bizonyítás: $R_x(k) \sim \sigma^2 \geq 0 \quad e^{-ix} \geq 0$ (e^{-ix}-ből $\cos$-os alak lesz)

3. **Tétel:** Ha $\Phi_x(u)$ létezik, akkor páros, nem negatív **inverze** $R_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(t) e^{itk} dt$

Def: $x_1, x_2, \ldots, x_t$ valószínűségi változók sorozata **Markov lánc**ot alkot, ha t kezdőpillanatot követő x_{t+1} valószínűségi változó értéke csak x_t értékétől függ.

$$P(x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t, \underbrace{x_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, x_0 = i_0}_{\text{ezek nem befolyásolják}}) = P(x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t)$$

Def: Rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett $p_{i,j}(n) \quad i, j \in I$ valószínűségeket a Markov lánc ***n*. lépéséhez** tartozó **egylépéses átmenet valószínűségé**nek nevezzük.
$P(n)$ az átmenet valószínűségéhez tartozó **átmenetivalószínűségi mátrix**.

$$P(n) = [p_{i,j}(n)]_{i,j \in I}$$

Markov lánc kezdeti eloszlása megadható $\boldsymbol{q} = [q_i]$ sorvektorával.
Ahol $q_i = P(x_0 = i)$, amiből következik, hogy $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$. (k a realizációk száma)

π a folyamat dinamikáját adja meg. Tehát azt adja meg, hogy milyen valószínűséggel jutatt 1 lépés alatt i-ből j-be.

Def: Egy $\boldsymbol{\alpha}$ sorvektorról azt mondjuk, hogy **eloszlás**, ha $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \ldots k, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$
Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix **sztochasztikus mátrix**, ha minden sorvektora eloszlás.

Def: Az $x_t, \quad t \in \mathbb{N}$ Markov lánc **homogén**, ha $P(x_t = i_t | x_{t-1} = i_{t-1})$ független t-től.

Megjegyzés: Innentől kezdve csak homogén Markov láncokkal fogunk foglalkozni.

Tétel: $p_{i,j} = P(x_1 = j | x_0 = i) \geq 0 \quad \forall i, j$-re és $\sum_{j=0}^{n} p_{i,j} = 1$

Tétel: Legyen x_t valószínűségi változók sorozatának eloszlása $q(x_0)$. Ekkor $q(x_1)$ a következőképpen számolható:

$$q(x_1) = q(x_0)\pi \qquad \text{ahol } q(x_1), q(x_0) \in \mathbb{R}^n, \quad \pi \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

Def: Az ***n* lépéses átmenet** valószínűség annak a valószínűsége, hogy i-ből kiindulva n lépés alatt eljutok k-ba.

$$p_{i,k}^{(n)} = P(x_n = k | x_0 = i)$$

Tétel: Chapman-Kolmogorov egyenlet:

$$\left[p_{i,j}^{(n)}\right] = \pi^n$$

Def: Az x_t $t \in \mathbb{N}$ Markov láncot **irreducibilis**nek nevezzük, ha $\forall i, j = 1, 2, \ldots, N$ esetén $\exists n = n(i,j)$, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Def: A Markov lánc állapotainak S halmaza **zárt**, ha az S halmazon kívül egyetlen állapot sem érhető el S állapotaiból.

Def: Az i. állapot **elnyelő** állapot, ha $p_{ii} = 1$. Minden elnyelő állapot zárt halmaz.

Def: Az i. állapot **tranziens**, ha $\exists$ olyan j állapot, amely elérhető i-ből, de j-ből i nem érhető el. $p_{i,j}^{(n)} > 0 \quad \nexists m \; p_{j,i}^{(m)} > 0$
Ha nem tranziens, akkor **visszatérő**.

Def: Azt mondjuk, hogy i. kommunikál j-vel, ha $\exists n, m \; p_{ij}^{(n)}$ és $p_{ji}^{(m)} > 0$

Def: Az i. állapot **periodikus** $k > 1$ periodussal, ha k az a legkisebb szám, amire igaz, hogy az i-ből i-be visszatérő lánc hohssza k, illetve k egész számú többszöröse.

$$\pi^{(k)} = \begin{cases} p_{ij} = 0 & \text{ha } i \neq j \\ p_{ij} = 1 & \text{ha } i = j \end{cases}$$

A nem periodikus visszatérő állapot **aperiodikus**nak nevezzük.

$\{n > 0, p_{ij}^{(n)}\}$ halmaz legnagyobb közös osztója: $d(i) > 1$, akkor i pertiodikus. Ha $d(i) = 1$, akkor aperiodikus.

Def: A Markov lánc **aperiodikus**, ha $\forall i = 1, \ldots, N$ állopta aperiodikus.

Def: A Markov láncot **ergodikus**nak nevezzük, ha aperiodikus, és $\forall p_{ij} > 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, N$. (azaz ha aperiodikus és irreducibilis)

Tétel: Legyen Markov lánc ergodikus $(N \times N)$ – s π mátrixszal adott. Ekkor

$$\exists \boldsymbol{x}(x_1, \ldots, x_N), \text{ hogy } \lim_{n\to\infty} \pi^n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_N \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_N \end{pmatrix}$$

x_j valószínűség független a kiindulástól. ("elfelejti a múltját")

Def: A fenti $\boldsymbol{x}(x_1, \ldots, x_N)$ a Markov lánc **stacionárius állapota:** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\pi$ másképp jelölve: $\boldsymbol{q}_\infty = \boldsymbol{q}_\infty \pi$ amit átalakítva: $(\pi - E)^T \boldsymbol{q}_\infty^T = \boldsymbol{0}$, ahol $q_{\infty_1} + q_{\infty_2} + \ldots + q_{\infty_N} = 1$.

Tétel: Ha a Markov lánc irreducibilis és aperiodikus $\Rightarrow$ $\exists$ stacionárius állapota.

Tömegkiszolgálási rendszerek

Érkeznek igények, amikből mindig egyet kiszolgálunk, majd kiszolgálás után távozik.

Fontos tulajdonságai:

- várhatós sorhossz
- átlagos várakozási idő
- optimális alkalmazott(kiszolgáló) száma

Diszkrét idejű rendszert tekintünk.

$$\left.\begin{array}{l} Y_n := (n-1,n] \text{ között érkező igények száma} \\ V_n := (n-1,n] \text{ között kiszolgált igények száma} \\ X_n := n. \text{ időpontban várakozó igények száma} \end{array}\right\} n = 1,2,\ldots \text{(ez lehet perc, nap, év, stb)}$$

A sor hossz érdekel minket:
$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$

Ahol $(X_n - V_{n+1})^+ = max(X_n - V_{n+1}, 0) = \begin{cases} X_n - V_{n+1} & \text{ha } X_n - V_{n+1} > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

<u>Feltevések</u>

- $Y_n \quad n = 1,2,\ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változó
- $V_n \quad n = 1,2,\ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változó
- $\{Y_n\}$ és $\{V_n\}$ sorozatok is függetlenek egymástól

<u>Állítás:</u> Legyen x_0 független (Y_n, V_n)-től. Ha a fenti feltevések igazak, akkor x_t homogén Markov lánc.

Tétel: Tekintsük a fenti tömeg kiszolgálási modelt:
<u>Tfh.</u> π főátlója alatt és felett csupa > 0 elem van, valamint $E(Y_i) < E(V_i)$ $\forall i = 1,2,\ldots$. Ekkor x_t $t \in \mathbb{N}$ stabil Markov lánc. ($\exists$ stacionáris állapota)

Gyakorlatról(05.02.):

Def: x_n irreducibilis Markov lánc átmenet valószínűségi mátrixa π. Az i. állapotból indulva a visszatéréshez szükséges lépések számának várható értéke:
$E(T_{ii}) = \dfrac{1}{\pi(i)} \quad T = min(n \geq 1; x_n = i)$
$T_{ij} = min(n \geq 1 \; x_n = j | x_0 = i) \quad E(T_{hh}) = 2 + E(T_{ij})$

Az $x_t \quad t \in \mathbb{N}$ egy χ ∞ állapottérben értelmezett.
Az irreducibilis és az aperiodikus tulajdonságok hasonlóak. $\pi = [p_i j]_{i,j\in\mathbb{N}}$, ahol $p_{ij} = P(x_1 = j|x_0 = i)$

Tétel: Ha a főátló alatt és felett minden elem pozitív $(p_{i,i-1} > 0; p_{i,i+1} > 0)$ és a főátlóban legalább egy $p_{ii} \neq 0$

Megjegyzés: Ha x_t ∞ állapottéren értelmezett, akkor az irreducibilitásból és aperiodikusságból nem következik a satabilitás.

Def: Eloszlási operátornak nevezzük $q(x_t) = (p(x_t = 0), p(x_t = 1), \ldots, p(x_t = k), \ldots) \in \mathbb{R}^N$.

Def: Az $x_t \quad t \in \mathbb{N}$ Markov lánc **stabil**, ha $q_\infty \in \mathbb{R}^n$ eloszlási operátorra igaz, hogy $\forall q_\infty^i \in [0,1] \quad i \in \mathbb{N}$-re $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_\infty^i = 1$ és $\forall x_0$-ra $\lim\limits_{t\to\infty} q^i(x_t) = q_\infty^i$.

Folytonos idejű Markov láncok

Az állapottér diszkrét $x_t \in S$ $S = \{1, 2, \ldots\} \quad t \geq 0$ $t \in \mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$

Def: x_t $t \in \mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$ **folytonos idejű** Markov láncnak nevezzük, ha $\forall n \geq 1$-re $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$-re az $x_0, x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$ teljesül.
$P(x(t_n) = x_n|x(t_{n-1}) = x_{n-1}, x(t_{n-2}) = x_{n-2}, \ldots, x(t_0) = x_0) = P(x(t_n) = x_n|x(t_{n-1}) = x_{n-1})$ ha ezek a feltételes valószínűségek léteznek.

2 egymás utáni történés λ paraméterű exponencális eloszlású.
x_t jelenti $[0, t]$ hány történés volt.
x_t Folytonos idejű Markov lánc eloszlása (λt) paraméretű Poisson eloszlás. $p_{ij}(t) = e^{-(\lambda t)} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$

Chapman-Kolmogorov: $p_{ij}(s+t) = \sum\limits_{k\in S} P(x(s+t) = j, x(t) = k|x_0 = i) = \sum\limits_{k\in S} P(x(s+t) = j|x(t) = k)P(x(t) = k|x(0) = i) = \sum\limits_{k\in S} p_{ik}(t)p_{kj}(s) = \sum\limits_{k\in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$

$$\pi(s+t) = \pi(s)\pi(t) = \pi(t)\pi(s)$$

Tfh. $p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = j \text{ kicsi } t\text{-re} \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \begin{cases} p_{ii} = 1 \\ p_{ij} = 0 \end{cases}$

Tétel: Ha a Markov láncra igaz a feni feltétel, $p_{ij}(t)$ függvények differenciálhatóak $\forall t > 0$-ra.
Jelölés: $q_{ij} = p'_{ij}(0)^+ = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$

Def: $Q = [q_{ij}] = \pi'[0^+]$ mátrix a folyamat **ráta mátrix**nak nevezzük. $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} q_{ij} = 0$ (tehát van negatív eleme is)

Tétel: Ha a Markov láncra teljesül, hogy $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} q_{ij} = 0$ $\sum p'_i j = \sum\limits_{k\in S} q_{ik}p_{kj}(t)$
$\pi'(t) = Q\pi(t)$

Tétel: Folytonos idejű, véges állapotterű, irreducibilis Markov lánc, akkor **stabil**, ha $xQ = 0 \to Q^t x^t = 0^t$. (Ahol x a határeloszlás, Q a ráta mártix.)

Ez csak május 17-én kell:

Def: Egy pontfolyamatot **felújítási folyamat**nak nevezzük, ha a pontok közötti távolság azonos eloszlású, tetszőleges valószíműségi változók. Paraméterei: A/B/m/K/M
A - szomszédos igények beérkezése között eltelt idő eloszlásának kódja
B - kiszolgálási idő eloszlásásnak kódja
m - a rendszerben lévő kiszolgáló egységek száma
K - a rendszer befogadóképessége
M - igényforrások száma
A,B kódja lehet:

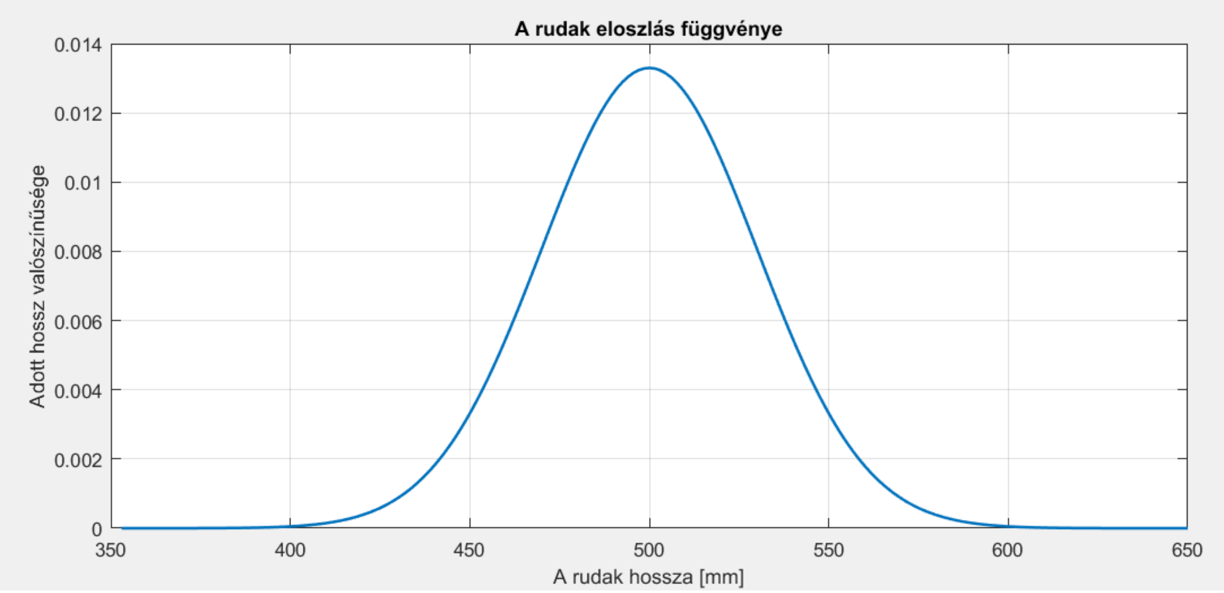
- M - Markov tulajdonságú, exponencális eloszlású
- D - Determinisztikus
- G - tetszőleges eloszlású

K,M alapértelmezettként ∞
Például M/M/1, ahol az első M(az A kódja) utal a (λt) paraméterű Poisson eloszlásra, a második M(a B kódja) a (μ) paraméterű Exponencális eloszlásra, az 1 a kiszolgáló egységek száma, valamint K,M végtelen.

PÉLDÁK

1.1.

100 db rudat megmérünk. Ezeknek a hossza: $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ mm. A névleges hosszuk 500 mm.
Legyen a rudak eloszlásfüggvénye a következő:

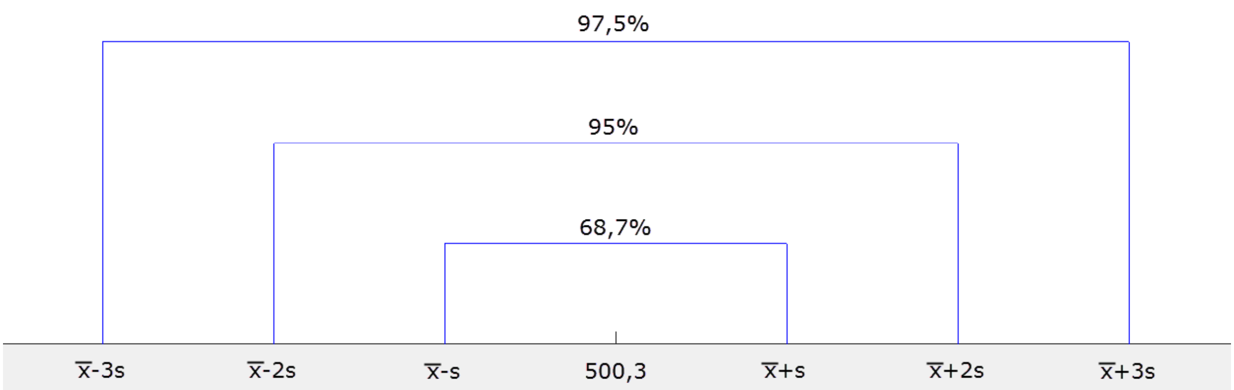


Normál eloszlást sejtet(Gauss görbe.)

Számoljuk ki a mintaátlagot: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Valamint a tapasztalati szórásnégyzetet: $s_n^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$

Legyen $\overline{x}_{100} = 500,3mm$, és $s_{100} = 0,05mm$.
Továbbá egy rúd az alábbi valószínűségekkel van az adott intevallumon:



Vissza

1.2.

Adott k, és n_k (lent táblázatban). Ahol k az árhullámok száma, n_k azt mutatja meg, hogy 70 év alatt hány évben volt k db árhullám.
Számolja ki a relatív gyakoriságot(g_k)!

Adja meg az eloszlását, és számolja ki a valószínűségeiket!

---

k	n_k	g_k	$E(x_k)$	P_k	$70 \cdot P_k$
0	22	0,31	$0 \cdot 22$	0,27	19
1	21	0,3	$1 \cdot 21$	0,35	24
2	15	0,21	$2 \cdot 15$	0,23	16
3	7	0,1	$3 \cdot 7$	0,1	7
4	5	0,07	$4 \cdot 5$	0,05	4

A relatív gyakoriságot a $g_k = \frac{n_k}{n}$ képlettel számoltuk.
Poisson eloszlást követ, tehát $E(x) = \lambda = \frac{\sum E(x_k)}{n} = \frac{92}{70} = 1,3$
Ezután λ ismeretében kiszámolható az árhullámok számának a valószínűsége:
$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
Vissza

1.3.
Becsüljük meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n \sim N(m, \sigma)$ normál eloszlást követő értékek várható értékét(m), úgy hogy a szórás(σ) ismert. Azaz $L(\Theta, x_1, x_2, \ldots, x_n) =?$ ahol $\Theta = m$.
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$L(\Theta, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$
A maximumát keresem, ezért logaritmusát veszem, majd deriválom m szerint hogy megtaláljam(a logaritusának ugyanott van a maximuma).
$lnL(\Theta, x_1, x_2, \ldots, x_n) = ln(2\pi)^{\frac{n}{2}} - n \cdot ln\sigma + ln(e) \cdot (-\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2})$
Figyelembe véve, hogy az $ln(2\pi)^{\frac{n}{2}} - n \cdot ln\sigma$ konstans, és az $ln(e) = 1$, deriválva ezt kapom:
$\frac{\partial lnL}{\partial \Theta} = \frac{\partial lnL}{\partial m} = -\frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} 2(x_i - m)(-1)}{\sigma^2} \stackrel{?}{=} 0$
Akkor teljesül, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m) = 0$
Azaz, ha $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i) \ - m \cdot n = 0$

Ebből kifejezve m-et megkapjuk a becslésünket: $\widehat{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$
Tehát a normál eloszlás várható értékét a minta átlaggal becsülhetjük a Maximum-Likelihood módszer szerint.
Vissza

1.4.
Becsüljük meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n \sim N(m, \sigma)$ normál eloszlást követő értékek szórását(σ), úgy hogy a várható értéke(m) ismert. Azaz $L(\Theta, x_1, x_2, \ldots, x_n) =?$ ahol $\Theta = \sigma$.
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$L(\Theta, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$
Hasonlóan, mint az 1.1.3-as példához, a maximumát keresem, ezért logaritmu-

sát veszem, majd deriválom σ szerint, hogy megtaláljam(a logaritusának ugyanott van a maximuma).
$lnL(\Theta, x_1, x_2, \ldots, x_n) = ln(2\pi)^{\frac{n}{2}} - n \cdot ln\sigma + ln(e) \cdot (-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m)^2}{\sigma^2})$
Figyelembe véve, hogy az $ln(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ konstans, és az $ln(e) = 1$, deriválva ezt kapom:
$\frac{\partial lnL}{\partial\Theta} = \frac{\partial lnL}{\partial\sigma} = -n\frac{1}{\sigma} + \frac{-2}{\sigma^3} \cdot \frac{-1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}(x_i - m)^2\right) \stackrel{?}{=} 0$
σ^3-el szorozva, majd $n\sigma^2$-et hozzáadva kapjuk, hogy: $\sum_{i=0}^{n}(x_i - m)^2 = n\sigma^2$
Amiből σ^2-et kifejezve megkapjuk a becslésünket: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-m)^2}{n}$
Tehát a normál eloszlásnál a szórás Likelihood becslése a tapasztalati szórás.
Vissza

1.5. (Konfidencia(megbízhatósági) intervallum keresés)
Adott $x_1, x_2, \ldots, x_n \sim N(m, \sigma)$, ahol σ ismert.
Keressünk m-re $1 - \varepsilon$ szintű konfidenciaintervallumot!

$P(\overline{x} - a < m < \overline{x} + a) = 1 - \varepsilon$
$P(-a < m - \overline{x} < a) = 1 - \varepsilon$
$P(|m - \overline{x}| < a) \underset{\text{kedvéért}}{\overset{\text{szokás}}{=\!=\!=}} P(|\overline{x} - m| < a) \overset{\text{sztenderdizálom}}{=\!=\!=\!=} P(\frac{-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \Phi(\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - \Phi(-\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) =$
Mivel $-\Phi(-\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = -(1 - \Phi(\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}))$, ezért ez tovább egyenlő:
$= 2\Phi(\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - 1 = 1 - \varepsilon$
Otszok kettővel, majd, veszem a Φ^{-1}-ét: $\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \Phi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{2})$
$a = \Phi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Tehát m-re, az $1 - \varepsilon$ szintű konfidenciaintervallum:
$\left[\overline{x} - \Phi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \Phi^{-1}(\frac{1-\varepsilon}{2})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Vissza