Analízis (1.hét)
Vághy Mihály LSMJFW

1. Házi feladat

1.1. feladat

1.1.1. (a)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

Megvizsgálva $n=1$-et, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást.

1.1.2. (b)

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Megvizsgálva $n=1$-et, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+(2n+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=$$

$$\frac{n(4n^2-1)+3(2n+1)^2}{3}=\frac{4n^3-n+12n^2+12n+3}{3}=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$$

Vegyük észre, hogy ki $n+1$-et kiemelhetünk!

$$\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}=\frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}=\frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés: Azt, hogy $n+1$-et kiemelhetünk, azzal a trükkel vehetjük észre, hogy a páros kitevőjű hatványok együtthatóinak összege egyenlő a páratlan kitevőjű hatványok együtthatóinak összegével. Tehát ebben a konkrét esetben $12+3=11+4$. Ez ugyebár azt jelenti, hogy -1 gyöke a kifejezésnek, azaz $n=-1$ esetén $4n^3+12n^2+11n+3=0$. Ez azért jó, mert hogyha egy $P(n)$ polinomnak gyöke az a szám, azaz $P(a)=0$, akkor kiemelhető belőle $n-a$, azaz alkalmas $Q(n)$ polinomra $P(n)=(n-a)\cdot Q(n)$. Ez többek között az algebra alaptétele, a faktorizációs tétel, illetve a kis Bézout-tétel miatt van így (maga az állítás a faktorizációs tétel).
Amennyiben nem találunk semmilyen módszerrel könnyen kiszúrható gyököt (segíthet ebben még a Rolle-féle gyöktétel), akkor kénytelenek vagyunk "visszafelé" haladni. Tehát felírjuk a szummát $n+1$-re, azt gyötörjük egy ideig, majd felírjuk az eredeti állítás jobb oldalát is $n+1$-re, majd azt is gyötörjük. És ezt a két kifejezést addig gyötörjük, amíg bizonyos nem lesz, hogy a két kifejezés egyenlő. Ez kevésbé elegáns megoldás, de az esetek többségében így kell eljárni.

1.1.3. (c)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

Megvizsgálva $n=1$-et, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2=$$

$$=(-1)^{n-1}(n+1)\left(\frac{n}{2}-(n+1)\right)=(-1)^{n-1}(n+1)\left(\frac{-n-2}{2}\right)=$$

$$=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Éppen ezt kellett bizonyítani.

1.1.4. (d)

$$3^n > n^3$$

Ha $n > 3$.
Megvizsgálva $n = 4$-et, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön. Tudjuk, hogy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3n^3$$

Az kéne, hogy

$$3n^3 > (n+1)^3$$

teljesüljön. Bontsuk fel a zárójelet!

$$3n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$2n^3 - 3n^2 - 3n - 1 > 0$$

Ezt azt egyenlőséget be lehet látni például úgy, hogy megvizsgáljuk a gyököket. Egy valós gyöke van az egyenletnek, ami $\approx 2,26$. Így nyilván $n > 3$-ra teljesül az egyenlőtlenség. Ezzel beláttuk az eredeti állítást.

Megyjegyzés: Egy harmadfokú egyenlet gyökeinek megtalálásához a Cardano formulát lehet használni.
Az egyenlőtlenséget meg lehetett volna oldani határértékkel, illetve egyéb becslésekkel. Valamelyik órán volt ez a feladat, ott is néztünk rá egy megoldást.

1.1.5. (e)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Ezt a feladatot nem tudom értelmezni, nyilvánvalóan valami el van írva. Ha simán csak fordítva lenne a reláció, akkor triviális lenne a megoldás, így feltehetően valami nagyobb elírás van.

1.1.6. (f)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Megvizsgálva $n = 1$-et, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

teljesül. Keresztbe szorzással tüntessük el a törteket!

$$\sqrt{(2n+1)(2n+3)} = \sqrt{4n^2+8n+3} < 2n+2 = \sqrt{4n^2+8n+4}$$

Mivel a gyökfüggvény szigorúan monoton nő, ez nyilván teljesül. Ezzel beláttuk az eredeti állítást.

Megjegyzés: A gyökfüggvénnyel csak azért bánhattunk ilyen nagyvonalúan, mert $n > 0$, így $2n+2 > 0$ is. Ha ez nem teljesülne, akkor

$$2n+2 \neq \sqrt{4n^2+8n+4}$$

1.1.7. (g)

$$5 | 2^{4n+1} + 3$$

Megvizsgálva $n = 1$-re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$2^{4n+5} + 3 = 2^4 \cdot 2^{4n+1} + 3 = 16 \cdot 2^{4n+1} + 3 = 15 \cdot 2^{4n+1} + 2^{4n+1} + 3$$

Mivel $5 | 15 \cdot 2^{4n+1}$, beláttuk az állítást.

Megjegyzés: A feladatot be lehetett volna látni kongruenciákkal is. Ehhez szükség van vagy a kis Fermat-tétel ismeretére, vagy a multiplikatív rend fogalmának ismeretére.

1.1.8. (h)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Megvizsgálva $n = 1$-re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot (n^2 + 4n + 4) =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Éppen ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés: Ezt az állítást, illetve az összes $\sum_{k=1}^{n} k^l$ típusú állítást be lehet látni direkt úton is, binomiális együtthatók, illetve rájuk vonatkozó összegzési képletek segítségével.

1.1.9. (i)

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$$

Megvizsgálva $n = 1$-re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = (n+1)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = n + 2$$

Éppen ezt kellett bizonyítani.

1.1.10. (j)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

Megvizsgálva $n = 1$-re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.
Tegyük fel, hogy adott n-re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n+1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

Szorozzunk fel $\sqrt{n+1}$-el.

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2n + 2$$

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$$

Négyzetre emelés után

$$4n^{+}4n < 4n^2 + 4n + 1$$

Ez nyilván teljesül, így beláttuk az eredeti állítást is.

1.2. feladat

Azt fogjuk belátni, hogyha k nem négyzetszám, akkor $\sqrt{k}$ irracionális.
Indirekten bizonyítunk, tehát tegyük fel, hogy $\sqrt{k}$ racionális, azaz felírható p és q hányadosaként úgy, hogy $(p, q) = 1$. Tehát

$$\sqrt{k} = \frac{p}{q}$$

Négyzetre emelés, majd felszorzás után

$$k \cdot q^2 = p^2$$

Ekkor a számelmélet alaptétele alapján p, q és k egyértelműen felbonthatók prímszámok szorzatává. Azt fogjuk látni, hogy a jobb oldalon minden prímszám páros kitevőn van (hiszen p is páros kitevőn van). A bal oldalon azonban nem lehet páros kitevőn az összes prímszám, csak akkor, hogyha $k = 1$. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti feltevésünk hibás volt. Beláttuk tehát, hogy $\sqrt{k}$ akkor és csak akkor racionális, hogyha k négyzetszám.

Megjegyzés: A bizonyításban felhasználtuk azt a tételt, hogy egy szám akkor és csak akkor négyzetszám, hogyha minden prímtényezője páros kitevőn szerepel a prímtényezős felbontásban.

1.3. feladat

Indirekten bizonyítunk. Tehát tegyük fel, hogy

$$a + x = b$$

ahol a és b racionális, illetve x irracionális. Legyen tehát $a = \frac{c}{d}$ és $b = \frac{e}{f}$. Ekkor

$$x = b - a = \frac{e}{f} - \frac{c}{d} = \frac{e \cdot d - e \cdot f}{f \cdot d}$$

Tehát x felírható két egész szám hányadosaként, azonban ez nem lehet, hiszen x irracionális. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti feltevésünk hibás volt. Ezzel beláttuk, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege szintén irracionális.

1.4. feladat

Indirekten bizonyítunk. Tehát tegyük fel, hogy

$$a \cdot x = b$$

ahol a és b racionális, illetve x irracionális. Legyen tehát $a = \frac{c}{d}$ és $b = \frac{e}{f}$. Ekkor

$$x = \frac{e}{f} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e \cdot d}{f \cdot c}$$

Tehát x felírható kt egész szám hányadosaként, azonban ez nem lehet, hiszen x irracionális. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti feltevésünk hibás volt. Ezzel beláttuk, hogy egy racionális és egy irracionális szám szorzata szintén irracionális.

1.5. feladat

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Végezzük el a parciális törtekre bontást!

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{(A+B+C)k^2 + (3A+2B+C)k + 2A}{k(k+1)(k+2)}$$

A két számlálónak meg kell egyeznie, így tudjuk, hogy

$$A + B + C = 0 \qquad (1)$$

$$3A + 2B + C = 0 \qquad (2)$$

$$2A = 1 \qquad (3)$$

Ez egy háromismeretlenes egyenletrendszer, amelynek megoldásai $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ és $C = \frac{1}{2}$. Tehát

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+4}$$

Vegyük észre, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+4} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

illetve

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$$

és

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}$$

Tehát

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$$

Megjegyzés: Ezzel a módszerrel biztosak lehetünk abban, hogy helyes eredményt kaptunk. Polpe feltehetően azt várta volna, hogy megsejtsük az eredményt, aztán teljes indukcióval bebizonyítsuk azt. Mivel mi direkten kiszámoltuk a képletet, nincs szükség teljes indukcióra.
A parciális törtekre bontást érdemes megjegyezni, integrálszámításnál gyakran nagyon jól fog jönni.
A legutolsó néhány lépésben kicsit "varázsoltunk" a szummák futóindexeinek alsó-, illetve felső határával. Kifejezetten ajánlott az ilyen trükkök elsajátítása, hiszen gyakran elengedhetetlenek egy feladat megoldásához.