Отчёт по лабораторной работе №5

Предмет: Математическое моделирование

Манаева Варвара Евгеньевна, НФИбд-01-20. 1032201197

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить жёсткую модель Хищник-жертва и решить задания лабораторной работы.

Задачи:

- Изучить теоретическую справку;
- На основании теоретической справки найти стационарное решение для задачи;
- Запрограммировать решение на Julia;
- Запрограммировать решение на OpenModelica;
- Сравнить результаты работы программ;

2 Задание лабораторной работы

2.1 Вариант №28 [1]

Для модели “хищник-жертва”

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.69x(t) + 0.059x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.49y(t) - 0.096x(t)y(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 19$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

3.1 Общая информация о модели [2]

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (3.1) (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) + \epsilon f(x, y) \\
\frac{dy}{dt} &= -cy(t) + dx(t)y(t) + \epsilon g(x, y), \epsilon << 1
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Решение с помощью программ

4.1.1 Julia

4.1.1.1 Программный код решения на Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations[3]. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку PyPlot.

```
using PyPlot;
using DifferentialEquations;
function HiZge!(du, u, p, t)
    du[1] = p[1]*u[1] + p[2]*u[1]*u[2]
    du[2] = p[3]*u[2] + p[4]*u[1]*u[2]
end
const u0 = Float64[8.0, 19.0]
const uostac = Float64[0.49/0.096, 0.69/0.059]
const p = Float64[-0.69, 0.059, 0.49, -0.096]
const tspan = [0.0, 100.0]
prob1 = ODEProblem(HiZge!,u0,tspan, p)
prob2 = ODEProblem(HiZge!,uostac,tspan, p)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.05)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.05);
```

```
R1 = [tu[1] for tu in sol1.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol1.u]

clf()
plot(R2, R1)
xlabel("Жертвы, шт")
ylabel("Хищники, шт")
title("Численность жертв в зависимости от хищников")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\report\\image\\graph1.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\presentation\\image\\graph1.png")
clf()

plot(sol1.t, R1, label="Хищники", color="crimson")
plot(sol1.t, R2, label="Жертвы", color="darkblue")
xlabel("Время")
title("Число хищников и жертв в зависимости от времени")
legend(loc=1)
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\report\\image\\graph1_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\presentation\\image\\graph1_t.png")
clf()

R1 = [tu[1] for tu in sol2.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol2.u]
```

```
clf()
plot(R2, R1, "ro")
xlabel("Жертвы, шт")
ylabel("Хищники, шт")
title("Численность жертв в зависимости от хищников")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\report\\image\\graph2.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\presentation\\image\\graph2.png")
clf()

plot(sol2.t, R1, label="Хищники", color="crimson")
plot(sol2.t, R2, label="Жертвы", color="darkblue")
xlabel("Время")
title("Число хищников и жертв в зависимости от времени")
legend()
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\report\\image\\graph2_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab5\\presentation\\image\\graph2_t.png")
clf()
```

4.1.1.2 Результаты работы кода на Julia

Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.1, 4.2).

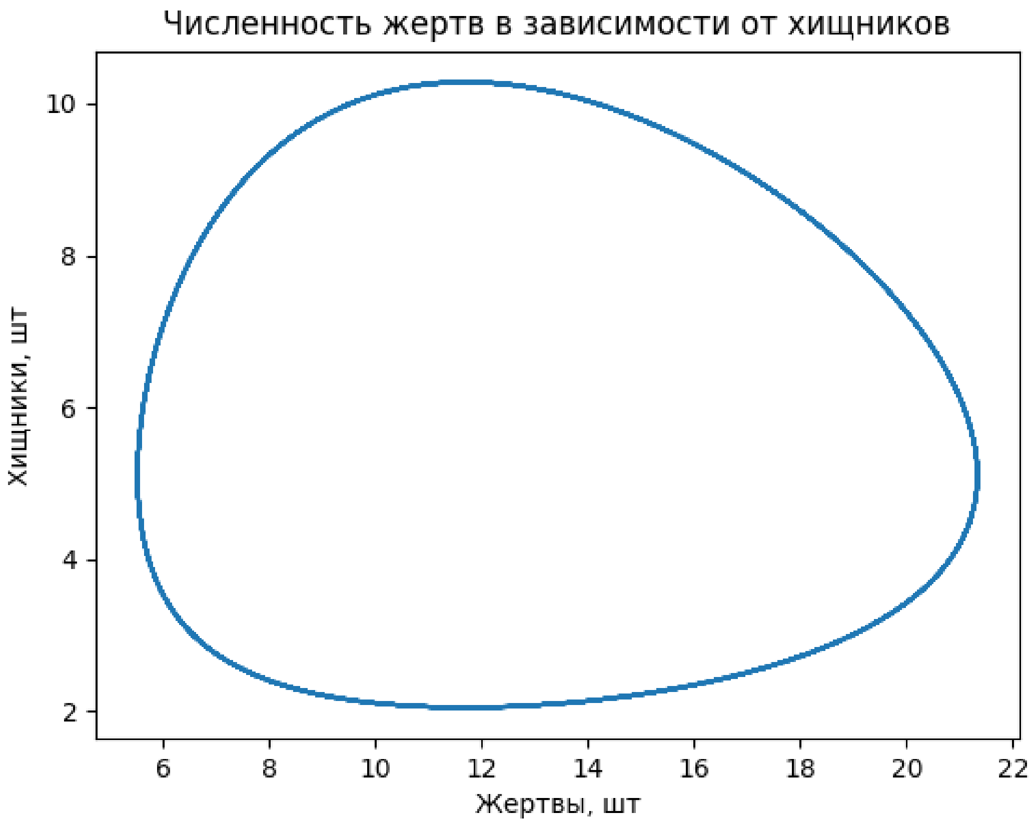

Рис. 4.1: "График зависимости численности жертв от хищников"

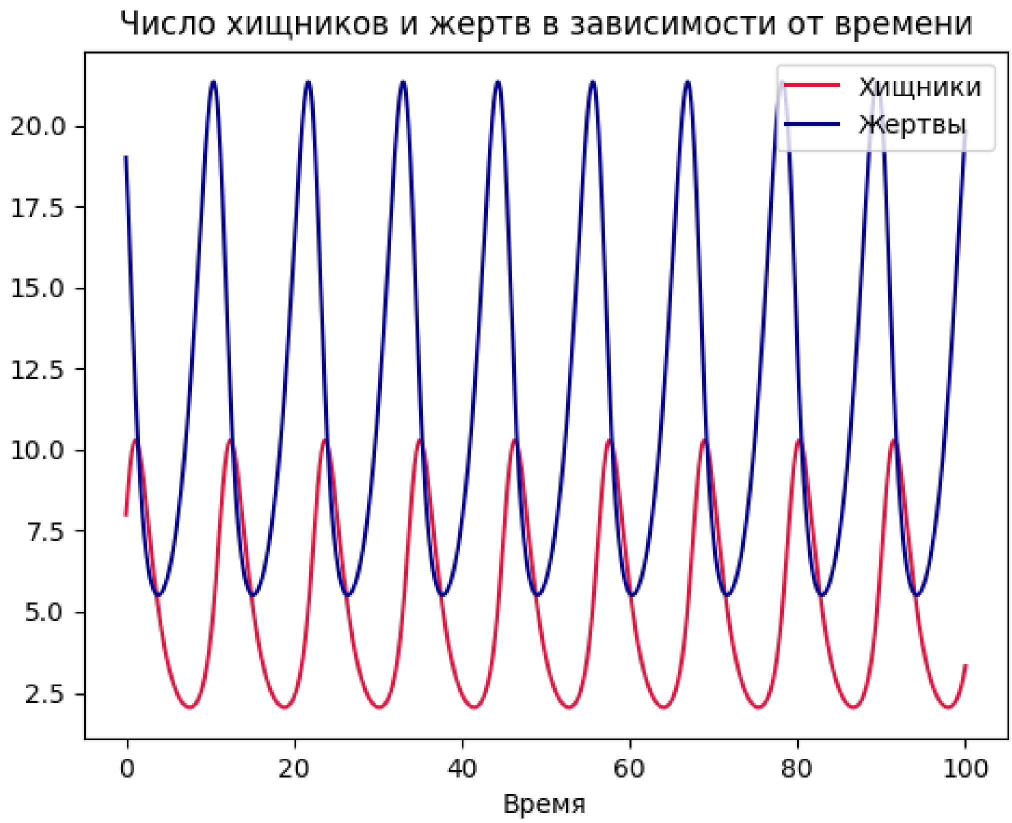

Рис. 4.2: “График численности жертв и хищников в зависимости от времени”

Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.3, 4.4).

Рис. 4.3: “График зависимости численности жертв от хищников (стационарное состояние)”

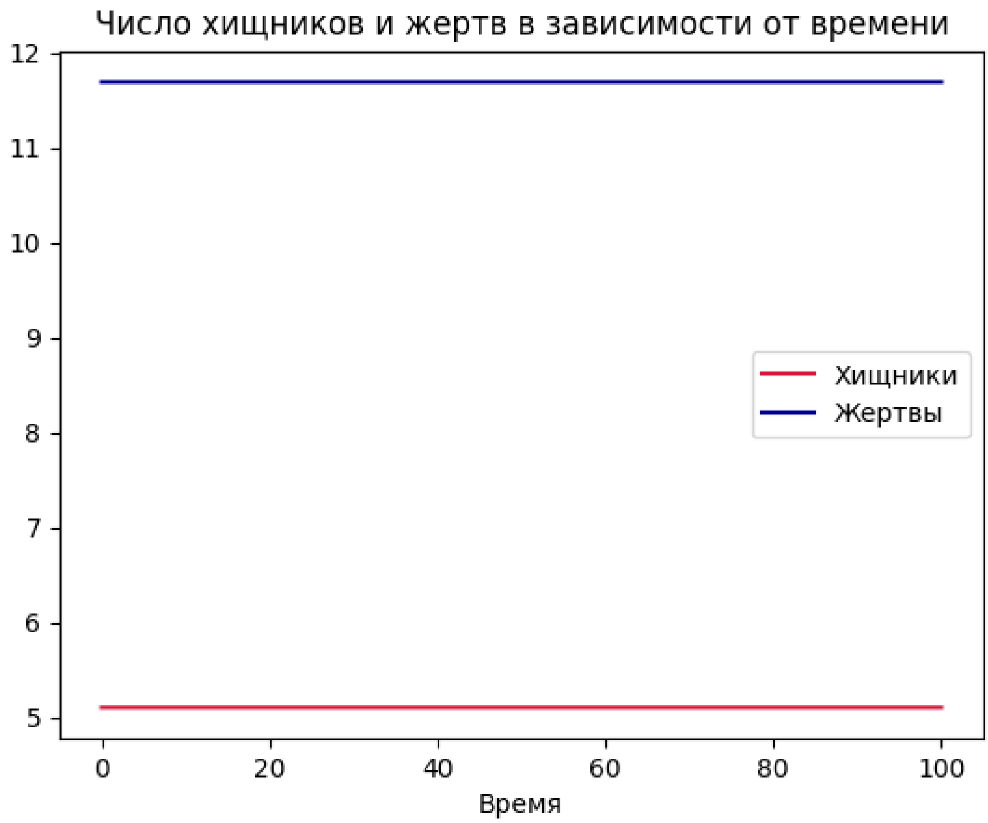

Рис. 4.4: “График численности жертв и хищников в зависимости от времени (стационарное состояние)”

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = somefunction$ будет представлять собой точку.

4.1.2 OPenModelica

4.1.2.1 Программный код решения на OPenModelica

```
model hizge
  Real x(start=8);
  Real y(start=19);
  parameter Real a( start=-0.69);
```

```
  parameter Real b( start=0.059);
  parameter Real c( start=0.49);
  parameter Real h( start=-0.096);

  equation
    der(x)= a*x + b*x*y;
    der(y)= c*y + h*x*y;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-
6, Interval=0.05));
end hizge;
model hizge
  Real x(start=0.49/0.096);
  Real y(start=0.69/0.059);
  parameter Real a( start=-0.69);
  parameter Real b( start=0.059);
  parameter Real c( start=0.49);
  parameter Real h( start=-0.096);

  equation
    der(x)= a*x + b*x*y;
    der(y)= c*y + h*x*y;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-
6, Interval=0.05));
end hizge;
```

4.1.2.2 Результаты работы кода на OpenModelica

Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.5, 4.6):

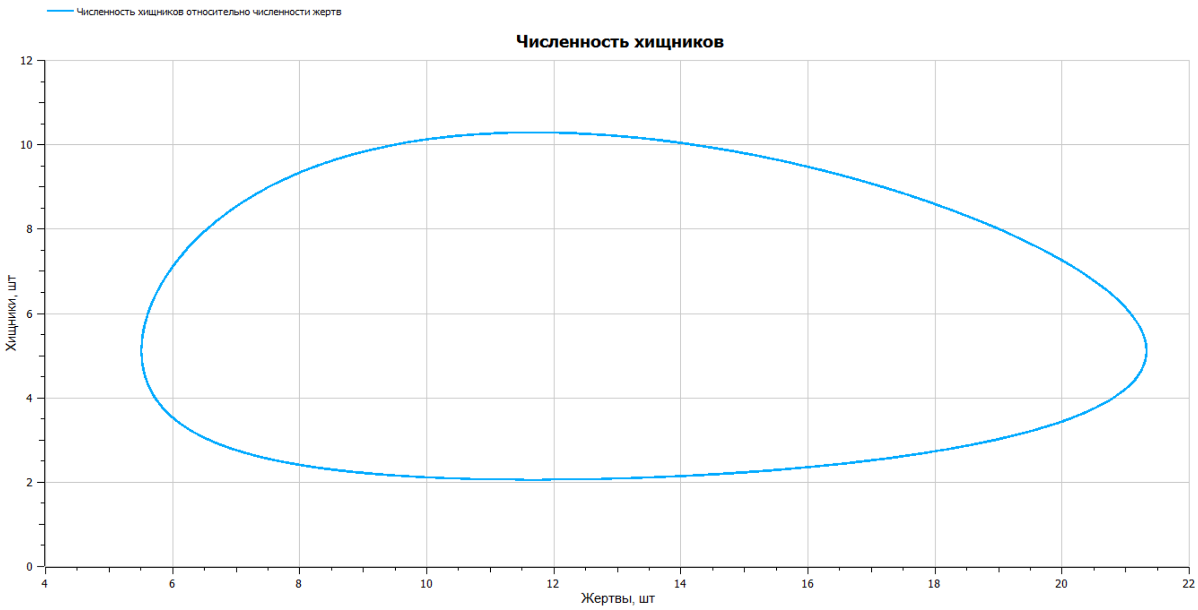

Рис. 4.5: “График зависимости численности жертв от хищников”

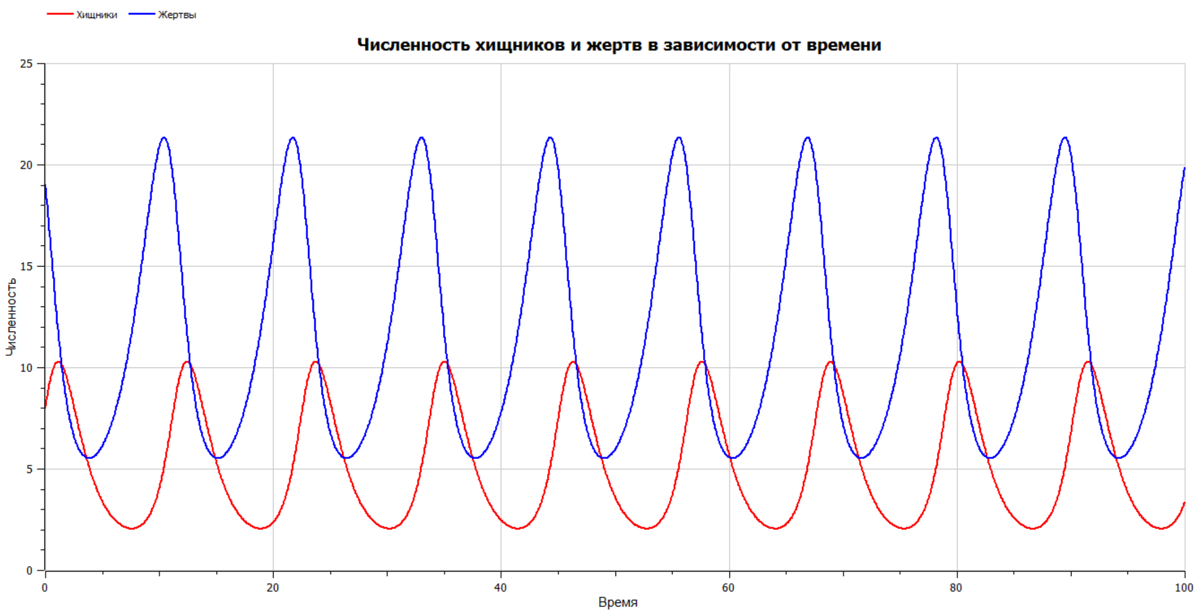

Рис. 4.6: “График численности жертв и хищников в зависимости от времени”

Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.7, 4.8):

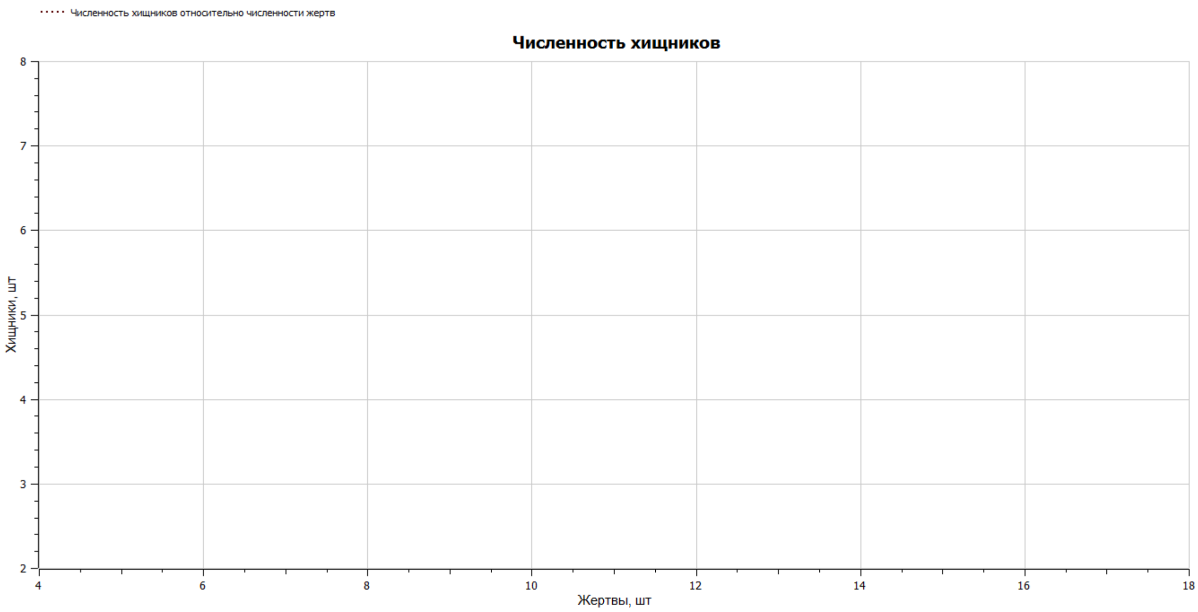

Рис. 4.7: “График зависимости численности жертв от хищников (стационарное состояние)”

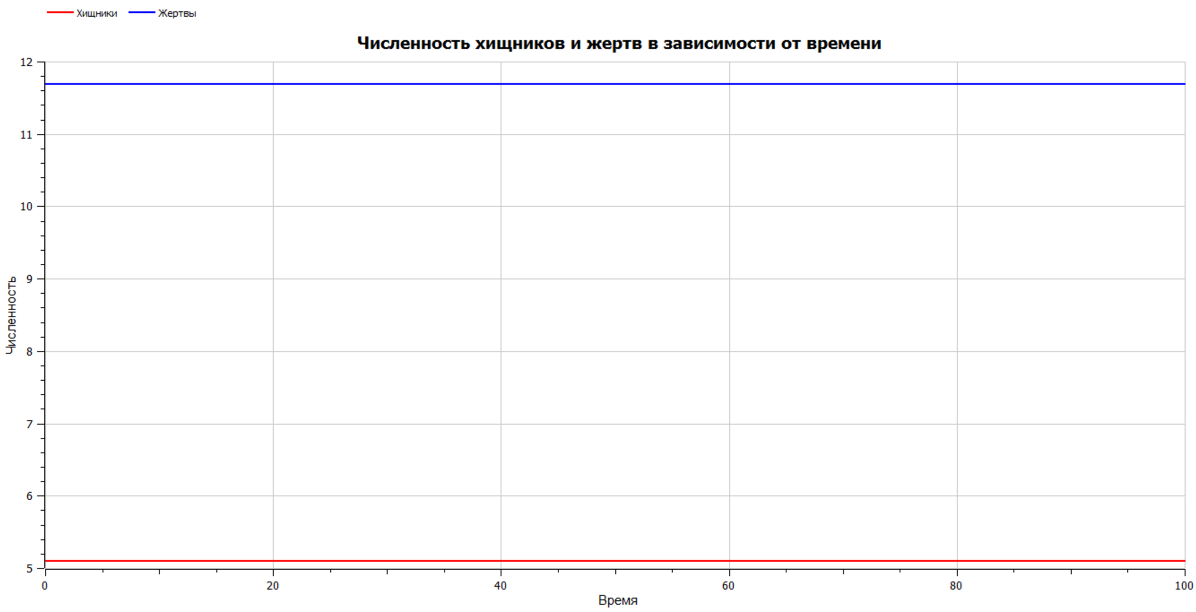

Рис. 4.8: "График численности жертв и хищников в зависимости от времени (стационарное состояние)"

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = somefunction$ будет представлять собой точку. Почему-то в OpenModelica точка сама по себе не желает отображаться.

5 Выводы

Была изучена жёсткая модель Хищник-жертва. Были запрограммированы решения для задачи лабораторной работы на Julia и OpenModelica. Было найдено стационарное состояние системы и были построены графики численности жертв и хищников для условий задачи и для стационарного состояния.

Были записаны скринкасты лабораторной работы и презентации лабораторной работы.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №4 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971657/mod_resource/content/3/Задание%20к%20Лабораторной%20работе%20№%201%20%281%29.pdf.
2. Лабораторная работа №5 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971660/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.