

Отчёт по лабораторной работе №6

Предмет: Математическое моделирование

Манаева Варвара Евгеньевна, НФИбд-01-20. 1032201197

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание лабораторной работы	5
2.1	Вариант №28 [1]	5
3	Теоретическое введение	6
3.1	Общая информация о модели [2]	6
4	Выполнение лабораторной работы	8
4.1	Комментарии к условию	8
4.2	Решение с помощью программ	8
4.2.1	Julia	8
4.2.1.1	Программный код решения на Julia	8
4.2.1.2	Результаты работы кода на Julia	11
4.2.2	OPenModelica	15
4.2.2.1	Программный код решения на OPenModelica	15
4.2.2.2	Результаты работы кода на OpenModelica	17
5	Выводы	19
	Список литературы	20

Список иллюстраций

4.1	“График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга при $I(0) \leq I^*$ ”	12
4.2	“График численности всех подгрупп популяции относительно времени при $I(0) \leq I^*$ ”	13
4.3	“График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга при $I(0) > I^*$ ”	14
4.4	“График численности всех подгрупп популяции относительно времени при $I(0) > I^*$ ”	15
4.5	“График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга при $I(0) \leq I^*$ ”	17
4.6	“График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга при $I(0) > I^*$ ”	18

1 Цель работы

Изучить простейшую модель задачи об эпидемии и решить задания лабораторной работы.

Задачи:

- Изучить теоретическую справку;
- Запрограммировать решение на Julia;
- Запрограммировать решение на OpenModelica;
- Сравнить результаты работы программ;

2 Задание лабораторной работы

2.1 Вариант №28 [1]

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 11400$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 250$, число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 47$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- 1) если $I(0) \leq I^*$
- 2) если $I(0) > I^*$

3 Теоретическое введение

3.1 Общая информация о модели [2]

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначаемая через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{если } I(t) > I^* \\ 0, & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases} \quad (3.1)$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I, & I(t) \leq I^* \end{cases} \quad (3.2)$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \quad (3.3)$$

Постоянные пропорциональности, α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0)=0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая:

- $I(0) \leq I^*$
- $I(0) > I^*$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Комментарии к условию

Все начальные значения функций $I(0)$, $R(0)$, $S(0)$ заданы в условии, однако параметры заболеваемости и выздоровления не заданы условием. Так, зададим параметр заболеваемости как 0.1, а параметр выздоровления как 0.11.

4.2 Решение с помощью программ

4.2.1 Julia

4.2.1.1 Программный код решения на Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations[3]. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку PyPlot.

```
using PyPlot;
using DifferentialEquations;
function LessThanThreshold!(du, u, p, t)
    du[1] = -p[2]*u[1]      #= I =#
    du[2] = 0               #= S =#
    du[3] = p[2]*u[1]       #= R =#
end
```



```

function MoreThenThreshold!(du, u, p, t)
    du[1] = p[1]*u[2] - p[2]*u[1]
    du[2] = -p[1]*u[2]      #= S =#
    du[3] = p[2]*u[1]
end

const u0 = Float64[250.0, 11400.0 - 7.0 - 250.0, 7.0]
const p = Float64[0.1, 0.11]
const tspan = [0.0, 1000.0]
prob1 = ODEProblem(LessThenThreshold!,u0,tspan, p)
prob2 = ODEProblem(MoreThenThreshold!,u0,tspan, p)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.05)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.05);

R1 = [tu[1] for tu in sol1.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol1.u]
R3 = [tu[3] for tu in sol1.u]

clf()
plot(R1, R2, label="Численность S относительно I", color="crimson")
plot(R1, R3, label="Численность R относительно I", color="darkblue")
plot(R2, R3, label="Численность R относительно S", color="green")
title("Численность всех подгрупп популяции относительно друг друга\nпри  $I(0) \leq I^*$ ")
legend(loc=1)
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\report\\image\\graph1.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\presentation\\image\\graph1.png")
clf()

```

```

plot(sol1.t, R1, label="Численность заражённых людей", color="crimson")
plot(sol1.t, R2, label="Численность здоровых людей без иммунитета", color="darkblue")
plot(sol1.t, R3, label="Численность здоровых людей с иммунитетом", color="green")
xlabel("Время")
title("Число всех подгрупп популяции в зависимости от времени\nпри  $I(0) \leq I^*$ ")
legend(loc=1)
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\report\\image\\graph1_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\presentation\\image\\graph1_t.png")
clf()

```

```

R1 = [tu[1] for tu in sol2.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol2.u]
R3 = [tu[3] for tu in sol2.u]

```

```

clf()
plot(R1, R2, label="Численность S относительно I", color="crimson")
plot(R1, R3, label="Численность R относительно I", color="darkblue")
plot(R2, R3, label="Численность R относительно S", color="green")
title("Численность всех подгрупп популяции относительно друг друга\nпри  $I(0) > I^*$ ")
legend(loc=1)
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\report\\image\\graph2.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\presentation\\image\\graph2.png")
clf()

```

```

plot(sol2.t, R1, label="Численность заражённых людей", color="crimson")

```

```

plot(sol2.t, R2, label="Численность здоровых людей без иммунитета", color="darkblue")
plot(sol2.t, R3, label="Численность здоровых людей с иммунитетом", color="green")
xlabel("Время")
title("Число всех подгрупп популяции в зависимости от времени\nпри  $I(0) > I^*$ ")
legend(loc=1)
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\report\\image\\graph2_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование_
2023_mathmod\\labs\\lab6\\presentation\\image\\graph2_t.png")
clf()

```

4.2.1.2 Результаты работы кода на Julia

Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.1, 4.2).

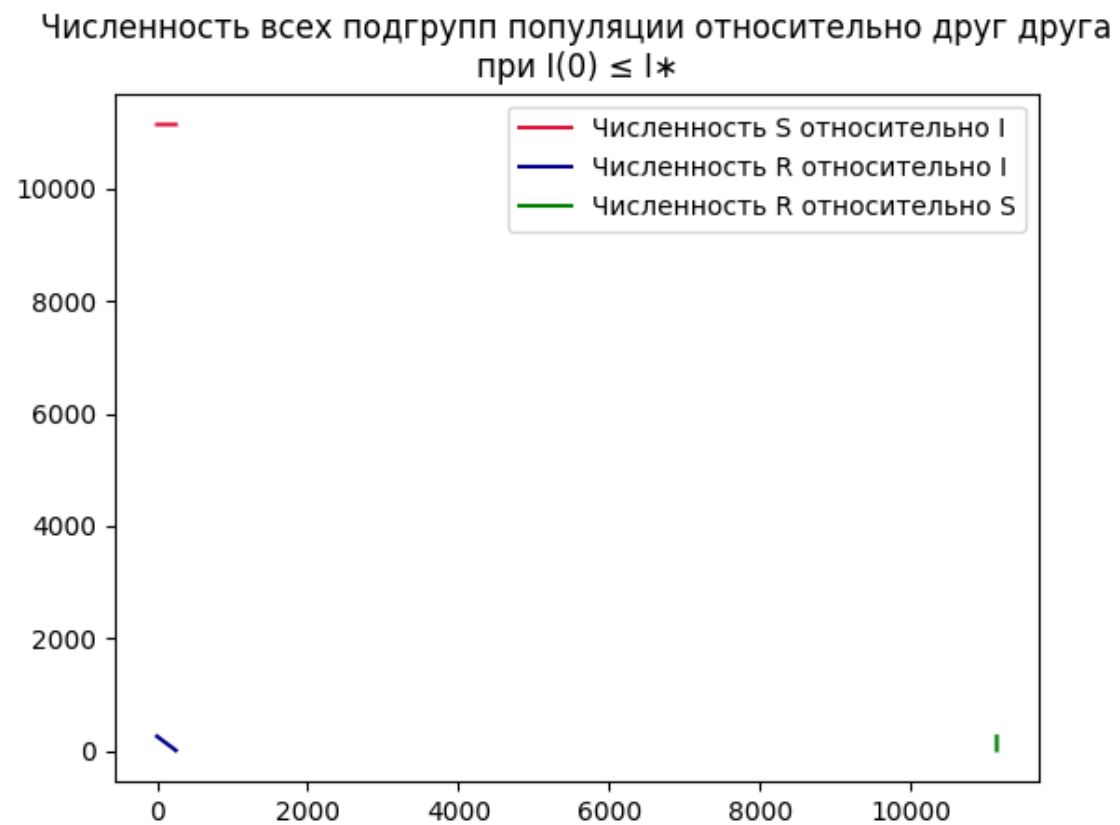


Рис. 4.1: “График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга
при $I(0) \leq I^*$ ”

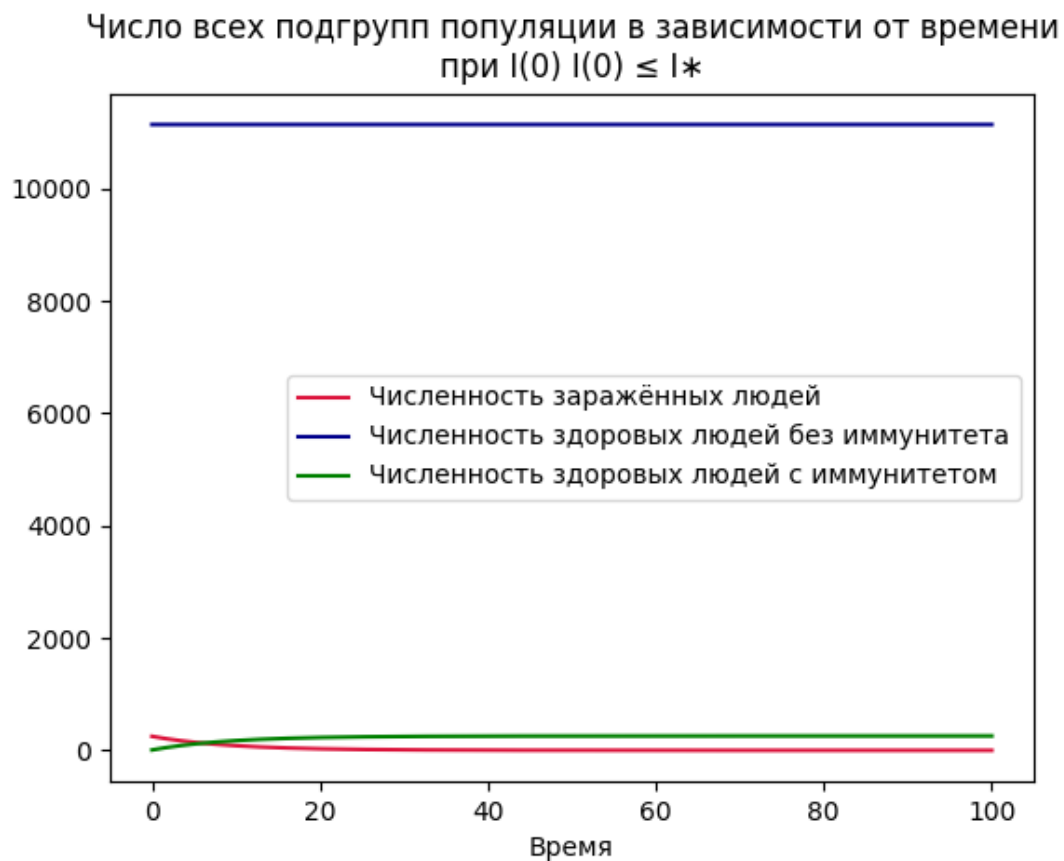


Рис. 4.2: “График численности всех подгрупп популяции относительно времени при $I(0) \leq I^*$ ”

Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.3, 4.4).

Численность всех подгрупп популяции относительно друг друга
при $I(0) > I^*$

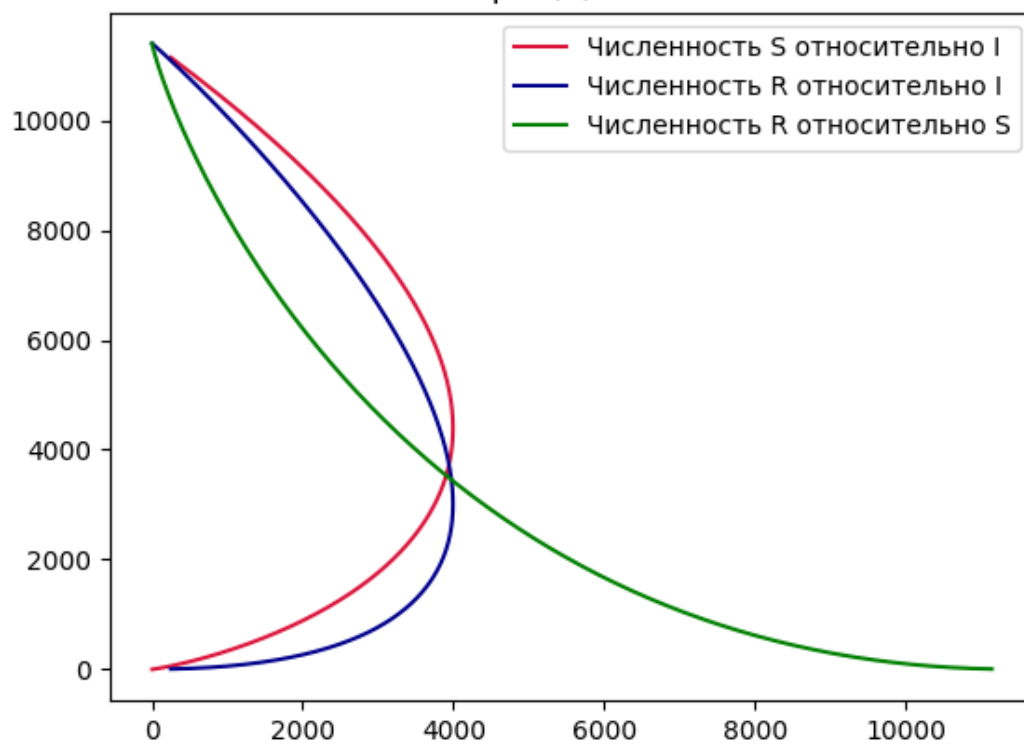


Рис. 4.3: “График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга
при $I(0) > I^*$ ”

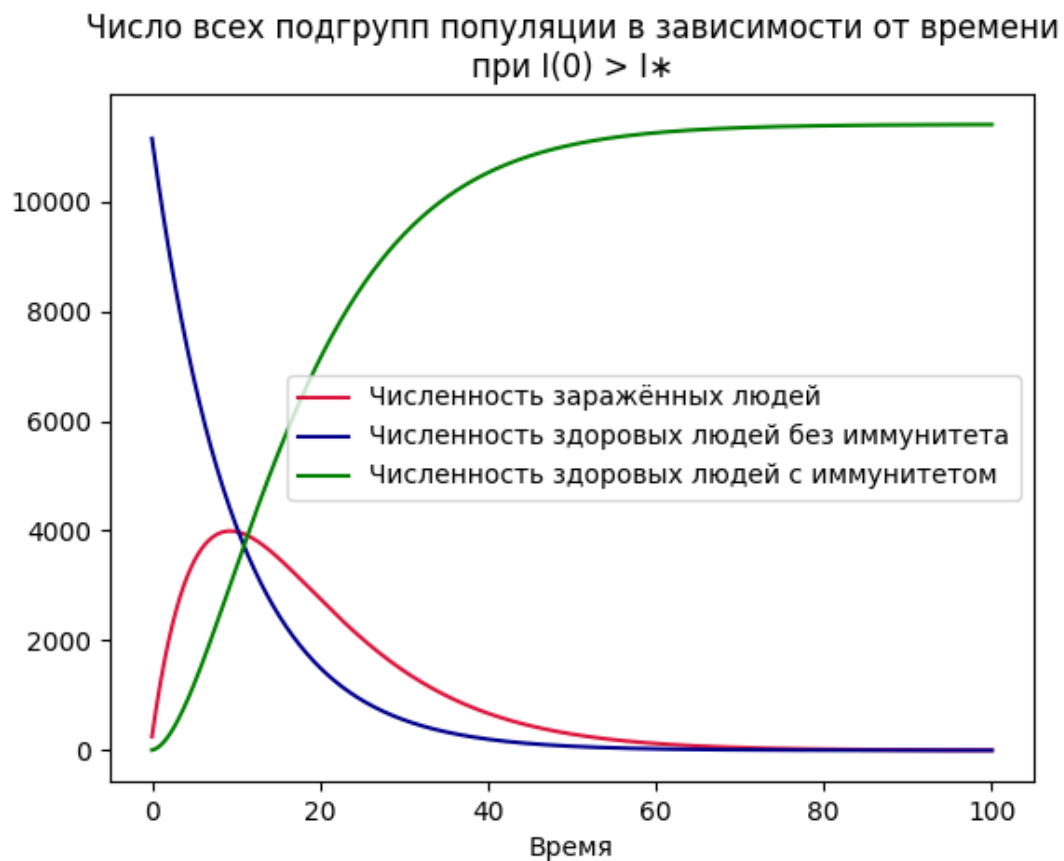


Рис. 4.4: “График численности всех подгрупп популяции относительно времени
при $I(0) > I^*$ ”

4.2.2 OPenModelica

4.2.2.1 Программный код решения на OPenModelica

Если $I(0) \leq I^*$

```
model epidemia
```

```
Real i(start=250);
```

```
Real s(start=11400-7-250);
```

```
Real r(start=7);
```

```
parameter Real a( start=0.1);
```

```
parameter Real b( start=0.11);
```

```
equation
```

```
der(i) = -b*i
```

```
der(s) = 0
```

```
der(r) = b*i
```

```
annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-  
6, Interval=0.05));
```

```
end epidemia;
```

Если $I(0) > I^*$

```
model epidemia
```

```
Real i(start=250);
```

```
Real s(start=11400-7-250);
```

```
Real r(start=7);
```

```
parameter Real a( start=0.1);
```

```
parameter Real b( start=0.11);
```

```
equation
```

```
der(i) = -b*i + a*s
```

```
der(s) = -a*s
```

```
der(r) = b*i
```

```
annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-  
6, Interval=0.05));
```

```
end epidemia;
```


4.2.2.2 Результаты работы кода на OpenModelica

Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.5):

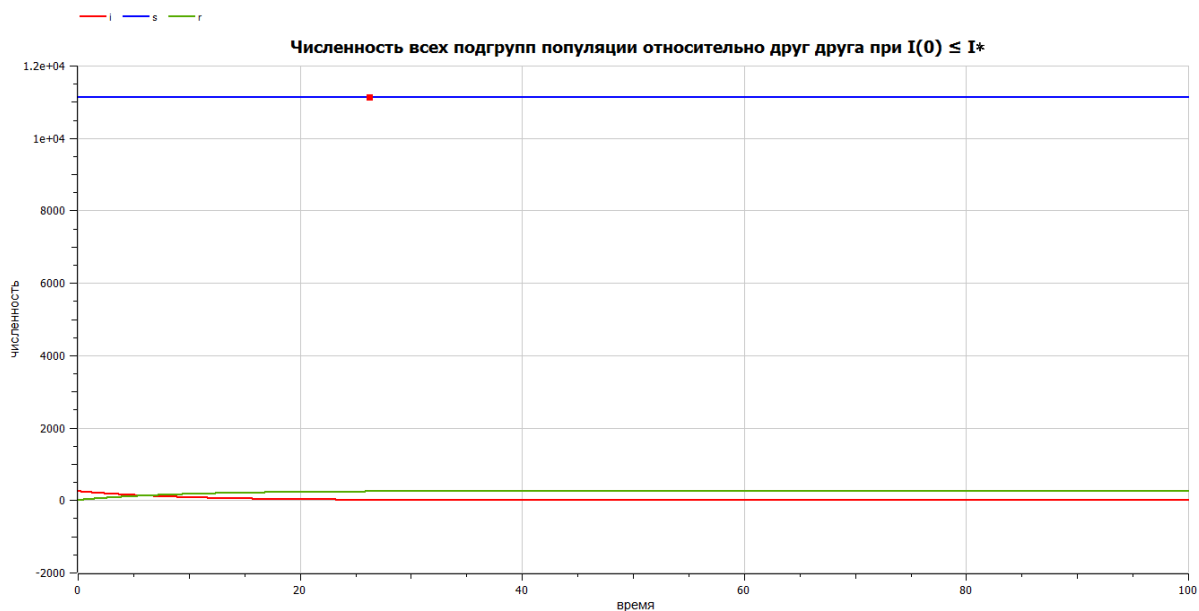


Рис. 4.5: “График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга при $I(0) \leq I^*$ ”

Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.6):

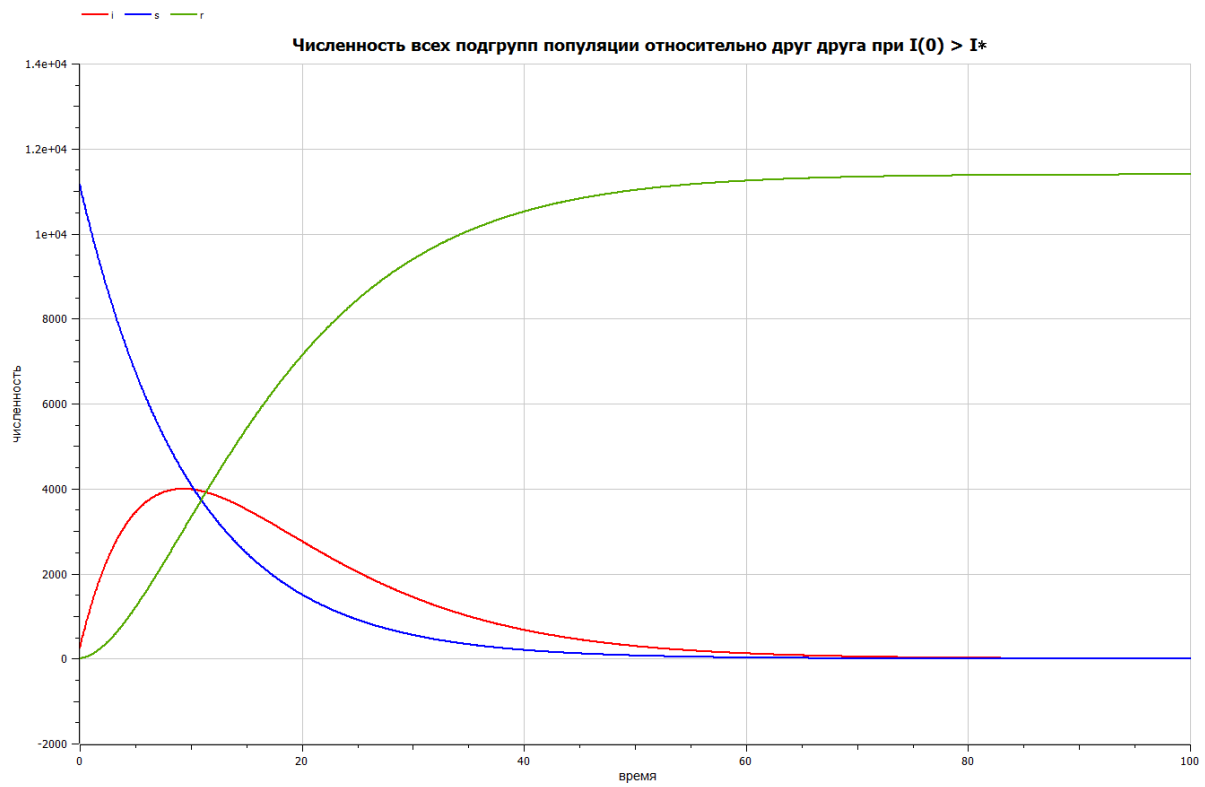


Рис. 4.6: “График численности всех подгрупп популяции относительно друг друга при $I(0) > I^*$ ”

5 Выводы

Была изучена модель задачи об эпидемии. Были запрограммированы решения для задачи лабораторной работы на Julia и OpenModelica. Были построены графики численности разных подгрупп популяции для двух условий задачи.

Были записаны скринкасты лабораторной работы и презентации лабораторной работы.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №6 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971665/mod_resource/content/2/Задание%20к%20лабораторной%20работе%20№%207%20%2083%29.pdf.
2. Лабораторная работа №6 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971664/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%205.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>.