Отчёт по лабораторной работе №8

Предмет: Математическое моделирование

Манаева Варвара Евгеньевна, НФИбд-01-20. 1032201197

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Изучить модель конкуренции для двух фирм и в двух случаях. Построить графики с помощью представленных уравнений, описивающих случаи.

Задачи:

- Изучить теоретическую справку;
- Запрограммировать решение на Julia;
- Запрограммировать решение на OpenModelica;
- Сравнить результаты работы программ;

2 Задание лабораторной работы

2.1 Вариант №28 [1]

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a1}{c1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq}$$

$$a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}$$

$$b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}$$

$$c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$$

$$c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

также введена нормировка $t = c_1 \Theta$

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.0018) M_1 M_2 - \frac{a1}{c1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M_0^1 = 8 \; M_0^2 = 9$$

$$p_{cr} = 35 \; N = 93 \; q = 1$$

$$\tau_1 = 35 \; \tau_2 = 30$$

$$\tilde{p}_1 = 13.3 \; \tilde{p}_2 = 14.5$$

3 Теоретическое введение

3.1 Общая информация о модели [2]

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N - число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ - длительность производственного цикла

p - рыночная цена товара

$\tilde{p}$ - себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

δ - доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек

k - постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном М уравнение описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Тогда уравнения динамики оборотных средств приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau}(\frac{p}{p_{cr}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Это уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$

$$\widetilde{M_{1,2}} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}), b = kNq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Получается, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b << a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы.

При $b << a$ стационарные значения M равны

$$\widetilde{M_+} = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \widetilde{M_-} = k\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние $\widetilde{M_+}$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние \widetilde{M_{-} неустойчиво, так, что при $M < \widetilde{M_-}$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\widetilde{M_-}$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Решение с помощью программ

4.1.1 Julia

4.1.1.1 Программный код решения на Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations[3]. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку PyPlot.

```
using PyPlot
using DifferentialEquations;
function f1(du, u, p, t)
    du[1] = u[1]-(b/c1)*u[1]*u[2]-(a1/c1)*u[1]*u[1]
    du[2] = (c2/c1)*u[2]-(b/c1)*u[1]*u[2]-(a2/c1)*u[2]*u[2]
end
function f2(du, u, p, t)
    du[1] = u[1]-(b/c1+d)*u[1]*u[2]-(a1/c1)*u[1]*u[1]
    du[2] = (c2/c1)*u[2]-(b/c1)*u[1]*u[2]-(a2/c1)*u[2]*u[2]
end

range = (0, 20)
Pcr = 35
t1, t2 = 35, 30
```

```
p1, p2 = 13.3, 14.5
N = 93
q = 1
M1, M2 = 8, 9
a1 = Pcr / (t1*t1*p1*p1*N*q);
a2 = Pcr / (t2*t2*p2*p2*N*q);
b = Pcr / (t1*t1*t2*t2*p1*p1*p2*p2*N*q);
c1 = (Pcr - p1) / (t1*p1);
c2 = (Pcr - p2) / (t2*p2);
d = 0.00018
ode = ODEProblem(f1, [M1,M2], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.01)
m1 = [u[1] for u in sol.u]
m2 = [u[2] for u in sol.u]
clf()
title("Случай 1 (линейный)")
plot(sol.t, m1, color="crimson")
plot(sol.t, m2, color="darkblue")
xlabel("Время")
ylabel("Доход компаний")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab8\\report\\image\\graph1_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab8\\presentation\\image\\graph1_t.png")
clf()

ode = ODEProblem(f2, [M1,M2], range)
sol = solve(ode, dtmax=0.01)
m1 = [u[1] for u in sol.u]
```

```
m2 = [u[2] for u in sol.u]

title("Случай 2 (линейный)")
plot(sol.t, m1, color="crimson")
plot(sol.t, m2, color="darkblue")
xlabel("Время")
ylabel("Доход компаний")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab8\\report\\image\\graph2_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab8\\presentation\\image\\graph2_t.png")
clf()
```

4.1.1.2 Результаты работы кода на Julia

Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. **??**, 4.1).

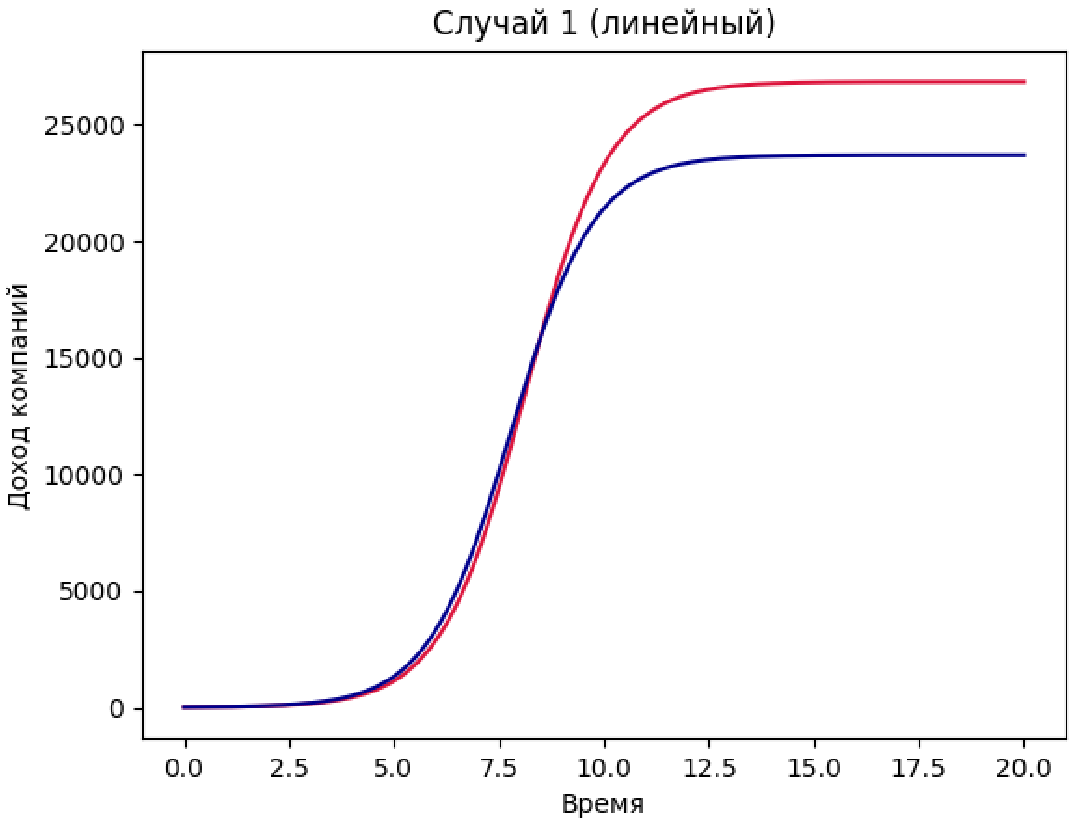

Рис. 4.1: “График прибыли компаний в зависимости от времени в первом случае”

Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. **??**, 4.2).

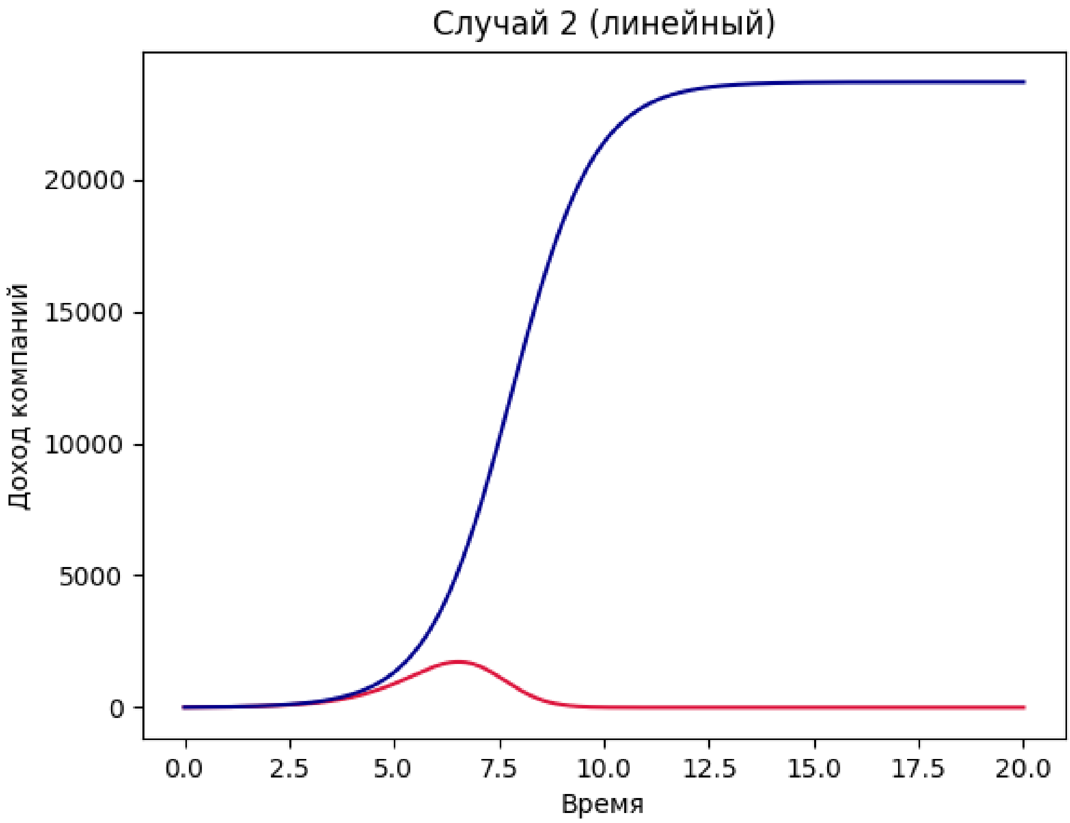

Рис. 4.2: “График прибыли компаний в зависимости от времени во втором случае”

4.1.2 OPenModelica

4.1.2.1 Программный код решения на OPenModelica

```
model konkurencia
parameter Real p_cr = 35;//критическая стоимость продукта
parameter Real tau1 = 35;//длительность производственного цикла фирмы 1
parameter Real p1 = 13.3;//себестоимость продукта у фирмы 1
parameter Real tau2 = 30;//длительность производственного цикла фирмы 2
parameter Real p2 = 14.5; //себестоимость продукта у фирмы 2
parameter Real N = 93; //число потребителей производимого продукта
```

```
parameter Real q = 1; //максимальная потребность одного человека в продукте в еди

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

parameter Real d = 0.00018;

Real M1_1(start=8);
Real M2_1(start=9);

Real M1_2(start=8);
Real M2_2(start=9);

equation
  der(M1_1) = M1_1-(b/c1)*M1_1*M2_1-(a1/c1)*M1_1*M1_1;
  der(M2_1) = (c2/c1)*M2_1-(b/c1)*M1_1*M2_1-(a2/c1)*M2_1*M2_1;

  der(M1_2) = M1_2-(b/c1+d)*M1_2*M2_2-(a1/c1)*M1_2*M1_2;
  der(M2_2) = (c2/c1)*M2_2-(b/c1)*M1_2*M2_2-(a2/c1)*M2_2*M2_2;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=20, Tolerance=1e-
6, Interval=0.05));
end konkurencia;
```

4.1.2.2 Результаты работы кода на OpenModelica

Решение для нестационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.3):

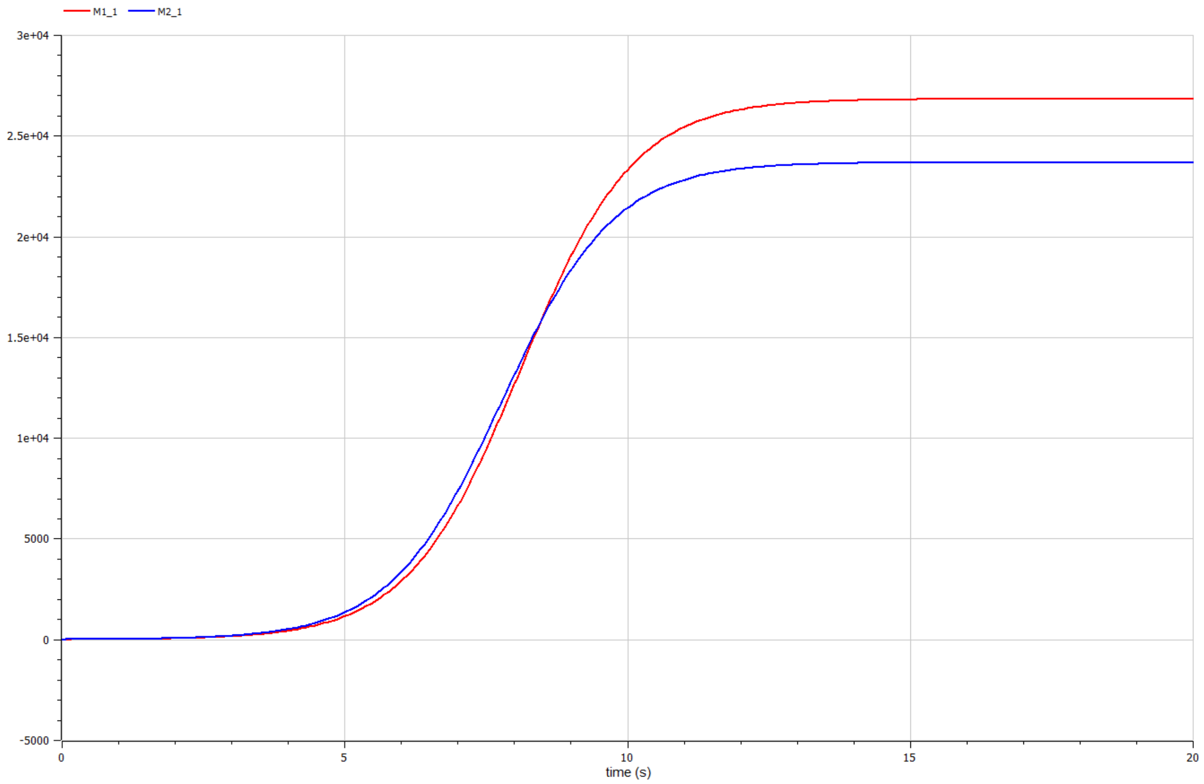

Рис. 4.3: “График прибыли компаний в зависимости от времени в первом случае$”

Решение для стационарного состояния, заданного заданием лабораторной работы (рис. 4.4):

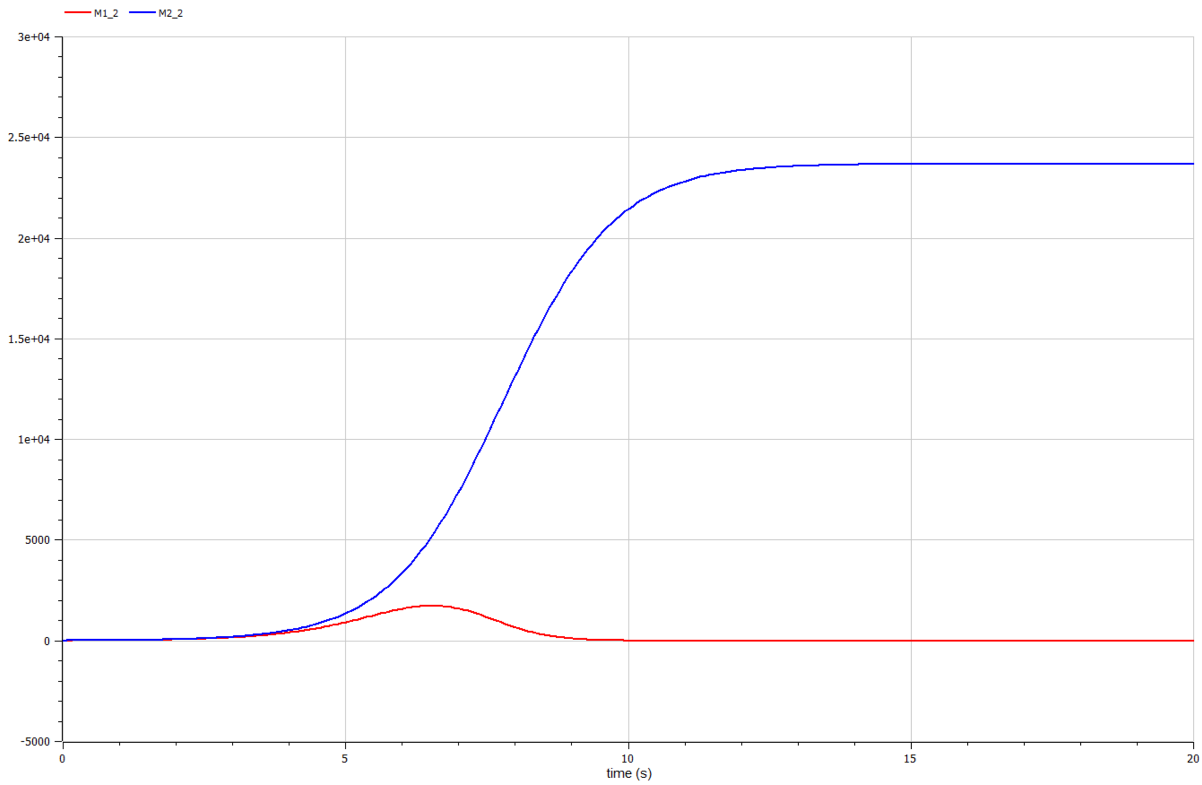

Рис. 4.4: “График прибыли компаний в зависимости от времени во втором случае”

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель конкуренции для двух фирм в двух случаях. Были запрограммированы решения для задачи лабораторной работы на Julia и OpenModelica. Были построены графики прибыли компаний для двух условий задачи.

Были записаны скринкасты лабораторной работы и презентации лабораторной работы.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №8 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971673/mod_resource/content/2/Задание%20к%20лабораторной%20работе%20№%207.pdf.
2. Лабораторная работа №8 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971672/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%207.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.