

# **Отчёт об этапе проекта №1**

**Предмет: Математическое моделирование**

Евдокимов М.М., НФИбд-01-20

Евдокимов И.А., НФИбд-01-20

Манаева В.Е., НФИбд-01-20

Покрас И.М., НФИбд-02-20

Сулицкий Б.Р., НФИбд-02-20

Новосельцев Д.С., НФИбд-02-20

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание этапа</b>	<b>5</b>
1.1	Этап №1. Проект №2 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Цель работы</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
3.1	Общая информация о модели . . . . .	7
3.2	Электрический пробой в вакууме [2, стр. 237–238] . . . . .	8
3.3	Электрический пробой в газах . . . . .	9
3.4	Электрический пробой в твёрдой среде . . . . .	10
3.5	Электрический пробой в жидкой среде . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Построение модели электрического пробоя</b>	<b>14</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>22</b>

## Список иллюстраций

4.1	Стр1 . . . . .	14
4.2	Теорема Гаусса для кубической ячейки . . . . .	15
4.3	стр2 . . . . .	16
4.4	стр3 . . . . .	17
4.5	стр4 . . . . .	18
4.6	стр5 . . . . .	19
4.7	стр6 . . . . .	20
4.8	стр7 . . . . .	21

## **Список таблиц**

# **1 Задание этапа**

## **1.1 Этап №1. Проект №2**

Тема проекта: электрический пробой.

Задание первого этапа проектной работы: \*\* Модель. \*\* Презентация по научной проблеме. Теоретическое описание задачи. Описание модели.

## 2 Цель работы

Изучить электрический пробой, его вариации и источники.

Задачи первого этапа проекта:

- Составить обзор физического явления электрического пробоя;
- Составить теоретическое описание модели;
- Обосновать практическое применение модели;

Задачи проекта:

1. Напишите программу вычисления электрического потенциала итерационным методом.
2. Рассмотрите пробой в геометрии «острие – плоскость» с использованием флуктуационного критерия роста.
3. То же в геометрии «точка – окружность». Как меняется густота ветвей с радиусом стримерной структуры? Для этого можно рассмотреть отношение числа точек пересечения структуры с окружностью некоторого радиуса к длине этой окружности.
4. Реализуйте в геометрии «острие – плоскость» или «точка – окружность» однозвенную или многозвенную модель со степенной зависимостью вероятности роста от напряженности поля  $p E^\eta$ . Рассмотрите случаи  $\eta = 0; 1; 2$ . Как меняется геометрия стримерной структуры?

## 3 Теоретическое введение

### 3.1 Общая информация о модели

[Илья]

**Электрический пробой** – это разрушение диэлектрика, обусловленное ударной ионизацией электронами из-за разрыва связей между атомами, ионами или молекулами. Все изоляционные материалы подвергаются пробоем, когда электрическое поле, вызванное приложенным напряжением, превышает электрическую прочность материала. Пробой может происходить в течение очень короткого времени -  $10^{-5}$  —  $10^{-8}$  секунд, а также может привести к непрерывной электрической дуге, которая представляет собой мощный установившийся электрический разряд между двумя электродами в ионизированной газовой среде.[1]

Электрическая прочность при электрическом пробое зависит главным образом от внутреннего строения диэлектрика. Электрическая прочность зависит не только от агрегатного состояния диэлектриков (газ, жидкость, твердый диэлектрик) и их структуры, но может изменяться в зависимости от толщины диэлектрика, формы электродов и условий теплоотвода. Электрическая прочность при электрическом пробое является характеристикой материала. Тонкие пленки из диэлектрических материалов обладают более высокой электрической прочностью по сравнению с массивными образцами. Тонкие диэлектрические пленки, особенно аморфной структуры, широко используются в качестве изоляции при изготовлении микроэлектронных элементов и устройств.

Минимальное напряжение  $U_{applied}$ , приложенное к диэлектрику, и приводящее к образованию в нем проводящего канала, называется пробивным напряжением.

Существует несколько сред, в которых возможен электрический пробой:

1. Вакуум;
2. Газ;
3. Твердые тела;
4. Жидкости.

### **3.2 Электрический пробой в вакууме [2, стр. 237–238]**

Вакуумный пробой (электрический пробой вакуума) - это потеря вакуумным промежутком между электродами свойств электрического изолятора при приложении к нему электрического поля, напряжение которого превышает определённую величину. При вакуумном пробое промежуток заполняется ионизованными парами и среда в нём становится проводящей. Первоначально электроды находятся в таком вакууме, при котором длина пробега частиц много больше расстояния между электродами, так что объёмная ионизация остаточного газа отсутствует. Развитие вакуумного пробоя может начаться с теплового взрыва естественных или искусственных микроострий на катоде за счёт токов автоэлектронной эмиссии. При этом вблизи катода образуется облако плазмы. Бомбардируемый электронами плазмы анод разогревается и поставляет в межэлектродный промежуток пары металла, ионизация которых приводит к возникновению сильноточного искрового разряда. Если мощность источника тока достаточно велика, то заключительной стадией вакуумного пробоя является вакуумная дуга в парах металлов электродов. Развитию вакуумный пробой могут способствовать диэлектрические вкрапления и адсорбированные плёнки на поверхности электродов.

Вакуумный пробой используется в приборах и устройствах газоразрядной и вакуумной электроники, в сильноточных ускорителях и мощных источниках



жесткого излучения.

Первым прибором вакуумной электроники была лампа А. Н. Лодыгина. Затем был создан электровакуумный диод Дж. А. Флеминга.

Электронные лампы стали основой разработанных систем радиосвязи, радиовещания.

### 3.3 Электрический пробой в газах

[Ваня]

Пробой газообразных диэлектриков обусловлен явлениями ударной (ионизация молекулы/атома при «ударе о него» электрона или другой заряженной частицы) и фотонной (ионизация молекулы/атома непосредственно при абсорбции фотонов), энергия которых равна или больше энергии ионизации.

Воздух - изоляционная среда для различной электронной аппаратуры. В случае сильных электрических полей физические процессы в воздухе происходят при нормальном атмосферном давлении. Но в радиоэлектронике приходится иметь дело с пробоем при повышенном давлении и значительном разрежении.

Относительно малое количество содержащихся в газе положительных и отрицательных ионов и электронов, находящихся в беспорядочном тепловом движении, при воздействии поля получают некоторую добавочную скорость и начинают в зависимости от знака заряда перемещаться в направлении поля или против. При этом заряженная частица приобретает дополнительную энергию.

Различают 2 классификации пробоя газа:

1. Пробой газа при неоднородном поле;
2. Пробой газа в однородном поле.

Оба случая заметно различаются.

Так, однородное поле возникает между плоскими электродами с закругленными краями, а также между сферами, если расстояние между ними не более

их диаметра. В таком поле длительность подготовки пробоя газа (для промежутка) составляет при достижении напряжением строго определенного значения, зависящего от температуры и давления газа. Между электродами внезапно возникает искра, которая затем переходит в дугу, если источник напряжения имеет достаточную мощность.

В то время как неоднородное поле возникает между двумя остриями, острием и плоскостью, проводами, между сферическими поверхностями при расстоянии между ними, превышающем радиус сферы и т. д, а её особенностью является возникновение частичного разряда в виде короны в местах, где напряженность поля достигает критических значений, с дальнейшим переходом короны в искровой разряд и дугу при возрастании напряжения.

### **3.4 Электрический пробой в твёрдой среде**

В твёрдых телах существует множество механизмов пробоя. Вот основные из них:

1. Внутренний пробой;
2. Тепловой пробой;
3. Разрядный пробой;
4. Электрохимический пробой.

Внутренний пробой в твёрдых телах связан с тем, что носитель заряда на длине свободного пробега приобретает энергию, достаточную для ионизации молекул кристаллической решётки и увеличивает концентрацию носителей заряда. При этом лавинообразно создаются свободные носители заряда (увеличивается концентрация электронов), которые вносят основной вклад в общий ток. У полупроводников и диэлектриков существует разновидность частичного пробоя.

Тепловой пробой возникает при разогреве кристаллической решётки диэлектрика или полупроводника. При увеличении температуры свободным электро-

нам легче ионизировать атомы решётки, поэтому пробивное напряжение уменьшается. Разогрев может происходить как в результате теплопередачи извне, так и вследствие протекания переменного тока внутри диэлектрика.

Разрядный пробой связан с ионизацией адсорбированных газов в пористых материалах, таких как слюда или пористая керамика. Находящиеся в порах газы ионизируются раньше, чем пробивается твёрдое вещество, возникающие при этом газовые разряды разрушают поверхность пор.

Электрохимический пробой электротехнических материалов [3] наблюдается при постоянном и переменном напряжениях низкой частоты, когда в материале развиваются процессы, обуславливающие необратимое уменьшение сопротивления изоляции (электрохимическое старение). Кроме того, электрохимический пробой может иметь место при высоких частотах, если в закрытых порах материала происходит ионизация газа, сопровождающаяся тепловым эффектом и восстановлением, например в керамике, окислов металлов переменной валентности. Этот вид пробоя имеет существенное значение при повышенных температурах и высокой влажности воздуха. Для развития электрохимического пробоя требуется длительное время, поскольку он связан с явлением электропроводности. В керамике, содержащей окислы металлов переменной валентности (например), электрохимический пробой встречается значительно чаще, чем в керамике, состоящей из окислов алюминия, кремния, магния, бария. Электрохимический пробой наблюдается и у многих органических материалов; он во многом зависит от материала электродов.

### 3.5 Электрический пробой в жидкой среде

[Максим]

Электрическая форма пробоя, развивающаяся за время от  $10^5$  до  $10^8$  секунды, наблюдается в тщательно очищенных жидких диэлектриках и связывается с инжекцией электронов с катода.  $E_{applied}$  при этом достигает 103 МВ/м.

Механизм электрического пробоя жидкостей вначале считался аналогичным механизму пробоя газов, считая жидкость плотным газом. Это основывалось на схожести картины разряда и на некоторой схожести разрядных зависимостей. Однако прямое, непосредственное применение газовых аналогий неправильно.

Дело в том, что поведение электронов в жидкости кардинально отличается от поведения электронов в газе. Молекулы жидкости расположены столь близко друг другу, столь сильно взаимодействуют друг с другом, что электрон не может свободно двигаться и ускоряться в электрическом поле. В жидкости, кроме особо чистых сжиженных благородных газов, свободные электроны не могут существовать. При попадании свободных электронов в жидкость они сначала “сольватируются”, затем прилипают к нейтральным молекулам, образуя тем самым, отрицательные ионы.

Поэтому понятие длины свободного пробега для жидкости невозможно ввести. Грубая оценка принципиальных ограничений электрической прочности может быть сделана из следующих соображений. Считаем, что электрон может ускоряться на протяжении межмолекулярного расстояния. Используя в качестве длины пробега электрона “межмолекулярное расстояние”, можно получить оценку предельной электрической прочности жидкости.

В технически чистых жидких диэлектриках пробой носит тепловой характер. Энергия, выделяющаяся в ионизирующихся пузырьках газа, приводит к перегреву жидкости, что может послужить причиной закипания капелек влаги (локальный перегрев) и возникновению газового канала между электродами. Любые крупные примеси в жидкости приводят к искажению электрического поля в жидкости, понижая электрическую прочность жидкого диэлектрика. На высоких частотах происходит разогрев жидкости за счет релаксационных потерь и наблюдается термическое разрушение жидкости. Электрическая прочность жидких диэлектриков в значительной степени зависит от взвешенных в нем коллоидных частиц воды, смолистых веществ и других загрязнений. Под действием электрических сил заряженные частицы воды или смолистых веществ выстраиваются в

виде цепочек, по которым развивается электрический разряд, т. е. происходит пробой жидкого диэлектрика.

Фактически на электрический пробой жидких диэлектриков влияют многие факторы, к числу которых относятся:

- дегазация жидкости и электродов;
- длительность воздействия напряжения;
- скорость возрастания напряжения и его частота;
- температура, давление и др.

А теперь давайте рассмотрим данный процесс на примере. С повышением температуры часть коллоидных частиц  $H_2O$  или смолистых веществ растворяется и образование токопроводящего канала в жидком диэлектрике затрудняется. В связи с этим электрическая прочность жидкого диэлектрика повышается. Вследствие зависимости  $U_{applied}$  от процента содержания воды для трансформаторного масла.

Из-за нагрева конечно же образуются пузырьки газа, которые ведут себя аналогично. Будучи ионизированными, они под действием электрических сил образуют газовый канал между металлическими частями, находящимися под высоким напряжением. В этом случае электрический разряд происходит в газовом канале. Электрическая прочность жидких диэлектриков, содержащих воздух и другие газы в большой степени зависит от давления. С увеличением давления электрическая прочность увеличивается. Электрическая прочность дегазированного диэлектрика в меньшей степени зависит от давления.

## 4 Построение модели электрического пробоя

[Варя]

Рассмотрим простейший случай — вещество однородно (диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$  везде одинакова), и первоначально в нем нет свободных зарядов.

По теореме Гаусса поток вектора индукции электрического поля  $\mathbf{D}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю при отсутствии внутри поверхности свободных электрических зарядов

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

( $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности). Для большинства диэлектриков индукция электрического поля выражается через электрическое поле как  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ . В общем случае вектор  $\mathbf{E}$  имеет три компоненты  $(E_x, E_y, E_z)$ .

Рассмотрим в пространстве кубическую решетку с ячейками со сторонами  $h$  по всем координатам  $\Delta x = h$ ,  $\Delta y = h$  и  $\Delta z = h$ . Сначала рассмотрим только один ряд ячеек вдоль оси  $x$  (рис. 2.2). Пусть электрический потенциал принимает в центре  $i$ -той ячейки значение  $\varphi_{i,j,k}$ . Тогда проекция электрического поля на ось  $x$  на левой грани ячейки приближенно равна  $E_x(x) \approx -(\varphi_{i,j,k} - \varphi_{i-1,j,k})/h$ , а на правой грани  $E_x(x + \Delta x) \approx -(\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i,j,k})/h$ . Заметим, что эти формулы являются конечно-разностными аппроксимациями первых производных. Поток вектора индукции электрического поля изнутри ячейки через эти две

Рис. 4.1: Стр1

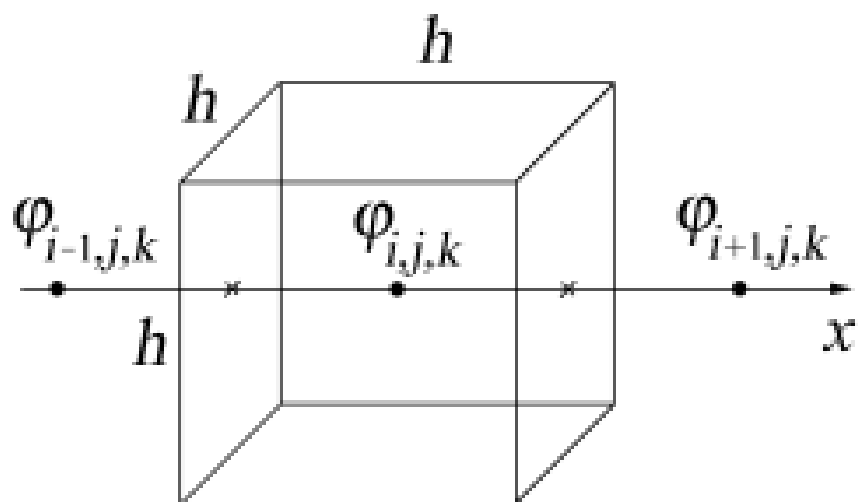


Рис. 4.2: Теорема Гаусса для кубической ячейки

грани равен

$$\Phi_x = \varepsilon E_x(x + \Delta x)h^2 - \varepsilon E_x(x)h^2 = -\varepsilon(\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k})h.$$

Аналогично поток через нижнюю и верхнюю грани равен

$$\Phi_y = \varepsilon E_y(y + \Delta y)h^2 - \varepsilon E_y(y)h^2 = -\varepsilon(\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k})h,$$

а через переднюю и заднюю грани —

$$\Phi_z = \varepsilon E_z(z + \Delta z)h^2 - \varepsilon E_z(z)h^2 = -\varepsilon(\varphi_{i,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j,k-1})h.$$

Складывая эти уравнения, вычислим полный поток изнутри ячейки и поделим его на объем ячейки

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{h^3} &= \frac{\Phi_x + \Phi_y + \Phi_z}{h^3} = -\varepsilon \frac{(\varphi_{i+1,j,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i-1,j,k})}{h^2} \\ &\quad - \varepsilon \frac{(\varphi_{i,j+1,k} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j-1,k})}{h^2} - \varepsilon \frac{(\varphi_{i,j,k+1} - 2\varphi_{i,j,k} + \varphi_{i,j,k-1})}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Каждая дробь представляет собой разностную аппроксимацию второй частной производной от потенциала по соответствующей координате. Так как в данном случае полный поток равен нулю, то при  $h \rightarrow 0$  уравнение для потенциала в однородном диэлектрике сводится к хорошо известному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Для краткости уравнение Лапласа часто записывают в символической форме  $\nabla^2 \varphi = 0$ , где оператор  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Используя условие равенства нулю полного потока из уравнения (2.1) можно также получить уравнение

$$\varphi_{i-1,j,k} + \varphi_{i+1,j,k} + \varphi_{i,j-1,k} + \varphi_{i,j+1,k} + \varphi_{i,j,k-1} + \varphi_{i,j,k+1} - 6\varphi_{i,j,k} = 0. \quad (2.2)$$

Рис. 4.3: стр2



Далее будем рассматривать плоский случай. Потенциал изменяется только в плоскости  $XY$ , поэтому по теореме Гаусса для квадратной ячейки сетки с номером  $i, j$  вместо формулы (2.2) получим

$$\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1}). \quad (2.3)$$

Таким образом, если потенциал в каждом узле равен среднему арифметическому по соседним узлам, то эти значения как раз являются решением уравнений электростатики. Из электростатики известно, что распределение потенциала в замкнутой области диэлектрика в отсутствие свободных зарядов полностью определяется условиями на границе этой области.

Систему уравнений (2.3) удобно решать методом итераций. «Новое» значение потенциала в каждом внутреннем узле вычисляется как среднее арифметическое «старых» значений потенциала в соседних с ним узлах по уравнению (2.3). Для того, чтобы начать итерации, необходимо задать для внутренних узлов расчетной области некие (вообще говоря, произвольные) начальные значения  $\varphi_{i,j}$ . При этом необходимые значения  $\varphi_{i,j}$  на границе расчетной области берутся из граничных условий. Таким образом можно вычислить новые значения потенциала во всех внутренних узлах. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока новые значения будут отличаться от старых не более, чем на заданную величину (погрешность вычисления потенциала). Доказано, что итерации всегда сходятся, т.е. значения потенциала стремятся к точному решению. Начальные значения потенциала можно задать произвольно, однако, для ускорения сходимости их следует выбирать как можно ближе к точному решению.

Часто рассматривается система, состоящая из двух горизонтальных плоских электродов, пространство между которыми заполнено диэлектриком. Удобно задать потенциал одного из электродов равным нулю. Тогда потенциал второго электрода равен приложенному напряжению. Для простоты можно рассматривать задачу в прямоугольной области, ограниченной сверху и снизу электродами, а слева и справа — вертикальными границами, на которых тоже необходимо задать граничные условия.

Один из вариантов таких условий — это линейное падение потенциала от его значения на одном электроде до его значения на другом. Кстати,

Рис. 4.4: стр3

[С модели НВП - Богдан]

так же можно выбрать и начальное приближение для итераций внутри области. Другой вариант — периодические граничные условия, связывающие левую и правую границы диэлектрика. Для этого надо ввести слева и справа по одному фиктивному ряду узлов. В левый фиктивный ряд переписываются значения потенциала с правой границы расчетной области, а правый фиктивный ряд заполняется значениями с левой границы.

### 2.2.2. Критерии и модели роста стримеров

Рассмотрим теперь развитие стримерной структуры в диэлектрике. Каналы стримеров заполнены плазмой, которая проводит электрический ток. Будем считать, что в первом приближении заряд успевает растечься по веткам стримера так, что потенциал структуры становится равным потенциалу электрода. Это означает, что при вычислении поля в диэлектрике стримерную структуру можно считать продолжением электрода, то есть тоже границей расчетной области. Удобно рассматривать рост структуры с электрода, имеющего нулевой потенциал.

Зная потенциал, можно вычислить электрическое поле. Среднее значение проекции электрического поля на звено, соединяющее узлы  $A$  и  $B$ ,  $\langle E_{AB} \rangle = (\varphi_A - \varphi_B)/l_{AB}$ . Нам необходимо знать поле на звеньях, выходящих из стримерной структуры. Считая ее потенциал нулевым, получаем просто  $|E| = \varphi_B$  для горизонтальных и вертикальных звеньев,  $|E| = \varphi_B/\sqrt{2}$  для диагональных. Здесь индекс  $B$  означает узлы, соседние со структурой.

Электрический пробой — стохастический процесс, каждое звено может пробиваться с некоторой вероятностью, зависящей от поля. Такая зависимость называется *критерием роста*. Рассмотрим некоторые примеры.

Модель НПВ. Нимейером, Пьетронеро и Висманом [11] впервые была предложена модель, которая позволяет описать рост структур разряда в диэлектриках. В основе модели лежит предположение, что структура растет случайным образом, причем вероятность роста зависит только от локального электрического поля вблизи структуры. Эта модель достаточно легко реализуется на компьютере. Обычно моделируется разряд в диэлектрике, помещенном между двумя электродами, разность потенциалов между которыми  $V$ .

Для расчета электрического поля в диэлектрике область моделирования покрывается сеткой (например, квадратной в двумерном случае или

Рис. 4.5: стр4

кубической — в трехмерном), на которой решается уравнение Лапласа.

Рост начинается с одной из точек на электроде. На каждом шаге роста с некоторой вероятностью может образоваться одна веточка разрядной структуры. Эта веточка будет соединять два соседних узла сетки, один из которых уже принадлежит разрядной структуре, а другой является «диэлектриком». Таким образом, из каждого узла двумерной сетки может образоваться до восьми веточек, если учитывать возможность роста и по диагоналям (для трехмерной сетки до 26 веточек). Пусть  $E$  — среднее значение проекции электрического поля на направление, соединяющего два соседних узла сетки, между которыми может образоваться новая ветвь разрядной структуры. Обычно предполагают, что вероятность ее образования приближенно равна  $p(E) \sim E^\eta$ , где  $\eta$  — так называемый показатель роста, зависящий только от свойств диэлектрика.

На каждом шаге роста случайный процесс выбора новой веточки структуры реализуется следующим алгоритмом. Пробегам по всем  $M$  узлам решетки, в которые возможен рост, и рассчитываем сумму

$$Z = \sum_{k=1}^M E_k^\eta, \quad (2.4)$$

где величина  $E_k$  — своя для каждой пары узлов и находится на каждом шаге роста по текущему распределению электрического поля. Затем разыгрывается случайное число  $\xi$ , равномерно распределенное от 0 до  $Z$ . Для этого используется формула  $\xi = Z \cdot \text{random}$ . Затем повторно шаг за шагом рассчитывается (2.4) до тех пор, пока текущая сумма  $\sum_{k=1}^S E_k^\eta$  не станет больше  $\xi$ . Тот узел, для которого сумма стала больше  $\xi$ , присоединяется к структуре. Новой образовавшейся веточке присваивается значение потенциала того электрода, с которого начался рост этого стримера. Таким образом формируется эквипотенциальная структура.

В этой модели каждый шаг роста во времени имеет номер, но, к сожалению, номеру не сопоставлен реальный интервал времени  $\Delta t$ . Структура разряда растет до тех пор, пока не достигнет противоположного электрода.

Такая модель роста принадлежит к классу *однозвенных* моделей, в которых считается, что проводящее звено, появившееся первым, подавляет рост остальных на текущем временном шаге.

Флуктуационный критерий роста. В *многозвенных* моделях, наоборот, пренебрегается влиянием друг на друга проводящих звеньев, возникающих на данном шаге по времени. Пусть пробой происходит в тех

Рис. 4.6: стр5

[С модели стох запаздывания - Данила]

областях диэлектрика, где величина поля превосходит некоторое пороговое значение  $E_*$  (электрическую прочность). Однако это не совсем правильно, так как реальный диэлектрик не является полностью однородным. Существуют «слабые» места, связанные, например, с повышенной ионизацией за счет космических частиц, с флуктуациями температуры и т. д. То есть, критерий возникновения пробоя можно представить в виде  $E > E_* - \delta$ , где  $\delta$  — величина флуктуации [12, 13]. Очевидно, что большие значения  $\delta$  будут встречаться реже, чем маленькие. Для такого случая независимых редких событий распределение для флуктуаций экспоненциальное  $f(\delta) \sim \exp(-\delta/g)/g$ , где  $g$  — некоторый параметр. Такое распределение вероятностей можно получить, задавая случайное число  $\delta = -g \ln(\text{random})$  (подробности в [4], глава 10). Это соответствует вероятности пробоя  $p(E) = \exp((E - E_*)/g)$ .

Развитие пробоя происходит следующим образом: проверяются все звенья, выходящие из стержневой структуры. Те из них, для которых  $E_i > E_* - \delta_i$ , присоединяются к структуре. Эта модель роста принадлежит к классу многозвенных. Шаг роста во времени  $\Delta t$  считается постоянным.

Модели стохастического времени запаздывания. В [14] для каждого возможного звена было введено случайное время ожидания пробоя  $\tau_i = -\ln(\text{random})/r(E)$ . Случайные числа отражают стохастический (вероятностный) характер процесса. Тогда вероятность пробоя за малый интервал времени  $\tau_0$  равна  $p(E) = \tau_0 r(E)$ . Функция вероятности роста  $r(E)$  может быть любой быстро растущей функцией от локального электрического поля. В однозвенной модели пробивается звено, у которого время  $\tau_i$  минимально [14]. Шаг роста во времени принимается равным этому минимальному значению  $\tau_i$ .

В [15] была предложена многозвенная модель. В этом случае пробиваются все звенья, для которых  $\tau_i$  меньше заданного шага по времени  $\Delta t$ , который можно выбрать постоянным.

Как уже говорилось, вероятность пробоя резко возрастает с увеличением напряженности электрического поля. Поэтому часто используется степенная аппроксимация  $p(E) \sim E^\eta$ . При  $\eta = 2$  вероятность пробоя пропорциональна мощности локального энерговыделения  $w = \sigma E^2$ , где  $\sigma$  — характерная величина электропроводности плазмы в каналах структуры.

Интересно отметить, что такой вид  $p(E)$  может описывать не только электрический пробой, но и другие процессы. Например, при  $\eta = 0$  вероятность роста не зависит от поля, таким образом можно описать

Рис. 4.7: стрб



рост колоний бактерий. При  $\eta = 1$  вероятность  $p \sim \nabla\varphi$ , что соответствует диффузионно-ограниченному росту (модель DLA, см. раздел 2.1). С увеличением  $\eta$  вырастает все более разреженная структура, которая в пределе  $\eta \rightarrow \infty$  вырождается в единственный прямолинейный канал.

Рис. 4.8: стр7

## Список литературы

1. Медведев Д. А. П.Э.Р. Куперштох А. Л. Моделирование физических процессов и явлений на ПК: Учеб. пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2010.
2. Гл. ред. А. М. Прохоров; Редкол.: Д. М. Алексеев А.М.Б.-Б. А. М. Балдин. Физическая энциклопедия. В 5 томах. Том 4. Пойнтинга-Робертсона эффект — Стримеры. Большая Российская энциклопедия, 1994.
3. Воробьев Г. А. К.Ю.Д. Похолков Ю. П. Физика диэлектриков (область сильных полей). Томск: Изд-во ТПУ, 2003., 2003-2004.