Отчёт по лабораторной работе №4

Предмет: Математическое моделирование

Манаева Варвара Евгеньевна, НФИбд-01-20. 1032201197

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить работу гармонического осциллятора и решить задания лабораторной работы.

Задачи:

- Изучить теоретическую справку;
- Запрограммировать решение на Julia;
- Запрограммировать решение на OpenModelica;
- Сравнить результаты работы программ;

2 Задание лабораторной работы

2.1 Вариант №28 [1]

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4.7x = 0$;
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 7x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 7\dot{x} + 0.5x = 0.5sin(0.7t)$

На интервале $t \in [0; 56]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.9, y_0 = 1.9$.

3 Теоретическое введение

3.1 Общая информация о модели [2]

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{3.1}$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ${\omega_0}^2$ – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Уравнение ((3.1)) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения (3.1) получаем уравнение консервативного осциллятора, энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{3.2}$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (3.2) необходимо задать двав начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ \dot{x}(t) = y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Уравнение второго порядка (3.2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -{\omega_0}^2 \end{cases} \tag{3.4}$$

Начальные условия (3.3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Решение с помощью программ

4.1.1 Julia

4.1.1.1 Программный код решения на Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations [3]. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку PyPlot.

```
using PyPlot;
using DifferentialEquations;
function ZF!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -p[1]*u[2]-p[2]*u[1] + p[3]*sin(0.7*t)
end
const u0 = Float64[0.9, 1.9]
const p1 = Float64[0, 4.7, 0]
const p2 = Float64[0.5, 7, 0]
const p3 = Float64[7, 0.5, 0.5]
const tspan = Float64[0.0, 56.0]
const shag = Float64(0.05)

prob = ODEProblem(ZF!,u0,tspan, p1)
```

```
sol = solve(prob, dtmax=0.05);

x = [tu[1] for tu in sol.u]
y = [tu[2] for tu in sol.u]

clf()
plot(x, y)
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора без З, без ВС")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделировани
2023_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph1.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделировани
2023_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph1.png")
clf()
plot(sol.t, x, color="darkblue")
plot(sol.t, y, color="crimson")
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора без З, без ВС")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделировани
2023_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph1_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделировани
2023_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph1_t.png")
clf()

prob = ODEProblem(ZF!,u0,tspan, p2)
sol = solve(prob, dtmax=0.05);

x = [tu[1] for tu in sol.u]
y = [tu[2] for tu in sol.u]

clf()
```

```
plot(x, y)
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора с 3, без ВС")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph2.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph2.png")
clf()
plot(sol.t, x, color="darkblue")
plot(sol.t, y, color="crimson")
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора с 3, без ВС")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph2_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph2_t.png")
clf()

prob = ODEProblem(ZF!,u0,tspan, p3)
sol = solve(prob, dtmax=0.05);

x = [tu[1] for tu in sol.u]
y = [tu[2] for tu in sol.u]

clf()
plot(x, y)
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора с 3, с ВС")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph3.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph3.png")
```

```
clf()
plot(sol.t, x, color="darkblue")
plot(sol.t, y, color="crimson")
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора с 3, с ВС")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph3_t.png")
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое_моделирование
2023_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph3_t.png")
clf()
```

4.1.1.2 Результаты работы кода на Julia

Решение первой задачи (рис. 4.1, 4.2):

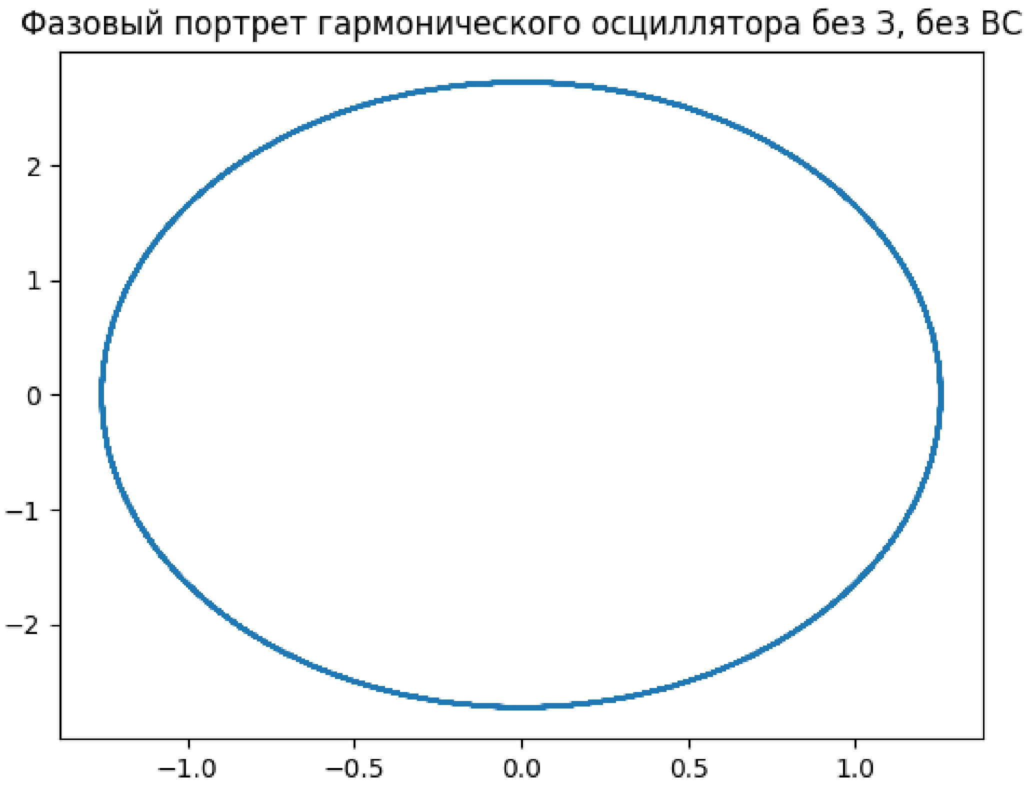

Рис. 4.1: “Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы”

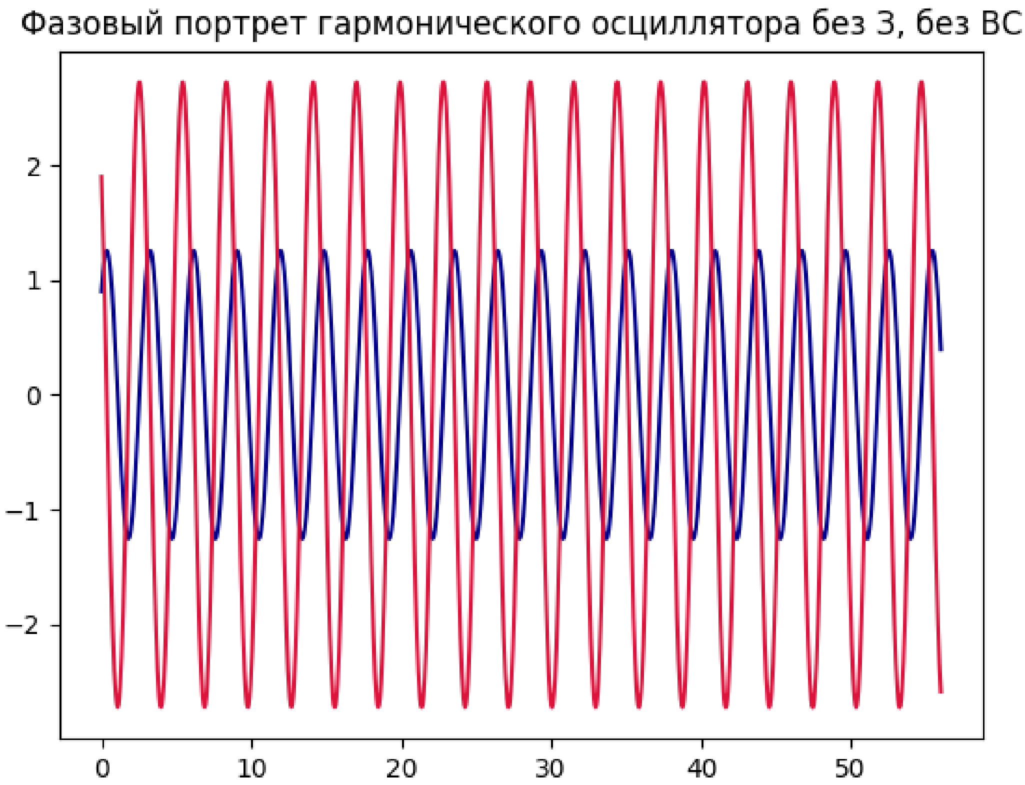

Рис. 4.2: “Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение второй задачи (рис. 4.3, 4.4):

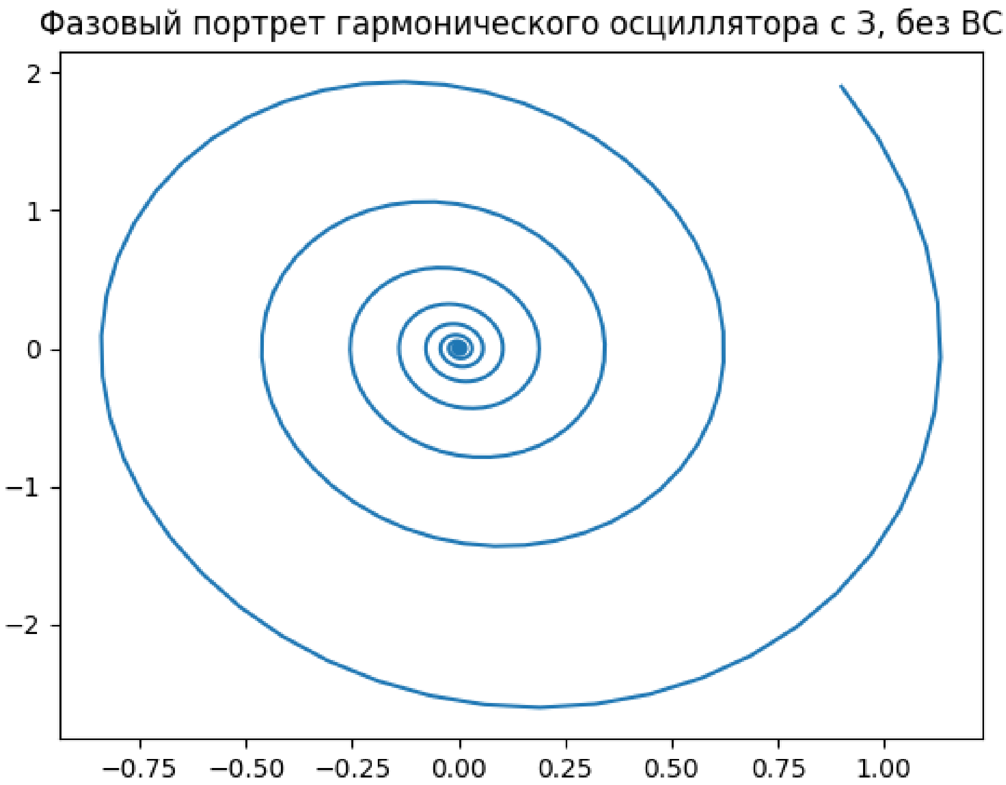

Рис. 4.3: "Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы"

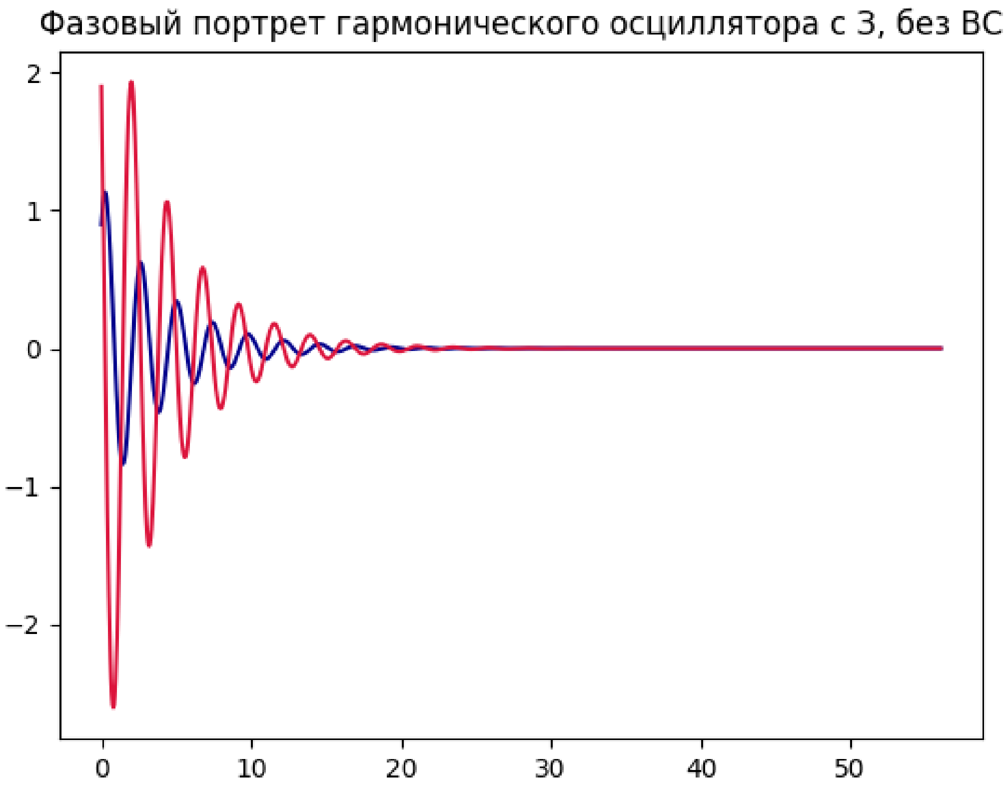

Рис. 4.4: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение третье задачи (рис. 4.5, 4.6):

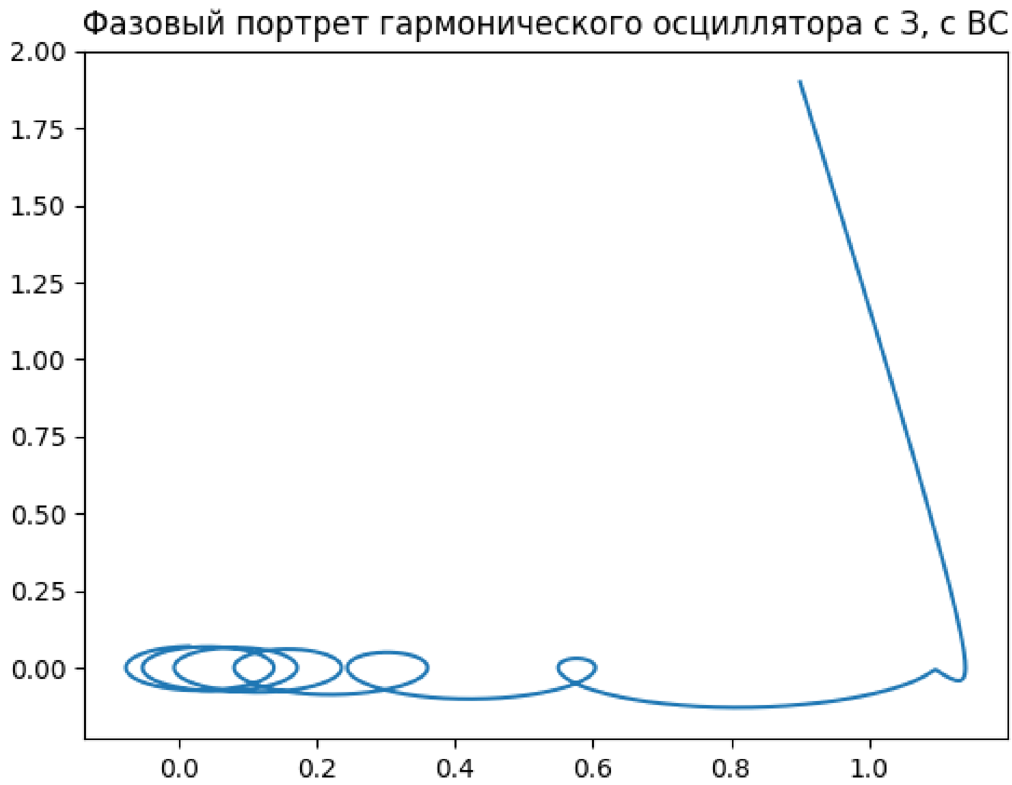

Рис. 4.5: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы”

Рис. 4.6: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы в зависимости от времени”

4.1.2 OPenModelica

4.1.2.1 Программный код решения на OPenModelica

```
model oscilyator
  parameter Real w(start=4.7);
  Real x(start = 0.9);
  Real y(start = 1.9);

  equation
    der(x)=y;
```

```
    der(y)=-w*x;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-
6, Interval = 0.05));
end oscilyator;

model oscilyator2
  parameter Real g(start=7);
  parameter Real w(start=0.5);
  Real x(start = 0.9);
  Real y(start = 1.9);

  equation
    der(x)=y;
    der(y)=-g*y-w*x;

  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-
6, Interval = 0.05));
end oscilyator2;

model oscilyator3
  parameter Real g(start=7);
  parameter Real w(start=0.5);
  Real x(start = 0.9);
  Real y(start = 1.9);

  equation
    der(x)=y;
    der(y)=-g*y-w*x+0.5*sin(0.7*time);
```

```
  annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-
6, Interval = 0.05));
end oscilyator3;
```

4.1.2.2 Результаты работы кода на OpenModelica

Решение первой задачи (рис. 4.7, 4.8):

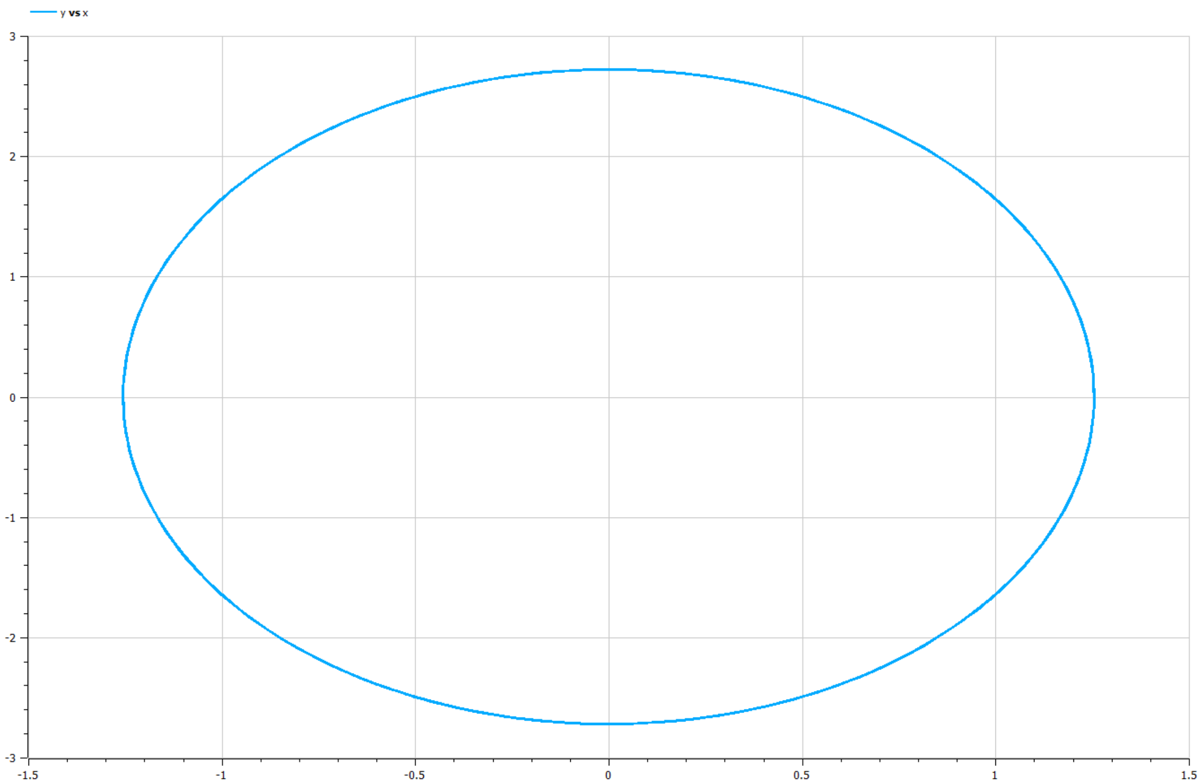

Рис. 4.7: “Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы”

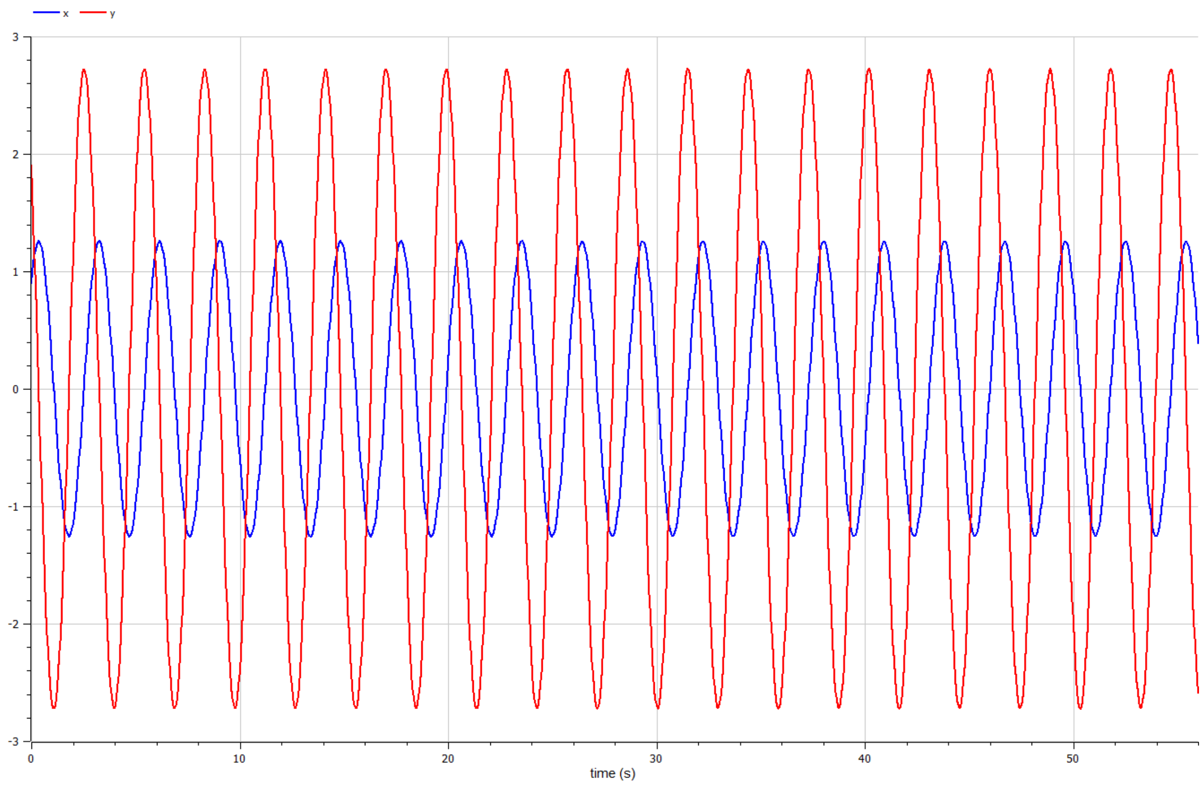

Рис. 4.8: “Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение первой задачи (рис. 4.9, 4.10):

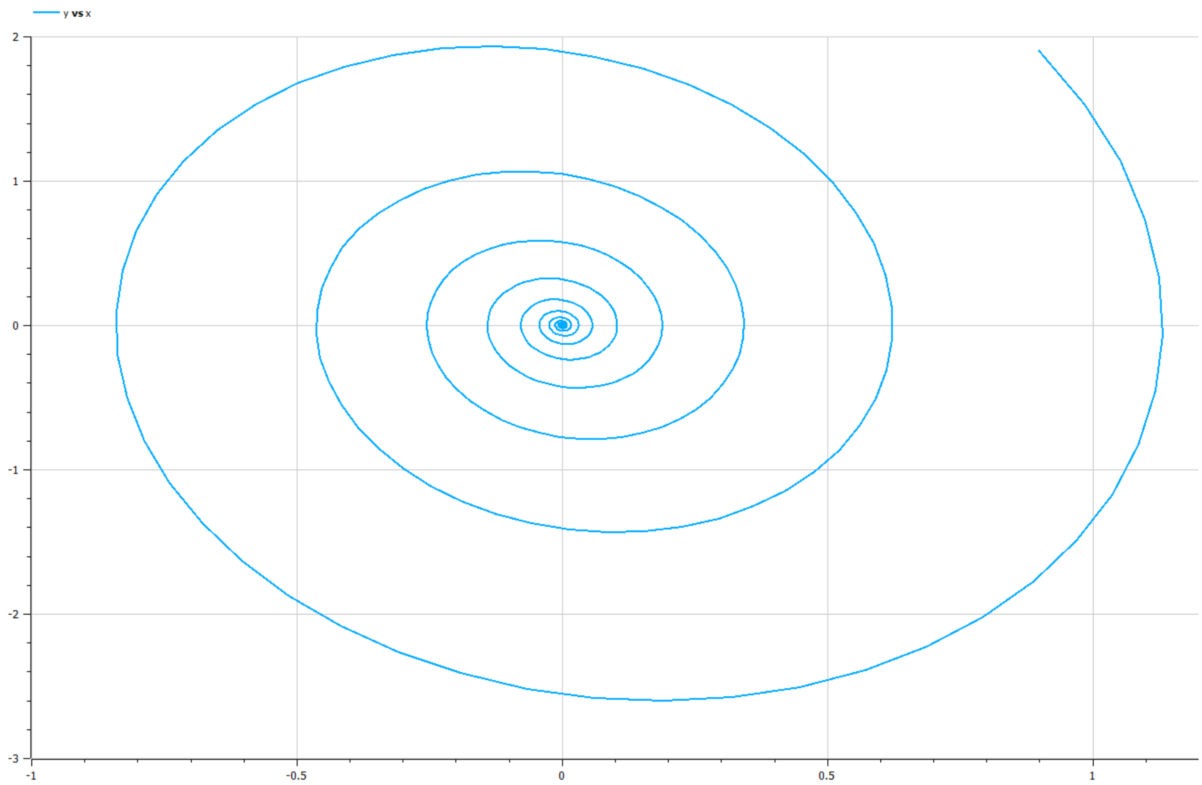

Рис. 4.9: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы”

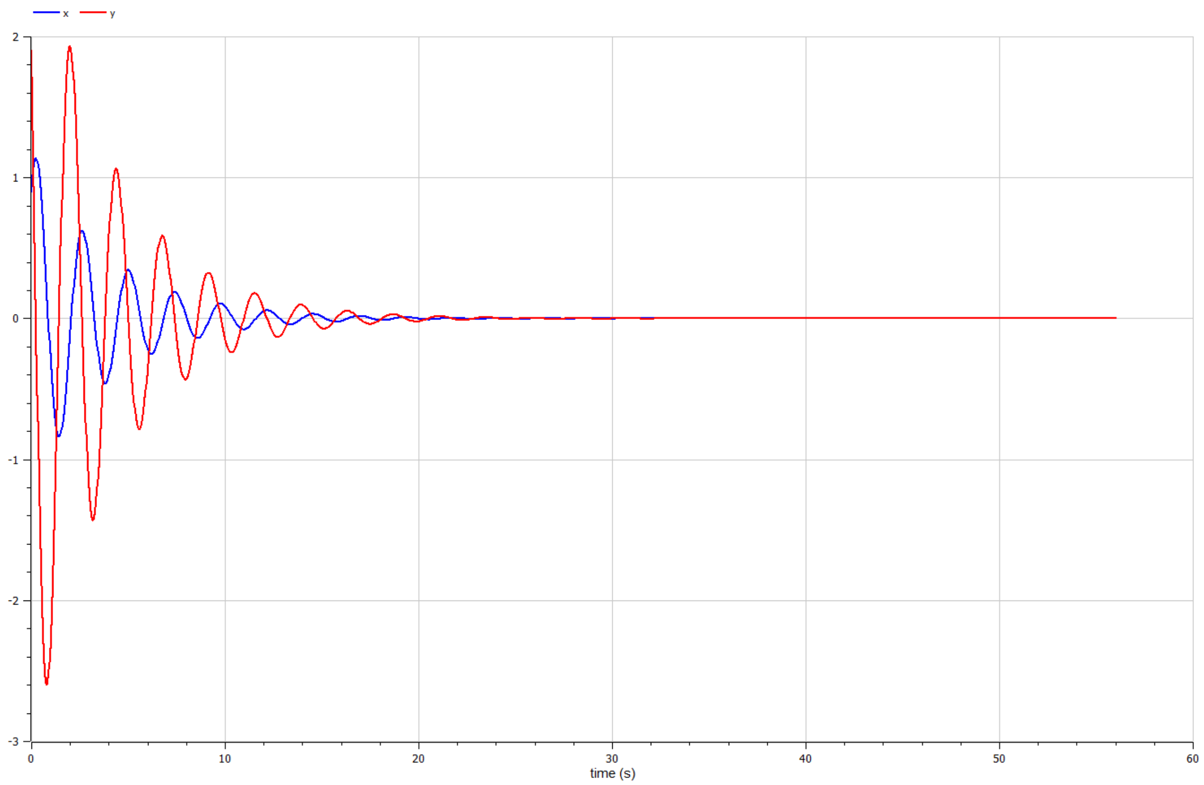

Рис. 4.10: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение первой задачи (рис. 4.11, 4.12):

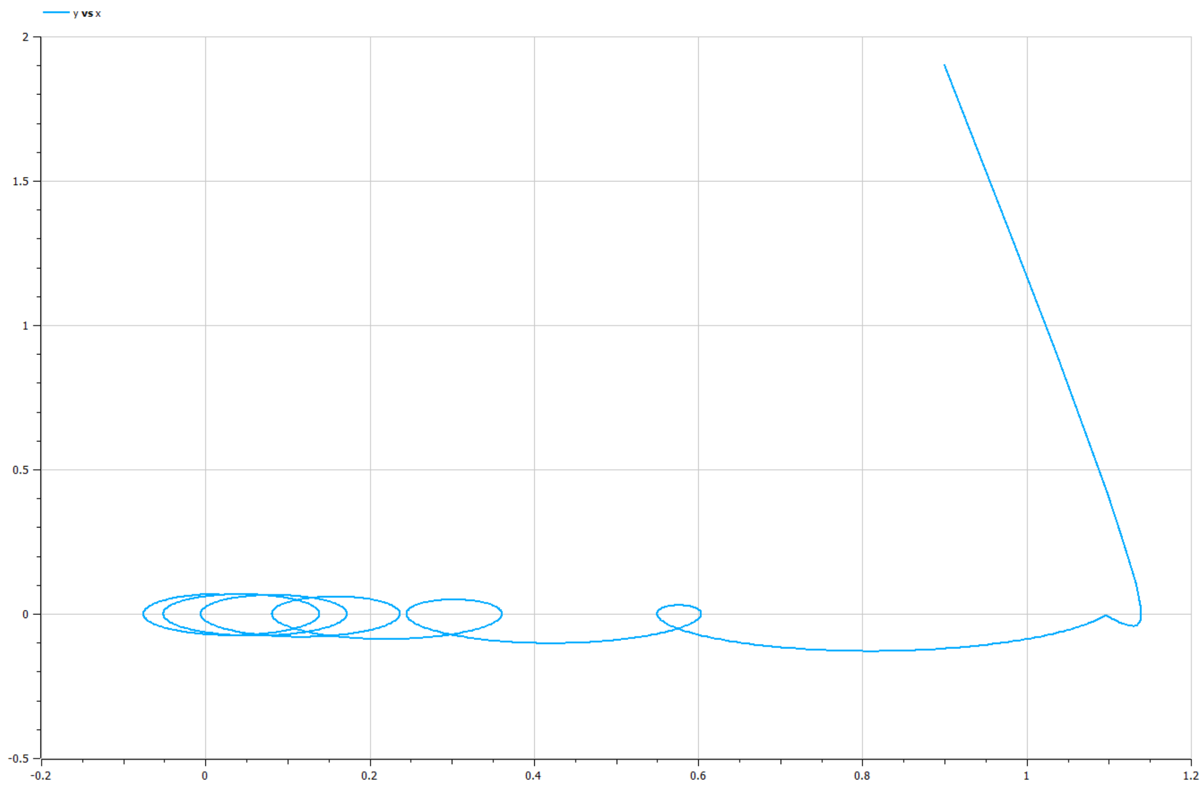

Рис. 4.11: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы”

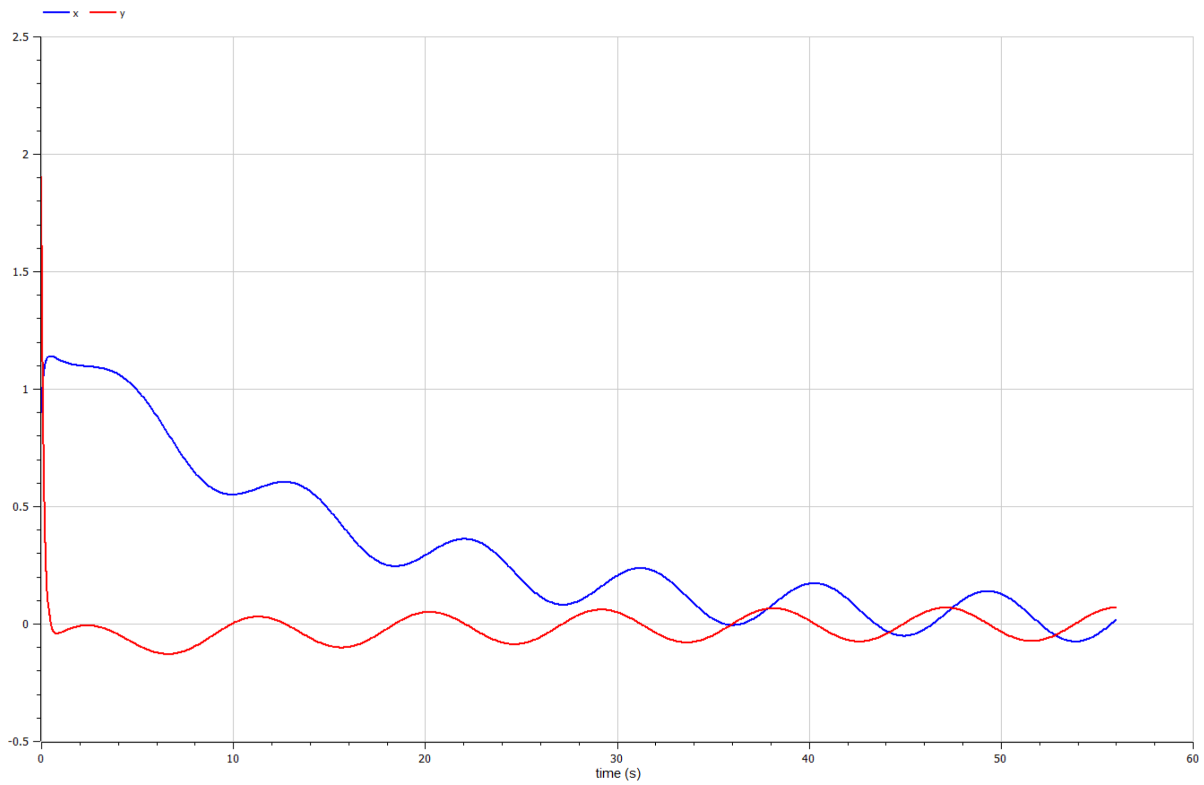

Рис. 4.12: “Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы в зависимости от времени”

4.2 Сравнение результатов

Результаты работы программы на Julia и на OpenModelica идентичны до различий между графическими модулями.

5 Выводы

Были написаны программы на Julia и OpenModelica для решения трёх задач про движение гармонического осциллятора. Соответствующие решения на обоих языках оказались идентичны с поправкой на использование разных графических модулей.

Были записаны скринкасты лабораторной работы и презентации лабораторной работы.

6 Контрольные вопросы:

1) Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Ответ: Запишем модель гармонических колебаний без затухания и без влияния внешней силы:

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{6.1}$$

2) Дайте определение осциллятора

Ответ: Осциллятор - это система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3) Запишите модель математического маятника

Ответ: осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения. Другой конец нити (стержня) обычно неподвижен. Период малых собственных колебаний маятника длины L, подвешенного в поле тяжести, равен

$$T_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{6.2}$$

и не зависит, в первом приближении, от амплитуды колебаний и массы маятника. Здесь g — ускорение свободного падения.

4) Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Ответ:

1. Первым уравнением обозначаем, что $\dot{x} = y$. Первое уравнение готово.
2. Из первого уравнения следует, что $\ddot{x} = \dot{y}$.
3. В изначальном уравнении второго порядка заменяем $\ddot{x}$ на $\dot{y}$, а также $\dot{x}$ на y.
4. Записываем изначальное уравнение с заменами из пункта 3 в систему. Второе уравнение в системе.
5. Финальные преобразования: второе уравнение в получившейся системе необходимо перегруппировать таким образом, чтобы $\dot{y}$ стояло слева от равно, а всё остальное - справа.

Система уравнений дифференциальных уравнений первого порядка из уравнения второго порядка готова.

5) Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Ответ: Фазовая траектория - гладкая кривая в фазовой плоскости, которая отвечает решению уравнения движения как функции времени.

Фазовый портрет - множество различных решений (соответствующих разным начальным условиям), изображённые на одной фазовой плоскости.

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №4 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971657/mod_resource/content/3/Задание%20к%20Лабораторной%20работе%20№%201%20%281%29.pdf.
2. Лабораторная работа №4 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971656/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%203.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.