Отчёт по лабораторной работе №4

Предмет: Математическое моделирование

Манаева Варвара Евгеньевна, НФИбд-01-20. 1032201197

Содержание

# 1 Цель работы

Изучить работу гармонического осциллятора и решить задания лабораторной работы.

Задачи:

* Изучить теоретическую справку;
* Запрограммировать решение на Julia;
* Запрограммировать решение на OpenModelica;
* Сравнить результаты работы программ;

# 2 Задание лабораторной работы

## 2.1 Вариант №28 [1]

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы ;
2. Колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы
3. Колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы

На интервале (шаг ) с начальными условиями .

# 3 Теоретическое введение

## 3.1 Общая информация о модели [2]

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения , )

Уравнение () есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе () вместо уравнения получаем уравнение консервативного осциллятора, энергия колебания которого сохраняется во времени.

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать двав начальных условия вида

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

Начальные условия для системы (4) примут вид:

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Решение с помощью программ

### 4.1.1 Julia

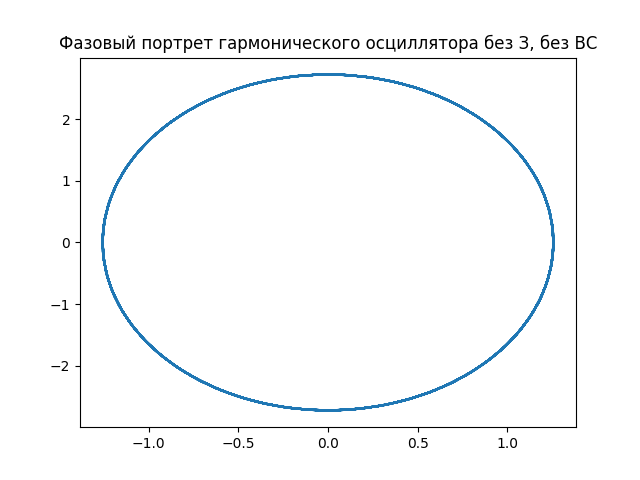
#### 4.1.1.1 Программный код решения на Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations [3]. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку PyPlot.

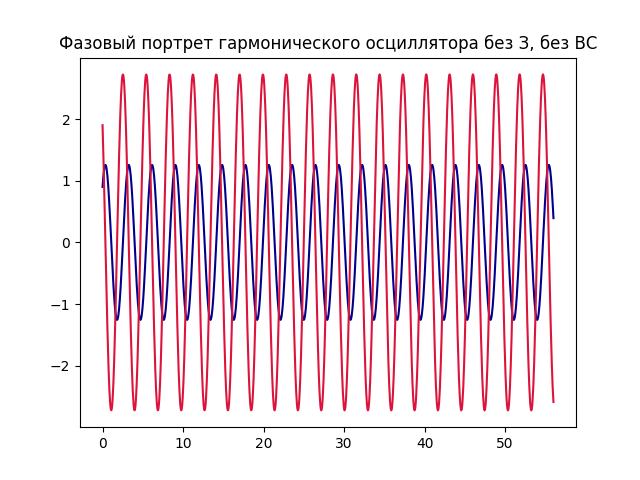
using PyPlot;  
using DifferentialEquations;  
function ZF!(du, u, p, t)  
 du[1] = u[2]  
 du[2] = -p[1]\*u[2]-p[2]\*u[1] + p[3]\*sin(0.7\*t)  
end  
const u0 = Float64[0.9, 1.9]  
const p1 = Float64[0, 4.7, 0]  
const p2 = Float64[0.5, 7, 0]  
const p3 = Float64[7, 0.5, 0.5]  
const tspan = Float64[0.0, 56.0]  
const shag = Float64(0.05)  
  
prob = ODEProblem(ZF!,u0,tspan, p1)  
sol = solve(prob, dtmax=0.05);  
  
x = [tu[1] for tu in sol.u]  
y = [tu[2] for tu in sol.u]  
  
clf()  
plot(x, y)  
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора без З, без ВС")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph1.png")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph1.png")  
clf()  
plot(sol.t, x, color="darkblue")  
plot(sol.t, y, color="crimson")  
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора без З, без ВС")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph1\_t.png")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph1\_t.png")  
clf()  
  
prob = ODEProblem(ZF!,u0,tspan, p2)  
sol = solve(prob, dtmax=0.05);  
  
x = [tu[1] for tu in sol.u]  
y = [tu[2] for tu in sol.u]  
  
clf()  
plot(x, y)  
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора c З, без ВС")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph2.png")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph2.png")  
clf()  
plot(sol.t, x, color="darkblue")  
plot(sol.t, y, color="crimson")  
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора c З, без ВС")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph2\_t.png")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph2\_t.png")  
clf()  
  
prob = ODEProblem(ZF!,u0,tspan, p3)  
sol = solve(prob, dtmax=0.05);  
  
x = [tu[1] for tu in sol.u]  
y = [tu[2] for tu in sol.u]  
  
clf()  
plot(x, y)  
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора c З, c ВС")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph3.png")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph3.png")  
clf()  
plot(sol.t, x, color="darkblue")  
plot(sol.t, y, color="crimson")  
title("Фазовый портрет гармонического осциллятора c З, c ВС")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\report\\image\\graph3\_t.png")  
savefig("C:\\Users\\emanaev\\work\\study\\2022-2023\\Математическое\_моделирование\\study\_2022-2023\_mathmod\\labs\\lab4\\presentation\\image\\graph3\_t.png")  
clf()

#### 4.1.1.2 Результаты работы кода на Julia

Решение первой задачи (рис. ??, ??):

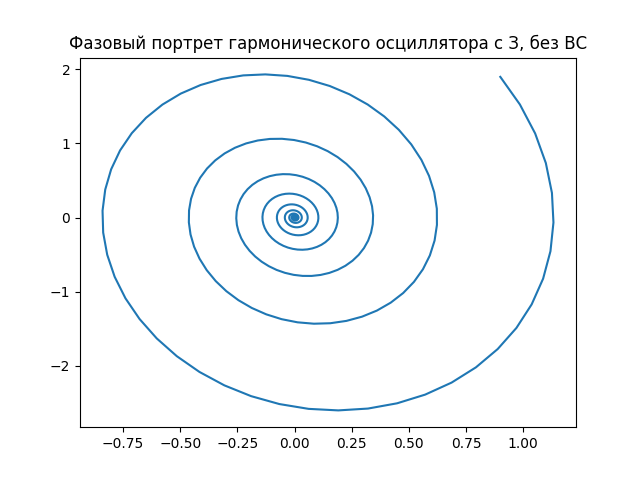


“Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы”

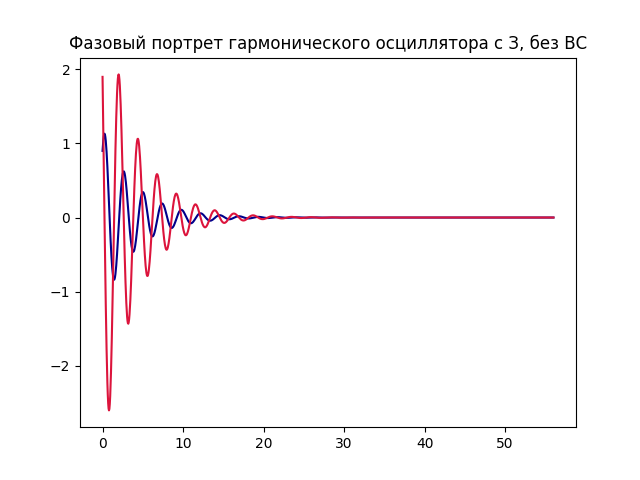


“Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение второй задачи (рис. ??, ??):

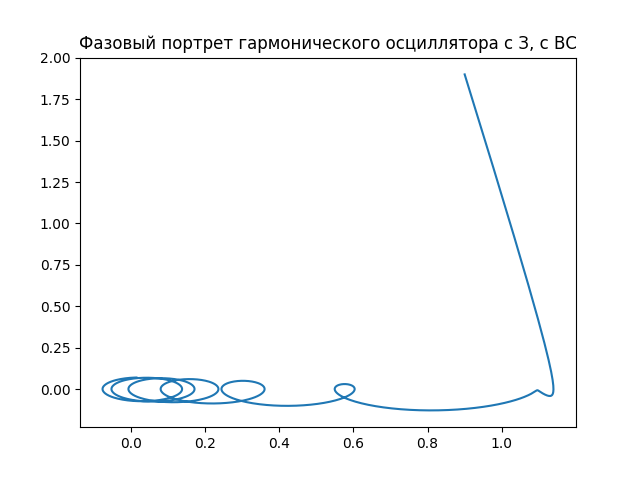


“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы”

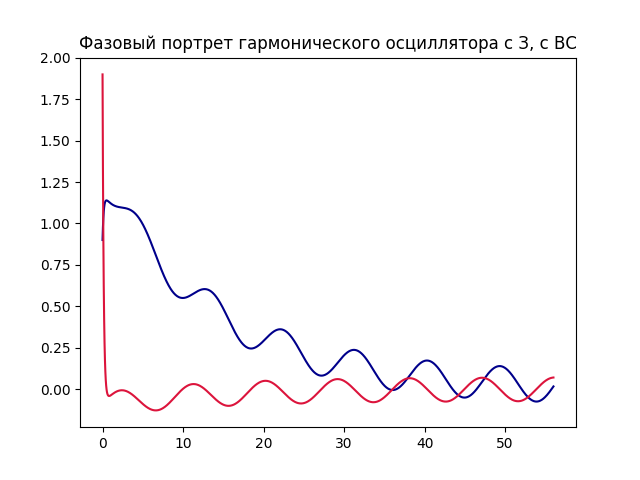


“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение третье задачи (рис. ??, ??):



“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы”



“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы в зависимости от времени”

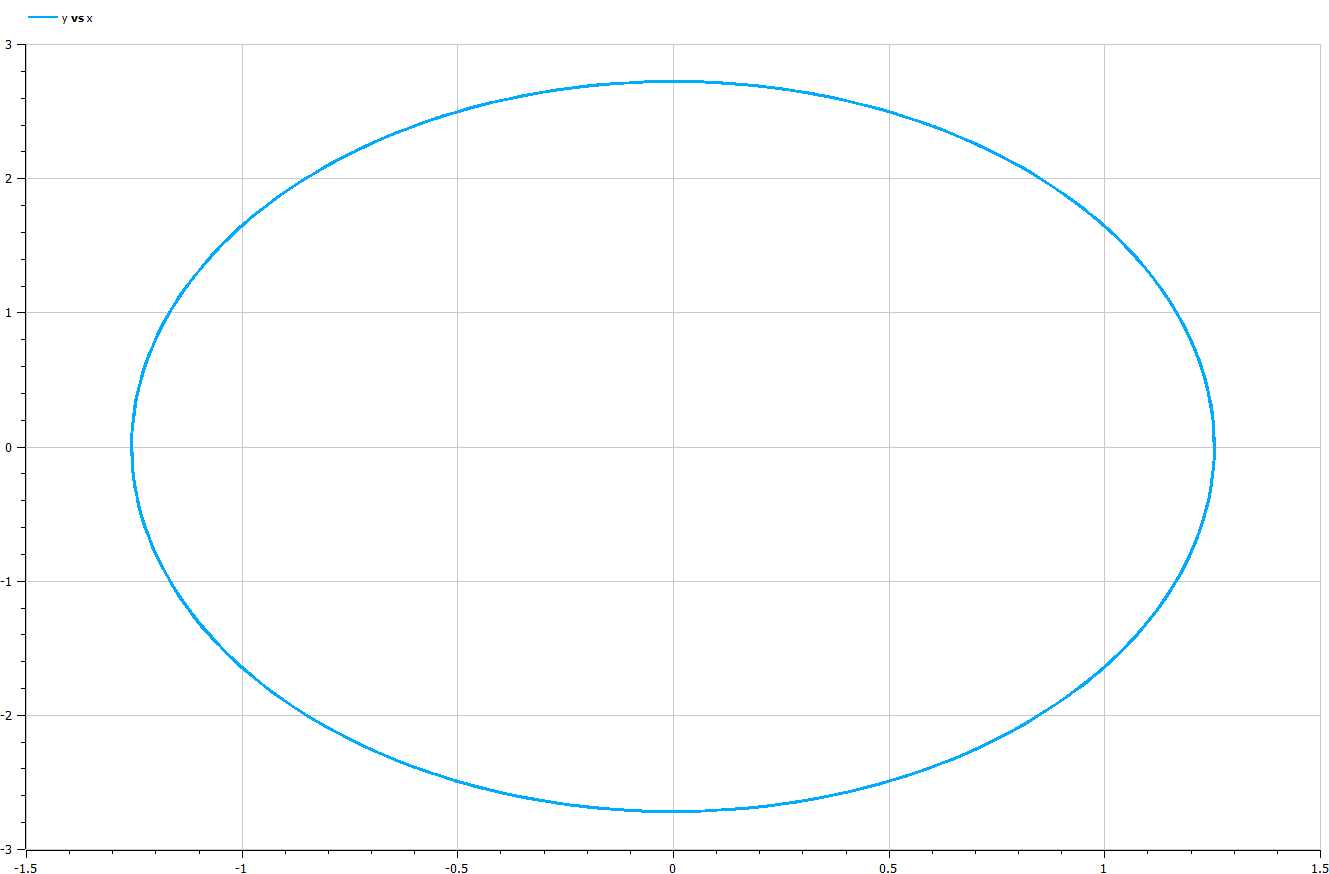
### 4.1.2 OPenModelica

#### 4.1.2.1 Программный код решения на OPenModelica

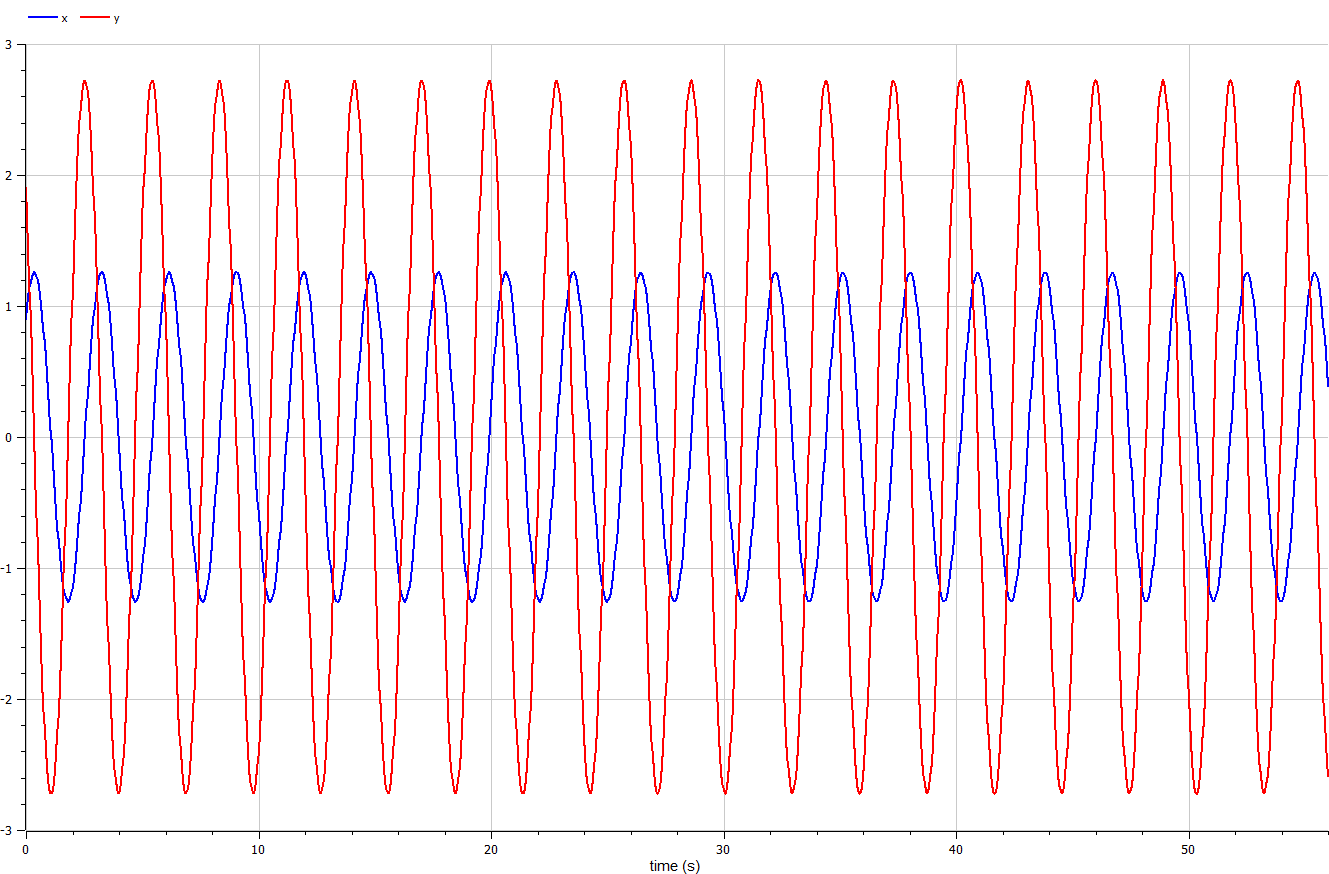
model oscilyator  
 parameter Real w(start=4.7);  
 Real x(start = 0.9);  
 Real y(start = 1.9);  
   
 equation  
 der(x)=y;  
 der(y)=-w\*x;  
   
 annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.05));  
end oscilyator;  
  
model oscilyator2  
 parameter Real g(start=7);  
 parameter Real w(start=0.5);  
 Real x(start = 0.9);  
 Real y(start = 1.9);  
   
 equation  
 der(x)=y;  
 der(y)=-g\*y-w\*x;  
   
 annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.05));  
end oscilyator2;  
  
model oscilyator3  
 parameter Real g(start=7);  
 parameter Real w(start=0.5);  
 Real x(start = 0.9);  
 Real y(start = 1.9);  
   
 equation  
 der(x)=y;  
 der(y)=-g\*y-w\*x+0.5\*sin(0.7\*time);  
   
 annotation(experiment(StartTime = 0, StopTime = 56, Tolerance = 1e-6, Interval = 0.05));  
end oscilyator3;

#### 4.1.2.2 Результаты работы кода на OpenModelica

Решение первой задачи (рис. ??, ??):

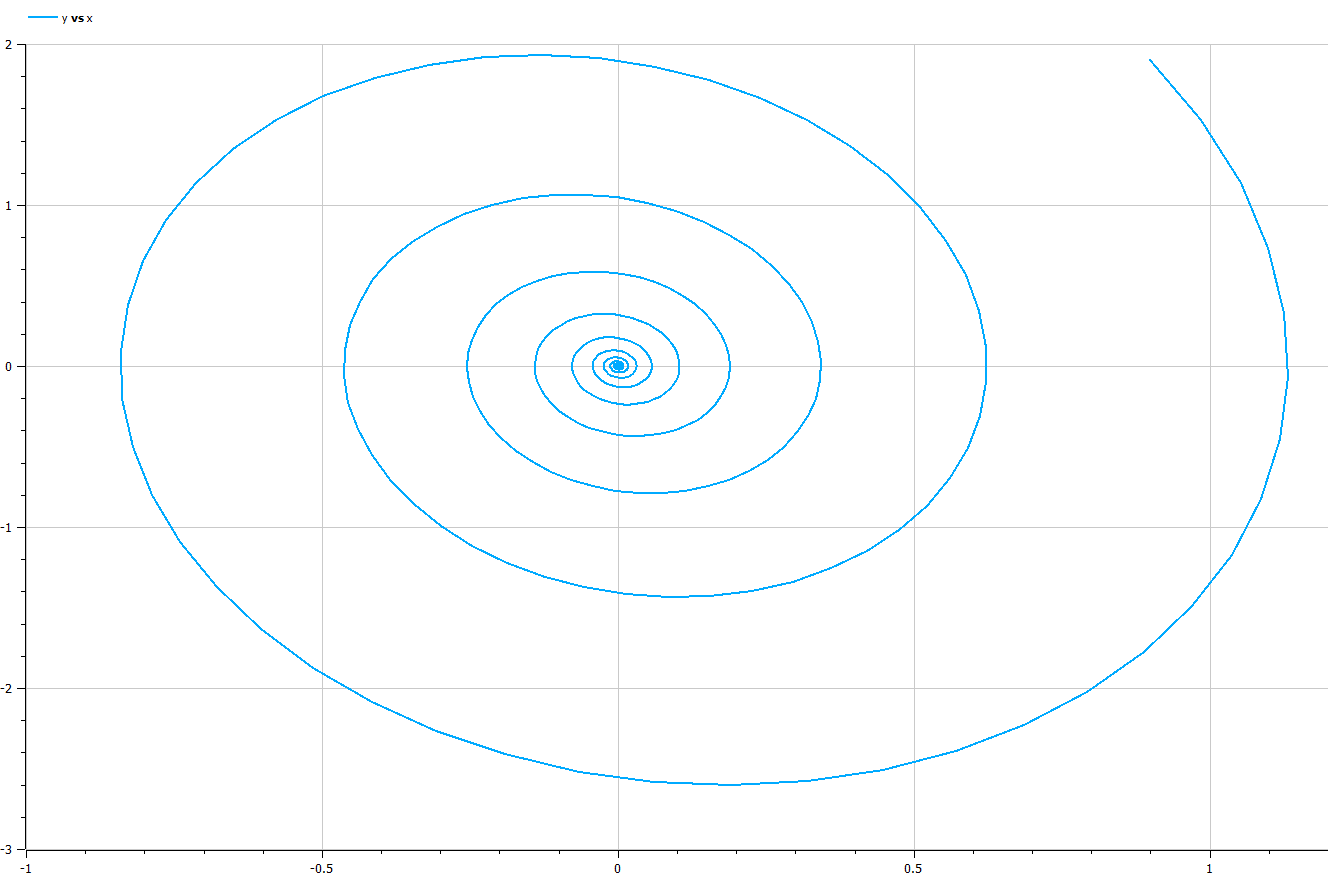


“Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы”

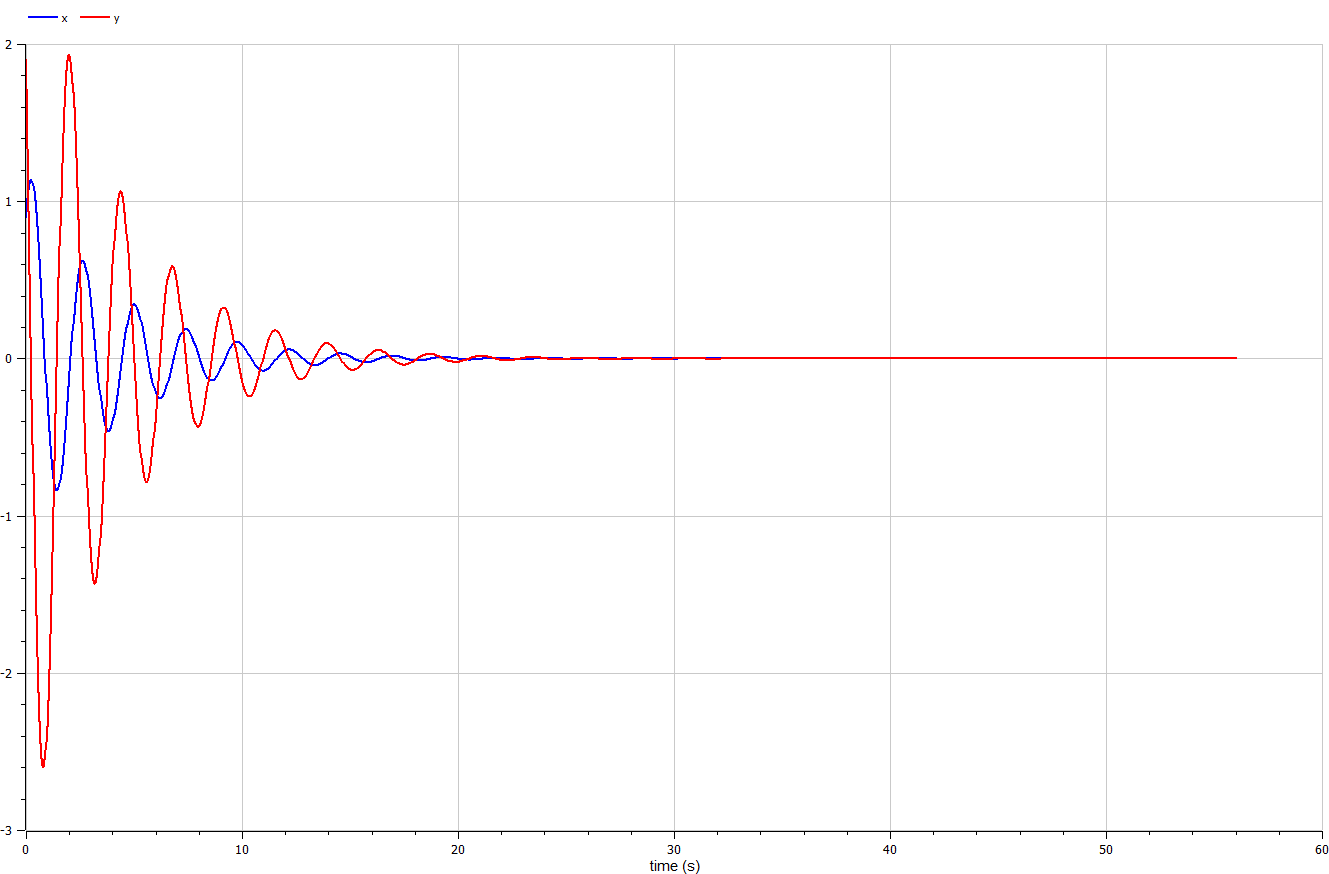


“Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение первой задачи (рис. ??, ??):

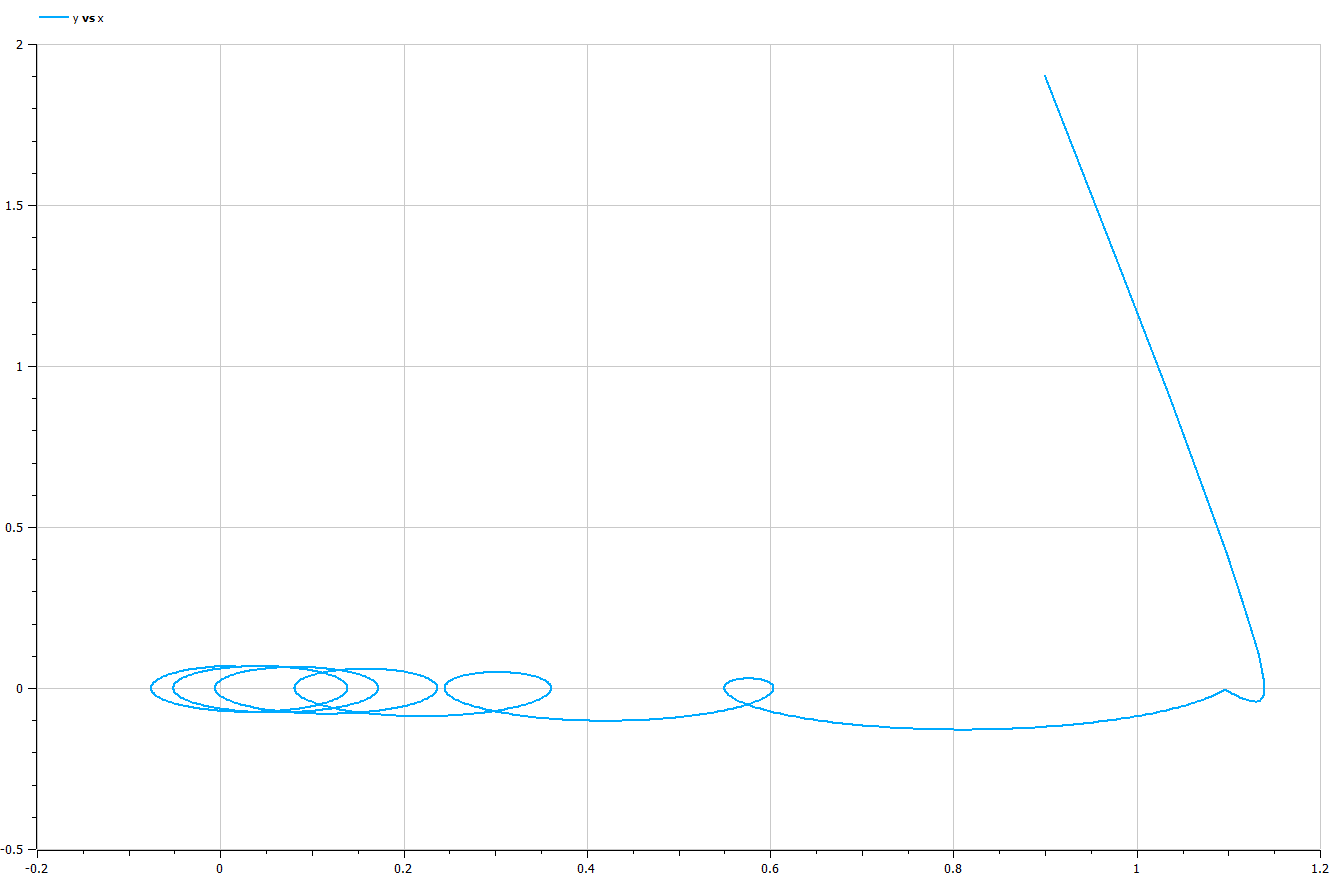


“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы”

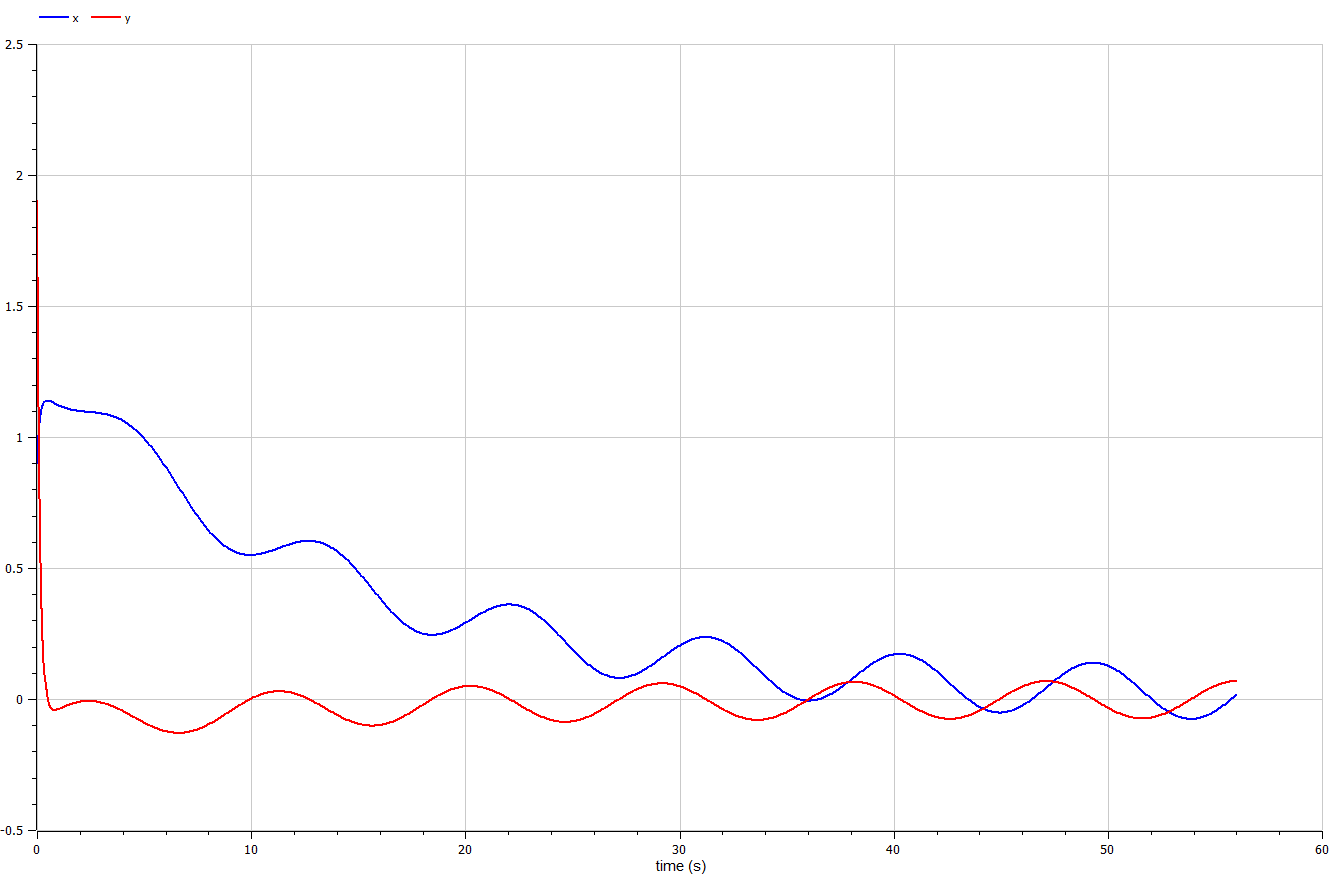


“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы в зависимости от времени”

Решение первой задачи (рис. ??, ??):



“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы”



“Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, с действиями внешней силы в зависимости от времени”

## 4.2 Сравнение результатов

Результаты работы программы на Julia и на OpenModelica идентичны до различий между графическими модулями.

# 5 Выводы

Были написаны программы на Julia и OpenModelica для решения трёх задач про движение гармонического осциллятора. Соответствующие решения на обоих языках оказались идентичны с поправкой на использование разных графических модулей.

Были записаны скринкасты [лабораторной работы](https://youtu.be/NL1h4QvIfmM) и [презентации лабораторной работы](https://youtu.be/hyq9K2w2Pwk).

# 6 Контрольные вопросы:

*1) Запишите простейшую модель гармонических колебаний*

Ответ: Запишем модель гармонических колебаний без затухания и без влияния внешней силы:

*2) Дайте определение осциллятора*

Ответ: Осциллятор - это система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

*3) Запишите модель математического маятника*

Ответ: осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения. Другой конец нити (стержня) обычно неподвижен. Период малых собственных колебаний маятника длины L, подвешенного в поле тяжести, равен

и не зависит, в первом приближении, от амплитуды колебаний и массы маятника. Здесь g — ускорение свободного падения.

*4) Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка*

Ответ:

1. Первым уравнением обозначаем, что . Первое уравнение готово.
2. Из первого уравнения следует, что .
3. В изначальном уравнении второго порядка заменяем на , а также на .
4. Записываем изначальное уравнение с заменами из пункта 3 в систему. Второе уравнение в системе.
5. Финальные преобразования: второе уравнение в получившейся системе необходимо перегруппировать таким образом, чтобы стояло слева от равно, а всё остальное - справа.

Система уравнений дифференциальных уравнений первого порядка из уравнения второго порядка готова.

*5) Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?*

Ответ: Фазовая траектория - гладкая кривая в фазовой плоскости, которая отвечает решению уравнения движения как функции времени.

Фазовый портрет - множество различных решений (соответствующих разным начальным условиям), изображённые на одной фазовой плоскости.

# Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №4 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: <https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971657/mod_resource/content/3/Задание%20к%20Лабораторной%20работе%20№%201%20%281%29.pdf>.

2. Лабораторная работа №4 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: <https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971656/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%203.pdf>.

3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>.