Методы численного анализа
Лабораторная работа № 1
"Методы решения нелинейных уравнений. Аппроксимация функций "

По результатам работы необходимо составить итоговый отчёт.

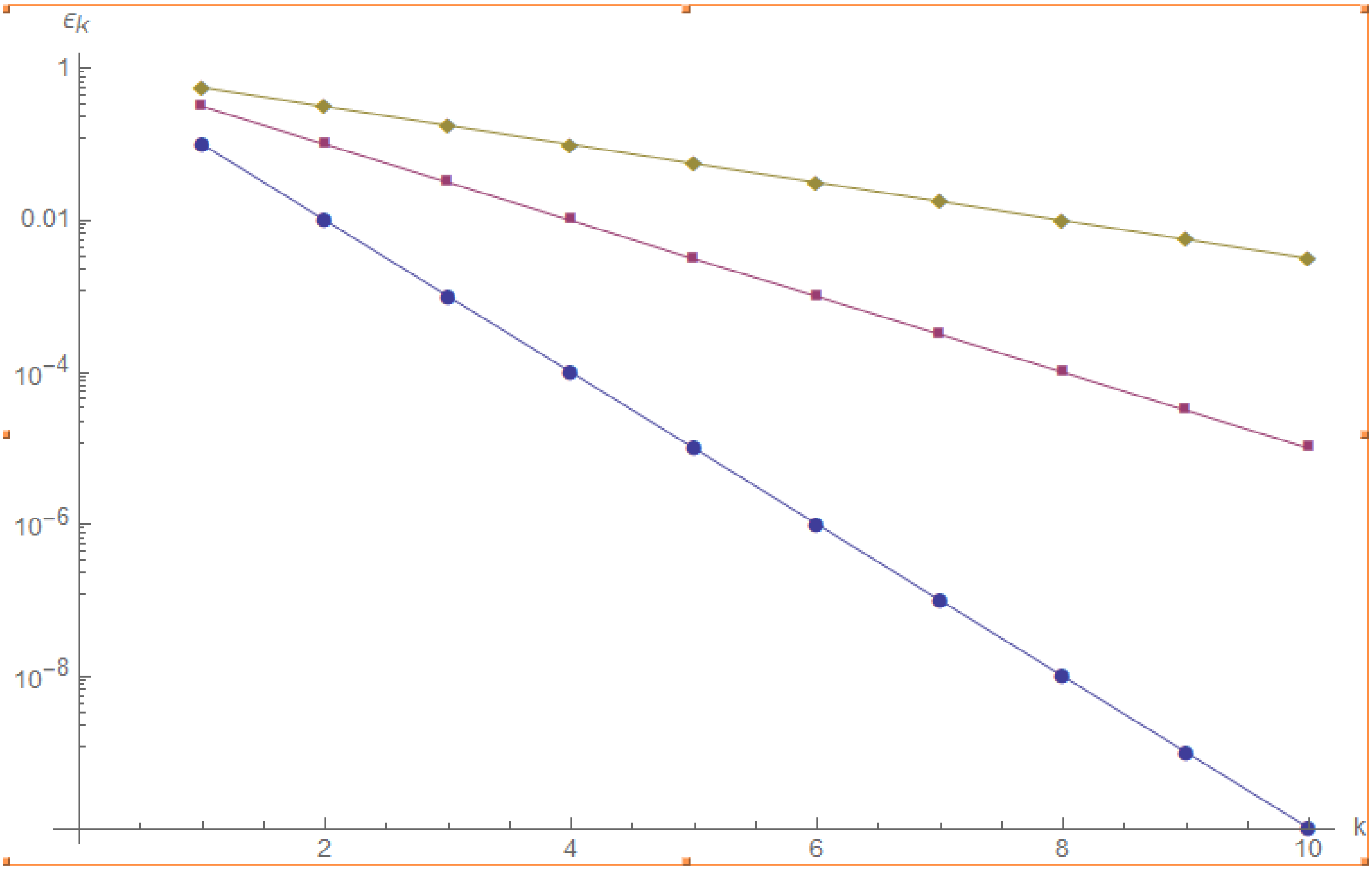
Требования к отчёту:

- Отчёт предоставляется в электронном виде.
- Рекомендуемый язык – С++. Основное требование к программам – компактность и читаемость.
- Отчёт должен содержать условие, согласно варианту, развернутые ответы на все вопросы, поставленные в задании. Внимательно читайте каждый пункт!
- В работе должны быть представлены собственные выводы проделанной работы.
- Работа оценивается по десятибалльной системе. Оценка зависит от качества выполнения работы и срока сдачи работы.
- Работа должна быть выслана по адресу cma.vorobiov@gmail.com. Необходимо прислать заархивированную папку (.zip, например), в которой будут содержаться отчёт и папка с проектом программы. При невозможности отправления заархивированной папки, рекомендуется переименовывать её на файл с расширением «.mna».

Замечание!

В каждом из вариантов требуется строить *диаграммы сходимости итерационного процесса*. Диаграмма сходимости представляет собой график, ось абсцисс которого соответствует номеру итерации k, а ось ординат — норме погрешности $||x^{k+1} - x^k||$ При этом для наглядности ось погрешностей имеет логарифмическую шкалу (по основанию 10). Ниже показано, как строятся такие диаграммы в среде *Mathematica* (копируем код в документ и нажимаем Shift+Enter).

```
errors1 = {0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 1.*^-6, 1.*^-7, 1.*^-8,
   1.*^-9, 1.*^-10};
errors2 = {0.3162, 0.1, 0.03162278, 0.01, 0.0031, 0.001, 0.000316,
   0.0001, 0.00003162, 0.00001};
errors3 = {0.5623413, 0.31622776, 0.17782, 0.1, 0.056, 0.0316, 0.01778,
   0.01, 0.005623, 0.003164};
ListLogPlot[{errors1, errors2, errors3}, PlotMarkers → Automatic,
 Joined → True, AxesLabel → {"k", "ϵk"}]
```



Задание 1 Найдите все действительные корни нелинейного уравнения $f(x) = 0$ с максимально возможной точностью ε (укажите и объясните её выбор) с помощью всех методов, указанных ниже. Необходимо предварительно отделить корни, выбрать начальное приближение, провести анализ сходимости метода. Для каждого метода укажите количество итераций, необходимое для достижения заданной точности (полученное на практике), и значение $f(x^n)$, где x^n – полученный корень. Сравните используемые методы решения нелинейных уравнений и постройте диаграмму сходимости (с легендой) для каждого из них (на одной диаграмме все методы). Объясните быструю / медленную сходимость каждого из методов.

1.1 Метод дихотомии. Сравните теоретическое и практическое (полученное) количество итераций для достижения заданной точности (обоснуйте результаты).

1.2 Метод простой итерации.

1.3 Метод Ньютона, обладающий квадратичной сходимостью.

1.4 Метод Ньютона с постоянной касательной.

1.5 Дискретный вариант метода Ньютона. На что влияет параметр h (докажите практически)?

1.6 <u>Метод секущих</u>.

Замечание! Выбор начальных значений можно выполнить, используя условие Фурье.

Нелинейные уравнения:

1. $x^{2x-1} = 40$;

2. $\cos^4 x + x^3 - 5x = 0$;

3. $\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{10}{x} = 10$;

4. $\operatorname{th} x^2 - \frac{x^2}{10} = \frac{1}{2}$;

5. $e^{\frac{1}{5}x^2} - \frac{1}{x^2} = 5$;

6. $2\sin 3x = x^2 - 4x + 3$;

7. $2\sin 3x = x^2 - 4x + 3$;
8. $e^x \sin x^2 = 3x - 1$;
9. $e^{\sin x} = x - \frac{1}{x}$;
10. $\ln(\sin^2 x + 0.5) - \frac{1}{x} = 0.6$;
11. $\sin^4 x - 3x + x^3 + 1 = 0$;
12. $\sin(x + x^4) = 5x - 7.5$.

Задание 2 Дана функция $f(x)$ отрезке $[a; b]$ задана таблица значений функции $f(x)$ с шагом h. Погрешность каждого заданного значения не превышает ε. Используя интерполирование Ньютона для начала и конца таблицы, с помощью многочленов минимальной степени построить таблицу значений функции $f(x)$ с шагом $0.5h$. Погрешность каждого нового значения также не должна превышать заданной величины ε.

В отчет включить обе таблицы значений (можно привести не все значения, например, с каким-либо периодом), а также подробное описание выбора степени интерполирующих многочленов. Постройте график зависимости погрешности найденных значений ($|\mathrm{f}(x_i) - \varphi(x_i)|$, где φ – построенная интерполяционная функция, а x_i – точки интерполирования) от номера точки интерполирования.

Задание 3 На отрезке $[a; b]$ заданы функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. На данном отрезке для указанных функций построить

- интерполяционные многочлены по 4, 8, 16 равноотстоящим узлам;
- интерполяционные многочлены по 4, 8, 16 узлам, расположенным оптимальным (минимизирующим погрешность) образом;

- интерполяционные многочлены по 4, 8, 16 равноотстоящим узлам, причём значения первых производных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в узлах интерполяции должны совпадать со значениями производных построенных многочленов;
- интерполяционные сплайны 3-его порядка по 4, 8, 16 равноотстоящим узлам;
- наилучшие среднеквадратичные приближения по 100 случайно выбранным на графиках указанных функций точкам для базиса $\varphi_i(x) = x^i, i = \overline{0, n}$ при $n = 1, 2, 4, 8$.

Для каждого пункта указать время, затраченное на построение всех указанных приближений. Для каждой функции построить

- график построенных интерполяционных многочленов (все многочлены на одном графике) вместе с графиками функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для каждой функции в отдельности;
- график построенных кубических сплайнов (все сплайны на одном графике) вместе с графиками функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для каждой функции в отдельности;
- график построенных среднеквадратичных приближений (все приближения на одном графике) вместе с графиками функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для каждой функции в отдельности.

В отчет включить представление, использованное при построении полученных приближений, а также способ выбора узлов.

Необходимые данные для 2-ого и 3-его заданий:

1. 1.2. $f(x) = x \sin x\,;\ [a; b] = [0; 2];\ h = 10^{-2};\ \varepsilon = 10^{-8}$.

1.3. $f_1(x) = \sin x\,;\ f_2(x) = \frac{1}{1+5x^2};\ [a; b] = [-3; 3]$.

2. 2.2. $f(x) = x \cos x\,;\ [a; b] = [0; 2];\ h = 10^{-2};\ \varepsilon = 10^{-6}$.

2.3.$f_1(x) = \cos x\,;\ f_2(x) = |x| - 1;\ [a; b] = [-3; 3]$.

3. 3.2. $f(x) = xe^x;\ [a; b] = [0; 2];\ h = 10^{-2};\ \varepsilon = 10^{-8}$.

3.3. $f_1(x) = \ln(x + 5)\,;\ f_2(x) = \sin|x| + 1;\ [a; b] = [-2; 2]$.

4. 4.2. $f(x) = xe^{-x};\ [a; b] = [0; 2];\ h = 10^{-1};\ \varepsilon = 10^{-10}$.

4.3. $f_1(x) = x \cos(x + 5)\,;\ f_2(x) = \frac{1}{1+25x^2};\ [a; b] = [-5; 5]$.

5. 5.2. $f(x) = x \ln(x + 2)\,;\ [a; b] = [0; 2];\ h = 10^{-1};\ \varepsilon = 10^{-10}$.

5.3. $f_1(x) = \sin(5x - 3)\,;\ f_2(x) = |2x - 3|;\ [a; b] = [-1; 5]$.

6. 6.2. $f(x) = (x + 1)2^x;\ [a; b] = [0; 2];\ h = 10^{-1};\ \varepsilon = 10^{-12}$.

6.3. $f_1(x) = e^{\sin x}$; $f_2(x) = |2\sin 2x - 1| - 1$; $[a; b] = [-3; 3]$.

7. 7.2. $f(x) = e^{-x^2}$; $[a; b] = [-2; 2]$; $h = 10^{-2}$; $\varepsilon = 10^{-8}$.

7.3. $f_1(x) = e^{\cos x}$; $f_2(x) = |5\cos 3x + 3|$; $[a; b] = [-2; 2]$.

8. 8.2. $(x) = e^{x^2}$; $[a; b] = [-1; 1]$; $h = 10^{-2}$; $\varepsilon = 10^{-8}$.

8.3. $f_1(x) = \sin\cos x$; $f_2(x) = \frac{1}{1+12x^4}$; $[a; b] = [-2; 2]$.

9. 9.2. $f(x) = \sqrt{2x+1}$; $[a; b] = [0; 2]$; $h = 10^{-2}$; $\varepsilon = 10^{-8}$.

9.3. $f_1(x) = \sin 2x \ln(x+5)$; $f_2(x) = \big||x| - 1\big|$; $[a; b] = [-2; 2]$.

10. 10.2. $f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$; $[a; b] = [1; 4]$; $h = 10^{-1}$; $\varepsilon = 10^{-12}$.

10.3. $f_1(x) = x^2 \sin 2x$; $f_2(x) = \sqrt{|x| + 4}$; $[a; b] = [-2; 2]$.

11. 11.2. $f(x) = \sqrt[4]{4x+5}$; $[a; b] = [-1; 2]$; $h = 10^{-2}$; $\varepsilon = 10^{-8}$.

11.3. $f_1(x) = \ln(x^2+1)\sin 2x$; $f_2(x) = \sqrt{2|x| + x^2}$; $[a; b] = [-2; 2]$.

12. 12.2. $f(x) = \ln(x^2+1)$; $[a; b] = [1; 3]$; $h = 10^{-1}$; $\varepsilon = 10^{-8}$.

12.3. $f_1(x) = x^3\cos(3x-1)$; $f_2(x) = |x|x| - 1|$; $[a; b] = [-2; 2]$.