

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет Санкт-Петербургская школа физико-математических и компьютерных наук
Департамент информатики

Основная профессиональная образовательная программа
«Прикладная математика и информатика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему

Новый алгоритм для задачи выполнения наибольшего количества дизъюнктов

Выполнил студент группы БПМ161, 4 курса,
Алфёров Василий Викторович

Научный руководитель:
Кандидат физико-математических наук,
доцент департамента информатики,
Близнец Иван Анатольевич

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

Аннотация	3
Введение	5
1 Обзор литературы	10
1.1 История развития области	10
1.2 Правила упрощения	12
1.3 Выводы	14
Список литературы	16

Аннотация

Задача булевой выполнимости – исторически первая задача, для которой была доказана NP-полнота. Её оптимизационная версия, задача максимальной выполнимости, состоящая в выполнении наибольшего количества дизъюнктов в булевой формуле, также является NP-полной. Несмотря на то, что в предположении гипотезы об экспоненциальном времени эти задачи не могут быть решены за субэкспоненциальное время, задача максимальной выполнимости имеет большое количество применений, и подходы к этой задаче активно изучаются. В последние годы исследования версий задачи максимальной выполнимости, параметризованных общим количеством дизъюнктов и количеством выполненных дизъюнктов, сильно продвинулись за счёт введения сильных правил упрощения, основанных на правиле резолюции, и новых техник сведения экземпляра задачи к экземпляру задачи о покрытии множества. Другой важный результат заключается в том, что задача $(n, 3)$ -MAXSAT, параметризованная количеством переменных, решается гораздо быстрее, чем в общем случае [3]. В данной работе рассматривается задача максимальной выполнимости, решаемая относительно длины формулы, то есть суммарного количества литералов во всех дизъюнктах. Несмотря на то, что некоторые новые правила оказываются полезными для такой задачи, большинство из них увеличивают длину формулы и не могут быть применены. В этой работе представлены новые правила упрощения, не увеличивающие длину формулы. Также предлагается новый параметр с пониженной стоимостью 3-переменных, использующий то, что $(n, 3)$ -MAXSAT решается гораздо быстрее, чем общий случай задачи максимальной выполнимости. Комбинация двух методов позволяет получить алгоритм, работающий за время $O^*(1.093^L)$. Это улучшает предыдущую верхнюю оценку в $O^*(1.106^L)$, полученную Банзалом и Раманом [2].

Ключевые слова: задача максимальной выполнимости, параметризованные алгоритмы, точные экспоненциальные алгоритмы

Satisfiability problem is historically the first problem that was proven to be NP-complete. Maximum Satisfiability, being its optimization version, is also NP-complete. Though under assumption of Exponential Time Hypothesis those problems cannot be solved in subexponential time, Maximum Satisfiability have many applications, so approaches to solve its instances are nevertheless heavily studied. In the last years, research for versions of Maximum Satisfiability parameterized by the total number of clauses and the number of satisfied clauses have been pushed forward by introducing powerful resolution-based reduction rules and new techniques to reduce the problem instance to a Set Cover instance. In our work, we consider Maximum Satisfiability version parameterized by the formula length (sum of number of literals in each clause). Another important recent result is $(n, 3)$ -MAXSAT problem being solved in much better time than general case when parameterized by the number of variables [3]. Though some of new reduction rules appear to be very useful in this parameterization, most of them increase the length of the formula, and hence cannot be used for solving the problem in this parameterization. In our work, we introduce new reduction rules that do not increase the formula length. Then, we decrease the parameter value to discount the 3-variables, given that $(n, 3)$ -MAXSAT can be solved in much better time than general MAXSAT. The combination of two techniques produces an algorithm with running time $O^*(1.093^{|F|})$, improving the previous bound of $O^*(1.106^{|F|})$ by Bansal and Raman [2].

Keywords: Maximum Satisfiability, Parameterized Complexity, Exact Exponential Algorithms

Введение

Актуальность задачи

Задача о максимальной выполнимости, или, сокращённо, MAXSAT, как оптимизационная версия задачи о выполнимости (сокращённо SAT), возможно, одной из самых известных NP-полных задач, имеет широкий круг применений, от анализа данных [4] до медицины [12]. При этом не только задача MAXSAT, но многие её частные случаи, такие, как $(n, 3)$ -MAXSAT, являются NP-трудными [15].

Гипотеза об экспоненциальном времени говорит, что задача 3SAT, то есть задача булевой выполнимости с дополнительным ограничением, что длина каждого дизъюнкта не более трёх, не может быть решена быстрее, чем за экспоненциальное время от количества переменных и тем более от длины входа. Как следствие, задача о максимальной выполнимости также не может быть решена за субэкспоненциальное время от длины входа, так как наличие такого алгоритма автоматически влекло бы за собой существование алгоритма для 3-SAT. Поэтому основное направление исследований в этой области – уменьшение основания экспоненты.

В последние годы активно продвинулось изучение других параметризаций той же задачи: параметризация количеством выполненных дизъюнктов [8] и общим количеством дизъюнктов [16]. Для формул с большой средней длиной дизъюнкта эти алгоритмы дают хорошее время работы. Однако если в формуле большинство дизъюнктов имеют длину 1 или 2, алгоритм относительно длины применять эффективнее. При этом стоит отметить, что задача MAX-2-SAT, где все дизъюнкты имеют длину 1 или 2, уже является NP-трудной, хотя для неё существуют специальные алгоритмы, позволяющие решать её быстрее, чем в общем случае [9]. Тем не менее, если ограничения на максимальную длину дизъюнкта нет, но средняя длина небольшая, задача эффективно решается именно алгоритмом относительно длины формулы.

Условие задачи

Задача MAXSAT формулируется следующим образом:

MAXSAT

Вход: Булева формула F в конъюнктивной нормальной форме (КНФ) и число k

Ответ: Означивание переменных, выполняющее хотя бы k дизъюнктов.

Длина формулы обозначается за L .

Как упоминалось выше, цель работы – создать алгоритм за $O^*(\alpha^L)$ при минимальном α . Алгоритм будет иметь следующую структуру:

1. Свести экземпляр задачи к экземпляру задачи $(n, 5)$ -MAXSAT.
2. Свести экземпляр задачи к экземпляру задачи $(n, 3)$ -MAXSAT.
3. Запустить на полученном экземпляре лучший известный алгоритм для $(n, 3)$ -MAXSAT [3].

Данная структура формирует представление о параметризациях, используемых на разных этапах алгоритма. На первом этапе мы решаем задачу относительно длины формулы. На втором этапе мы используем новый специально введённый нами параметр, уменьшающий стоимость 3-переменных, позволяющий использовать замечательное время работы алгоритма для $(n, 3)$ -MAXSAT. Наконец, на третьем этапе, мы используем естественную для $(n, 3)$ -MAXSAT параметризацию количеством переменных.

Ограничения работы

Алгоритм для задачи булевой выполнимости (SAT), работающий за $O^*(1.074^L)$, был представлен Гиршем в 2000 году [10]. Несмотря на то, что целью работы является подойти ближе к этой границе, едва ли удастся её преодолеть, так как существование лучшего алгоритма для

MAXSAT повлекло бы существование лучшего алгоритма для более простой задачи SAT. В частности, все худшие случаи представленного алгоритма в задаче булевой выполнимости разбирались бы тривиально.

В данной работе рассматривается лишь алгоритм относительно длины формулы, но не другие варианты параметризации задачи MAXSAT.

Определения ключевых терминов

Булевы переменные в работе обозначаются буквами x, y, z, w .

Если x — булева переменная, то выражения x и \bar{x} называются литералами. Во избежание неоднозначности литералы в работе обозначаются буквами l, k, m .

Дизъюнкт — это дизъюнкция литералов, то есть выражение вида $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \dots$. По умолчанию считается, что повторяющихся литералов в дизъюнкте нет, иначе их можно было бы сократить по правилу $l \vee l = l$. В работе дизъюнкты обозначаются буквами C, D, E .

Формула находится в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), если она является конъюнкцией дизъюнктов (то есть имеет вид $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge \bar{x}_1 \wedge \dots$).

Задача булевой выполнимости состоит в том, чтобы определить, существует ли означивание переменных, выполняющее формулу в КНФ. У неё есть вариант k -SAT с дополнительным ограничением на длину каждого дизъюнкта: она не больше k . В то время как задача 3SAT уже является NP-трудной, для задачи 2SAT известно полиномиальное решение.

Задача о максимальной выполнимости, как сформулировано выше, является оптимизационной версией этой задачи, и требует выполнения не всех, но хотя бы заданного числа дизъюнктов. У неё есть аналогичные варианты MAX- k -SAT. Кроме того, выделяют версии этой задачи (n, k) -MAXSAT, в которых каждая переменная входит в формулу не более k раз. При этом задачи MAX-2-SAT, $(n, 3)$ -MAXSAT и даже $(n, 3)$ -MAX-2-SAT уже являются NP-трудными [15]. Для задачи $(n, 2)$ -MAXSAT существует полиномиальное решение.

Переменная называется k -переменной, если она входит в формулу ровно k раз. Если про переменную известно, что она входит в формулу хотя бы k раз, она называется k^+ -переменной. Аналогично, если известно, что переменная входит в формулу не более k раз, она называется k^- -переменной. Число k -переменных в формуле обозначается за n_k .

Если переменная x входит k раз положительно (то есть как литерал x) и l раз отрицательно (как литерал \bar{x}), она называется (k, l) -переменной. Такое же обозначение вводится и для литералов. Поскольку замена переменной x на \bar{x} во всей формуле не влияет на ответ на задачу, если не указано иного, при обозначении переменных всегда считается $k \geq l$.

Алгоритм состоит из правил упрощения и правил расщепления.

Правило упрощения — полиномиальный алгоритм, преобразующий экземпляр задачи в эквивалентный ему и при этом не увеличивающий длину формулы. Такие правила применяются к формуле постоянно, пока это возможно. В правилах расщепления считается, что ни одно правило упрощения к формуле неприменимо.

Правило расщепления — полиномиальный алгоритм, преобразующий экземпляр задачи в несколько других вариантов и при этом с необходимостью уменьшающий длину формулы в каждом из них. От каждого из них алгоритм запускается рекурсивно, если хотя бы в одном из них удаётся получить положительный ответ, ответ на задачу является положительным.

Если во вариантах, произведённых правилом расщепления, длина уменьшается на a_1, \dots, a_k , то время работы алгоритма оценивается как рекуррентное соотношение

$$T(L) = T(L - a_1) + \dots + T(L - a_k)$$

Решением такого соотношения является $T(n) = O^*(\alpha^n)$, где α — единственный больший единицы корень уравнения

$$1 = \alpha^{-a_1} + \dots + \alpha^{-a_k}$$

Вектор (a_1, \dots, a_k) называется вектором расщепления, а число α – числом расщепления. Асимптотика всего алгоритма оценивается как $O^*(\alpha^L)$, где α – максимальное по всем правилам расщепления число расщепления.

Расщепление по переменной x – правило расщепления, разделяющее на случаи $x = 0$ и $x = 1$. Разумеется, такое правило исчерпывает все варианты и по ответам в каждом из вариантов можно восстановить ответ на исходную формулу.

Подформула – это подмножество дизъюнктов исходной формулы. Подформула называется замкнутой, если все переменные, литералы которых содержатся в подформуле, не имеют литералов вне этой подформулы.

Полученные результаты

Верхняя оценка на задачи максимальной выполнимости улучшена в данной работе с $O^*(1.106^L)$ до $O^*(1.093^L)$. В логарифмической шкале это даёт улучшение с $O^*(2^{0.145L})$ до $O^*(2^{0.128L})$, то есть на 11.7%.

Кроме того, в работе предложена новая параметризация для задачи MAXSAT с уменьшенной стоимостью 3-переменных. Продолжение исследований в этом направлении может помочь сдвинуть эту границу ещё дальше.

1. Обзор литературы

1.1. История развития области

Задача булевой выполнимости была исторически первой задачей, для которой была доказана NP-полнота (этот известный факт называется теоремой Кука-Левина). Задача о максимальной выполнимости, как оптимизационная версия этой задачи, автоматически является NP-полной и изучается с тех времён.

История развития точных алгоритмов для MAXSAT представлена в таблице 1.1.

Таблица 1.1: История развития алгоритмов для задачи MAXSAT

Работа	Год	Результат	Δ
Нидермайер и Россманит [14]	1999	$O^*(1.1279^L) = O^*(2^{0.1737L})$	—
Банзал и Раман [2]	1999	$O^*(1.1057^L) = O^*(2^{0.1450L})$	16.5%

Видно, что со времён работы [2] значимого улучшения не произошло. Причиной тому является недостаточное развитие смежного алгоритма для $(n, 3)$ -MAXSAT.

Как будет продемонстрировано в данном обзоре чуть ниже, простые правила упрощения позволяют убрать из формулы 1- и 2-переменные, таким образом, можно считать, что все переменные в $(n, 3)$ -MAXSAT-формуле являются 3-переменными, а длина формулы, таким образом, равняется утроенному количеству переменных. Одним из направлений исследований алгоритмов для задачи $(n, 3)$ -MAXSAT является исследование алгоритмов, экспоненциальных относительно количества переменных в формуле. В силу равенства $L = 3n$ таковой алгоритм автоматически является и алгоритмом относительно длины. История этих алгоритмов приведена в таблице .

Отметим, что для достижения заявленной нами асимптотики с помощью введённого нами параметра, необходимо существование алгоритма для $(n, 3)$ -MAXSAT, работающего не хуже, чем за время $O^*(1.194^n)$.

В свою очередь, активное развитие алгоритмов для $(n, 3)$ -MAXSAT стало возможным благодаря представленной Близнецом и Головнёвым

Таблица 1.2: История развития алгоритмов для задачи $(n, 3)$ -MAXSAT

Работа	Год	Результат
Раман, Равикумар и Рао [15]	1998	$O^*(1.732^n)$
Банзал и Раман [2]	1999	$O^*(1.3248^n)$
Куликов и Куцков [11]	2009	$O^*(1.2721^n)$
Близнец [6]	2013	$O^*(1.2600^n)$
Чэнь, Сюй и Ван [8]	2015	$O^*(1.237^n)$
Ли, Сюй, Ван и Ян [1]	2017	$O^*(1.194^n)$
Белова и Близнец [3]	2018	$O^*(1.191^n)$

[5] идеи сведения задачи к задаче о покрытии множества. Эта идея первоначально была применена к задаче о максимальной выполнимости, параметризованной ответом. История работ, связанных с этой формулировкой задачи, приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3: Развитие алгоритмов для MAXSAT относительно ответа

Работа	Год	Результат	Δ
Махаджан и Раман [13]	1999	$O^*(1.618^k) = O^*(2^{0.695k})$	—
Нидермайер и Россманит [14]	1999	$O^*(1.400^k) = O^*(2^{0.486k})$	30%
Банзал и Раман [2]	1999	$O^*(1.381^k) = O^*(2^{0.466k})$	4%
Чэнь и Кандж [7]	2004	$O^*(1.370^k) = O^*(2^{0.455k})$	2.5%
Близнец и Головнёв [5]	2012	$O^*(1.358^k) = O^*(2^{0.442k})$	2.8%
Чэнь и Сюй [8]	2015	$O^*(1.325^k) = O^*(2^{0.406k})$	8%

Отдельно хочется отметить развитие алгоритмов для задачи о максимальной выполнимости, параметризованной общим количеством дизъюнктов. Лучший результат в этой области $O^*(1.2989^m)$ был получен Сюй и др. [16] в 2019 году. В то время как эта работа также использует идею сведения к задаче о покрытии множества, там также введено большое количество новых правил упрощения. В то время как большая их часть увеличивает длину формулы (и, следовательно, не может быть применена к рассматриваемой задаче), одно из них оказывается весьма полезным. Подробнее об этом рассказано в данном обзоре ниже.

1.2. Правила упрощения

Правила упрощения – одно из самых мощных средств построения алгоритмов благодаря тому, что многие из них можно переиспользовать для разных версий одной и той же задачи. В данном разделе представлены правила упрощения из литературы, используемые в представленном в работе алгоритме.

Отметим, что, несмотря на то, что формальная постановка задачи о максимальной выполнимости подразумевает, что во входных данных содержится требуемое количество выполненных дизъюнктов k , для краткости это количество будет опускаться. Это возможно благодаря тому, что представленный алгоритм сразу строит означивание, выполняющее наибольшее возможное количество дизъюнктов, игнорируя число k до момента ответа.

Правило упрощения 1.1. *Если для переменной x оба литерала x и \bar{x} содержатся в одном дизъюнкте $x \vee \bar{x} \vee C$, то можно удалить этот дизъюнкт.*

Это правило корректно, поскольку выражение $x \vee \bar{x}$ верно при любом означивании переменных, и, следовательно, дизъюнкт $x \vee \bar{x} \vee C$ выполняется всегда. Удаление дизъюнкта не увеличивает длины формулы.

Правило является очевидным и относится больше к вопросу формального определения формулы, нежели к построению алгоритма. Так, в работе [2] это правило опускается, так как определение понятия дизъюнкта, используемое там, исключает возможность ситуации, в которой такое правило применимо.

Правило упрощения 1.2. *Пусть в формуле содержится литерал l такой, что литерал \bar{l} в формуле отсутствует. Тогда можно означить $l = 1$.*

Правило снова является очевидным: при переходе от означивания $l = 0$ к означиванию $l = 1$ ни один дизъюнкт не перестаёт быть выполненным, а хотя бы один новый дизъюнкт, напротив, становится выпол-

ненным. В силу очевидности не вполне корректно приводить ссылки на конкретную работу, где оно введено.

Правило упрощения 1.3 (Almost common clauses, [2]). Пусть для некоторой переменной x и (возможно, пустого) дизъюнкта C оба дизъюнкта $x \vee C$ и $\bar{x} \vee C$ входят в формулу. Тогда оба этих дизъюнкта можно заменить на один дизъюнкт C .

Это правило встречается в работе [2]. Вариация с пустым C была известна и ранее.

Замечание. В частности, после того, как правило 1.3 неприменимо, для каждой переменной x лишь один из литералов x и \bar{x} может входить в дизъюнкты длины 1.

Правило упрощения 1.4 (Правило резолюций). Пусть x – $(1, 1)$ -переменная, входящая в дизъюнкты $x \vee C$ и $\bar{x} \vee D$. Тогда оба этих дизъюнкта можно заменить на один дизъюнкт $C \vee D$.

Это правило имеет истоки в пропозициональной логике и было, по видимому, в каком-то виде известно ещё до формулировки задачи булевой выполнимости. В представленном виде оно верно и для задачи о максимальной выполнимости.

Замечание. После того, как правила 1.2 и 1.4 неприменимы, в формуле нет 2^- -переменных, так как все эти переменные элиминируются одним из указанных правил. В частности, задача $(n, 2)$ -MAXSAT решается за полиномиальное время.

Правило упрощения 1.5 ([14]). Пусть l – (i, j) -литерал, входящий в k дизъюнктов длины 1, причём $k \geq j$. Тогда можно назначить $l = 1$.

Мощность этого правила заключается в том, что оно ограничивает сверху количество дизъюнктов длины 1, в которое может входить переменная, и, следовательно, ограничивает снизу суммарную длину дизъюнктов, в которые переменная входит. Кроме того, это правило существенно уменьшает разбор случаев.

Правило упрощения 1.6 (Правило 9 из [16]). Пусть $i \geq 2$ и x – $(i, 1)$ -переменная, такая, что все дизъюнкты, содержащие x , содержат также один и тот же литерал l . Тогда можно убрать l из всех этих дизъюнктов и добавить его в дизъюнкт, содержащий \bar{x} . То есть $(x \vee l \vee C_1) \wedge \dots \wedge (x \vee l \vee C_i) \wedge (\bar{x} \vee D) \wedge F' \rightarrow (x \vee C_1) \wedge \dots \wedge (x \vee C_i) \wedge (\bar{x} \vee l \vee D) \wedge F'$.

Это правило даёт очень мощные ограничения на 3-переменные (каждая из которых после правила 1.2 является $(2, 1)$ -переменной), особенно в сочетании с правилом 1.3. Такое сочетание во многих случаях будет ограничивать количество литералов одной и той же 3-переменной в наборы дизъюнктов одним вхождением.

Правило упрощения 1.7. Пусть в формуле есть замкнутая подформула на не более чем пяти переменных. Тогда эту подформулу можно решить за полиномиальное время независимо от остальной части формулы.

Заметим, что замкнутые подформулы можно находить за полиномиальное время, построив граф с вершинами – переменными из формулы и рёбрами, если концы входят в один дизъюнкт, и найдя в нём компоненты связности. Также заметим, что замкнутые формулы на константном количестве переменных решаются за полиномиальное время выбором произвольной переменной и расщеплением по ней: размер дерева рекурсии получается константным и в каждой вершине выполняется полиномиальное действие.

1.3. Выводы

- Работа над задачей остановилась на работе [2] из-за отсутствия алгоритмов для задачи $(n, 3)$ -MAXSAT с достаточно хорошим временем работы. Такой алгоритм был получен в работах [1] и [3].
- Этому способствовала работа в других параметризациях задачи о максимальной выполнимости, в частности, идея о сведении к задаче о покрытии множества, высказанная в работе [5].

- Также современные правила упрощения, такие, как правило 1.6, позволяют сильно уменьшить пространство разбираемых случаев.

Список литературы

1. An improved branching algorithm for $(n, 3)$ -MaxSAT based on refined observations / W. Li [et al.] // International Conference on Combinatorial Optimization and Applications. — Springer. 2017. — P. 94–108.
2. *Bansal N., Raman V.* Upper bounds for MaxSat: Further improved // International symposium on algorithms and computation. — Springer. 1999. — P. 247–258.
3. *Belova T., Bliznets I.* Upper and Lower Bounds for Different Parameterizations of $(n, 3)$ -MAXSAT // International Conference on Combinatorial Optimization and Applications. — Springer. 2018. — P. 299–313.
4. *Berg J., Hyttinen A., Järvisalo M.* Applications of MaxSAT in data analysis // Pragmatics of SAT. — 2015.
5. *Bliznets I., Golovnev A.* A new algorithm for parameterized MAXSAT // International Symposium on Parameterized and Exact Computation. — Springer. 2012. — P. 37–48.
6. *Bliznets I. A.* A new upper bound for $(n, 3)$ -MAX-SAT // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 188, no. 1. — P. 1–6.
7. *Chen J., Kanj I. A.* Improved exact algorithms for Max-Sat // Discrete Applied Mathematics. — 2004. — Vol. 142, no. 1–3. — P. 17–27.
8. *Chen J., Xu C., Wang J.* Dealing with 4-variables by resolution: an improved MaxSAT algorithm // Workshop on Algorithms and Data Structures. — Springer. 2015. — P. 178–188.
9. *Golovnev A., Kutzkov K.* New exact algorithms for the 2-constraint satisfaction problem // Theoretical Computer Science. — 2014. — Vol. 526. — P. 18–27.
10. *Hirsch E. A.* New worst-case upper bounds for SAT // Journal of Automated Reasoning. — 2000. — Vol. 24, no. 4. — P. 397–420.

11. *Kulikov A. S., Kutskov K.* New upper bounds for the problem of maximal satisfiability // Discrete Mathematics and Applications. — 2009. — Vol. 19, no. 2. — P. 155–172.
12. *Lin P.-C. K., Khatri S. P.* Application of Max-SAT-based ATPG to optimal cancer therapy design // BMC genomics. — 2012. — Vol. 13, S6. — S5.
13. *Mahajan M., Raman V.* Parameterizing above guaranteed values: Max-Sat and MaxCut // J. Algorithms. — 1999. — Vol. 31, no. 2. — P. 335–354.
14. *Niedermeyer R., Rossmanith P.* New upper bounds for MaxSat // International Colloquium on Automata, Languages, and Programming. — Springer. 1999. — P. 575–584.
15. *Raman V., Ravikumar B., Rao S. S.* A simplified NP-complete MAX-SAT problem // Information Processing Letters. — 1998. — Vol. 65, no. 1. — P. 1–6.
16. Resolution and domination: an improved exact MaxSAT algorithm / C. Xu [et al.] // Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence. — AAAI Press. 2019. — P. 1191–1197.