Тема 7. Вариативная самостоятельная работа

Ефимова В.С. ИВТ3

17 декабря 2019 г.

1 Производная

Определение Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x0$. Производной функции $f(x)$ в точке $x0$ называется

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0), \dfrac{df(x_0)}{dx}$. Если

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f)}{\Delta x}=\infty,+\infty,-\infty,$$

то говорят, что в точке $x0$ существует бесконечная производная.

Определение Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке $x0$ называется

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f)}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$

Определение Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке $x0$ называется

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f)}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$

Определение Правосторонняя и левосторонняя производные называются односторонними производными.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней) $\exists f'(x_0)=A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0)=A, f'_(x_0)=A$.

Определение Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

2 Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом за время t. Тогда средняя скорость движения тела на интервале $[t,t+\Delta t]$ будет

$$V_{sr}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}.$$

Соответственно, мгновенная скорость движения будет равна

$$V\frac{dS}{dT}.$$

3 Вычисление производных

Производные основных элементарных функций:

1. $c' = 0$
2. $(x^a)' = \alpha^x \ln a$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{xlna}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над функциями:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

4. $(cu)' = c \cdot u'$
5. $c' = 0$