

Dva topa

Lazar Stanojević Vasilije Todorović Vukašin Radić

8. Maj 2023.

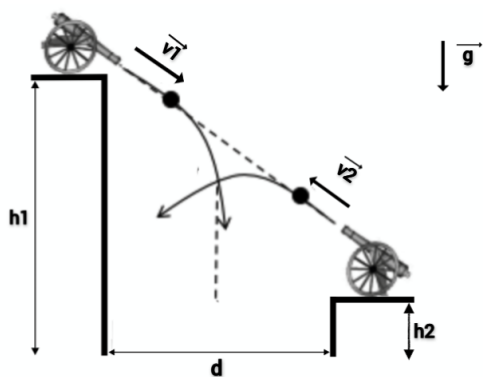
Sadržaj

1. Uvod	3
2. Modelovanje problema	4
3. Sudar	7
3.1 Sudar iznad nižeg brda	9
3.2 Grafički prikaz sudara	10
Literatura	11

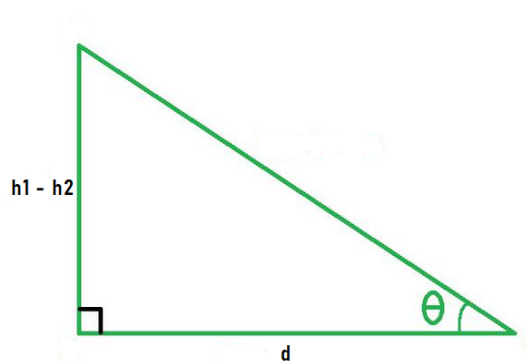
1 Uvod

Ovaj problem je dobio ime po dva topa koja se nalaze na dva različita brda. Oba brda imaju svoju visinu, dalje u tekstu h_1 i h_2 , respektivno s leva na desno. Bez umanjjenja opštosti pretpostavićemo da je levo brdo visoko bar koliko i desno brdo, tj. da je $h_1 \geq h_2$.

Brda se nalaze na rastojanju d jedno od drugog. Topovi nišane jedan prema drugom i istovremeno ispaljuju đule sa nekim početnim brzinama, moguće različitim.



Slika 1: Postavka problema.



Slika 2: Ugao ispaljivanja.

Na slici 1 se vidi početna postavka problema. Naš zadatak u daljem radu će biti da pokažemo da se đuladi moraju sudariti, bez obzira na visine i rastojanje brda, kao i početne brzine pod kojima su ispaljena.

Takođe, ispitaćemo i pod kojim uslovima će se ona sudariti na visini većoj od visine nižeg brda, i prikazati lokacije sudara za fiksirane pozicije, u zavisnosti od početnih brzina.

2 Modelovanje problema

Problem spada u klasu problema kosog hica, kombinovanog sa nekom vrstom hica naniže. Pre samog modelovanja, a u cilju preciznijeg definisanja matematičkog modela, uvešćemo određene pretpostavke koje će važiti za naš model.

1. Koordinate sa kojeg se ispaljuje prvo Ćule su $(0, h_1)$
2. Koordinate sa kojeg se ispaljuje drugo Ćule su (d, h_2)
3. Ćuladi se mogu predstaviti kao materijalne taĀke
4. U svakom trenutku t , moŹemo izraĀunati koordinate Ćuladi
5. $x_1(t)$ i $y_1(t)$ odgovaraju x i y koordinatama prvog Ćuleta, u trenutku t
6. $x_2(t)$ i $y_2(t)$ odgovaraju x i y koordinatama drugog Ćuleta, u trenutku t
7. Ceo eksperiment se odvija u vakuumu
8. JaĀina sile zemljine teŹe ne zavisi od visine, veĀ je svuda $g = 9.81\text{m/s}^2$
9. Funkcije $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$ i $y_2(t)$ su dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije
10. PoĀetne brzine kojima se Ćulad ispaljuju su v_1 i v_2 , respektivno
11. IzmeĀu topova se nalazi provalija, odnosno dno nije ograniĀeno y osom

Kako se topovi meĀusobno niŹane, uglove pod kojima Āe Ćulad biti ispaljena moŹemo direktno izraĀunati na osnovu pozicije topova. OznaĀićemo sa θ ugao pod kojim desni top niŹani levi.

Sada iz pravouglog trougla direktno sledi da je

$$\theta = \arctan\left(\frac{h_1 - h_2}{d}\right)$$

Ugao pod kojim levi top niŹani desni je $90^\circ - \theta$.

Sada imamo da je:

$$v_{x1} = v_1 \cdot \cos(\theta), \quad v_{y1} = v_1 \cdot \sin(\theta)$$

$$v_{x2} = v_2 \cdot \cos(\theta), \quad v_{y2} = v_2 \cdot \sin(\theta)$$

Na đulad deluje sila zemljine teže u negativnom smeru, koju možemo posmatrati kao negativno ubrzanje. Zbog toga imamo da je:

$$y_1''(t) = -g \quad i \quad y_2''(t) = -g$$

Integraljenjem ovih jednačina na segmentu $(0, t]$ dobijamo da je:

$$y_1'(t) = -g \cdot t + C_1, \quad i \quad y_2'(t) = -g \cdot t + C_2 \quad (1)$$

Kako je $y_1'(0) = -v_{y1}$ i $y_2'(0) = v_{y2}$, možemo odrediti konstante C_1 i C_2 . Zamenom $t = 0$ u (1) dobijamo:

$$C_1 = -v_{y1} \quad i \quad C_2 = v_{y2} \quad (2)$$

Na osnovu (1) i (2) dobijamo:

$$y_1'(t) = -g \cdot t - v_{y1} \quad i \quad y_2'(t) = -g \cdot t + v_{y2} \quad (3)$$

Ponovo možemo da integralimo ove jednačine, i time dobijamo:

$$y_1(t) = -v_{y1} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} + C_3, \quad y_2(t) = v_{y2} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} + C_4 \quad (4)$$

Kako se prvo đule na početku nalazi na visini h_1 , imamo da je $y_1(0) = h_1$ iz čega sledi $C_3 = h_1$.

Zamenom C_3 u (4) dobijamo:

$$y_1(t) = h_1 - v_{y1} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (5)$$

Kako se drugo đule na početku nalazi na visini h_2 , analogno se dobija:

$$y_2(t) = h_2 + v_{y2} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (6)$$

Na osnovu početnih uslova, imamo:

$$x_1'(0) = v_{x1} = v_1 \cdot \cos(\theta) \quad i \quad x_2'(0) = -v_{x2} = -v_2 \cdot \cos(\theta)$$

Integraljenjem dobijamo:

$$x_1(t) = v_1 \cdot \cos(\theta) \cdot t + C_5 \quad i \quad x_2(t) = -v_2 \cdot \cos(\theta) \cdot t + C_6 \quad (7)$$

Iz početnih pozicija imamo da je $x_1(0) = 0$ i $x_2(0) = d$ iz čega sledi da je $C_5 = 0$ i $C_6 = d$, zamenom $t = 0$ u (7).

Konačno dobijamo:

$$x_1(t) = v_1 \cdot \cos(\theta) \cdot t \quad i \quad x_2(t) = d - v_2 \cdot \cos(\theta) \cdot t \quad (8)$$

Kretanja đuladi matematički možemo opisati sledećim formulama:

$$x_1(t) = v_1 \cdot \cos(\theta) \cdot t, \quad y_1(t) = h_1 - v_1 \cdot \sin(\theta) \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (9)$$

$$x_2(t) = d - v_2 \cdot \cos(\theta) \cdot t, \quad y_2(t) = h_2 + v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (10)$$

$y_1(t)$ i $y_2(t)$ su dobijene zamenom $v_{y1} = v_1 \cdot \sin(\theta)$ i $v_{y2} = v_2 \cdot \sin(\theta)$ u (5) i (6), respektivno.

3 Sudar

U narednom delu želimo dokazati da će se đuladi uvek sudariti, bez obzira na parametre u modelu. Ideja je da pokažemo da se oni nikad neće mimoići, tj. da ako im se poklope x koordinate, poklopiće im se i y .

Kako bismo dobili vreme za koje će im se x koordinate poklopiti, izjednačićemo jednačine za x koordinate iz (9) i (10). Dobijamo:

$$v_1 \cdot \cos(\theta) \cdot t = d - v_2 \cdot \cos(\theta) \cdot t$$

Iz ove jednakosti izražavamo t , i dobijamo:

$$t = \frac{d}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} \quad (11)$$

Pokazaćemo da će se za dobijeno vreme t poklopiti i y koordinate. Zamenom dobijenog t u jednačine za izračunavanje y koordinata iz (9) i (10) dobijamo:

$$y_1 = h_1 - v_1 \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{d}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{\cos(\theta)^2 \cdot (v_1 + v_2)^2}$$
$$y_2 = h_2 + v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{d}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{\cos(\theta)^2 \cdot (v_1 + v_2)^2}$$

Kako iz trougla sa slike 2 imamo da je $h_1 - h_2 = \tan(\theta) \cdot d$, proširivanjem desne strane sa $v_1 + v_2$ dobijamo:

$$h_1 - h_2 = \tan(\theta) \cdot d \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 + v_2}$$

Odatle sledi da je:

$$h_1 - h_2 = v_1 \cdot \sin(\theta) \cdot d \cdot \frac{1}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} + v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot d \cdot \frac{1}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)}$$

Prebacivanjem odgovarajućih sabiraka na odgovarajuće strane iz prethodne jednakosti, dobijamo:

$$h_1 - v_1 \cdot \sin(\theta) \cdot d \cdot \frac{1}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} = h_2 + v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot d \cdot \frac{1}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)}$$

Konačno, oduzimanjem $\frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{\cos(\theta)^2 \cdot (v_1 + v_2)^2}$ od obe strane jednakosti, dobijamo $y_1 = y_2$, odnosno za dato t , i y koordinate će im biti iste.

Ovim smo pokazali da kad god se x koordinate đuladi poklope, poklopiće im se i y koordinate, odnosno da će doći do sudara. Kako se oni kreću u suportnim smerovima, a nema ničega što ih usporava ili zaustavlja po x osi, oni će se svakako u nekom momentu susresti po x koordinatama iz čega sledi da će im se sigurno poklopiti i y koordinate, na osnovu prethodno izvedenog.

3.1 Sudar iznad nižeg brda

U narednom delu želimo da ispitamo pod kojim uslovima će do sudara doći na visini koja je barem visine nižeg brda.

Kako smo pokazali da će do sudara uvek doći, sada ćemo samo zahtevati da y koordinata sudara bude veća ili jednaka h_2 i videti kada će to važiti.

Vreme za koje dolazi do sudara dobijamo isto kao i ranije, izjednačavanjem x koordinata. To vreme iznosi:

$$t = \frac{d}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)}$$

Zamenom t u bilo koju y koordinatu đuladi, dobićemo koordinatu sudara:

$$y_2 = h_2 + v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{d}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{\cos(\theta)^2 \cdot (v_1 + v_2)^2}$$

Za koordinatu y_2 važi da je veća ili jednaka od h_2 kada je:

$$v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{d}{\cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2)} - \frac{g}{2} \cdot \frac{d^2}{\cos(\theta)^2 \cdot (v_1 + v_2)^2} \geq 0$$

Svođenjem na zajednički imenilac, dobijamo:

$$(v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot d \cdot \cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2) \cdot 2 - g \cdot d^2) / (2 \cdot \cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2))^2 \geq 0$$

Kako je imenilac uvek pozitivan, imamo da će uslov važiti kada je ispunjeno da je brojilac pozitivan:

$$v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot d \cdot \cos(\theta) \cdot (v_1 + v_2) \cdot 2 - g \cdot d^2 \geq 0$$

Prebacivanjem $g \cdot d^2$ na desnu stranu nejednakosti i potom deljenjem cele nejednakosti sa d dobijamo:

$$v_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot 2 \cdot (v_1 + v_2) \geq g \cdot d$$

Sada, korišćenjem jednakosti $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \sin(2\theta)$, i deljenjem nejednakosti sa time, konačno dobijamo:

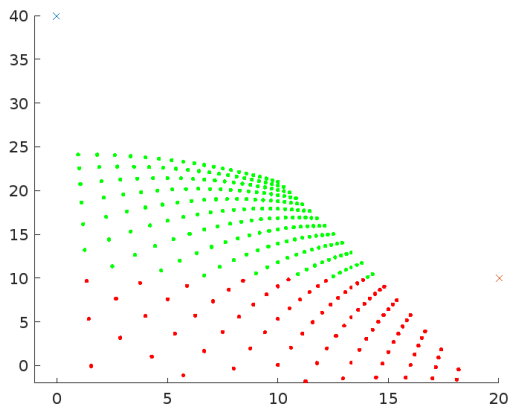
$$v_2 \cdot (v_1 + v_2) \geq \frac{g \cdot d}{\sin(2\theta)} \quad (12)$$

Ovo je uslov koji mora da važi za početne brzine ispaljivanja, kako bi do sudara došlo iznad nižeg brda.

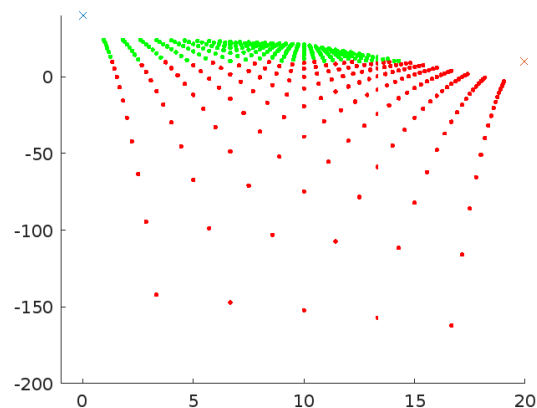
3.2 Grafički prikaz sudara

Naredne slike generisane su pomoću Matlab. Na slikama 3, 4 i 5 prikazali smo pozicije sudara đuladi, u zavisnosti od različitih početnih brzina. Skale y ose su različite, radi boljeg pregleda.

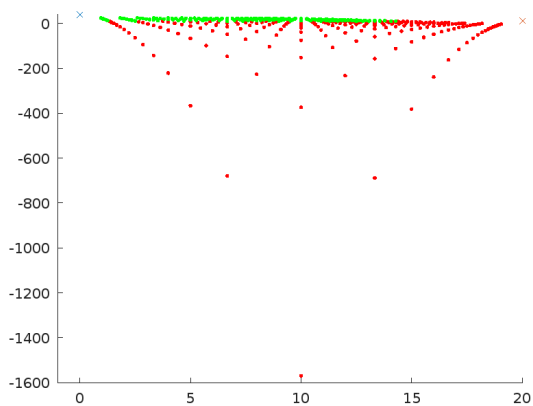
Na slici 6 prikazane su trajektorije đuladi za dve fiksirane početne brzine, kao i pozicija na kojoj će doći do sudara.



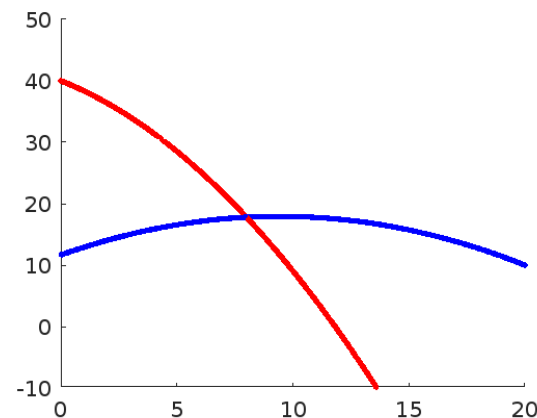
Slika 3: Grafički prikaz sudara.



Slika 4: Grafički prikaz sudara.



Slika 5: Grafički prikaz sudara.



Slika 6: Trajektorije i sudar đuladi.

4 Literatura

- [1] Milan Dražić, Matematičko modeliranje. Matematički fakultet, Beograd, 2017.
- [2] Stranica kursa Osnove matematičkog modeliranja (<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zorica.drazic/OMM2023.html>)
- [3] Osnova za sliku 1 preuzeta sa sajta bartleby.com